

GEOMETRIA DESCRITIVA BÁSICA

]

Paulo Sérgio Brunner Rabello

**Professor Adjunto da Universidade do Estado do Rio de
Janeiro**

**Ex-Professor Efetivo da Universidade Federal
Fluminense**

Ex-Professor da Universidade Santa Úrsula

Livre-Docente em Construção Civil

Especializado em Geometria e Representação Gráfica

APRESENTAÇÃO

Ao elaborar o presente trabalho nossa grande preocupação foi produzir um texto simples e abrangente o bastante para descrever com a maior clareza possível os princípios, os mecanismos e as aplicações da Geometria Descritiva.

Este livro destina-se, principalmente, aos alunos de graduação em matemática, engenharia e arquitetura, podendo ser utilizado em qualquer curso superior onde seja necessário conhecer formas e figuras geométricas através de suas projeções ou por qualquer outra pessoa que se interesse pelo assunto.

Aqui trataremos de assuntos que eram objeto de disciplina específica do antigo curso científico (posteriormente, segundo grau) que, por força da reforma do ensino de 1961, deixou de fazer parte do núcleo das disciplinas obrigatórias. Por esta razão, inicialmente são abordados os fundamentos da Geometria Euclideana sob um enfoque um pouco diferente do habitual, estabelecendo conceitos e proposições que, obedecendo rigorosamente os princípios euclidianos, tornam mais simples o seu entendimento.

As analogias feitas entre os conceitos considerados primitivos e as observações e fatos do dia-a-dia, permitem compreender em que bases a Geometria se apóia. São introduzidos, também, os conceitos de elementos impróprios que permitem esclarecer, sob outra ótica, a noção de paralelismo. É interessante observar que tal fato não altera, em essência, qualquer princípio estabelecido por Euclides.

Em seguida é explicado como se processa a projeção de uma figura numa superfície plana, procurando simplificar o entendimento do fenômeno geométrico através de comparações com projeções cinematográficas ou com as sombras produzidas pelo Sol.

A posição do centro projetivo (próprio ou impróprio) e o número de planos de projeção (um ou mais), utilizados nas projeções de uma figura determinam o sistema projetivo utilizado, que é específico para o conjunto de operações projetivas que se fizerem necessárias. A mudança de um centro projetivo ou de um plano de projeção faz com que o sistema seja outro, embora a base de ambos seja a mesma.

Métodos Projetivos, Descritivos ou de Representação Gráfica, são conjuntos de procedimentos que, utilizando um sistema projetivo específico, permite caracterizar e resolver problemas de uma figura através

de suas projeções. São mencionados como exemplos de métodos descritivos, os métodos mongeano, das projeções cotadas e o método axonométrico.

Com base em tais conhecimentos, foi possível apresentar, de uma forma geral, os procedimentos que devem ser adotados para representar as projeções de figuras geométricas do espaço, sejam elas planas ou não.

No final, são estudados os métodos auxiliares que nada mais são do que procedimentos especiais que permitem trabalhar com figuras do espaço quando alguma de suas partes (ou toda a figura) não está projetada em verdadeira grandeza. É usual denominar tais métodos de descritivos o que não faz sentido, pois o método descritivo adotado é o próprio método mongeano.

Assim sendo, longe da pretensão de ser um tratado sobre o assunto, esperamos que as pessoas que se iniciarem no estudo da Geometria Descritiva encontrem nesse trabalho uma fonte confiável de consulta e aos mais experientes no assunto, que formulem suas críticas e sugestões para que possamos oferecer, no futuro, um trabalho melhor.

Finalizando, cabe um agradecimento especial aos ilustres professores Mendel Coifman, Léa Santos de Bustamante, Norbertino Bahiense Filho, Alcyr Pinheiro Rangel e José Luiz Marques Coelho da Silva pelo imenso saber e pelo entusiasmo repassado a todos os seus alunos e admiradores que, como nós, tiveram a honra de conhecê-los e de ter tido a oportunidade de absorver o que nos foi possível de seu vasto conhecimento.

Cabo Frio, 5 de junho de 2005

ÍNDICE

PARTE 1:

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Fundamentos da Geometria Elementar

Sistemas Projetivos e Métodos de Representação Gráfica

Método da Dupla Projeção Ortogonal

PARTE 2:

PROJEÇÕES DE PONTOS E RETAS

Projeções do Ponto

Estudo Descritivo da Reta

Metodologia das Projeções da Reta

Verdadeira Grandeza de Segmentos de reta

PARTE 3:

PROJEÇÕES DE FIGURAS PLANAS

Estudo Descritivo do Plano

Estudo Descritivo das Figuras Planas

Verdadeira Grandeza de Figuras Planas

Capítulo I:

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ELEMENTAR

1 - PROPOSIÇÕES GEOMÉTRICAS

A Geometria é o ramo da Matemática que se propõe a estudar as figuras existentes na natureza através das propriedades de seus elementos, definindo, caracterizando e padronizando suas formas e dimensões, facilitando assim seu próprio desenvolvimento e o de outras áreas do conhecimento científico e tecnológico.

As figuras estudadas na Geometria são, de um modo geral, a associação de uma ou mais formas específicas, formas estas denominadas *formas geométricas*.

A Geometria, como qualquer outra ciência, fundamenta-se em observações e experiências para estabelecer os conceitos e as propriedades que embasam todo seu acervo científico. Tais conceitos e propriedades constituem as *proposições geométricas*.

Uma proposição geométrica pode ser aceita com ou sem comprovação. A proposição aceita sem comprovação pode ser entendida através de fatos e situações do cotidiano.

As proposições geométricas podem ser classificadas como *conceitos primitivos* ou como *postulados*.

Um conceito primitivo exprime a noção sobre algo que dispensa definição sob o ponto de vista geométrico. Assim sendo, são considerados primitivos os conceitos de forma e dimensão, como também o são os de ponto, reta, plano e espaço.

Forma e dimensão são conceitos que podem ser compreendidos melhor quando se fazem analogias a coisas conhecidas.

Quando se diz, por exemplo, que determinado objeto parece uma laranja, na verdade estamos dizendo que o objeto tem a "forma" de uma laranja. Quando se diz, por outro lado, que uma árvore é mais alta que outra, na verdade estamos dizendo que a altura (dimensão) de uma é maior que a (dimensão) da outra.

As noções de *ponto, reta, plano e espaço* são puramente intuitivas e, ao contrário do que ocorre com os conceitos de forma e dimensão, "emprestam" sua concepção para descrever determinadas situações. Por exemplo:

- Aqueles postes estão em linha reta.
- O tampo dessa mesa é plano.
- A mesa está ocupando o espaço do sofá.

Chama-se *postulado* a uma afirmação aceita consensualmente, sem restrições, e que dispensa demonstração. Os postulados fundamentam toda a Geometria e a simples contestação de um deles invalida qualquer proposição decorrente.

Se "três pontos não colineares determinam um plano", então pode-se afirmar que "duas retas coplanares determinam um ponto comum". A primeira proposição é um postulado e a segunda, uma proposição decorrente. Se a primeira não for verdadeira, a segunda fica prejudicada.

Teorema é uma proposição que exige comprovação, ou seja, tem que ser demonstrado.

Chama-se *corolário* a um teorema proposto como consequência.

Problema é uma proposição que exige solução, solução esta decorrente da aplicação de proposições específicas - postulados, teoremas e corolários - conforme as exigências de cada caso.

2 - ELEMENTOS GEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS

São considerados elementos geométricos fundamentais: o *ponto*, a *reta* e o *plano*.

O ponto - o mais simples dos elementos - como se pode intuir, não tem forma e nem dimensão. Entretanto, qualquer forma geométrica pode ser obtida a partir do ponto. A linha, por exemplo, pode ser definida como uma sucessão contínua de pontos. Se a distância entre dois pontos não sucessivos quaisquer dessa linha for a menor possível, então essa linha é uma reta.

A forma da reta leva a outra idéia puramente intuitiva que é a noção de *direção*. Dois pontos distintos - não coincidentes, portanto - determinam a direção da reta a qual pertencem. Por outro lado, a extensão de uma reta é ilimitada e o trecho situado entre dois pontos que podem determiná-la é um *segmento* dessa reta.

Um cordão flexível esticado entre as mãos dá uma idéia perfeita do que seja um segmento de reta (ou segmento retilíneo) e da direção da reta a qual este segmento pertence.

Três ou mais pontos são ditos colineares quando pertencem a uma mesma reta.

Três pontos não colineares determinam um plano (ou uma superfície plana). De fato, se imaginarmos três pontos distintos, não colineares sobre o tampo de uma mesa, podemos admitir que existem três retas determinadas pelos três pontos, tomados dois a dois. Fazemos então deslizar sobre essas "retas" uma régua lisa, sem empenos, que, de certa maneira, pode ser aceita como a materialização de um segmento retilíneo. Verificamos que, durante o movimento, a régua não se afasta da mesa. Esse fato nos transmite a sensação de que o tampo da mesa é, de fato, plano. Por esta simples observação podemos comprovar que um plano pode conter uma quantidade infinita de retas e que cada par de retas desse plano é suficiente para determiná-lo.

Duas ou mais retas são ditas coplanares quando pertencem a um mesmo plano.

3 - LINHA E SUPERFÍCIE

Podem, também, ser considerados primitivos os conceitos de *linha* e de *superfície*. Ainda assim, a linha pode ser definida, também, como a figura descrita por um ponto que se desloca aleatoriamente no espaço ou segundo uma determinada lei. Se, ao longo do movimento, o ponto muda de direção a cada instante, a figura descrita é definida como *curva*, isto é, a linha é uma curva. Se não houver mudança de direção, a linha é uma *reta*. Se, por outro lado, durante um movimento retilíneo, o ponto muda abruptamente de direção em espaços de tempo fixos ou intermitentes, a linha descrita é uma *poligonal*.

Ao distender um cordão flexível retesado entre as mãos tem-se uma boa noção do que seja uma curva. Se esta "curva" for deixada sobre o tampo plano de uma mesa e ficar inteiramente apoiada sobre ele, pode-se imaginar o que vem a ser uma *curva plana*.

Quando uma curva não é plana, é chamada *curva reversa*.

Superfície, por outro lado, também pode ser definida como sendo a figura descrita por uma linha que se desloca aleatoriamente no espaço. Quando a linha é uma curva reversa, qualquer que seja o movimento de que a linha esteja dotada a superfície gerada será sempre uma superfície curva. Se a linha é reta e o seu deslocamento se faz segundo uma mesma direção (movimento retilíneo), a superfície gerada será uma superfície plana.

4 - FIGURA GEOMÉTRICA

Face ao exposto até aqui, pode-se concluir que uma figura geométrica é um conjunto de formas caracterizadas por pontos, linhas e superfícies que se inter-relacionam segundo uma ou mais leis de geração.

5 - ELEMENTOS IMPRÓPRIOS

Como foi visto anteriormente, a forma geométrica da reta conduz à exata noção de direção, isto é, uma reta, ou mesmo um segmento de reta, define uma direção.

Era de uso corrente admitir-se que duas retas paralelas jamais se encontrariam e, portanto, não existiria ponto comum a ambas.

Se observarmos um longo trecho reto de uma estrada de ferro, teremos a nítida impressão de que, ao longe, os trilhos - que são paralelos - se encontram num ponto distante. Um ponto no infinito.

A idéia de elementos geométricos situados no infinito introduziu na geometria os chamados *elementos impróprios*.

O conceito hoje adotado estabelece que duas retas paralelas são concorrentes num *ponto impróprio*, definido apenas pela direção dessas retas. Por extensão, pode-se aceitar que a reta comum a dois planos paralelos é uma *reta imprópria*.

Um *plano impróprio* não pode ser definido exclusivamente por elementos próprios. É preciso que pelo menos, um dos elementos seja impróprio. Um ponto próprio e uma reta imprópria, assim como dois pontos próprios e um impróprio ou ainda duas retas impróprias, determinam planos impróprios.

6 - CONCEITOS E POSTULADOS BÁSICOS

Os elementos geométricos - o ponto, a reta e o plano - estudados isoladamente demandam um interesse científico muito restrito, uma vez que o objetivo principal da geometria é o estudo das figuras geométricas do espaço através das formas que as caracterizam.

O conceito de espaço, como foi visto, é primitivo e pode ser entendido como o meio que nos cerca, sem forma, de dimensões infinitas, onde cada figura ocupa o seu lugar.

O estudo das propriedades das figuras geométricas envolve, por conseguinte, o inter-relacionamento entre os elementos que as constituem, bem como a posição que ocupam no espaço isoladamente ou em relação à outra figura.

É importante então que os conceitos primitivos e os postulados que embasam a geometria sejam caracterizados e organizados de modo que o entendimento - e mesmo a descoberta - de outras propriedades possibilitem descortinar novas aplicações desse ramo da Matemática. Com este objetivo, a fundamentação da geometria euclideana, incluindo seus postulados básicos, podem ser agrupados em três níveis:

- Conceitos Primitivos
- Proposições Básicas
- Proposições Decorrentes

6.1. CONCEITOS PRIMITIVOS:

- forma e dimensão
- ponto, reta e plano (elementos fundamentais)
- linha e superfície
- espaço

6.2. PROPOSIÇÕES BÁSICAS

1º) Há no espaço um número infinito de pontos, retas e planos.

2º) Um ponto pertence a um número infinito de retas e a um número infinito de planos.

3º) Uma reta contém um número infinito de pontos e pertence a um número infinito de planos.

4º) Um plano contém um número infinito de pontos e um número infinito de retas.

São também consideradas postulados básicos as seguintes afirmações:

5º) Dois pontos são suficientes para determinar uma reta.

6º) Três pontos não colineares são suficientes para determinar um plano.

7º) Dois planos determinam uma reta que pertence, simultaneamente, a ambos.

8º) Três planos, que não contém uma mesma reta, determinam um ponto comum.

9º) Um plano e uma reta que não lhe pertence, determinam um ponto comum.

6.3. PROPOSIÇÕES DECORRENTES

Se uma reta define uma determinada direção, a 5ª proposição básica permite afirmar que:

1º) Duas retas distintas (portanto, não coincidentes) são paralelas quando têm a mesma direção.

Do 5ª e da 6ª proposição básica pode-se deduzir de imediato que:

2º) Uma reta e um ponto que não lhe pertence determinam um plano.

3º) Duas retas coplanares (portanto, que pertencem a um mesmo plano) determinam um ponto comum.

4º) Uma reta pertence a um plano, quando pelo menos dois de seus pontos pertencem ao plano.

Cabe esclarecer ainda, que as proposições acima enunciadas, bem como as proposições decorrentes, são verdadeiros - ou aceitos como tal - mesmo que os elementos envolvidos sejam impróprios.

A análise de cada caso há de ser cuidadosa, pois somente a inter-relação de elementos impróprios gera exclusivamente formas impróprias.

Quando, numa proposição, pelo menos um de seus elementos é impróprio, a forma gerada poderá ser, conforme o caso, própria ou imprópria.

No caso da 5ª proposição básica, por exemplo, se um dos pontos é impróprio, a reta, ainda assim, será própria. Já no caso da 8ª proposição básica, se um dos planos é impróprio, o ponto também será impróprio.

Tais esclarecimentos permitem-nos observar na 9ª proposição básica que, se o ponto determinado por um plano e uma reta que não lhe pertence for um ponto impróprio, a reta e o plano serão paralelos. Desta forma uma outra proposição decorrente pode ser enunciada:

5º) Para que uma reta seja paralela a um plano, basta que seja paralela a uma reta desse plano.

7 - ÁREAS DE ESTUDO

O estudo da Geometria se divide em duas grandes áreas de conhecimento: as *geometrias métricas* e as *geometrias de posição*.

As geometrias ditas métricas têm por objetivo determinar as dimensões das figuras geométricas estabelecendo os teoremas que irão inter-relacionar as grandezas de seus elementos.

Entre as chamadas geometrias métricas destacam-se a *Geometria Analítica* e a *Geometria Diferencial*.

As geometrias de posição tratam fundamentalmente das formas propriamente ditas das figuras geométricas, sendo por isso também conhecidas como *geometrias gráficas*.

Nesta área destaca-se a *Geometria Descritiva* (ou *Estereografia*) - e suas diversas ramificações - que estuda a forma das figuras geométricas através de suas projeções.

Se os elementos de uma figura geométrica pertencem a um mesmo plano diz-se que a figura é plana. O estudo de suas propriedades e, conseqüentemente, a resolução de seus problemas se fará, portanto, no plano da figura e, por isso, o estudo geométrico, seja métrico ou gráfico, é típico de uma *Geometria Plana*.

Quando a figura em estudo não é plana, trata-se de uma figura tridimensional, cujas propriedades serão objeto de uma *Geometria Espacial*.

Capítulo II

SISTEMAS PROJETIVOS E MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A idéia de projeção é quase que intuitiva, uma vez que sua ocorrência se dá em diversos segmentos do nosso cotidiano. Trata-se de um fenômeno físico que acontece normalmente na natureza ou que pode ser produzido artificialmente pelo homem.

Vejamos os seguintes exemplos:

1º) Ao incidirem sobre uma placa opaca, os raios solares produzem sobre a superfície de um piso claro, uma figura escura que chamamos comumente de sombra. O contorno da sombra nada mais é que a projeção do contorno da placa na superfície do piso.

2º) As imagens que vemos numa tela de cinema são as projeções dos fotogramas contidos na fita de celulóide quando sobre eles incidem os raios luminosos emitidos pela lâmpada do projetor.

O Sol, no primeiro exemplo, e a lâmpada do projetor, no segundo, são o que chamamos *centros projetivos* enquanto que os raios solares e os raios luminosos são chamados *raios projetantes*.

A placa opaca e os fotogramas da fita são as *figuras objetivas*.

O contorno da sombra assim como as imagens produzidas na tela de cinema são *figuras projetadas* em superfícies de projeção identificadas nos exemplos, respectivamente, na superfície do piso e na tela de cinema.

Quando a superfície de projeção é plana dizemos que é um *plano de projeção*.

Em linguagem matemática podemos formalizar a seguinte definição:

Projeção é o conjunto de operações geométricas que permite obter a figura formada pelos pontos de interseção dos raios projetantes que partem de um centro projetivo e incidem sobre uma figura do espaço, com uma superfície.

Um ponto da figura objetiva e outro da figura projetada são ditos *correspondentes* quando pertencem a um mesmo raio projetivo. Por conseguinte, podemos concluir que duas figuras são *correspondentes* quando todos os pontos de ambas as figuras são, respectivamente, *correspondentes*.

Nos exemplos dados, a placa opaca é correspondente a sua sombra, assim como a figura contida num fotograma é correspondente a sua imagem na tela de cinema.

2 - ELEMENTOS DE PROJEÇÃO

Seja (O) o ponto do espaço que identifica um centro projetivo e um plano de projeção.

Seja (f) a figura objetiva que se quer projetar sobre (π).

Os raios projetantes que partem de (O) incidem sobre pontos de (f) formando um feixe de raios que, na realidade, é uma figura geométrica. Tal figura é designada *figura projetante* e identificada por (f_1).

Como se pode observar na figura 1, a forma de (f_1) depende basicamente da forma de (f) e, assim sendo, podemos estabelecer as seguintes condições:

1º) Se (f) é um ponto, (f_1) será uma reta (fig.2a);

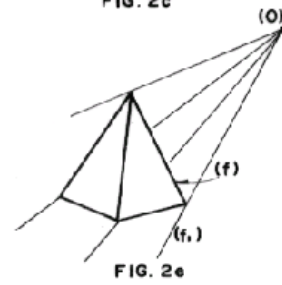
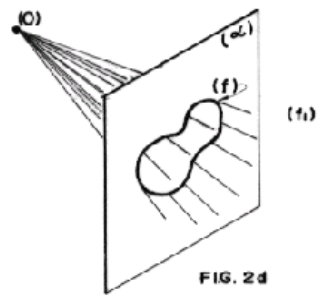
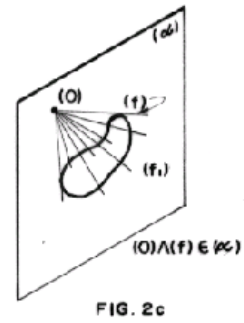
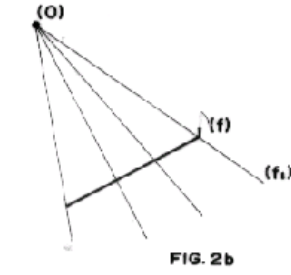
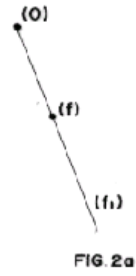
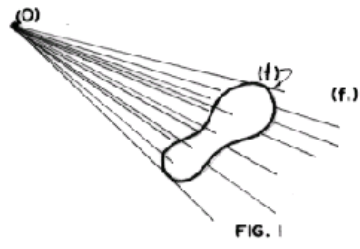
2º) Se (f) é uma reta que não contém (O), (f_1) será um feixe de retas, portanto uma figura plana (fig.2b);

3º) Se (f) for uma figura plana, dois casos podem ocorrer:

a) Se o plano que contém (f) contiver (O), (f_1) será também um feixe de retas (fig.2c);

b) Se o plano que contém (f) não contiver (O), (f_1) será uma figura tridimensional(fig.2d);

4º) Se (f) for uma figura tridimensional, (f_1) também o será (fig.2e).



Quando os raios projetantes que partem de (O) e formam (f_1) são interceptados por um plano (π) - plano de projeção - os pontos de interseção formam a figura projetada f que será, obviamente, sempre plana (fig.3a).

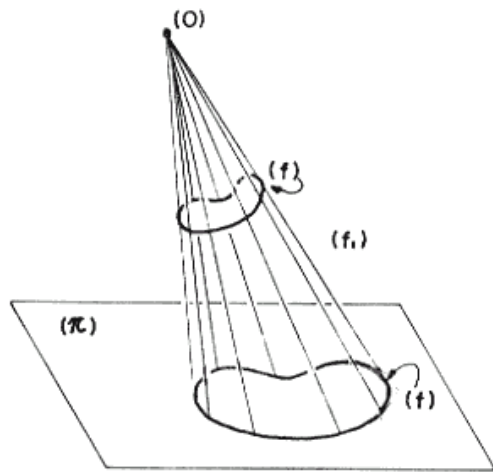


FIG. 3a

Somente no caso em que (f) seja uma reta que contenha (O) , f será reduzida a um ponto (fig.3b).

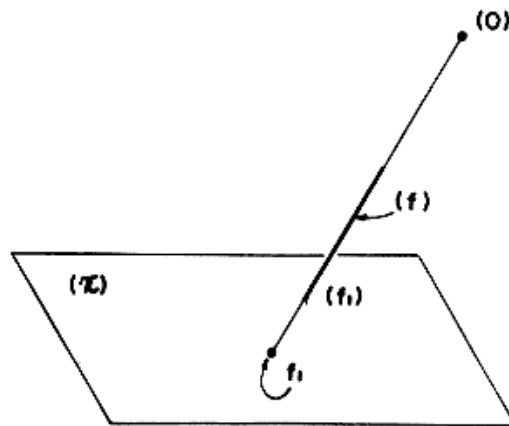


FIG. 3b

3 - OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Como complemento do que até aqui foi exposto podemos concluir que o fenômeno projetivo é o resultado de duas operações geométricas consecutivas e independentes:

1º) Projetar (f) de um ponto (O), obtendo (f_1);

2º) Cortar (f_1) por um plano, obtendo f.

A essas operações - "projetar de um ponto" e "cortar por um plano" - chamamos *operações fundamentais*.

4 - SISTEMAS PROJETIVOS

Estudar descritivamente uma figura qualquer do espaço (figura objetiva), é conhecer suas propriedades e resolver seus problemas através de uma ou mais projeções de seus elementos sobre um ou mais planos de projeção.

Por razões essencialmente práticas, os centros projetivos serão reduzidos a um ponto e as superfícies de projeção serão sempre planas.

O centro projetivo, se próprio ou impróprio, bem como a posição do plano de projeção deverão ser escolhidos em função de (f) que possibilite o estudo completo da figura através das projeções de seus elementos.

Nas aplicações práticas, um centro projetivo estará relacionado a somente um plano de projeção, o que não constitui regra. Não é comum projetar uma figura de um mesmo centro projetivo em mais de um plano de projeção, como também não é usual projetar uma figura num plano de projeção utilizando mais de um centro projetivo.

Há casos em que a utilização de apenas um conjunto centro projetivo - plano de projeção é suficiente para se resolver qualquer problema relativo à figura objetiva. Outros há, todavia, em que é imperativa a utilização de, pelo menos, dois desses conjuntos.

A definição do número de planos de projeção, da posição relativa entre eles, bem como a determinação de cada centro projetivo em função dos planos de projeção, caracterizam um sistema projetivo.

5 - CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS PROJETIVOS

Os sistemas projetivos são caracterizados sob os seguintes aspectos:

a) Posição do centro projetivo em relação ao plano de projeção;

b) Quantidade de planos de projeção.

Quanto à posição do centro projetivo, o sistema projetivo pode ser caracterizado por utilizar *projeções cônicas* ou por *projeções cilíndricas*.

A **projeção é cônica** quando o **centro projetivo é um ponto próprio** (fig. 4a)

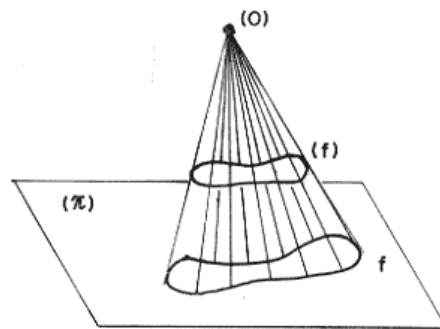


FIG. 4a

A **projeção é cilíndrica** quando o **centro projetivo é um ponto impróprio** (fig. 4b).

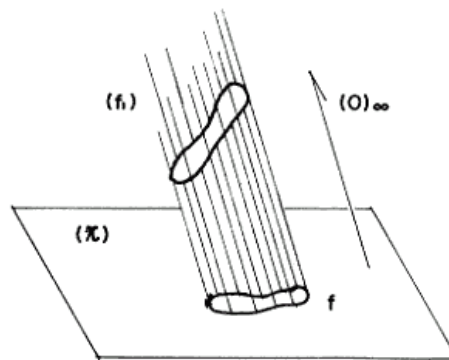


FIG. 4b

Num sistema de projeções cilíndricas, ou simplesmente, nas projeções cilíndricas, os raios projetantes são paralelos e, por essa razão, usamos com frequência a expressão *projeções paralelas*.

As projeções cilíndricas (ou paralelas) podem ser ainda ortogonais ou oblíquas, conforme sejam os raios projetantes, perpendiculares ou oblíquos aos planos de projeção. Usualmente tais projeções são denominadas simplesmente *projeções ortogonais* e *projeções oblíquas*, respectivamente.

Quanto ao número de planos de projeção utilizados, os sistemas projetivos podem admitir um, dois, três ou mais planos de projeção, conforme sejam necessários.

A *Geometria Descritiva* clássica, idealizada por Gaspar Monge, utiliza dois planos de projeção perpendiculares entre si. Já o Desenho Técnico pode lançar mão de até seis planos de projeção, como se a figura objetiva se situasse no interior de um cubo. Em ambos os sistemas são adotadas projeções ortogonais.

6 - CONVENÇÕES ADOTADAS

Objetivando identificar com clareza os elementos que formam as figuras (f), (f₁) e f, serão adotadas as seguintes convenções para representá-las:

Ponto: letra latina maiúscula ou algarismo arábico;

Reta e Linha: letra latina minúscula;

Plano e Superfície: letra grega minúscula.

Os elementos objetivos terão sua representação característica envolvida por parênteses.

Exemplos:

(P): ponto objetivo

(r): reta objetiva

(α): plano objetivo

(AB): segmento retilíneo que liga os pontos (A) e (B) ou reta que passa pelos pontos (A) e (B)

r: projeção da reta (r) num plano (π)

AB: projeção do segmento (AB) num plano (π) ou projeção da reta que passa pelos pontos (A) e (B) no plano (π)

7. MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Método projetivo ou de representação gráfica é o conjunto de procedimentos que, utilizando um determinado sistema projetivo, possibilita a resolução de problemas de uma figura objetiva através das projeções de seus elementos e a representação da figura projetada correspondente.

A Geometria Descritiva clássica, como vimos, utiliza dois planos de projeção perpendiculares entre si e adota projeções ortogonais. O método desenvolvido por Monge, chamado método mongeano ou da dupla projeção ortogonal, consiste em fazer com que, após as operações projetivas, um dos planos de projeção gire em torno da reta comum a ambos, até que as figuras projetadas se situem num mesmo plano. Desse modo todos os problemas podem ser resolvidos com recursos da Geometria Plana.

O *Desenho Técnico* utiliza o método das projeções ortográficas, que, em essência, é absolutamente igual ao método mongeano.

O *Método das Projeções Cotadas*, por outro lado, utiliza um só plano de projeção e também adota o sistema de projeções ortogonais. O método permite resolver problemas com auxílio de expressões algébricas e adapta às suas necessidades alguns procedimentos do método mongeano, uma vez que a distância de cada elemento da figura objetiva ao plano de projeção é indicada numericamente.

O *Método Axonométrico*, também chamado *Perspectiva Axonométrica* ou simplesmente *Axonometria*, utiliza também um só plano de projeção, porém trabalha separadamente com projeções cônicas, ortogonais ou oblíquas, dando origem as axonometrias cônicas, ortogonais e paralelas.

O método consiste em associar a figura objetiva às arestas de um triedro triângulo de posição previamente conhecida em relação ao plano de projeção. Em seguida projeta-se todo o conjunto de modo que a representação da figura projetada seja feita através do rebatimento de cada face do triedro no plano de projeção, graduando-se convenientemente suas arestas que, rebatidas, tornam-se eixos axonométricos.

A *Homologia Plana* é um ramo das geometrias de posição que utiliza os elementos projetivos para estabelecer sua base científica. Não é propriamente um método de representação gráfica, mas uma excelente ferramenta para as aplicações práticas da perspectiva cônica.

A *Perspectiva Linear Cônica* é um método de representação gráfica por excelência que procura mostrar as figuras como elas se apresentam aos olhos de um observador. Esse método utiliza um só plano de projeção e faz do observador o centro projetivo.

Capítulo III

MÉTODO DA DUPLA PROJEÇÃO ORTOGONAL

1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O método da dupla projeção ortogonal foi obra da genialidade de Gaspar Monge, célebre matemático francês, no final do século XVII e, por isso, é também conhecido como *método mongeano*.

O método utiliza dois planos de projeção perpendiculares entre si onde um deles admite-se como sendo horizontal e o outro, naturalmente, vertical.

Cada um dos planos de projeção está associado a um centro projetivo impróprio caracterizando, assim, um duplo sistema de projeções cilíndricas.

O método prevê ainda que os raios projetantes que partem de cada centro projetivo são perpendiculares aos respectivos planos de projeção, o que significa dizer que as projeções, além de cilíndricas, são ortogonais (figs. 5-a e 5-b).

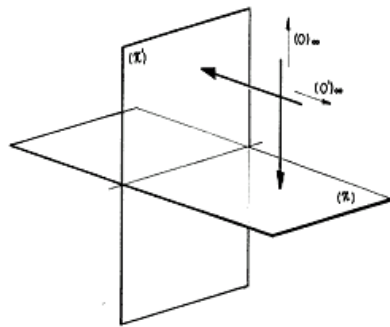


FIG. 5a

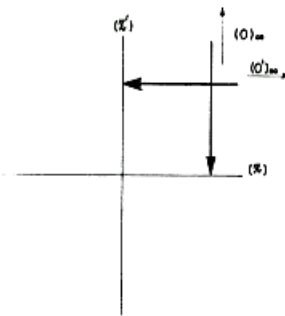


FIG. 5b

O *plano horizontal de projeção* (PHP) é, por convenção, identificado como plano (π). O outro plano, por conseguinte, é o *plano vertical de projeção* (PVP), identificado como plano (π').

A interseção entre o PHP e o PVP é a *linha de terra* do sistema.

2 – ESPAÇOS PROJETIVOS

O plano horizontal de projeção (PHP) – plano (π) – divide o espaço em dois semi-espacos: um acima e outro abaixo da sua superfície. Por esta razão o plano vertical de projeção (PVP) – plano (π') – fica dividido em dois semi-planos,

genericamente chamados plano vertical superior (PVS) e plano vertical inferior (PVI), respectivamente.

O plano vertical de projeção (π') também divide o espaço em dois semi-espacos: um à frente e outro atrás da sua superfície. O plano horizontal de projeção (π), por isso, também fica dividido em dois semi-planos, genericamente chamados plano horizontal anterior (PHA) e plano horizontal posterior (PHP), respectivamente (fig.6).

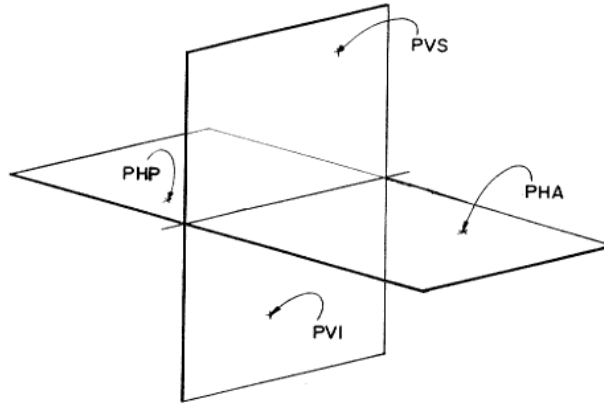


FIG. 6

Na realidade, os planos de projeção utilizados neste método, ou seja, (π) e (π'), em conjunto, dividem o espaço em quatro regiões distintas e limitadas pelos quatro *diedros* que são formados (fig.7).

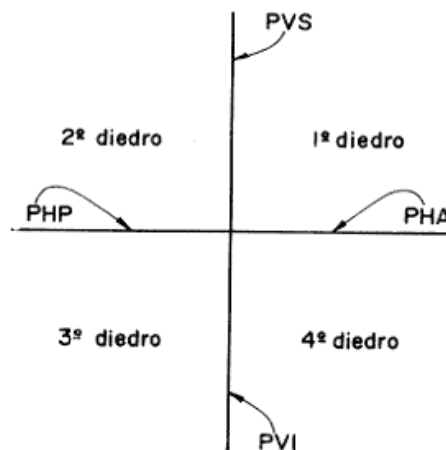


FIG. 7.

1º diedro: região limitada pelo plano vertical superior (PVS) e pelo plano horizontal anterior (PVA).

2º diedro: região limitada pelo plano vertical superior (PVS) e pelo plano horizontal posterior (PHP).

3º diedro: região limitada pelo plano vertical inferior (PVI) e pelo plano horizontal posterior (PHP).

4º diedro: região limitada pelo plano vertical inferior (PVI) e pelo plano horizontal anterior (PHA).

3 – NOTAÇÃO CONVENCIONADA ESPECIFICAMENTE PARA O MÉTODO

Objetivando obedecer aos critérios convencionados para as projeções em geral, no método da dupla projeção ortogonal estabeleceram-se as seguintes notações:

ELEMENTO	CONVENÇÃO ADOTADA	EXEMPLOS		
		objetivo	projeções horizontal	vertical
Ponto	letra latina maiúscula (1)	(P)	P	P'
Linha(reta ou curva)	letra latina minúscula	(r)	r	r'
PHP	letra grega π minúscula	(π)	π	-
PVP	letra grega π minúscula, com tarja	(π')	-	π'
Linha de terra	duas letras π , uma com tarja	($\pi\pi'$)	(2)	(2)
Planos/superfícies	letra grega minúscula	(α)	α (3)	α' (3)
Interseções:				
Entre planos/superfícies	letra latina minúscula	(i)	i	i'
Com planos de projeção	letras que identificam cada um	($\alpha\pi$),($\alpha\pi'$)	$\alpha\pi$	$\alpha\pi'$

Notas:

- (1) Pontos de interseção costumam ser representados, também, por algarismos arábicos;
- (2) A linha de terra costuma ser representada, na épura, por $\pi\pi'$, numa de suas extremidades, ou por dois pequenos traços, um em cada extremidade; planos e superfícies, na épura, são normalmente representados pelas projeções de suas interseções com os planos de projeção.

4 – OPERAÇÕES PROJETIVAS NO ESPAÇO

Considerando que qualquer figura geométrica, plana ou tridimensional, é, em princípio, um conjunto de pontos, podemos depreender que as operações que se fizerem necessárias para obter as projeções de uma figura são, na verdade, o conjunto das operações necessárias para obter as projeções de cada um dos pontos que definem essa figura.

Cabe esclarecer também que, independente da localização da figura num sistema projetivo (1º, 2º, 3º ou 4º diedro), os centros projetivos e o observador mantêm sempre a mesma posição em relação ao conjunto, ou seja:

1º) O centro projetivo $(O)_{\infty}$ está no semi-espaço acima do plano horizontal de projeção (π) ;

2º) O centro projetivo $(O')_{\infty}$ está localizado no semi-espaço anterior ao plano vertical de projeção (π') ;

3º) O observador está situado no semi-espaço anterior ao plano vertical de projeção, na altura da linha de terra.

Assim sendo, para que as projeções sejam vistas pelo observador, os planos de projeção são supostos transparentes.

Para entender como funciona o método, vamos imaginar um ponto (P) , genérico do espaço, situado, por exemplo, no 1º diedro (fig.8a).

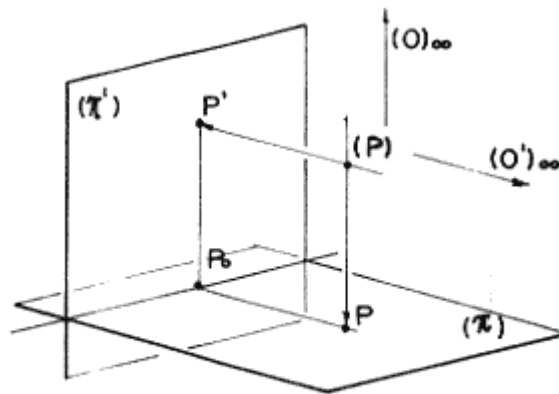


FIG. 8a

A distância de (P) ao plano (π) é chamada *afastamento de (P)* e pode ser medida pelo segmento PP_0 , ou seja, pela distância da projeção horizontal de (P) à linha de terra.

1.4 - PLANIFICAÇÃO DO SISTEMA: A ÉPURA

Compreendidos os fatos como ocorreram no espaço, o passo seguinte é trabalhar com as projeções de (P) num mesmo plano: o plano desta página, por exemplo.

Tomamos então a linha de terra como eixo de rotação e fazemos o plano horizontal (π) girar em torno dela no sentido horário até que a superfície de (π) coincida com a superfície de (π') (figs.9a e 9b).

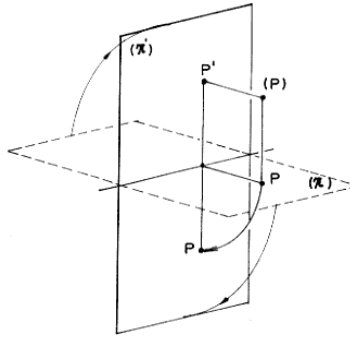


FIG. 9a

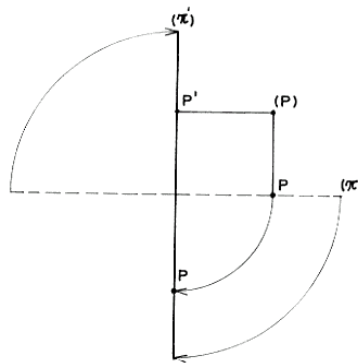


FIG. 9b

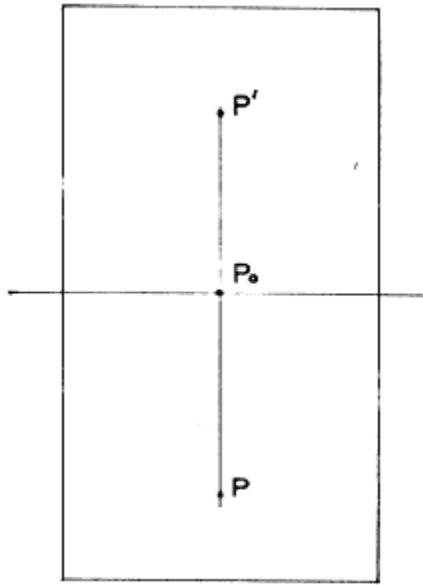


FIG. 10a

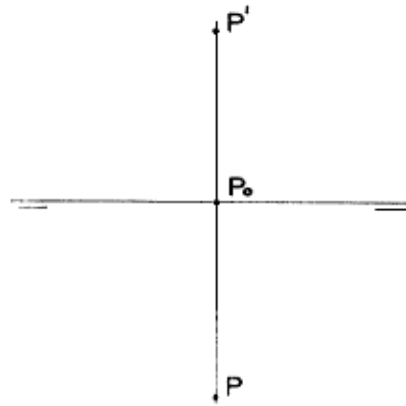


FIG. 10b

Na *épura* são representados exclusivamente as projeções que definem uma determinada figura, excluindo-se qualquer referência aos elementos desta figura no espaço (elementos objetivos).

2) O segmento que liga P' a P é denominado *linha de chamada* e é, como pode ser percebido, perpendicular à linha de terra.

3) A linha de terra, em *épura*, pode ser indicada por $\pi\pi'$ ou LT em uma de suas extremidades, pelas letras x e y , uma em cada extremidade, ou - como é mais comum - por dois pequenos traços, conforme mostrado na figura 10b.

4) O ponto P_0 será indicado somente quando necessário.

Na *épura*, a cota do ponto (P) é medida diretamente pela distância de P' à LT. De forma análoga, o afastamento de (P) é medido pela distância de P à LT.

1.5 - CONVENÇÃO DE SINAIS

Um ponto pode estar localizado em qualquer dos quatro diedros. Para sabermos exatamente em qual, foram estabelecidas convenções de sinais para cotas e afastamentos que permitem resolver esse problema. Assim sendo, foi estabelecido que:

- São positivas as cotas dos pontos localizados acima do plano vertical de projeção e negativas as cotas dos pontos localizados abaixo;
- São positivos os afastamentos dos pontos anteriores ao plano vertical de projeção e negativos os afastamentos dos pontos posteriores.

Resumindo, teremos:

	1º diedro	2º diedro	3º diedro	4º diedro
cota	+	+	-	-
afastamento	+	-	-	+

7 – COORDENADAS DESCRITIVAS DO PONTO

O conhecimento da cota e do afastamento de um ponto determinam com precisão as distâncias do ponto aos planos de projeção (π) e (π').

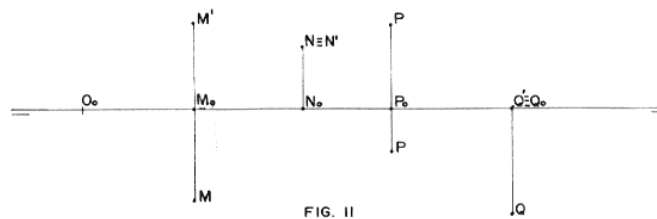
Se, numa mesma época, for necessário representar as projeções de vários pontos ou de pontos distintos que tenham afastamentos e/ou cotas iguais e de mesmo sinal, torna-se importante conhecer a posição relativa entre eles no espaço.

A posição de cada ponto fica facilmente determinada pela distância da linha de chamada de cada um dos pontos a um ponto fixo da linha de terra.

Tal distância é chamada abscissa do ponto e pode ser positiva ou negativa conforme a linha de chamada esteja à direita ou à esquerda desse ponto fixo da linha de terra que é definido como origem das abcissas, designada por O_0 .

Normalmente são usadas apenas abcissas positivas.

Na figura 11, são mostradas as épuras dos pontos (M), (N), (P) e (Q), utilizando uma mesma linha de terra.



Teremos, então:

$d(O_o, M_o)$: abscissa de (M)

$d(O_o, N_o)$: abscissa de (N)

$d(O_o, P_o)$: abscissa de (P)

$d(O_o, Q_o)$: abscissa de (Q)

Como a abscissa, o afastamento e a cota medem distâncias, são dimensões representadas por números reais e designadas, nessa ordem, as coordenadas descritivas do ponto. Assim sendo, um ponto genérico (P), do espaço, fica perfeitamente caracterizado quando se conhecem suas coordenadas descritivas (figs. 12-a e b).

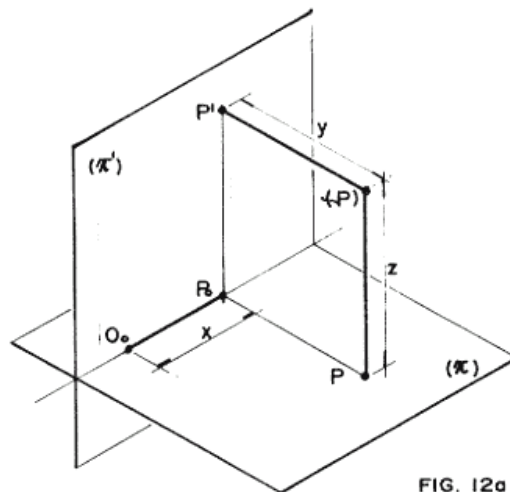


FIG. 12a

A representação é feita da seguinte forma:

(P): (x; y; z), onde:

(P): ponto objetivo

x : abscissa de (P), $d(O_o, P_o)$

y : afastamento de (P), $d(P, P_o)$

Capítulo IV

PROJEÇÕES DO PONTO

1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

O exemplo dado para descrever as projeções de um ponto utilizando o método da dupla projeção ortogonal pressupõe um ponto (P), genérico, situado no 1º diedro. No caso em tela, a cota do ponto, representada pela distância da projeção vertical P' à linha de terra ficou acima deste referencial, ao passo que o afastamento ficou abaixo.

Fica então estabelecido que, quando a cota de um ponto é positiva, sua projeção vertical se situa acima da linha de terra e, quando negativa, abaixo. Da mesma forma, quando o afastamento de um ponto é positivo, sua projeção horizontal se situa abaixo da linha de terra e, quando negativo, acima.

Como veremos adiante, tal dedução se confirma e podemos resumir tais condições da seguinte forma:

	Acima da LT	Abaixo da LT
cota	+	-
afastamento	-	+

2 – PROJEÇÕES DE PONTOS NOS DEMAIS DIEDROS

2.1 - PONTOS NO 2º DIEDRO

Quando um ponto (P) está situado no 2º diedro, sua projeção horizontal P está sobre plano horizontal posterior (PHP) e a projeção vertical, P' sobre o plano vertical superior (PVS).

Quando o plano (π) gira em torno da linha da terra no sentido horário até coincidir com (π'), percebe-se que, tanto a projeção horizontal P, quanto a projeção vertical P', situam-se acima da linha de terra (figs.13-a e b).

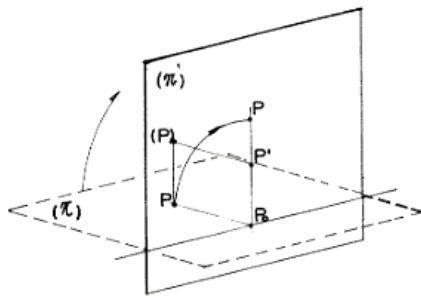


FIG. 13a

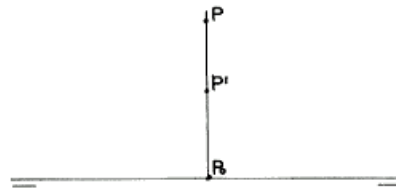


FIG. 13b

As projeções dos pontos localizados na porção de espaço correspondente a este diedro, como se pode perceber, situam-se, em épura, todas acima da linha de terra. Figuras complexas, como polígonos, poliedros e superfícies em geral poderão ficar com as projeções horizontais e verticais de seus elementos misturadas de tal forma que será extremamente difícil o seu entendimento. Por esta razão, as projeções neste diedro devem ser evitadas.

2.2 - PONTOS NO 3º DIEDRO

Quando um ponto (P) está situado no 3º diedro, sua projeção horizontal P está sobre o plano horizontal posterior (PHP) e a projeção vertical, sobre o plano vertical inferior (PVI).

Quando o plano (π) gira em torno da linha de terra no sentido horário até coincidir com (π'), a projeção horizontal P fica acima da linha de terra, enquanto a projeção vertical, P', fica abaixo dela (figs.14-a e b).

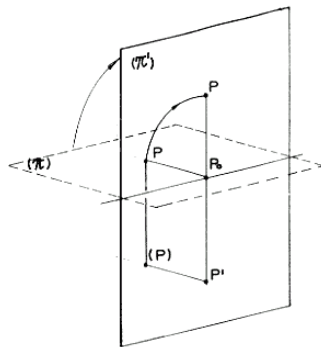


FIG. 14a

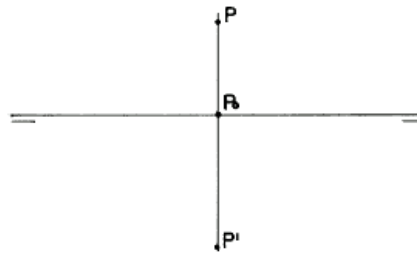
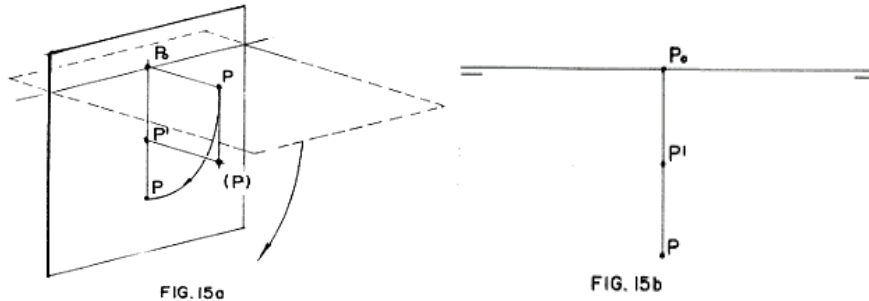


FIG. 14b

2.3 - PONTOS NO 4º DIEDRO

Quando um ponto (P) está situado no 4º diedro, sua projeção horizontal P está sobre o plano horizontal anterior (PHA) e a projeção vertical, P', sobre o plano vertical inferior (PVI).

Quando o plano (π) gira em torno da linha de terra no sentido horário, até coincidir com (π'), percebe-se que, tanto a projeção horizontal P, quanto a projeção vertical P', situam-se abaixo da linha de terra (figs. 15-a e b).



Tal como foi observado no estudo do 2º diedro, as projeções dos pontos localizados neste diedro situar-se-ão, em épura, abaixo da linha de terra, o que pode misturar as projeções dos elementos de uma figura mais complexa, tornando extremamente complicado o seu entendimento. Por isso, projeções no 4º diedro devem, também, ser evitadas.

3 – PONTOS EM POSIÇÕES ESPECIAIS

3.1 - PONTOS NO PLANO (π)

Quando um ponto pertence ao plano (π), em qualquer circunstância, sua cota é nula, uma vez que a distância de (P) ao plano (π), que mede a sua cota, é nula.

Se o ponto está no semi-espço anterior a (π'), seu afastamento é positivo (fig. 16-a).

No semi-espço posterior a (π'), o afastamento do ponto é negativo (fig. 16-b).



1.6 - PONTOS NO PLANO (π')

Quando um ponto pertence ao plano (π'), em qualquer circunstância, seu afastamento é nulo, uma vez que a distância de (P) ao plano (π'), que mede o seu afastamento, é nula.

Se o ponto está no semi-espço superior a (π), sua cota é positiva (fig. 17a).

No semi-espço inferior a (π), a cota do ponto é negativa (fig. 17b).

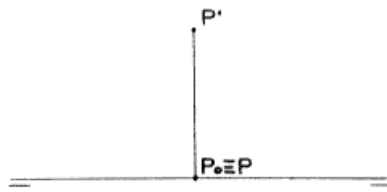


FIG. 17a

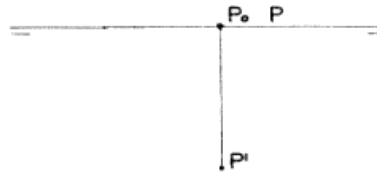


FIG. 17b

1.7 - PONTOS NA LINHA DE TERRA

Quando um ponto pertence à linha de terra, tanto sua cota quanto seu afastamento são nulos, uma vez que são nulas suas distâncias aos planos de projeção, (π) e (π').

Em é pura, suas projeções são coincidentes e situam-se sobre a própria linha de terra (fig. 18).

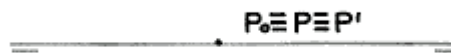


FIG. 18

Capítulo V

ESTUDO DESCRITIVO DA RETA

1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os princípios básicos da Geometria estabelecem que:

- 1) Uma reta é constituída de infinitos pontos
- 2) Dois pontos são suficientes para determinar uma reta

A primeira das proposições acima permite-nos concluir que a projeção de uma reta nada mais é do que a projeção dos seus infinitos pontos. Pelo que estabelece a segunda proposição, se dois pontos são suficientes para determinar uma reta, suas projeções determinam as projeções desta reta (figs 19 a, b, c e d).

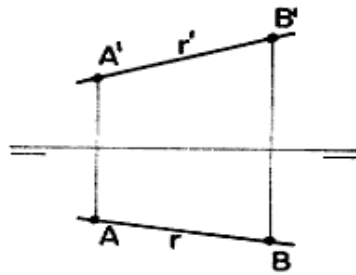


FIG.19a

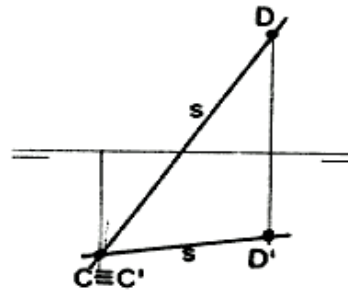


FIG.19b

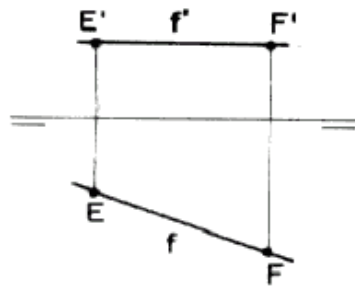


FIG.19c

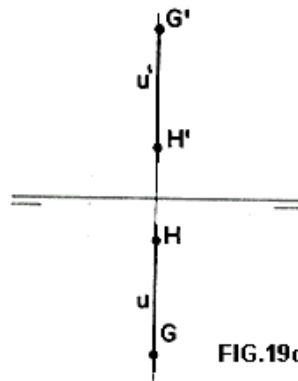


FIG.19d

Assim, podemos afirmar que:

As projeções de qualquer segmento pertencente a uma reta ficam perfeitamente determinados quando são conhecidas as projeções dos seus pontos extremos.

2 – PERTINÊNCIA DE PONTO À RETA

Em vista do exposto até aqui, podemos afirmar que, se um ponto pertence a uma reta, sua projeção pertence à projeção da reta.

E ainda:

No método da dupla projeção ortogonal, quando um ponto pertence a uma reta, as projeções do ponto estão situadas sobre as projeções de mesmo nome da reta. Em outras palavras: a projeção vertical do ponto pertencerá à projeção vertical da reta e a projeção horizontal do ponto, à projeção horizontal da reta (figs. 20a e 20b).

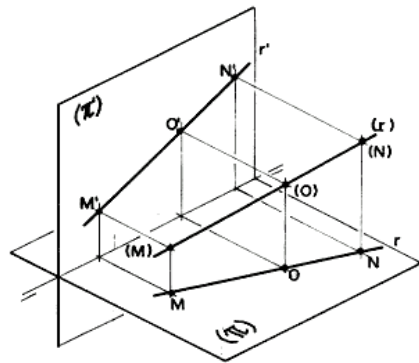


FIG.20a

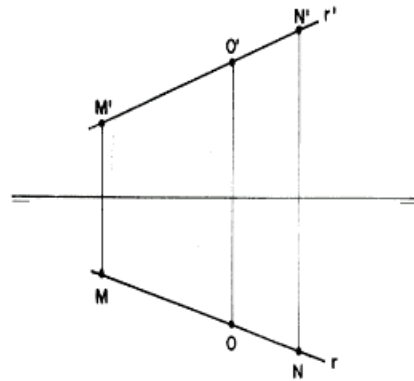


FIG.20b

3 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

De acordo, também, com os princípios básicos da Geometria, podemos dizer que duas retas quaisquer do espaço podem possuir - ou não - um ponto comum.

Quando duas ou mais retas possuem um ponto comum são caracterizadas como *retas concorrentes*.

Neste caso, o ponto comum pode ser próprio ou impróprio.

Retas concorrentes num ponto próprio são denominadas, simplesmente, *retas concorrentes*.

Quando as retas são concorrentes num ponto impróprio são caracterizadas como *retas paralelas*.

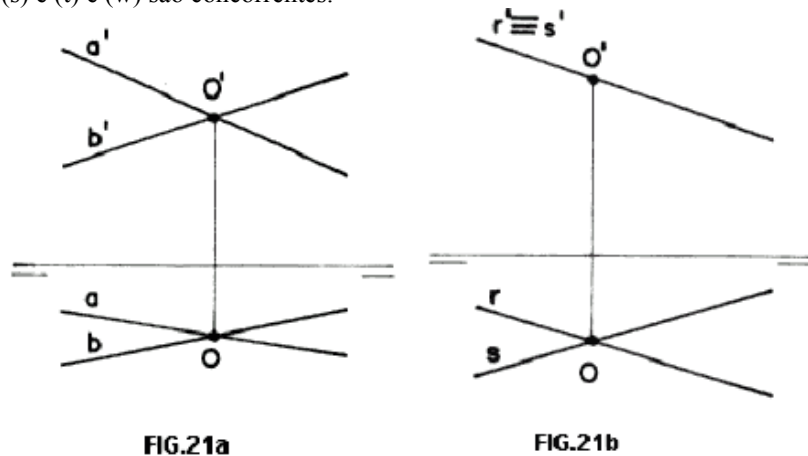
Se as retas não possuem ponto comum são caracterizadas como *retas reversas (ou revessas)*.

3.1 – RETAS CONCORRENTES

Vimos que, para que um ponto pertença a uma reta, basta que as projeções do ponto pertençam às projeções de mesmo nome da reta.

Obviamente, se duas retas são concorrentes, o ponto de concorrência (ou de concurso) deverá ser comum às duas retas em questão, ou seja, as projeções do ponto deverão pertencer, simultaneamente, às projeções de mesmo nome da reta. Assim sendo, os pontos de concurso de ambas as projeções das retas deverão estar numa mesma linha de chamada.

Nas épuras das figuras 21a,b e c, as retas representadas pelos pares (a) e (b), (r) e (s) e (t) e (w) são concorrentes.



Na fig.21d, os pontos de concurso de (v) e (u) não estão numa mesma linha de chamada, o que significa dizer que (v) e (u) são retas reversas.

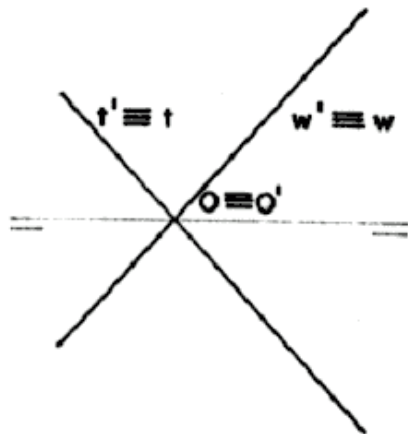


FIG.21c

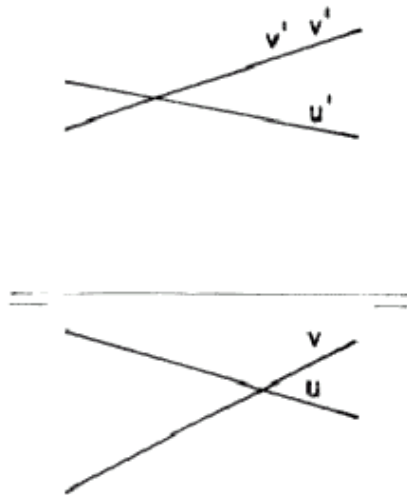


FIG.21d

3.2 - RETAS PARALELAS

Quando duas - ou mais - retas são ditas paralelas, o ponto de concurso entre ambas é necessariamente impróprio. Isto significa dizer que tais retas têm a mesma direção.

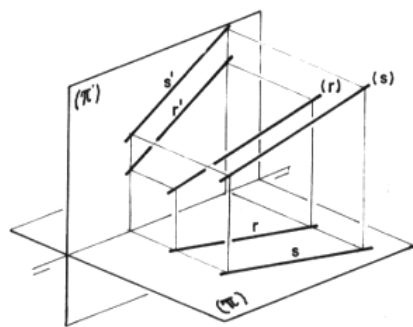


FIG.22a

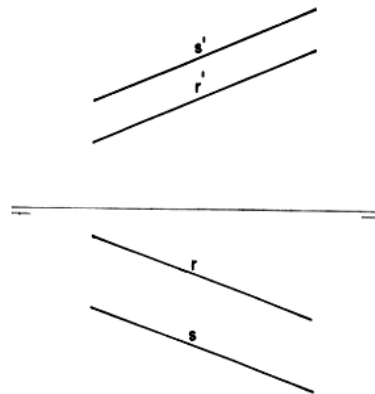
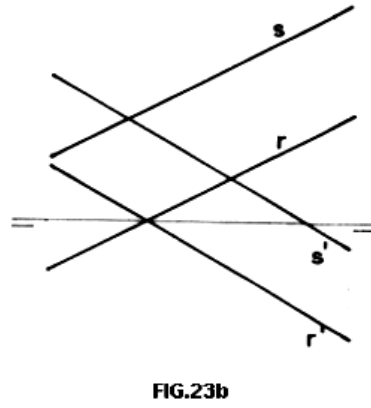
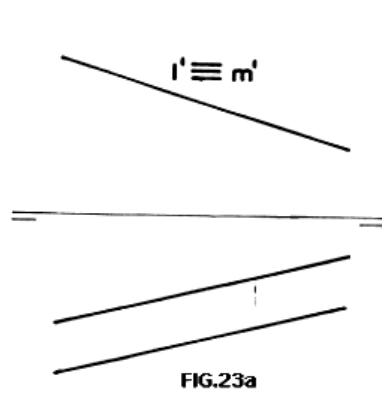


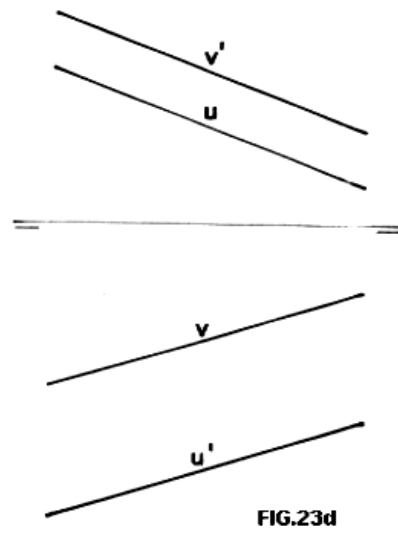
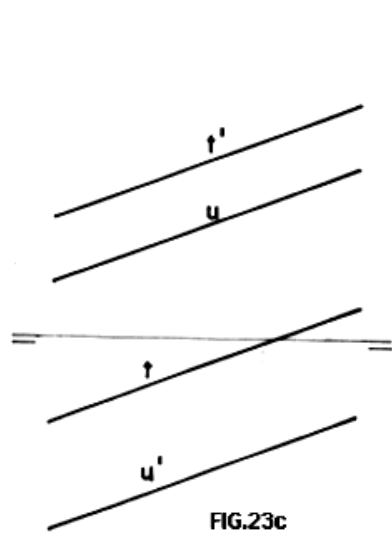
FIG.22b

Podemos concluir então que, quando duas - ou mais - retas são paralelas, suas projeções de mesmo nome são, também, paralelas.

Nas figuras 23a,b e c, as retas representadas pelos pares, (l) e (m), (r) e (s) e (t) e (u), são paralelas.



Por outro lado, podemos constatar, na fig.23d, que as retas (u) e (v) **não são paralelas**, porque as projeções de mesmo nome das retas não são paralelas.



4 – TRAÇOS DA RETA

Quando uma reta intercepta uma outra reta, ou mesmo um plano, chama-se *traço da reta* ao ponto de interseção dessa reta com outra, ou ainda, dessa reta com o plano.

Quando uma reta intercepta o plano horizontal de projeção, o *traço horizontal da reta* é o seu ponto que tem cota nula.

Quando a reta intercepta o plano vertical de projeção, o *traço vertical da reta* é o seu ponto que tem afastamento nulo.

Em épura, o traço horizontal de uma reta - designado por (H) - tem sua projeção vertical H' sobre a linha de terra. O traço vertical - designado por (V) - tem sua projeção horizontal V sobre a linha de terra (fig.24).

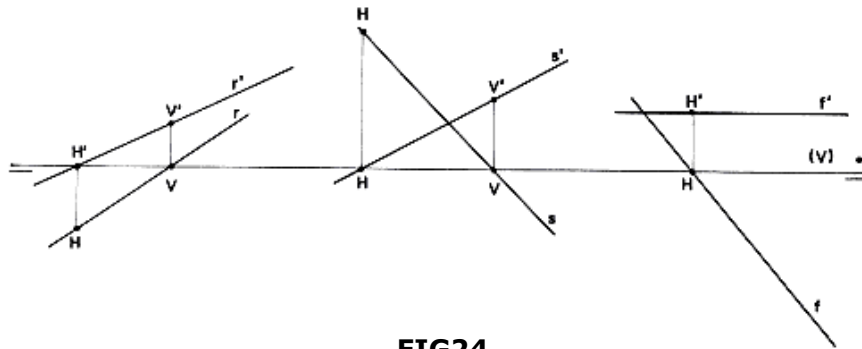


FIG24

Capítulo VI

METODOLOGIA DAS PROJEÇÕES DA RETA

1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma reta pode ocupar, no espaço, as mais variadas posições relativas a um plano de projeção previamente escolhido. Logo, se um segmento de uma determinada reta está numa certa posição em relação a este plano, a *reta – suporte* deste segmento estará, também, na mesma posição do segmento. Em outras palavras: se o segmento é, por exemplo, perpendicular a um plano de projeção, sua *reta – suporte* também o é.

2 – SEGMENTOS DE RETA

As figuras geométricas de interesse prático são constituídas, de uma forma geral, de pontos, de segmentos lineares (retos e/ou curvos) e de porções de superfícies (planas e/ou curvas). Como as propriedades geométricas de uma reta e de suas projeções podem ser caracterizadas pelos segmentos a ela pertencentes e suas respectivas projeções, o estudo das projeções da reta será conduzido através do estudo das projeções de qualquer de seus segmentos. Assim, para efeitos exclusivamente didáticos, um segmento (AB) de uma reta (r), *reta (r)*, *reta (AB)* ou *reta (r)*, serão a mesma coisa.

3 – DIVISÃO DE UM SEGMENTO DE RETA EM PARTES PROPORCIONAIS

Dividir um segmento em partes proporcionais é encontrar um ponto que divide este segmento numa determinada razão.

Sejam (A) e (B) dois pontos que determinam ou pertencem a uma reta (r).

Seja (M) um ponto de (r) que divide o segmento (AB) numa razão k, tal que:

$$[1] k = \frac{(MA)}{(MB)}$$

Projetando ortogonalmente a reta (r) num plano horizontal (\square), obtemos sua projeção r e, sobre ela, os pontos A, M e B, projeções, respectivamente, de (A), (M) e (B) em (\square) (figs.25a e b).

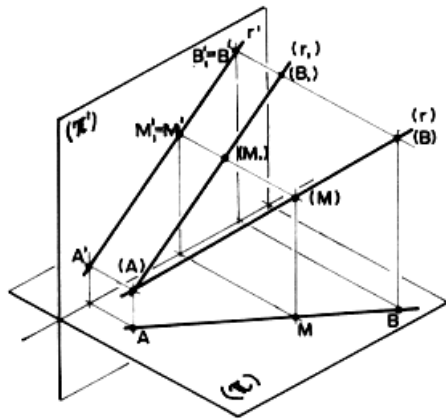


FIG.25a

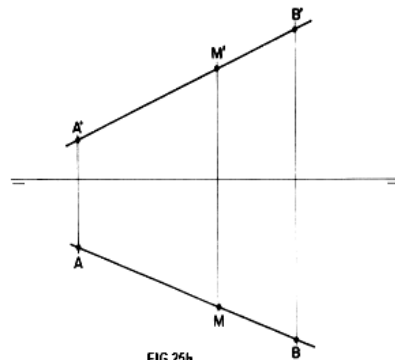


FIG.25b

As projetantes que passam por (A), (M) e (B) são retas paralelas cortadas pelas transversais (r) e r'. Pelo teorema de Tales, temos então:

$$[2] \quad \frac{(MA)}{(MB)} = \frac{MA}{MB}$$

Como,

$$[3] \quad \frac{(MA)}{(MB)} = k$$

Se o plano de projeção for vertical, podemos concluir, também, que:

$$[4] \quad \frac{M'A'}{M'B'} = k$$

Assim sendo, podemos afirmar que:

Quando um ponto divide um segmento numa dada razão, as projeções do ponto dividem as projeções do segmento na mesma razão.

Na figura 26 são mostrados alguns exemplos de projeções de segmentos divididos por pontos em razões conhecidas.

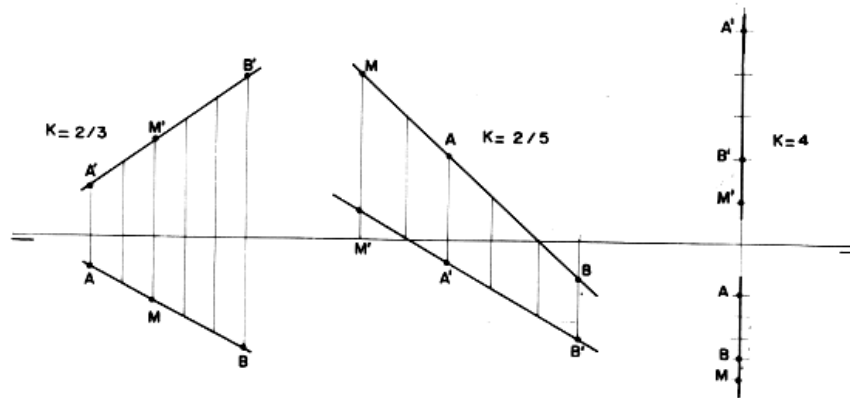


FIG.26

4 – PROJEÇÕES DE RETAS NUM ÚNICO PLANO

Em relação a um único plano de projeção, um segmento pode estar:

- I - paralelo
- II - perpendicular
- III - oblíquo

Seja (AB) um segmento retilíneo de extremidades (A) e (B), pertencente a uma reta (r), e (π), o plano de projeção considerado. O comportamento das projeções do segmento (AB) em cada um destes casos é o que será visto a seguir.

4.1 – SEGMENTO DE RETA PARALELA AO PLANO DE PROJEÇÃO

Projetando ortogonalmente os pontos (A) e (B) no plano (π), são determinados os pontos A e B, respectivamente. O segmento AB será, portanto, a projeção ortogonal de (AB) no plano (π) (fig. 27).

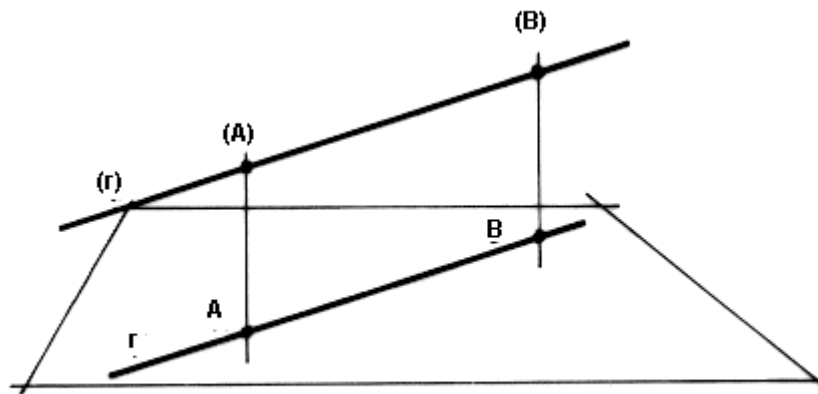


FIG.27

Como (AB) é paralelo a (π) , a distância de A' a (π) é igual à distância de (B) a (π) . Logo, teremos:

$$[5] (A)A = (B)B$$

O quadrilátero de vértices (A) , (B) , B e A é um retângulo o que permite afirmar que:

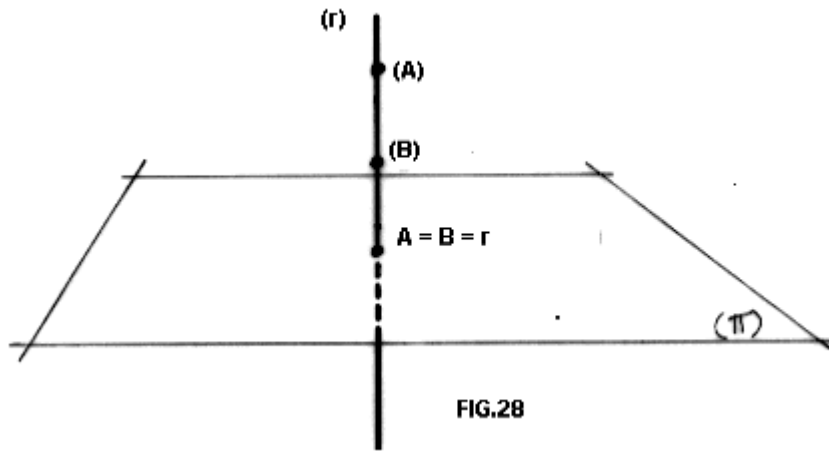
$$[6] AB = (AB)$$

Podemos concluir, então, que:

Quando um segmento de uma reta (reta objetiva) é paralelo a um plano, sua projeção ortogonal neste plano é outro segmento, de comprimento igual ao do segmento real, ou seja, esta projeção está em verdadeira grandeza.

4.2 – SEGMENTO DE RETA PERPENDICULAR AO PLANO DE PROJEÇÃO

Projetando ortogonalmente os pontos (A) e (B) no plano (π) , as projeções de ambos reduzir-se-ão a um único ponto, uma vez que o raio projetante que passa por (A) é o mesmo raio que passa por (B) fig 28).



Logo, teremos:

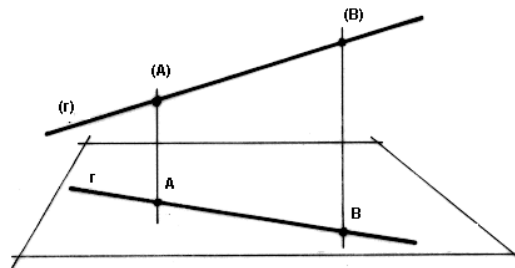
$$[7] A \equiv B$$

Podemos concluir, então, que:

Quando um segmento de uma reta (reta objetiva) é perpendicular a um plano, sua projeção ortogonal neste plano reduz-se a um ponto, ou seja, as projeções de todos os seus pontos são coincidentes.

4.3 – SEGMENTO DE RETA OBLÍQUA AO PLANO DE PROJEÇÃO

Projetando ortogonalmente os pontos (A) e (B) no plano (π), são determinados os pontos (A) e (B). O segmento AB será, portanto, a projeção ortogonal de (AB) no plano (π) (fig. 29).



Observa-se, porém, que o quadrilátero de vértices (A), (B), B e C é um trapézio retângulo e, por isso, as distâncias de (A) e de (B) ao plano (π), são respectivamente diferentes. Logo, teremos:

$$[8] AB \neq (AB)$$

Podemos concluir, então, que:

Quando um segmento de uma reta (reta objetiva) é oblíquo a um plano, sua projeção ortogonal neste plano é outro segmento, de comprimento menor que o do segmento real, ou seja, esta projeção não está em verdadeira grandeza.

5 – PROJEÇÕES DE RETAS NUM SISTEMA DE DUPLA PROJEÇÃO ORTOGONAL

Este sistema utiliza projeções ortogonais simultâneas em dois planos perpendiculares entre si, disposição que caracteriza o método da dupla projeção ortogonal idealizado por Gaspar Monge. Em relação a um sistema assim concebido, um segmento pertencente a uma determinada reta-suporte pode estar posicionado das seguintes maneiras:

- I - paralelo aos dois planos
- II - perpendicular a um dos planos
- III - paralelo a um dos planos e perpendicular ao outro
- IV - oblíquo aos dois planos

Sejam (AB) um segmento de reta de extremidades (A) e (B) e (π) e (π') os dois planos de projeção do sistema em tela. O comportamento das projeções do segmento (AB), em cada um destes casos, será visto a seguir.

5.1 – RETA PARALELA AOS DOIS PLANOS DE PROJEÇÃO

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (l). Nesta posição os afastamentos de (A) e de (B) são iguais assim como são iguais as suas cotas. O segmento é também paralelo à linha de terra e ambas as projeções também o são (figs. 30a e b).

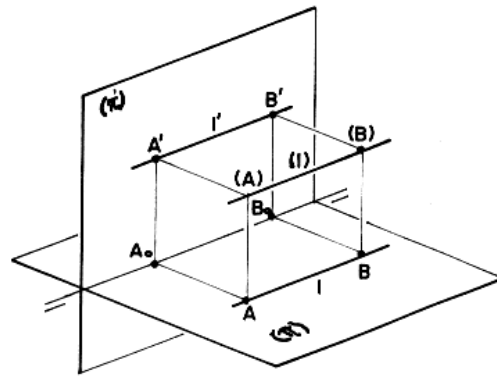


FIG.30a

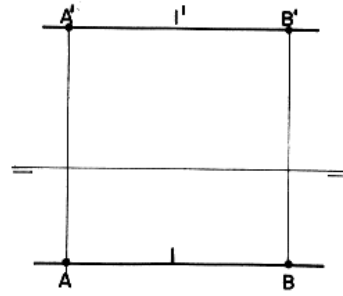


FIG.30b

Logo, teremos:

$$[9] \quad y(A) = y(B)$$

$$[10] \quad z(A) = z(B)$$

$$[11] \quad AB = A'B' = (AB)$$

Podemos concluir, então, que:

Quando uma reta é paralela aos dois planos de projeção é paralela também à linha de terra e ambas as projeções de qualquer de seus segmentos, além de também paralelos à linha de terra, são segmentos de comprimentos iguais ao do segmento real, ou seja, ambas estão em verdadeira grandeza.

Uma reta com estas características é chamada *reta paralela à linha de terra* ou *reta fronto-horizontal*.

5.2 – RETA PERPENDICULAR A UM DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

Quando uma reta é perpendicular a um plano de projeção, sua projeção ortogonal neste plano se reduz a um ponto. Num sistema de dupla projeção ortogonal, se a reta é perpendicular a um dos planos de projeção, é, então necessariamente paralela ao outro.

Nestas condições a reta pode estar:

I - perpendicular ao plano horizontal (π) e paralelo ao plano vertical (π')

II - perpendicular ao plano vertical (π') e paralelo ao plano horizontal (π)

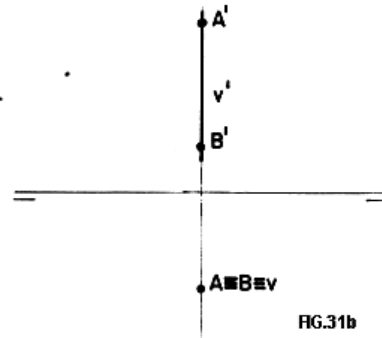
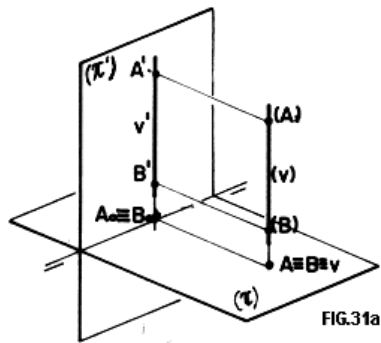
Em ambos os casos têm-se:

$$[12] \quad x(A) = x(B)$$

5.2.1 RETA PERPENDICULAR AO PLANO HORIZONTAL DE PROJEÇÃO (π)

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (v)

Observa-se nas figuras 31-a e b que:



a) sua projeção horizontal reduz-se a um ponto

$$[13] \quad A \equiv B \equiv v$$

b) todos os seus pontos possuem o mesmo afastamento

$$[14] \quad y(A) = y(B)$$

c) sua projeção vertical está em verdadeira grandeza

$$[15] \quad A'B' = (AB)$$

Podemos concluir, então que:

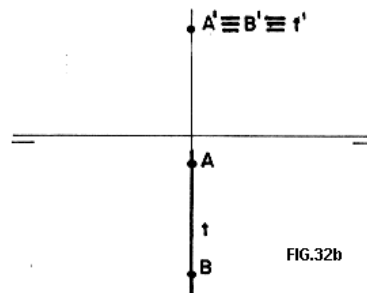
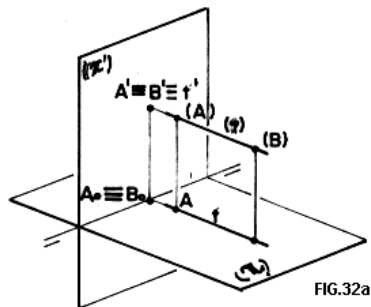
Quando uma reta é perpendicular ao plano horizontal de projeção (π) é, necessariamente, paralelo ao plano vertical (π') e ainda:

- a) sua projeção horizontal fica reduzida a um ponto;
- b) a projeção vertical de qualquer de seus segmentos é também um segmento, perpendicular à linha de terra cujo comprimento está em verdadeira grandeza.

Uma reta com estas características é chamada *reta vertical*

5.2.2 – RETA PERPENDICULAR AO PLANO VERTICAL DE PROJEÇÃO (π')

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (t).
 Observa-se, agora, nas figuras 32-a e b que:



- a) sua projeção vertical fica reduzida a um ponto:
 - [15] $A' \equiv B'$
- b) todos os seus pontos possuem a mesma cota:
 - [16] $z(A) = z(B)$
- c) sua projeção horizontal está em verdadeira grandeza:
 - [17] $AB = (AB)$

Neste caso podemos concluir, então, que:

Quando uma reta é perpendicular ao plano vertical de projeção (π') é, necessariamente, paralelo ao plano horizontal (π) e ainda:

- a) **sua projeção vertical fica reduzida a um ponto;**
- b) **a projeção horizontal de qualquer de seus segmentos é, também um segmento, perpendicular à linha de terra cujo comprimento está em verdadeira grandeza.**

Uma reta com estas características é chamada *reta de topo*.

5.3 – RETA PARALELA A UM DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

Sabe-se que, quando um segmento é paralelo a um plano, sua projeção ortogonal neste plano representa a verdadeira grandeza do segmento. Num sistema de dupla projeção ortogonal, se uma reta for paralela a um dos planos de projeção, em relação ao outro plano, esta mesma reta pode estar:

I - paralela

II - perpendicular

III - oblíqua

As posições referentes aos incisos I e II já foram vistas, respectivamente, em 5.1 e 5.2. Na terceira hipótese, a reta pode estar:

- I) paralela ao plano horizontal (π) e oblíqua ao plano vertical (π')
ou
- II) paralela ao plano vertical (π') e oblíqua ao plano horizontal (π).

5.3.1 – RETA PARALELA AO PLANO HORIZONTAL DE PROJEÇÃO (π)

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (h).
Observa-se nas figuras 33a e b que:

- a) todos os seus pontos possuem a mesma cota:

$$[19] z(A) = z(B)$$

b) sua projeção horizontal está em verdadeira grandeza: [6]

$$[20] AB = (AB)$$

c) sua projeção vertical é paralela à linha de terra e não está em VG porque os afastamentos de seus pontos são diferentes [8]:

$$[21] y(A) \neq y(B)$$

d) O ângulo que a reta-suporte de (AB) faz com o plano vertical de projeção (π') é o mesmo que a sua projeção horizontal faz com a linha de terra:

$$[22] \angle(AB), (\pi') = \angle AB, LT$$

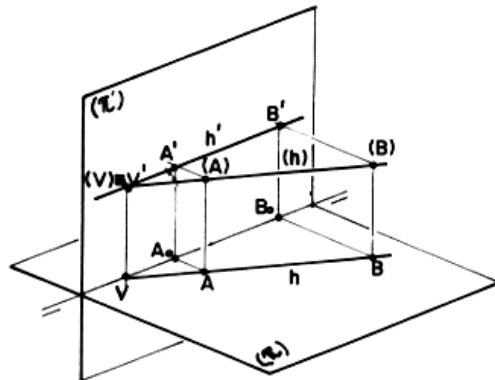


FIG.33a

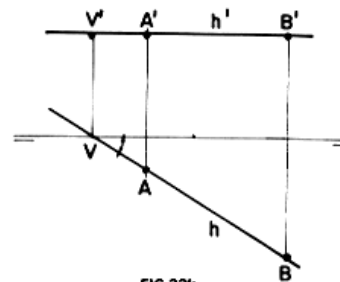


FIG.33b

Uma reta com estas características é chamada *reta horizontal*.

5.4 RETA PARALELA AO PLANO VERTICAL DE PROJEÇÃO (π')

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (f).

Observa-se nas figuras 34a e b que:

a) todos os seus pontos possuem o mesmo afastamento:

$$[23] y(A) = y(B)$$

b) sua projeção vertical está em verdadeira grandeza: [7]

$$[24] A'B' = (AB)$$

c) sua projeção horizontal é paralela à linha de terra e não está em VG porque as cotas de seus pontos são diferentes [15]:

$$[25] z(A) \neq z(B)$$

d) o ângulo que a reta-suporte de (AB) faz com o plano horizontal de projeção (π) é o mesmo que a sua projeção vertical faz com a linha de terra:

$$[26] \angle (AB), (\pi) = \angle A'B', LT$$

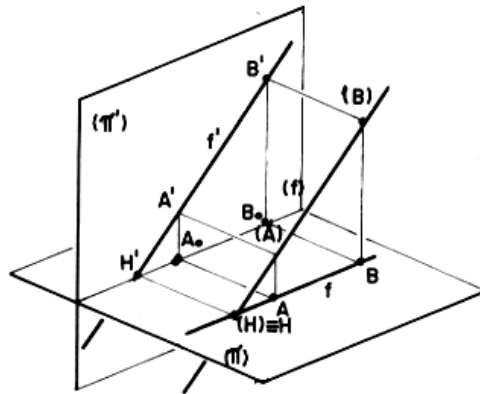


FIG.34a

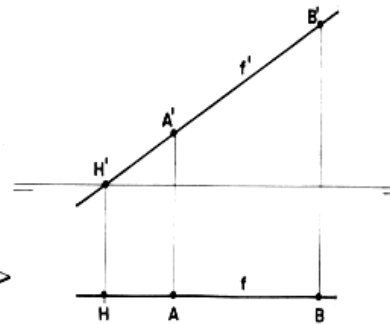


FIG.34b

Uma reta com estas características é chamada *reta frontal ou reta de frente*.

6 – RETA OBLÍQUA AOS DOIS PLANOS DE PROJEÇÃO

Num sistema de dupla projeção ortogonal, quando uma reta é oblíqua, simultaneamente, aos dois planos de projeção, em relação à linha de terra, esta reta pode estar:

I – ortogonal ou

II – oblíqua

Nas figuras 35a e b, observamos que, em ambos os casos, tem-se obrigatoriamente:

$$[27] y(A) \neq y(B)$$

$$[28] z(A) \neq z(B)$$

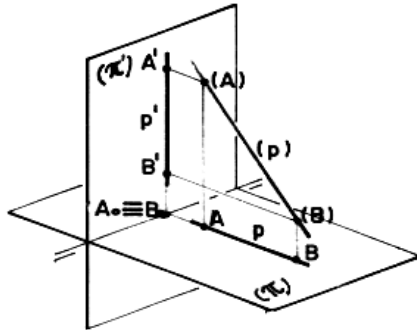


FIG.35a

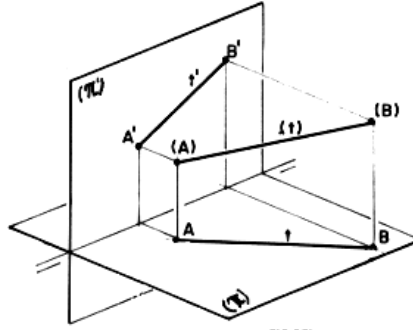


FIG.35b

Como foi visto anteriormente [8], quando um segmento é oblíquo a um plano, sua projeção ortogonal neste plano é outro segmento, menor que o segmento que lhe deu origem.

Num sistema de dupla projeção ortogonal podemos também concluir que:

$$[29] AB \neq (A'B')$$

$$[30] A'B' \neq (AB)$$

Em casos particulares podemos ter:

$$[31] AB = A'B'$$

6.1 – RETA ORTOGONAL À LINHA DE TERRA

Seja (AB) um segmento pertencente a uma reta (p).
Nas figuras 36a e b, observamos que:

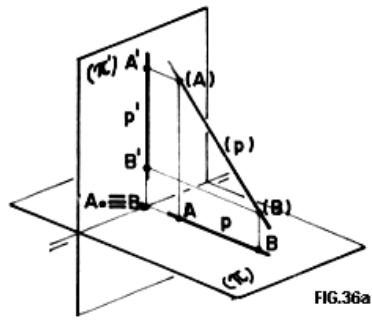


FIG.36a

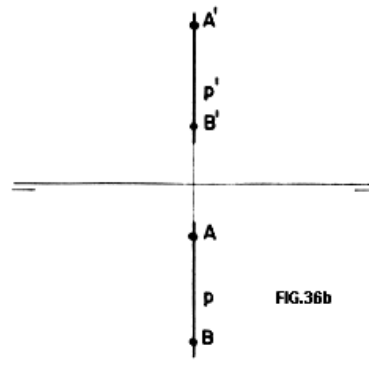


FIG.36b

$$[32] \quad x(A) = x(B)$$

Em casos particularíssimos, a reta pode ser perpendicular à linha de terra e, nesta condição, tem-se:

$$[33] \quad (H) \equiv (V), \text{ ou ainda:}$$

$$[34] \quad H \equiv H' \equiv V \equiv V'$$

Uma reta com estas características é chamada *reta de perfil*.

6.2 – RETA OBLÍQUA À LINHA DE TERRA

As figuras 37 a e b mostram épuras de retas oblíquas à linha de terra.

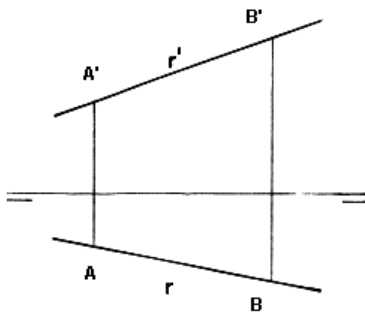


FIG.37a

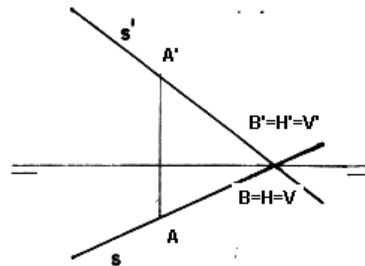


FIG.37b

Uma reta com estas características é chamada simplesmente *reta qualquer* ou *reta genérica*.

CAPÍTULO VII

VERDADEIRA GRANDEZA DE SEGMENTOS DE RETA

1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Foi visto anteriormente que segmentos de retas oblíquas a um plano projetam-se ortogonalmente neste plano segundo outro segmento, menor que lhe deu origem, não representando, portanto, o seu comprimento real. Em outras palavras, esta projeção não está em verdadeira grandeza [8].

Tratando-se de um segmento de reta oblíquo simultaneamente aos dois planos de um sistema de dupla projeção ortogonal, em ambos os planos a projeção do segmento está em sua verdadeira grandeza [29] e [30].

Por outro lado, foi visto também que, segmentos de retas paralelas a um plano projetam-se neste plano em verdadeira grandeza [6].

Logo, para determinar a verdadeira grandeza de um segmento de reta oblíqua aos dois planos de um sistema de dupla projeção ortogonal bastará que, por métodos descritivos de transformação, o segmento fique paralelo – ou até coincidente – com um dos planos do sistema ou de outro que possa ser criado a partir do sistema original. Assim, podemos adotar os seguintes métodos alternativos:

- I - planos auxiliares de projeção
- II - rotações em torno de eixos retilíneos pré-determinados

Seja, então, um segmento (AB), do qual se conhecem suas projeções e que seja necessário conhecer sua verdadeira grandeza (fig. 38).

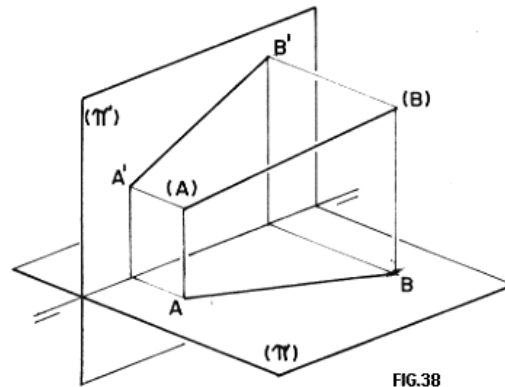


FIG.38

2 – PLANOS AUXILIARES DE PROJEÇÃO

O procedimento, neste caso, consiste em criar um novo sistema de dupla projeção ortogonal que atenda, obrigatoriamente, às seguintes condições:

- I - um dos planos de projeção será um dos planos do sistema original, isto é, (π) ou (π') ;
- II - o outro plano de projeção será perpendicular ao mantido do sistema original;
- III - a linha de terra do novo sistema será a interseção dos dois planos;
- IV - a écura do novo sistema será obtida girando-se o novo plano de projeção em torno da nova linha de terra até que sua superfície se sobreponha à do plano mantido do sistema original.

2.1 – PLANO VERTICAL AUXILIAR

Se o plano de projeção do sistema original a ser mantido no novo sistema for o plano horizontal (π) , serão observadas, no espaço, as seguintes conseqüências (fig. 39).

- a) o outro plano será o plano (π'_1) , vertical do novo sistema e perpendicular a (π) , paralelo a (AB) e a uma distância arbitrária deste segmento;
- b) a linha de terra do novo sistema será a interseção de (π) com (π'_1) ;
- c) as projeções horizontais não se alteram, ou seja, as projeções horizontais de (A) e de (B) serão exatamente as mesmas no novo sistema;
- d) as projeções verticais de (A) e de (B) no novo sistema serão, respectivamente, A'_1 e B'_1 ;

As distâncias de (A) e de (B) ao plano (π) também não se alteram porque a posição relativa entre eles não foi mexida.

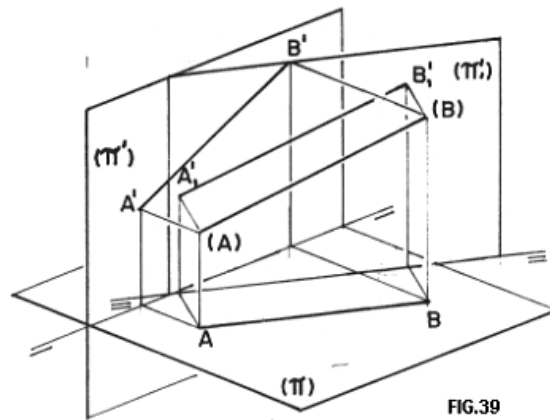


FIG.39

A écura mostrada na figura 40 resulta da aplicação de um plano auxiliar (de projeção) vertical (π') para determinar a verdadeira grandeza (VG) de um segmento (AB) disposto um sistema de dupla projeção ortogonal, caracterizado pelos planos (π) e (π'). A construção de écura obedeceu à execução ordenada dos procedimentos geométricos descritos a seguir:

- 1) no novo sistema, (AB) é paralelo a (π'), logo a nova linha de terra será paralela à sua projeção horizontal AB;

$$[35] \pi\pi_1' // AB$$

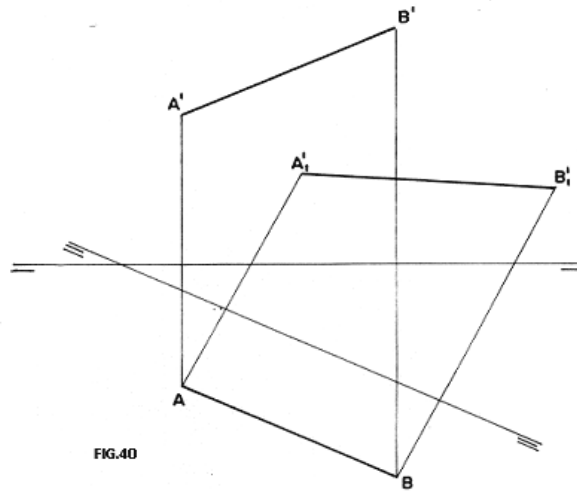
- 2) no novo sistema, a distância de (AB) ao plano (π') é arbitrária (pode até ser nula), logo é arbitrária, também, a distância da nova linha de terra à sua projeção horizontal AB;

$$[36] d(\pi\pi_1', AB) : \text{distância arbitrária, inclusive } \pi\pi' \equiv AB$$

- 3) as linhas de chamada do novo sistema partirão de A e de B, projeções horizontais de (A) e de (B), respectivamente, e perpendiculares à nova linha de terra;
- 4) Como as distâncias de (A) e de (B) ao plano (π) são as mesmas, no sistema original e no novo sistema, as cotas de (A) e de (B) não se alteram e basta transportá-las para as novas linhas de chamada, a partir da nova linha de terra.

$$[37] \quad d(A'', \pi\pi') = d(A', \pi\pi_1')$$

$$[38] \quad d(B', \pi\pi') = d(B', \pi\pi_1')$$



Em resumo, podemos afirmar o seguinte:

Quando se utiliza um outro plano vertical de projeção como plano auxiliar, fica criado um novo sistema de dupla projeção ortogonal onde as projeções horizontais permanecem as mesmas e as cotas são respectivamente iguais às do sistema original.

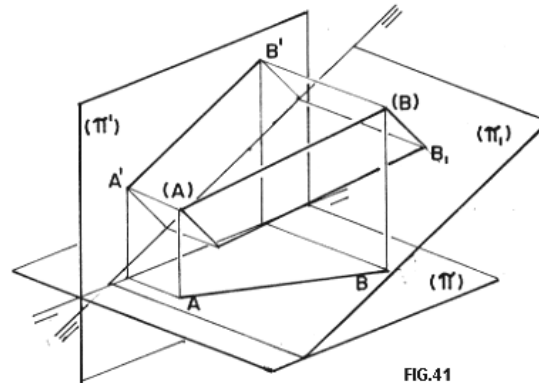
2.2 – PLANO HORIZONTAL AUXILIAR

Se o plano de projeção do sistema original a ser mantido no novo sistema for o plano vertical (π'), serão observadas, no espaço, as seguintes conseqüências (fig. 41).

- a) o outro plano será o plano (π_1), horizontal do novo sistema, perpendicular a (π'), paralelo a (AB) e a uma distância arbitrária deste segmento;
- b) a linha de terra do novo sistema será a interseção de (π') com (π_1);
- c) as projeções verticais não se alteram, ou seja, as projeções verticais de (A) e de (B) serão exatamente as mesmas no novo sistema;

- d) as projeções horizontais de (A) e de (B) no novo sistema serão, respectivamente, A_1 e B_1 ;

as distâncias de (A) e de (B) ao plano (π') também não se alteram porque a posição relativa entre eles não foi mexida.



A écura mostrada na figura 42 resulta da aplicação de um plano auxiliar (de projeção) horizontal (π_1) para determinar a verdadeira grandeza (VG) de um segmento (AB) disposto num sistema de dupla projeção ortogonal caracterizado pelos planos (π) e (π') . A construção da écura obedeceu à execução ordenada dos procedimentos geometrográficos descritos a seguir:

- 1) no novo sistema, (AB) é paralelo a (π_1) , logo a nova linha de terra será paralela à sua projeção vertical $A'B'$;

$$[39] \pi_1 \pi' // A'B'$$

- 2) no novo sistema, a distância de (AB) ao plano (π_1) é arbitrária (pode até ser nula), logo é arbitrária, também, a distância da nova linha de terra à sua projeção vertical $A'B'$;

$$[40] d(\pi_1 \pi', A'B') : (\text{distância arbitrária, inclusive } \pi \pi' \equiv A'B')$$

- 3) as linhas de chamada do novo sistema partirão de A' e de B' , projeções verticais de (A) e de (B), respectivamente, e perpendiculares à nova linha de terra;

- 4) Como as distâncias de (A) e de (B) ao plano (π') são as mesmas, no sistema original e no novo sistema, os afastamentos de (A) e de (B) não se alteram e basta transportá-las para as novas linhas de chamada, a partir da nova linha de terra.

$$[41] d(A, \pi\pi') = d(A_1, \pi_1\pi')$$

$$[42] d(B, \pi\pi') = d(B_1, \pi_1\pi')$$

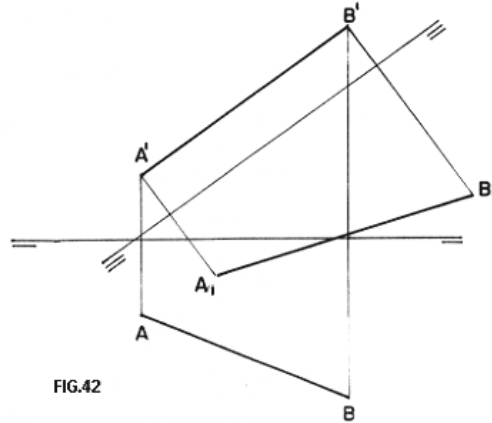


FIG.42

Em resumo, podemos afirmar o seguinte:

Quando se utiliza um outro plano horizontal de projeção como plano auxiliar, fica criado um novo sistema de dupla projeção ortogonal onde as projeções verticais permanecem as mesmas e os afastamentos são respectivamente iguais aos do sistema original.

2.3 – PLANO DE PERFIL AUXILIAR

Chama-se *plano de perfil* àquele simultaneamente perpendicularmente aos dois planos de um sistema de dupla projeção ortogonal. Nesta posição, este plano é também perpendicular à linha de terra e tanto pode funcionar como *plano vertical auxiliar* quanto como *plano horizontal auxiliar*, desde que sejam seguidos os procedimentos descritos em 2.1 ou em 2.2, respectivamente.

A determinação da verdadeira grandeza de segmentos de retas ortogonais à linha de terra [32], também chamadas *retas de perfil*, fica extremamente

facilitada quando se incorpora ao sistema no qual a reta está inserida, um plano de perfil auxiliar.

Na figura 43a o segmento (AB) pertence a uma reta de perfil (p). Neste exemplo, optou-se por manter fixo o plano vertical (π'), do sistema original, e adotar um plano de perfil (π_1), como plano auxiliar, transformando-o no plano horizontal do novo sistema.

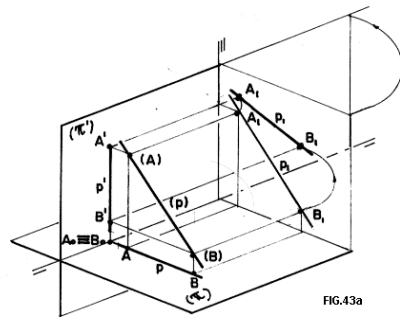


FIG.43a

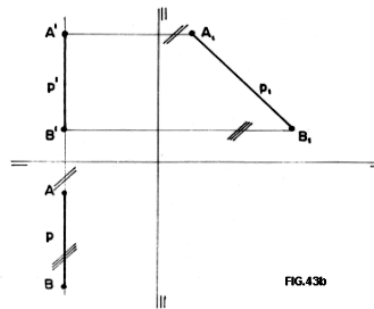


FIG.43b

- 1) [43] $\pi_1\pi' \parallel A'B'$
- 2) [44] $d(\pi_1\pi', A'B') : \text{distância arbitrária}$
- 3) [45] $d(A, \pi\pi') = d(A_1, \pi_1\pi')$
- 4) [46] $d(B, \pi\pi') = d(B_1, \pi_1\pi')$

A écura mostrada na figura 43b resulta da aplicação de um plano de perfil usado como plano auxiliar (de projeção) horizontal para determinar a verdadeira grandeza de um segmento (AB) disposto num sistema de dupla projeção ortogonal caracterizado pelos planos (π) e (π'). A construção da écura obedeceu nos seguintes procedimentos geometrográficos:

3 – EIXOS DE ROTAÇÃO

Quando se usam planos auxiliares para determinar a verdadeira grandeza de um segmento, ou por outras razões que serão estudadas posteriormente, a figura objetiva se mantém fixa relativamente aos planos de projeção do sistema de dupla projeção ortogonal usado inicialmente e ao novo sistema criado após a inserção de um plano auxiliar.

No método das rotações em torno de eixos retilíneos o segmento de reta vai executar um giro em torno de um eixo previamente escolhido que possibilite posicioná-lo paralelamente a um dos planos do sistema no qual está sendo

projetado ou assentá-lo num destes planos. Em ambos os casos, será possível determinar sua verdadeira grandeza construindo suas novas projeções após a rotação efetuada.

Inicialmente, é importante lembrar algumas propriedades das rotações quando tratadas como transformações geométricas. Genericamente, quando um ponto do espaço efetua uma rotação em torno de um eixo retilíneo, descreve um arco de círculo de comprimento proporcional ao ângulo de giro.

O raio do círculo, correspondente ao arco descrito, é um segmento perpendicular ao eixo, de comprimento igual à distância do ponto ao eixo.

Por outro lado, não se pode esquecer que as projeções ortogonais de duas retas perpendiculares num plano qualquer serão, também, duas retas perpendiculares se – e somente se – uma delas for paralela ao plano considerado.

Pelo acima exposto, podemos concluir que:

Quando um eixo de rotação é paralelo a um plano, as projeções, neste plano, do eixo e do raio do arco descrito durante a rotação, são perpendiculares.

De um modo geral, em relação aos planos de um sistema de dupla projeção ortogonal, um eixo de rotação pode estar:

- I - Perpendicular a um dos planos ou
- II - Paralelo a um dos planos e oblíquo ao outro

3.1 – EIXO PERPENDICULAR A UM DOS PLANOS

Quando um eixo é perpendicular a um dos planos de projeção é, obrigatoriamente, paralelo ao outro. Nestas condições o eixo pode ser

- I - vertical
- II - de topo

3.1.1 – ROTAÇÃO DE EIXO VERTICAL

3.1 - Rotação de Eixo Vertical

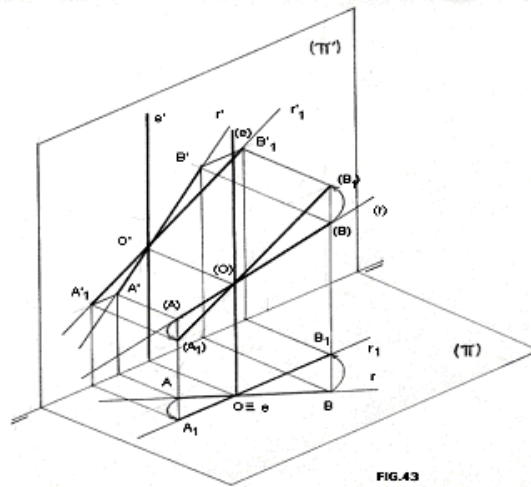
Seja (e) um eixo de rotação, inicialmente perpendicular ao plano horizontal de projeção (π). O eixo, nesse caso, é uma reta vertical.

Para determinar a verdadeira grandeza de um segmento de reta oblíqua, simultaneamente, aos dois planos de projeção (reta de qualquer ou reta de perfil)

utilizando um eixo vertical, teremos que transformá-lo num segmento paralelo ao plano vertical de projeção (π').

Vejam, então, como se processa a rotação de um segmento (AB), pertencente a uma reta qualquer (r) em torno de um eixo vertical (e).

Objetivando facilitar a construção da épora e diminuir o número de linhas do desenho, o eixo de rotação é concorrente com a reta no ponto (O), tal como mostrado na figura 43.



Quando o segmento (AB) gira em torno do eixo (e), verifica-se o seguinte:

- a) o ponto (O), de concurso entre a reta (r) e o eixo se mantém fixo durante a rotação;
- b) As cotas de (A) e de (B) não se alteram;
- c) Os arcos descritos por (A) e (B) durante a rotação se projetam em VG no plano horizontal (π), ou seja, são iguais aos arcos descritos respectivamente por suas projeções horizontais A e B em torno da projeção horizontal de (e) que, no caso, ficou reduzida a um ponto porque (e) é perpendicular a (π).

Finda a rotação, o segmento (AB) transforma-se no segmento (A_1B_1) de tal sorte que:

$$[47] (A_1B_1) // (\pi')$$

$$[48] (O_1) \equiv (O)$$

$$[49] \quad z(A_1) = z(A)$$

$$[50] \quad z(B_1) = z(B)$$

Na figura 44a está representada a écura correspondente, obtida obedecendo aos seguintes procedimentos geometrográficos:

- 1) Fazendo o eixo (e) passar pelo ponto (o), tem-se:

$$[51] \quad e \equiv O$$

$$[52] \quad O_1 \equiv O$$

- 2) Como o segmento (AB) vai ser transformado num segmento (A_1B_1) paralelo ao plano vertical (π'), por $O \equiv e$ traça-se uma paralela à linha de terra que limitará as rotações A e de B em torno de $O \equiv e$.
- 3) Com centro em $o \equiv e$ traçam-se os arcos de raios AO e OB até que A e B encontram a paralela mencionada no passo anterior, determinando, assim, A_1 e B_1 projeções horizontais de (A_1) e de (B_1), e aí teremos:

$$[53] \quad y(A_1) = y(B_1) = y(O)$$

- 4) A partir de A, e de B, levantam-se as respectivas linhas de chamada e determinam-se A' , e B' , através de paralelas traçadas, respectivamente, de A' e B' , garantindo que:

$$[54] \quad z(A_1) = z(A)$$

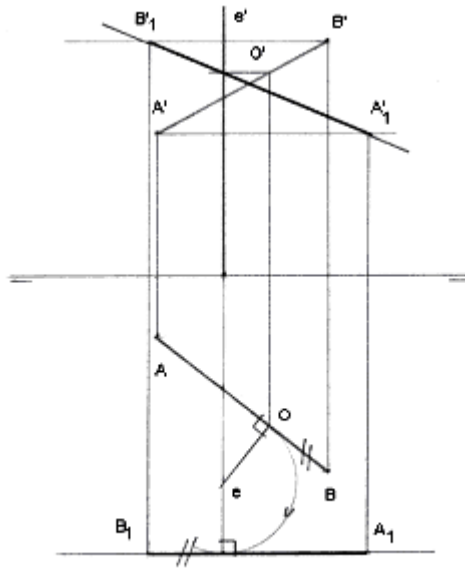
$$[55] \quad z(B_1) = z(B)$$

O comprimento de $A'_1 B'_1$ é a verdadeira grandeza (VG) do segmento (AB).

$$[59] z(A_1) = z(A)$$

$$[60] z(B_1) = z(B)$$

O segmento A_1B_1 é a verdadeira grandeza (VG) do segmento (AB).



Em resumo, concluímos que:

Quando um segmento de reta executa uma rotação em torno de um eixo vertical, a projeção dos arcos descritos por seus pontos são projetados em verdadeira grandeza no plano horizontal (\square) e as respectivas cotas não se alteram após a rotação.

3.1.2 – ROTAÇÃO DE EIXO DE TOPO

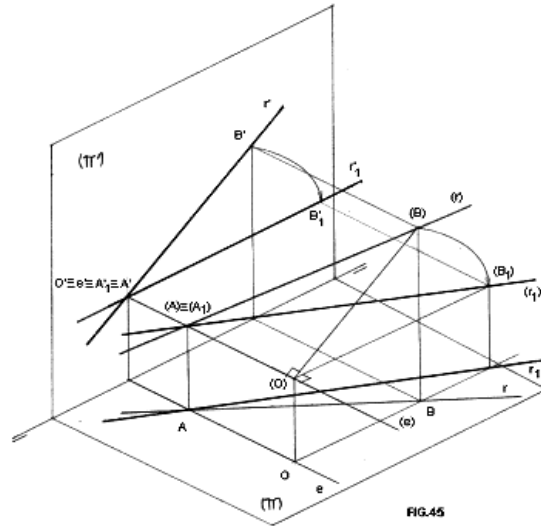
Seja agora (e) um eixo de rotação perpendicular ao plano vertical de projeção (π'). Nesse caso o eixo é uma reta de topo e dizemos tratar-se de uma *rotação de eixo horizontal*.

Para determinar a verdadeira grandeza de um segmento de reta oblíqua, simultaneamente, aos dois planos de projeção (reta qualquer ou reta de perfil)

utilizando um eixo de topo, teremos que transformá-lo num segmento paralelo ao plano horizontal de projeção (π).

Vejamos, então, como se processa a rotação de um segmento (AB), pertencente a uma reta qualquer (r), em torno de um eixo de topo (e).

Também aqui, o eixo deve ser concorrente com a reta. Melhor ainda quando fazemos com que o eixo passe por uma das extremidades do segmento. Nesta condição basta rotacionar apenas a outra extremidade para transformar o segmento horizontal. Seja (A) a extremidade pela qual passa o eixo (e), tal como mostrado na figura 45.



Quando o segmento (AB) gira em torno do eixo (e), verifica-se o seguinte:

- a) o ponto (A) se mantém fixo durante a rotação
- b) o afastamento de (B) não se altera
- c) o arco descrito por (B) durante a rotação se projeta em VG no plano vertical (π^v), ou seja, é igual ao arco descrito por sua projeção horizontal B em torno da projeção vertical de (e) que, no caso, ficou reduzida a um ponto porque (e) é perpendicular a (π^v).

Finda a rotação, o segmento (AB) transforma-se no segmento (A_1B_1) de tal sorte que:

$$[61] (A_1B_1) // (\pi)$$

$$[62] (A_1) \equiv (A)$$

$$[63] z(B_1) = z(B)$$

Na figura 46a está representada a écura correspondente, obtida obedecendo aos seguintes procedimentos geometrográficos:

- 1) Fazendo o eixo passar pela extremidade (A) do segmento (AB), tem-se:

$$[64] e' \equiv A'$$

$$[65] A'_1 \equiv A_1$$

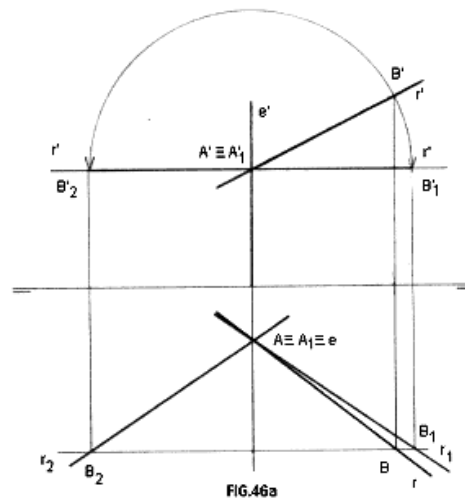
- 2) Como o segmento (AB) vai ser transformado num segmento (A_1B_1) paralelo ao plano horizontal (\square), por $e' \equiv A'$ traça-se uma paralela à linha de terra que limitará o arco descrito por B' em torno de $e' \equiv A'$.
- 3) Com centro em $e' \equiv A'_1$ traça-se o arco de raio AB até que B encontre a paralela mencionada no passo anterior determinando, assim, a projeção vertical B'_1 de (B_1), e aí teremos:

$$[66] z(B_1) = z(B) = z(A)$$

- 4) A partir de B'_1 baixa-se a linha de terra correspondente, determinando-se B_1 de tal modo que:

$$[67] y(B_1) = y(B)$$

O comprimento de $A'_1B'_1$ é a verdadeira grandeza (VG) do segmento (AB).



Em resumo, concluímos que:

Quando um segmento de reta executa uma rotação em torno de um eixo de topo, os arcos descritos por seus pontos são projetados em verdadeira grandeza no plano vertical de projeção (p') e os respectivos afastamentos não se alteram após a rotação.

Se o segmento do qual se deseja conhecer a verdadeira grandeza pertencer a uma reta de perfil, o eixo de rotação tanto poderá ser vertical quanto de topo. Geralmente o eixo vertical é o mais utilizado.

Seja, então, um segmento (AB) pertencente a uma reta de perfil (p). Tomemos para eixo de rotação uma reta vertical de mesma abcissa de (p) e de afastamento nulo.

A é pura mostrada na figura 46b foi obtida obedecendo aos seguintes procedimentos geométricos.

- 1) se o eixo é vertical, de mesma abcissa de (p) e de afastamento nulo, teremos:

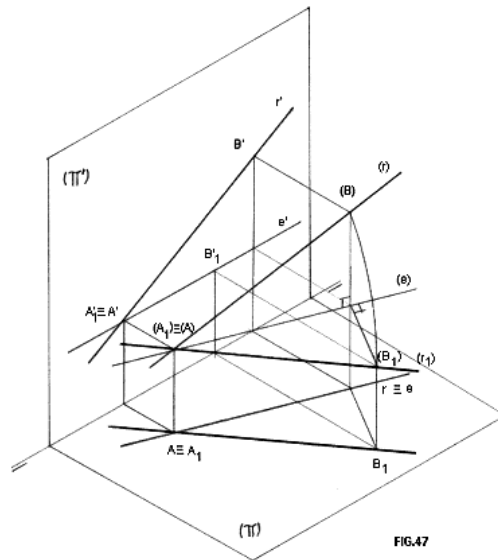
$$[68] e' \equiv p'$$

$$[69] y(e) = O$$

Isto significa dizer que a rotação do segmento em torno do eixo será interrompida quando o segmento ficar no mesmo plano do eixo, pois, nesta posição sua projeção estará em verdadeira grandeza.

3.2.1 – EIXO PARALELO AO PLANO HORIZONTAL DE PROJEÇÃO (π)

Seja, então, um segmento (AB), pertencente a uma reta qualquer (r), e um eixo (e), paralelo ao plano (π). Para facilitar o entendimento e não congestionar a época respectiva façamos com que o eixo passe pela extremidade (A) do segmento (AB) e pertença ao mesmo plano que contém a reta (r) e é perpendicular ao plano horizontal de projeção (π), tal como mostrada na figura 47.



O objetivo da operação é fazer com que o segmento (AB) efetue uma rotação em torno do eixo (e) e se transforme no segmento (A_1B_1), paralelo ao plano (π), onde se projetará em verdadeira grandeza.

Podemos verificar o seguinte:

- a) o ponto (A) não se altera durante a rotação;
- b) como (r) e (e) pertencem a um mesmo plano perpendicular a (π), suas projeções horizontais são idênticas;

- c) o raio do arco descrito por (B) durante a rotação em torno de (e) é o segmento (OB), perpendicular a (e) que se projeta no plano horizontal de projeção (π) segundo um plano.
- d) o raio (OB) tem comprimento igual à diferença de cotas entre (B) e (e) e após a rotação ficará paralelo ao plano horizontal (π) projetando-se em verdadeira grandeza (VG) neste plano.

Na figura 48 está representada a écura correspondente, obtida observando os seguintes procedimentos geometrográficos:

- 1) Faz-se inicialmente:

$$[74] (A) \equiv (A_1)$$

- 2) Conseqüentemente, teremos:

$$[75] A' \equiv A'_1$$

$$[76] A \equiv A_1$$

- 3) Faz-se, em seguida:

$$[77] e \equiv AB [(AB) \in (r)]$$

- 4) Em conseqüência, teremos:

$$[78] B \equiv O$$

- 5) Teremos ainda:

$$[79] O'B' = z(B) - z(e) = VG \text{ de } (OB)$$

- 6) Concluída a rotação (AB) se transforma em (A_1B_1) paralela ao plano horizontal de projeção (π) e OB, fica, evidentemente, perpendicular a $e \equiv AB$ e:

$$[80] OB_1 = O'B' = z(B) - z(e)$$

O segmento A_1B_1 é a verdadeira grandeza do segmento (AB).

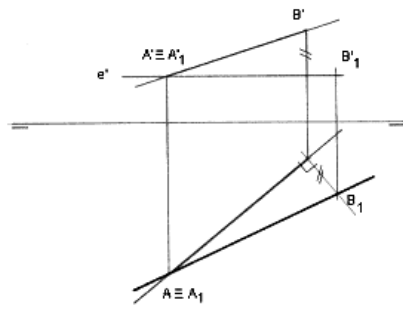


FIG.48

3.2.2 – EIXO PARALELO AO PLANO VERTICAL DE PROJEÇÃO (π')

Seja agora, o mesmo segmento (AB) de uma reta qualquer (r) e um eixo de rotação (e), desta feita, paralelo ao plano vertical de projeção (π'). Tal como no caso anterior, a extremidade (A) do segmento é ponto comum à reta e ao eixo que pertencem a um mesmo plano perpendicular ao plano vertical de projeção (π'), tal como mostrado na figura 49.

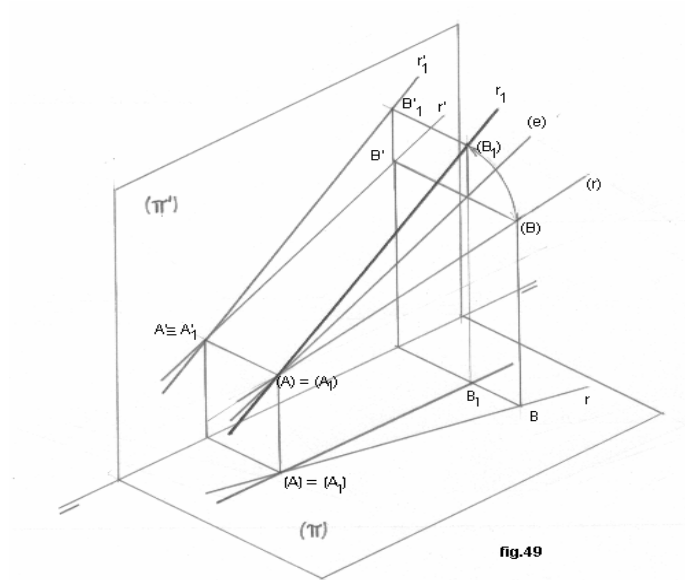


fig.49

O objetivo da operação é fazer com que o segmento (AB) efetue uma rotação em torno do eixo (e) e se transforme no segmento (A_1B_1) paralelo ao plano (π'), onde se projetará em verdadeira grandeza.

Podemos verificar o seguinte:

- a) o ponto (A) não se altera durante a rotação;
- b) como (r) e (e) pertencem a um mesmo plano perpendicular a (π'), suas projeções verticais são idênticas;
- c) o raio do arco descrito por (B) durante a rotação em torno de (e) é o segmento (OB), perpendicular a (e) que projeta no plano vertical de projeção (π') segundo um plano.
- d) o raio (OB) tem comprimento igual à diferença de afastamentos entre (B) e (e) e após a rotação ficará paralelo ao plano vertical (π') projetando-se em verdadeira grandeza (VG) neste plano.

Na figura 50 está representada a épura correspondente obtida obedecendo aos seguintes procedimentos geometrográficos:

- 1) Faz-se inicialmente:

$$[81] (A) \equiv (A_1)$$

- 2) Consequentemente teremos:

$$[82] A' \equiv A'_1$$

$$[83] A \equiv A_1$$

- 3) Faz-se, em seguida:

$$[84] e' \equiv A'B'$$

- 4) Em conseqüência, teremos:

$$[85] B' \equiv O'$$

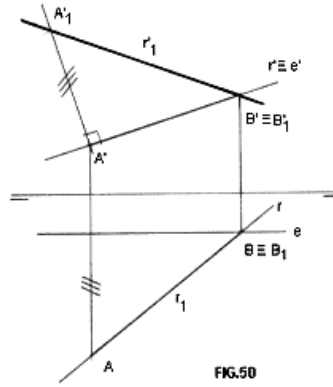
- 5) E ainda:

[86] $OB = y(B) - y(e) = VG \text{ de } (OB)$

- 6) Concluída a rotação, (AB) se transforma em $(A'_1B'_1)$, paralela ao plano vertical de projeção (\square') e OB'_1 fica, evidentemente, perpendicular a $e' \equiv A'B'e$:

[87] $OB'_1 = OB = y(B) - y(e)$

O segmento $A'_1B'_1$ é a verdadeira grandeza (VG) do segmento (AB) .



CAPÍTULO IX

ESTUDO DESCRITIVO DS FIGURAS PLANAS

1.0 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

O estudo descritivo de um plano, inclusive no que tange às posições em que pode estar localizado em relação a um plano de projeção ou mesmo a um sistema de dupla projeção ortogonal, pode ser desenvolvido de modo simples e objetivo quando se faz uso de uma figura plana, de fácil resolução, que pertença ao plano a ser estudado.

2.0 – POSIÇÕES DE UMA FIGURA EM RELAÇÃO A UM PLANO

Um plano, ou melhor, a figura plana que o caracteriza, pode estar posicionada das seguintes formas em relação a um plano agora considerado *plano de projeção*:

- I- paralela
- II- perpendicular
- III- oblíqua

Seja, pois, (ABC) um triângulo de vértices (A), (B) e (C), pertencente a um plano (α) e (π) o plano de projeção considerado. O posicionamento do triângulo (ABC) determinará a posição do plano (α) em relação ao plano de projeção (π).

2.1 – FIGURA PARALELA AO PLANO DE PROJEÇÃO

Projetando ortogonalmente os pontos (A), (B) e (C) no plano (π) ficam determinadas, respectivamente, suas projeções A, B e C. O triângulo ABC será, portanto, a projeção ortogonal do triângulo (ABC) no plano (π).

Como (ABC), por hipótese, é paralela ao plano (π), pode-se verificar na figura 66 que:

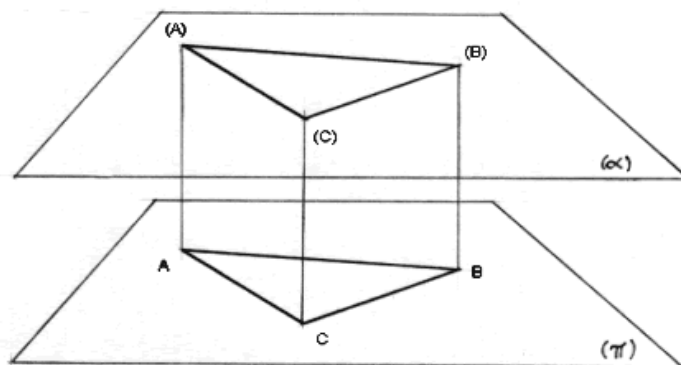


FIG.66

$$[88] (A)A = (B)B = (C)C$$

Os quadriláteros $(A) (B) B A$, $(B) (C) C B$ e $(C) (A) A C$ são retângulos, o que nos permite afirmar então que:

$$[89] (AB) = AB$$

$$[90] (BC) = BC$$

$$[91] (AC) = AC$$

Logo, podemos concluir que:

Quando uma figura plana (figura objetiva) é paralela a um plano, sua projeção ortogonal neste plano é outra figura, de mesma forma e dimensões da figura real, ou seja, esta projeção está em verdadeira grandeza.

2.2 – FIGURA PERPENDICULAR AO PLANO DE PROJEÇÃO

Projetando ortogonalmente os pontos (A) , (B) e (C) no plano (π) observa-se na figura 67 que suas respectivas projeções, ou seja, os pontos A , B e C , estão localizados na interseção de (α) com (π) logo, são colineares.

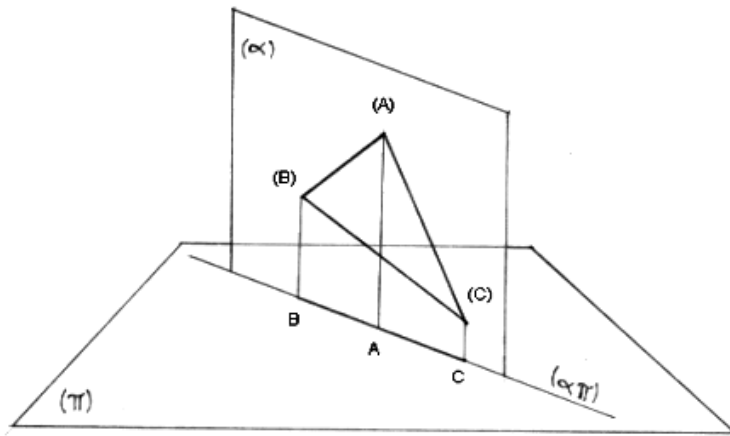


FIG.67

Assim, podemos concluir que:

Quando uma figura plana (figura objetiva) é perpendicular a um plano, sua projeção ortogonal neste plano se reduz a um segmento de reta.

2.3 – FIGURA OBLÍQUA AO PLANO DE PROJEÇÃO

Observemos a figura 68, a seguir.

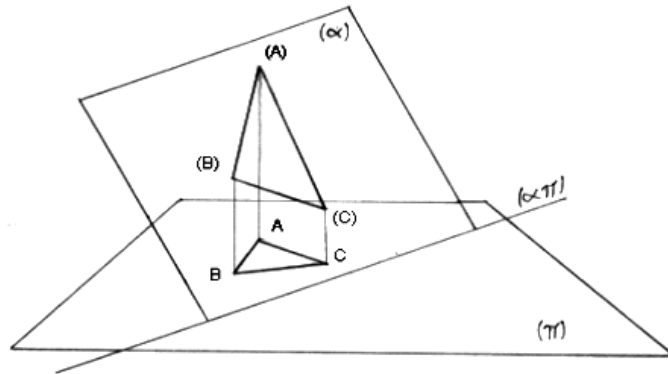


FIG.68

Projetando ortogonalmente os pontos (A), (B) e (C) no plano (π) verifica-se que:

[92] $(A)A \neq (B)B \neq (C)C$

Neste caso, teremos:

$$[93] (AB) \neq AB$$

$$[94] (BC) \neq BC$$

$$[95] (AC) \neq AC$$

Em situações particulares poderá ocorrer o seguinte:

$$[96] (A)A = (B)B \neq (C)C \Rightarrow (AB) = AB$$

$$[97] (A)A = (C)C \neq (B)B \Rightarrow (AC) = AC$$

$$[98] (A)A \neq (B)B = (C)C \Rightarrow (BC) = BC$$

Em resumo, podemos concluir que:

Quando uma figura plana (figura objetiva) é oblíqua a um plano, sua projeção ortogonal, neste plano, é outra figura que não é a verdadeira grandeza da figura real.

3.0 – POSIÇÕES DO PLANO NUM SISTEMA DE DUPLA PROJEÇÃO ORTOGONAL

Em relação a um sistema de dupla projeção ortogonal, um plano que contenha uma determinada figura plana pode estar posicionado numa das seguintes condições:

I – paralelo a um dos planos de projeção;

II – perpendicular a um dos planos de projeção e perpendicular ao outro;

III – perpendicular aos dois planos de projeção

IV – oblíquo aos dois planos de projeção.

Sejam então:

- (α): plano posicionado num sistema de dupla projeção ortogonal determinado;

- (π) e (π') : respectivamente, planos de projeção horizontal e vertical do sistema considerado:
- (P_i) , (r_i) e (f_i) : respectivamente, pontos, retas e figuras genéricas pertencentes a (α) .

Cabe, ainda, lembrar o seguinte:

- $\alpha\pi$: traço horizontal de (α) , ou seja, interseção de (α) com o plano (π) ;
- $\alpha\pi'$: traço vertical de (α) , ou seja, interseção de (α) com plano (π')

Assim sendo, podemos afirmar que:

- a) $(\alpha\pi)$ é o lugar geométrico dos pontos de (α) que têm cota nula, logo:

$$[99] \quad z(\alpha\pi) = z(H_i) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$[100] \quad (H_i) \in \alpha\pi, \text{ onde}$$

(H_i) : traço horizontal de todas as retas que pertencem a (α) .

- b) $(\alpha\pi')$ é o lugar geométrico dos pontos de (α) que têm afastamento nulo, logo:

$$[101] \quad y(\alpha\pi') = y(v_i) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$[102] \quad (v_i) \in \alpha\pi', \text{ onde}$$

(v_i) : traço vertical de todas as retas que pertencem a (α) .

Este conjunto de informações permite-nos identificar a posição de um determinado plano (α) em relação aos planos de projeção, (π) e (π') , de um sistema de dupla projeção ortogonal ao qual o plano em tela esteja vinculado, bem como representá-lo em épura através de seus traços, $(\alpha\pi)$ e $(\alpha\pi')$, estabelecendo as propriedades geométricas de todas as figuras que lhe pertencem.

3.1 – PLANO PARALELO A UM DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

Nestas condições, o plano (α) pode estar:

I – paralelo à (π) ou

II – paralelo à (π')

3.1.1 – PLANO PARALELO À (π)

Na vista em perspectiva (figura 69-a), vemos que:

[103] $z(P_i) = \text{constante}$

[104] $(\alpha) \perp (\pi')$

[105] $f = (f)$

[106] $f' \equiv (\alpha\pi')$

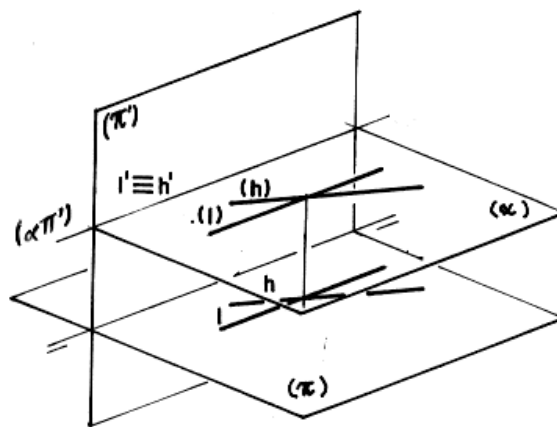


FIG 69a

Na écura correspondente (figura 69-b), vemos que:

[107] $(\alpha\pi') // LT$

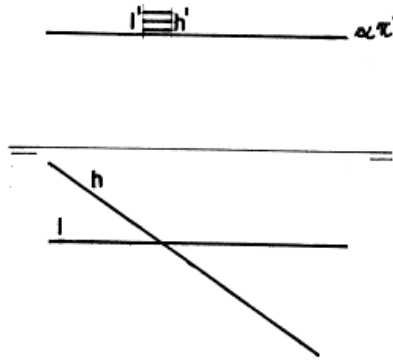


FIG 69b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano de nível* e sua caracterização pode ser complementada pela identificação do seu traço vertical, da seguinte forma:

$$(\alpha) : [z(P_i)] \text{ ou ainda,}$$

$$(\alpha) : [z(\alpha\pi')]$$

3.1.2 – PLANO PARALELO À (π)

Na vista em perspectiva (figura 70-a), vemos que:

$$[108] \ y(P_i) = \text{constante}$$

$$[109] \ (\alpha) \perp (\pi)$$

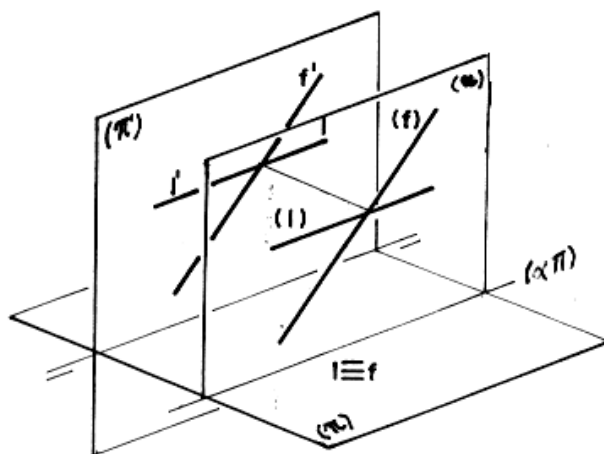


FIG 70a

Na éfura correspondente (figura 70-b), vemos que:

[110] $(\alpha\pi) // LT$

[111] $f' = (f)$

[112] $f \equiv (\alpha\pi)$

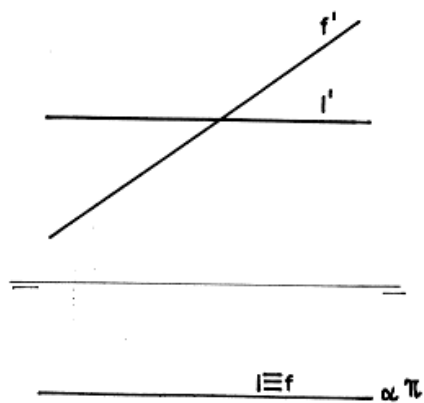


FIG 70b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano frontal* e sua caracterização pode ser complementada pela identificação do seu traço horizontal, da seguinte forma:

$(\alpha): [y(P_i)]$, ou ainda

$(\alpha): [y(\alpha\pi)]$

3.2 – PLANO PERPENDICULAR A UM DOS PLANOS DE PROJEÇÃO E PERPENDICULAR AO OUTRO

Nestas condições, o plano pode estar:

I – perpendicular a (π) e oblíquo a (π') ou

II - perpendicular a (π') e oblíquo a (π)

3.2.1 – PLANO PERPENDICULAR A (π) E OBLÍQUO À (π')

Na vista em perspectiva (figura 71a), vemos que:

$$[113] \angle(\alpha, (\pi')) = \angle((\alpha\pi), LT = \rho$$

$$[114] (\alpha\pi) \perp (\alpha\pi')$$

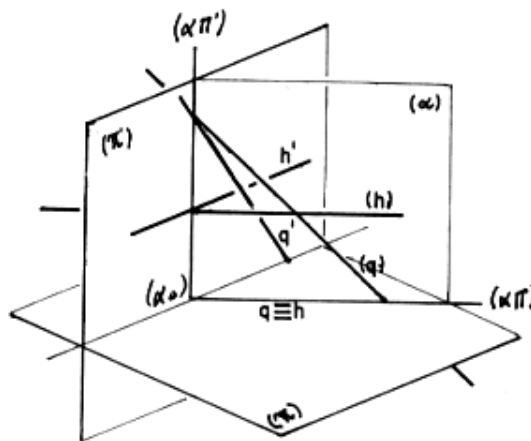


FIG 71a

Na épura correspondente (figura 71b), vemos que:

$$[115] \angle (\alpha), (\pi') = \angle \alpha\pi, LT = \rho$$

$$[116] \alpha\pi' \perp LT$$

$$[117] f' \neq (f)$$

$$[118] f \equiv \alpha\pi$$

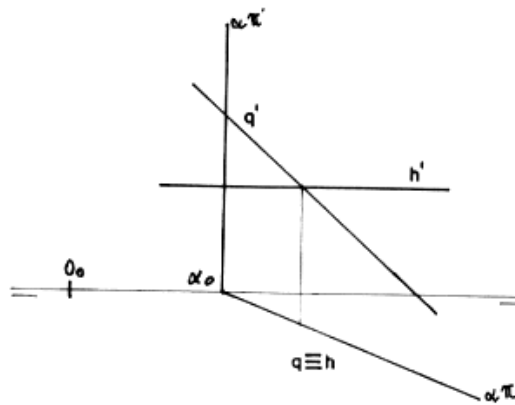


FIG 71b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano vertical* e sua caracterização pode ser complementada da seguinte forma:

(α) : [α_0 ; ρ D] ou (α) : [α_0 ; ρ E], onde

- D: indica que a abertura de ρ está voltada para o lado direito da linha de terra, e
- E: indica que a abertura de ρ está voltada para o lado esquerdo da linha de terra

3.2.2.- PLANO PERPENDICULAR À (π') E OBLÍQUO À (π)

Na vista em perspectiva (figura 72-a), vemos que:

$$[119] \angle (\alpha), (\pi) = \angle (\alpha\pi), LT = \varphi$$

$$[120] (\alpha\pi) \perp (\alpha\pi')$$

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano de topo* e sua caracterização pode ser complementada da seguinte forma:

(α): [α_0 ; φ D] ou (α): [α_0 ; φ E] , correspondendo D e E à abertura de φ
 (3.2.1)

3.3 – PLANO PERPENDICULAR AOS DOIS PLANOS DE PROJEÇÃO

Na vista em perspectiva (figura 73-a), vemos que:

[125] (α) \perp LT

[126] ($\alpha\pi$) \equiv ($\alpha\pi'$)

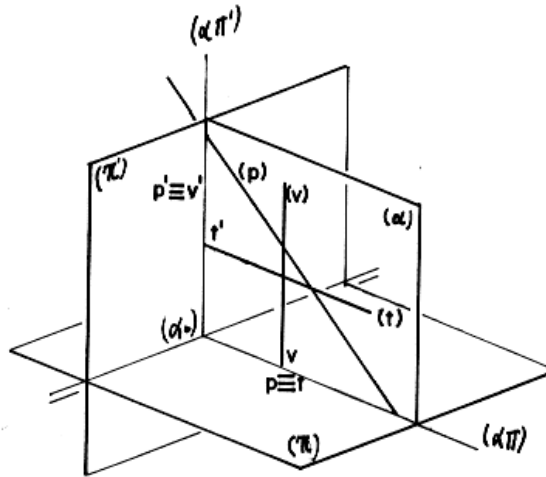


FIG 73a

Na épora correspondente (figura 73-b), vemos que:

[127] $\alpha\pi \equiv \alpha\pi' \perp$ LT

[128] $x(P_i) = x(\alpha_0)$

[129] $f \equiv \alpha\pi$

[130] $f' \equiv \alpha\pi'$

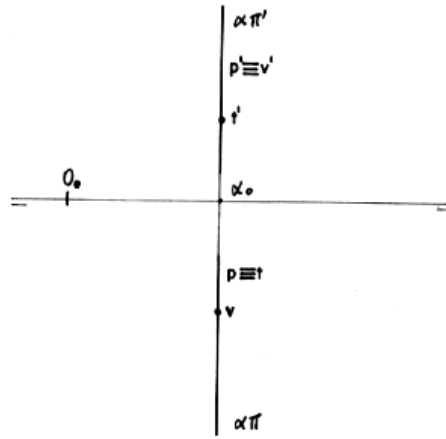


FIG 73b

Um plano que satisfaça tais características é chamado *plano de perfil* e sua caracterização pode ser complementada pela identificação dos seus traços, da seguinte forma:

$$(\alpha): [x (\alpha_0)]$$

3.4 – PLANO OBLÍQUO AOS DOIS PLANOS DE PROJEÇÃO

Nestas condições, o plano pode estar:

- I – paralelo à linha de terra
- II – passando pela linha de terra
- III – oblíquo à linha de terra

3.4.1 – PLANO PARALELO À LINHA DE TERRA

Na vista em perspectiva (figura 74-a), vemos que:

$$[131] \angle (\alpha), (\pi) = \varphi$$

$$[132] \angle (\alpha), (\pi') = \rho$$

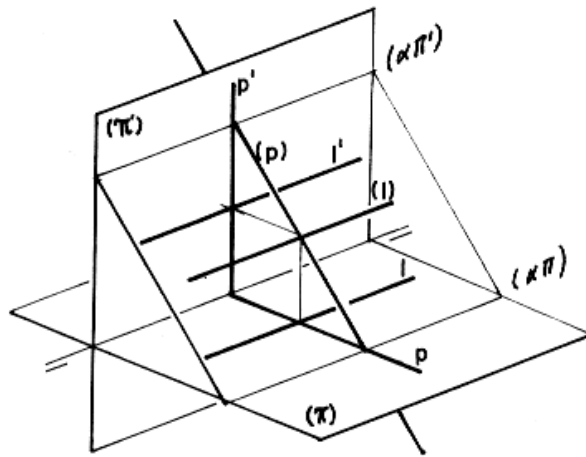


FIG 74a

Na épora correspondente (figura 74-b), vemos que:

$$[133] \alpha\pi // \alpha\pi' // LT$$

$$[134] f \neq (f)$$

$$[135] f' \neq (f')$$

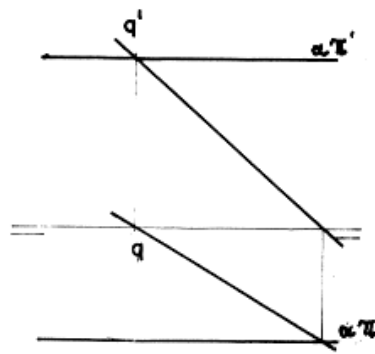


FIG 74b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano paralelo à linha de terra* (ou *plano em rampa*) e sua caracterização pode ser complementada pela identificação dos seus traços, da seguinte forma:

$$(\alpha): [\varphi; \rho]$$

3.4.2 – PLANO QUE PASSA PELA LINHA DE TERRA

Na vista em perspectiva (figura 75-a), vemos que:

$$[136] \quad \angle (\alpha\pi), (\pi) = \varphi$$

$$[137] \quad \angle (\alpha\pi'), (\pi') = \rho$$

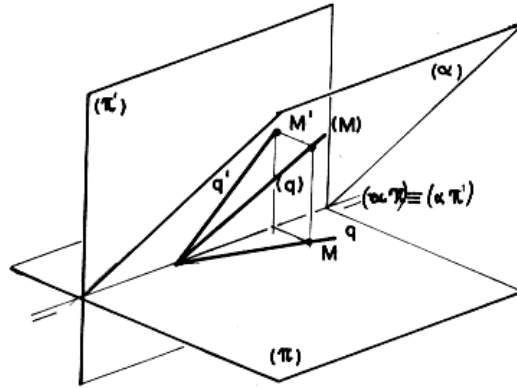


FIG 75a

Na écura correspondente (figura 75-b), vemos que:

$$[138] \quad \alpha\pi \equiv \alpha\pi' \equiv LT$$

$$[139] \quad f \neq (f)$$

$$[140] \quad f' \neq (f)$$

$$[141] \quad z(P_1) / y(P_1) = z(P_2) / y(P_2) = \dots = z(P_n) / y(P_n) = k, \text{ onde}$$

$$[142] \quad k = \text{tg } \varphi$$

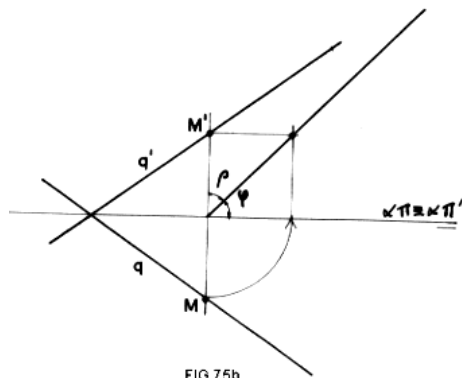


FIG 75b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano que passa pela linha de terra* e sua caracterização pode ser complementada da seguinte forma:

$$(\alpha): [\varphi] \text{ ou } (\alpha): [\rho]$$

3.4.3 – PLANO OBLÍQUO À LINHA DE TERRA

Na vista em perspectiva (figura 76-a), vemos que:

$$[143] \angle (\alpha), (\pi) \neq \angle \alpha\pi, LT$$

$$[142] \angle (\alpha), (\pi') \neq \angle \alpha\pi', LT$$

$$[143] \angle (\alpha\pi), (\alpha\pi') \neq 90^\circ$$

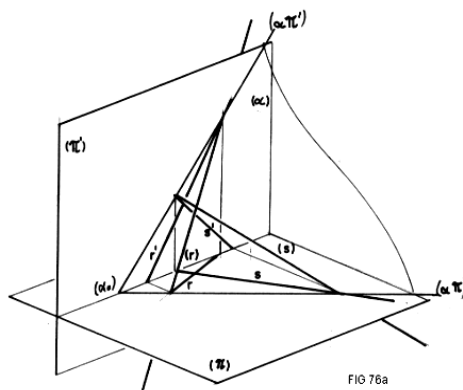


FIG 76a

Na épura correspondente (figura 76-b), vemos que:

$$[144] \angle \alpha\pi, LT = \phi_1$$

$$[145] \angle \alpha\pi', LT = \phi_2$$

$$[146]] f' \neq (f)$$

$$[147]] f'' \neq (f)$$

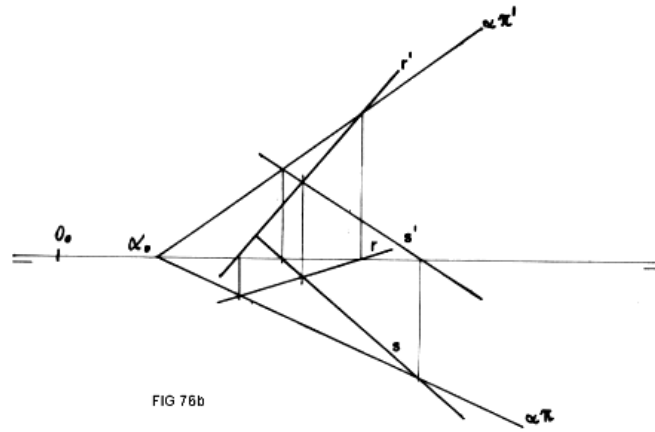


FIG 76b

Um plano que satisfaça tais condições é chamado *plano qualquer* e sua caracterização pode ser complementada da seguinte forma: $(\alpha): [\alpha_0; \phi_1; \phi_2]$

CAPÍTULO X

VERDADEIRA GRANDEZA DE FIGURAS PLANAS

1.0 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A determinação da verdadeira grandeza (VG) de figuras planas obedece, rigorosamente, aos mesmos procedimentos estabelecidos para a determinação da verdadeira grandeza de segmentos de retas, tal como visto no Capítulo VII.

Assim sendo, a VG de qualquer figura plana poderá ser obtida, tanto utilizando planos auxiliares, como efetuando a rotação da figura em torno de um eixo, até que a mesma se posicione paralelamente a um dos planos de projeção.

2.0 – CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DAS FIGURAS PLANAS

As figuras planas podem ser constituídas somente por segmentos retilíneos contínuos, por uma única curva, somente por segmentos curvos ou, ainda, por segmentos retos e curvos desde que, em qualquer caso, todos os elementos que as constituem sejam coplanares.

As figuras planas, independentemente da forma que possuam, podem ser geométricas ou não geométricas, entendendo-se por figura geométrica aquela que pode ser representada por uma equação (algébrica ou transcendente) ou que obedeça a uma determinada lei de formação.

2.1 – POLÍGONOS

As figuras constituídas somente por segmentos de retas são chamadas *poligonais* que, por seu turno, podem ser *abertas* ou *fechadas*.

As poligonais abertas são as chamadas *linhas poligonais*.

Nas poligonais fechadas, a extremidade do segmento considerado como o último, coincide com a extremidade do considerado como primeiro. Nesta condição a figura é chamada *polígono*, que pode, ainda, ser *convexo* ou *estrelado*.

Chama-se *lado* de um polígono a cada segmento retilíneo que o constitui.

Um polígono é considerado *convexo* quando qualquer reta que o traspasse, o intercepta em apenas dois pontos.

Um polígono é considerado *regular* quando, além de convexo, todos os seus lados são iguais, assim como são iguais os ângulos formados por cada par de lados adjacentes. São exemplos de polígonos regulares o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o dodecágono regular.

2.2 – CURVAS

As figuras planas constituídas por uma única curva são, de um modo geral, geométricas e, por isso, identificadas por suas propriedades algébricas ou gráficas. Por suas propriedades algébricas as curvas mais utilizadas são o círculo e as cônicas, principalmente a elipse e a parábola. Dentre as curvas gráficas, as ovais são aquelas usadas com maior frequência.

Figuras formadas por segmentos retos e curvos são usadas frequentemente em projetos mecânicos.

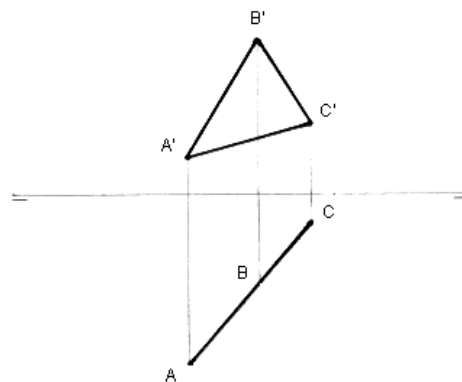
Figuras formadas somente por segmentos curvos, sem características geométricas definidas, não são comuns e nem despertam qualquer interesse prático.

3.0 – DETERMINAÇÃO DA VERDADEIRA GRANDEZA (VG)

Para conhecer a verdadeira grandeza de uma figura plana, seja ela poligonal ou curva, basta que se proceda a uma operação geometrográfica única, que abranja todos os elementos (segmentos retilíneos e/ou pontos de curvas) que permitam identificá-la com segurança de modo que, finda a operação, a figura se posicione paralelamente ou pertencente à superfície de um plano de projeção, convenientemente escolhido, conforme o método adotado.

3.1 – VERDADEIRA GRANDEZA DE POLÍGONOS

A figura 77-a representa a épura de um triângulo (ABC), posicionado num sistema de dupla projeção ortogonal de tal forma que o plano em que está contido é perpendicular a (π) e oblíquo a (π') . Trata-se de um plano *vertical*, (α) , como se pode depreender.



As figuras 77-a, b, c e d são épuras onde estão representadas a VG do triângulo (ABC), respectivamente para cada um dos procedimentos geométricos adotados, como se segue:

Figura 77-b: criado um novo sistema projetivo através da adoção de um plano paralelo ao plano do triângulo e perpendicular ao plano (π), este mantido como plano horizontal do novo sistema.

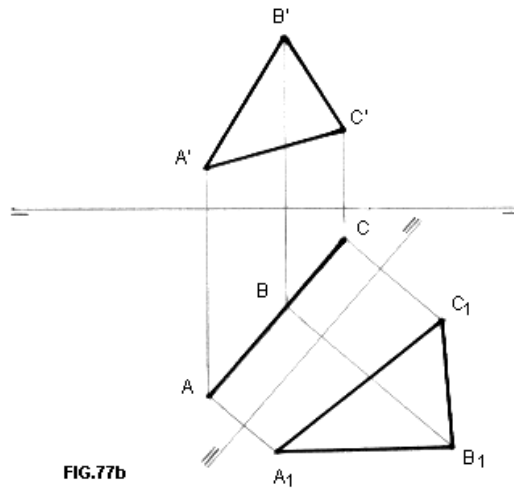


Figura 77-c: efetuada uma rotação do triângulo em torno de um eixo vertical que passa pelo vértice (C) até o triângulo ficar paralelo à (π').

Figura 77-d: efetuada uma rotação do triângulo em torno de um eixo vertical coincidente com o traço vertical do plano (α), ou seja, ($\alpha\pi'$), até que a superfície de (α) se superponha à superfície de (π').

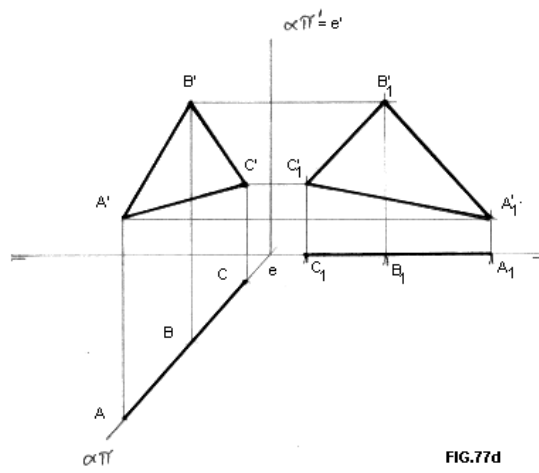


FIG.77d

Figura 77-e: efetuada uma rotação do triângulo em torno de um eixo horizontal que passa pelo vértice (A), até que o triângulo fique paralelo à (π).

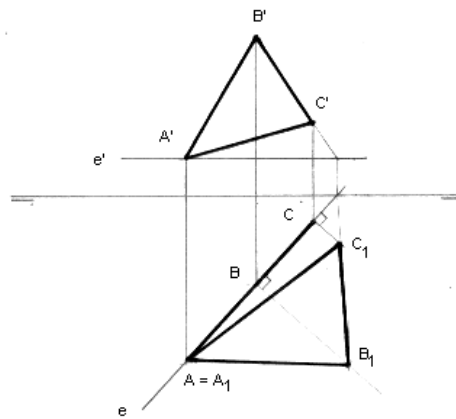


FIG.77e

Podemos verificar que, aparentemente, não há vantagem de uma solução sobre outra embora as soluções I e IV exijam menos linhas de construção.

Na figura 78-a, o triângulo (ABC) está contido num plano (α), *paralelo à linha de terra*.

Suas projeções, portanto, não estão em verdadeira grandeza. Para que seja possível conhecê-la, foram adotados os procedimentos geometrográficos indicados, respectivamente, nas figuras 78-b,c e d, como se segue:

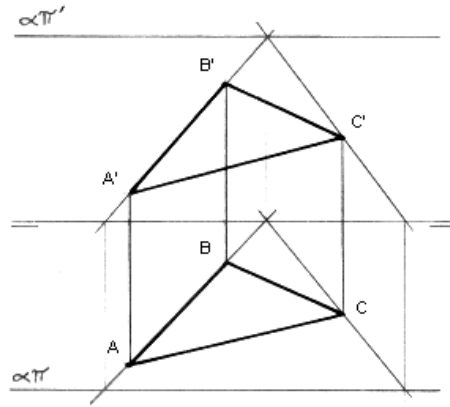


FIG.78a

Figura 78-b: criado um segundo sistema projetivo através da adoção de um plano de perfil, perpendicular ao plano (α) e, conseqüentemente, perpendicular a (π) e a (π'). O plano (π') foi mantido como plano vertical. Ao projetarmos o triângulo neste novo sistema, o triângulo ficou perpendicular ao plano de perfil, necessitando a criação de um terceiro sistema projetivo, agora mantendo o plano de perfil e adotando um novo plano de projeção paralelo a ele. Neste novo plano o triângulo se projeta em VG.

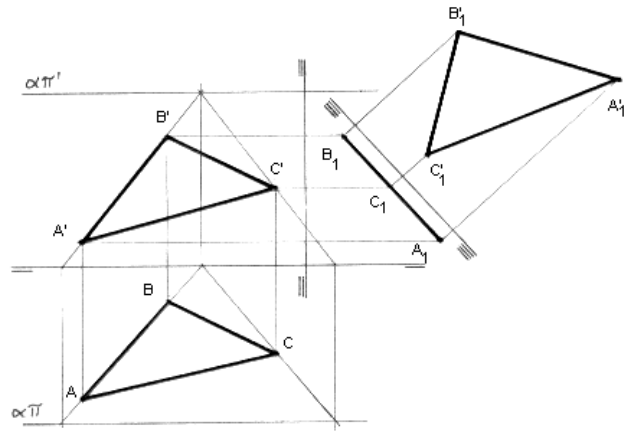


FIG. 78b

Figura 78-c: criado um segundo sistema projetivo tal como descrito no inciso anterior. Efetua-se, então, uma rotação que passa pelo traço horizontal de (α) , ou seja $(\alpha\pi)$, até que a superfície de (α) se superponha à superfície de (π) ,

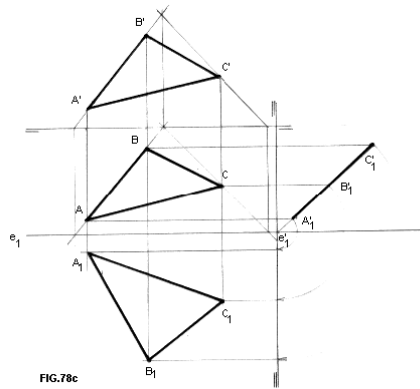


FIG. 78c

Figura 78-d: efetu... **FIG. 78c** ...ção em torno de uma reta horizontal – neste caso, fronto-horizontal – até que o triângulo fique paralelo ao plano (π) .

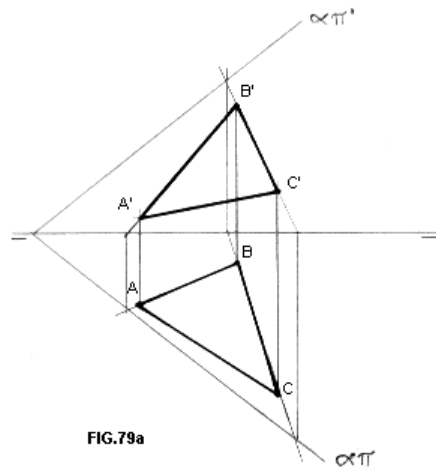


FIG.79a

Suas projeções, portanto, não estão em verdadeira grandeza. Para que seja possível conhecê-la, foram adotados os procedimentos geométricos indicados, respectivamente, nas figuras 79-b,c, d e e, como se segue:

Figura 79-b: criado um segundo sistema projetivo através da adoção de um plano vertical, $(\pi'1)$, perpendicular ao traço horizontal $(\alpha\pi)$ do plano (α) mantendo o plano (π) como plano horizontal deste sistema. Ao projetarmos o triângulo neste novo sistema, o triângulo ficou perpendicular ao plano $(\pi'1)$, necessitando a criação de um terceiro sistema projetivo, agora mantendo o plano $(\pi'1)$ e adotando um novo plano de projeção paralelo a ele. Neste novo plano o triângulo se projeta em VG.

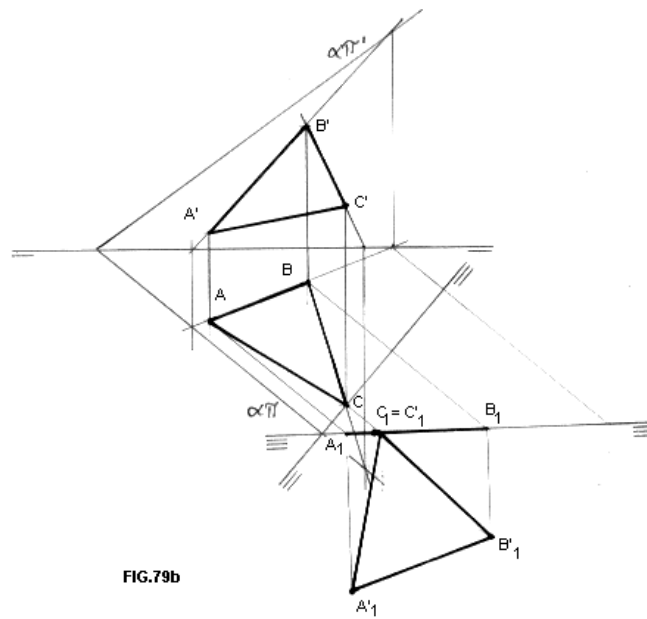
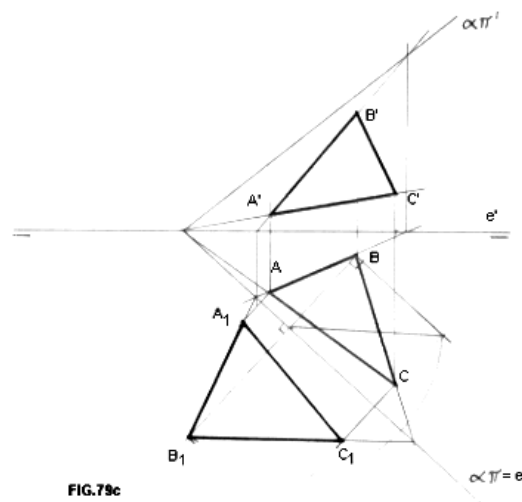


Figura 79-c: efetuada uma rotação do triângulo em torno de um eixo horizontal que coincide com o traço horizontal do plano (α), até que o triângulo fique paralelo à (π).



III- Figura 79-d: efetuada uma rotação em torno de um eixo horizontal até que o triângulo fique paralelo ao plano horizontal de projeção (π).

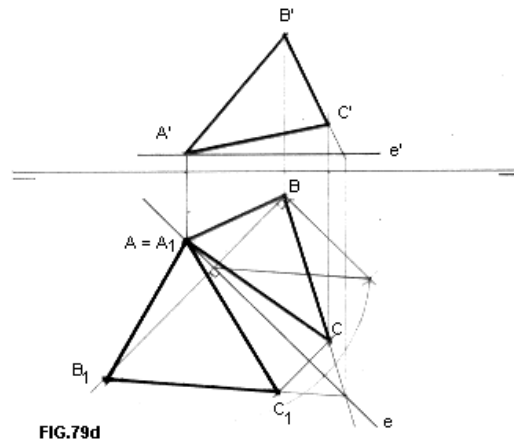
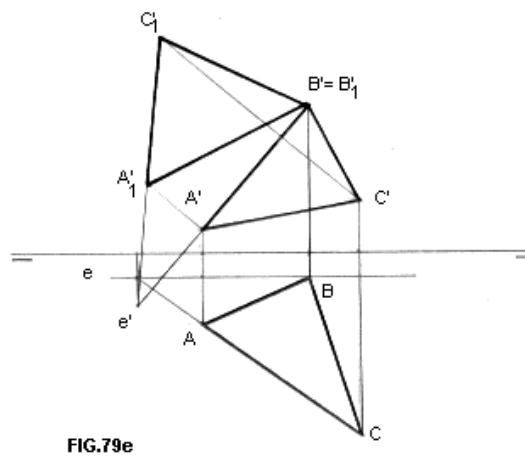


Figura 79-e: efetuada uma rotação em torno de um eixo frontal – paralelo, portanto ao plano vertical de projeção (π'), até que o triângulo fique paralelo a este plano.



Na figura 80-b é apresentada a épora representativa das projeções do círculo. Tais projeções foram obtidas a partir da VG do círculo, determinada após uma rotação efetuada no ponto (O) em torno de um eixo vertical coincidente com o traço vertical do plano (α), quando a superfície de (α) se superpôs à superfície de (π^7).

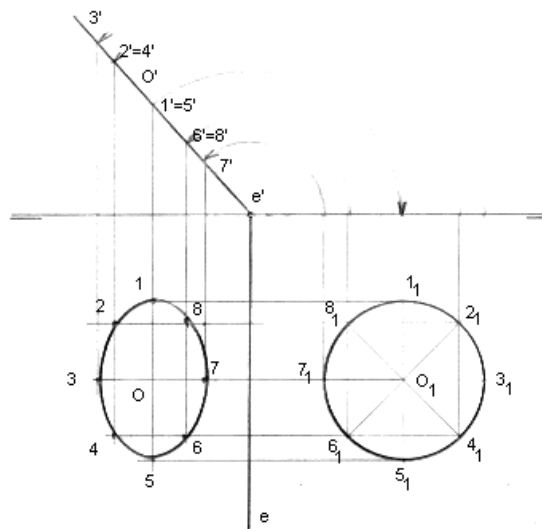


FIG.80b

BIBLIOGRAFIA

- **Rodrigues, Álvaro José** - Geometria Descritiva / Operações Fundamentais e Poliedros, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 5ª ed., 1961;
- **Rodrigues, Álvaro José** - Geometria Descritiva / Projetividades, Curvas e Superfícies, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1960;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Curvas, UFRJ, Rio de Janeiro, 1974;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Geometria Descritiva, SEDEGRA, Rio de Janeiro, 1959;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Superfícies, texto datilografado pelo próprio autor;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Dicionário de Matemática, texto datilografado pelo próprio autor;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Poliedros, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982;
- **Rangel, Alcyr Pinheiro** - Tópicos Extraídos de Palestras, Preleções e Publicações;
- **Bustamante, Léa Santos** - Transformações Projetivas / Sistemas Projetivos, Tese de concurso para Professor Titular da Escola de Belas Artes da UFRJ, 1981;
- **Bustamante, Léa Santos** - Projeções da Esfera, Tese de Concurso para Professor Catedrático da Escola Nacional de Belas Artes da antiga Universidade do Brasil, 1960;
- **Pinheiro, Virgílio Athayde** - Noções de Geometria Descritiva, Vol. III, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 2ª ed., 1971;
- **Chaput, Frère Ignace (F.I.C.)** - Elementos de Geometria Descritiva, F.Brigniet & Cia., Rio de Janeiro, 14ª ed., 1955;
- **Almeida, Célio Pinto** - Geometria Descritiva, Vols.7 e 8, Apostilas para cursos vestibulares, editor desconhecido;

- **Javary, A.** - Traité de Géométrie Descriptive, 1^a e 2^a parte, Librairie Ch. Delagrave, Paris, 7^a ed., 1901;
- **Roubaudi, C.** - Traité de Géométrie Descriptive, Masson et Cie., Paris, 9^a ed. 1948;
- **Gordon, Oguiyevski** - Curso de Geometria Descriptiva, Editorial Mir, Moscou, 2^a ed., 1980.
- **Chahly, A.T.** - Descriptive Geometry, Higer School PublishingHouse, Moscou, 2^a ed., 1968;
- **Wellman, B. Leighton** - Technical Descriptive Geometry, McGraw Hill Book Company, Inc, Nova York, 2^a ed., 1957;
- **Haussner, Robert** - Geometria Descriptiva, Editorial Labor, Barcelona, 1928;
- **Di Pietro, Donato** - Geometria Descriptiva, Libreria y Editorial Alsina, Buenos Aires, 2^a ed., 1957;