

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Notas de Aula do Prof. Fernando L. B. Ribeiro

COPPE / UFRJ – Programa de Engenharia Civil



Rio de Janeiro, 30/03/2004

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	4
2	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL	5
2.1	Formulação Clássica	5
2.2	Formulação Variacional	5
2.3	Aproximação por Elementos Finitos	7
2.4	Condições para convergência do MEF	11
3	ELASTICIDADE PLANA	14
3.1	Introdução.....	14
3.2	Formulação Clássica do Problema de Elasticidade Plana.....	15
3.3	Formulação Variacional	16
3.4	Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	18
3.5	Energia Potencial Total	18
3.6	Formulação Variacional Discreta.....	20
3.6.1	Energia de Deformação	22
4	PROBLEMAS DE ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL.....	23
4.1	Introdução.....	23
4.2	Formulação Clássica do Problema de Elasticidade Tridimensional	23
4.3	Formulação do MEF	24
5	ELEMENTOS DE BARRA.....	26
5.1	Barra Submetida a Esforços Axiais.....	26
5.2	Barra Submetida a Esforços de Flexão.....	29
6	PROBLEMAS DE POTENCIAL	34
6.1	Introdução.....	34
6.2	Formulação Clássica	34
6.3	Formulação Variacional	35
6.4	Formulação Variacional Discreta.....	36
7	ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	37
7.1	Integração no Domínio Real.....	37
7.2	Mapeamento Isoparamétrico.....	38
7.2.1	Jacobiano da Transformação de Coordenadas.....	39
7.3	Mapeamento: Generalização.....	44
7.4	Elementos Isoparamétricos de Continuidade C^0	45
7.4.1	Elementos Uniaxiais	45
7.4.2	Elementos Quadriláteros - Família de Lagrange	47
7.4.3	Elementos Quadriláteros - Família de Serendipity	51
7.4.4	Elementos Triangulares	58
7.4.5	Hexaedros	63
7.4.6	Tetraedros	65
7.5	Exercícios Propostos	68
8	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	70
8.1	Integração Numérica de Gauss	70
8.2	Regras de Integração para Triângulos e Tetraedros	74
9	ESTIMATIVAS DE ERRO.....	77
9.1	Estimativas de Erro Globais e Locais.....	77
9.2	Taxas de Convergência	79
10	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	81
10.1	Estado Plano de Deformação.....	81
10.2	Elasticidade Tridimensional	84

*Introdução ao Método dos Elementos Finitos – Programa de Engenharia Civil,
COPPE / UFRJ – Notas de aula do Prof. Fernando L. B. Ribeiro*

10.3	Problema de Potencial.....	91
11	REFERÊNCIAS.....	93

INTRODUÇÃO

Grande parte dos problemas de engenharia pode ser formulada através dos princípios gerais da Mecânica do Contínuo ([1],[2]). Este ramo da mecânica trata a matéria como sendo um meio contínuo, sem vazios interiores, desconsiderando sua estrutura molecular. O conceito de “continuum” permite a definição do ponto geométrico (de volume igual a zero), por um limite matemático tal como na definição de derivadas no cálculo infinitesimal. Assim, na Mecânica do Contínuo os princípios da física são escritos sob a forma de equações diferenciais. Os efeitos da constituição interna molecular dos materiais são levados em conta de forma macroscópica através das equações constitutivas do material.

A primeira etapa no processo de modelagem computacional de um fenômeno físico consiste na identificação dos fatores que influenciam de maneira relevante no problema. Isto implica na escolha adequada dos princípios físicos e das variáveis dependentes e independentes que descrevem o problema, resultando em um modelo matemático constituído por um conjunto de equações diferenciais. A segunda etapa do processo consiste em obter a solução do modelo matemático, tarefa esta atribuída aos métodos numéricos. O Método das Diferenças Finitas é um destes métodos, que como o próprio nome sugere, foi criado com a finalidade específica de resolver sistemas de equações diferenciais. Por outro lado, o Método dos Elementos Finitos (MEF) teve suas origens na análise estrutural. Com o surgimento dos primeiros computadores digitais no início da década de 50, os métodos matriciais para a análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, mas a crescente demanda por estruturas mais leves, tais como as encontradas na indústria aeronáutica, conduziu ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos. Entre os trabalhos pioneiros nesta linha, podem-se citar os trabalhos de Turner [3] e Argyris [4]. Zienkiewicz, em seu histórico artigo “*The Finite Element Method: from Intuition to Generality*” [5], apresenta uma descrição mais detalhada da evolução do MEF nesta fase inicial. Na década de 70 o MEF teve suas aplicações estendidas a problemas de mecânica dos fluidos e, desde então, vem consolidando-se como um método mais geral de solução de equações diferenciais parciais. Todo o embasamento matemático deste método vem da disciplina Análise de Funcionais ([6],[7],[8]).

1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

Um problema de valor de contorno consiste em determinar a função que satisfaz a uma determinada equação diferencial em um dado domínio, conhecendo-se *a-priori* os valores que a função e/ou suas derivadas assumem no contorno do domínio. Esta descrição corresponde à formulação clássica do problema. A solução pode ser obtida analiticamente, quando possível, ou através de métodos numéricos, como o método das diferenças finitas. Uma outra maneira de formular o problema é através de formulações variacionais, envolvendo equações integrais. Pode-se chegar à formulação variacional do problema de várias maneiras, como por exemplo, através dos princípios dos trabalhos virtuais e da energia potencial mínima, em problemas estruturais, e através do método dos resíduos ponderados de um modo mais geral. Dentre os métodos que se aplicam às formulações integrais podem-se citar o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno, sendo que este último envolve apenas equações integrais de contorno. Apresentam-se a seguir as formulações clássica e variacional de um problema unidimensional de valor de contorno, introduzindo-se os conceitos básicos do MEF.

1.1 Formulação Clássica

Dados $f(x)$ e g , determinar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \text{em } [0,1] \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u(1) = 0 & \text{(condição de contorno essencial)} \\ \frac{du}{dx}(0) = g & \text{(condição de contorno natural)} \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2 Formulação Variacional

A formulação variacional correspondente ao problema estabelecido em (1.1)-(1.2) pode ser escrita na seguinte forma:

Dados $f(x)$ e g , determinar $u(x) \in U \mid \forall w(x) \in W$,

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^1 f w dx - g w(0) \quad (1.3)$$

sendo U o espaço de funções admissíveis,

$$U = \left\{ u(x) \mid u(1) = 0, \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (1.4)$$

e W o espaço de funções peso, ou funções de ponderação,

$$W = \left\{ w(x) \mid w(1) = 0, \quad \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (1.5)$$

Observações:

- 1) U e W representam o mesmo espaço de funções ($U \equiv W$). Este espaço contém todas as funções que se anulam em $x = 1$ e cujas derivadas primeiras possuem quadrado integrável em $[0, 1]$.
- 2) A base de $U \equiv W$ tem dimensão infinita e pode ser dada, por exemplo, por funções polinomiais de grau p contínuas em $[0, 1]$ e diferentes de zero somente em uma parte do domínio:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(x) a_i \quad (1.6)$$

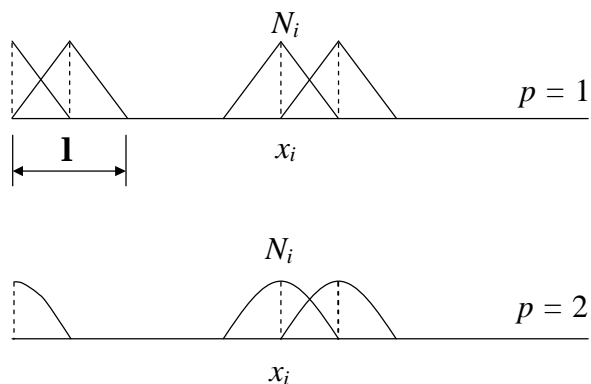


Figura 1.1 – Exemplos de bases polinomiais para o espaço $U \equiv W$.

Verificação:

Se a equação diferencial (1.1) é válida no domínio $[0, 1]$, então a seguinte equação integral também deve ser satisfeita para todas as funções $w(x)$ pertencentes ao espaço W :

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) w dx = 0 \quad (1.7)$$

Expandindo a equação acima e integrando por partes o termo esquerdo da igualdade:

$$- \int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} w dx = \int_0^1 f w dx$$

$$\begin{aligned}
 -\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} w \, dx &= -\left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx \\
 -\frac{du}{dx}(1) w(1) + \frac{du}{dx}(0) w(0) + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx &= \int_0^1 f w \, dx
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Introduzindo as condições de contorno obtém-se

$$g w(0) + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \int_0^1 f w \, dx \tag{1.9}$$

verificando-se, portanto, a validade da equação (1.3).

1.3 Aproximação por Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) resolve por aproximação o problema (1.1) na forma variacional (1.3). O domínio é discretizado em elementos, resultando em uma malha com n pontos nodais. São utilizadas aproximações do tipo:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j, \quad \hat{u}(x) \in \hat{U} \quad (\hat{U} \subset U) \tag{1.10}$$

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) w_i, \quad \hat{w}(x) \in \hat{W} \quad (\hat{W} \subset W) \tag{1.11}$$

onde N_j e φ_i são funções de interpolação, e u_j e w_i são coeficientes constantes. A figura abaixo apresenta a discretização do domínio em $(n-1)$ elementos lineares. As funções de interpolação N_j (lineares neste caso) são definidas para cada nó j , de modo que:

$$N_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x = x_j \\ 0, & \text{para } x = x_i \text{ (} i \neq j \text{)} \end{cases} \tag{1.12}$$

$$N_j(x) = \begin{cases} -\frac{x-x_j}{(x_{j+1}-x_j)} + 1, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \end{cases} \tag{1.13}$$

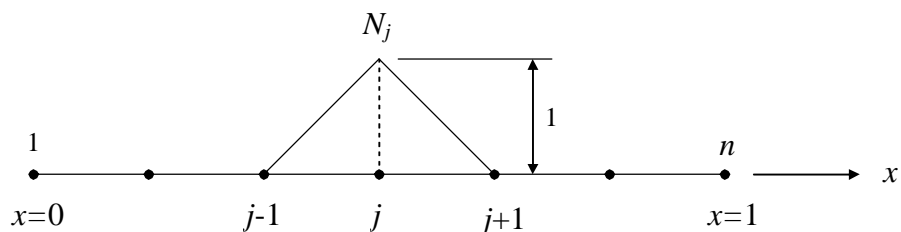


Figura 1.2 – Discretização do domínio unidimensional em elementos lineares.

Observações:

- 1) Os espaços \hat{U} e \hat{W} possuem base de dimensão finita e estão contidos em U e W , ou seja, a discretização do domínio representa um truncamento na base infinita dos espaços U e W .
- 2) Em decorrência de (1.12), os coeficientes u_j representam os valores nodais de $\hat{u}(x)$.

Como $\hat{u}(x)$ é por definição uma solução aproximada, a equação (1.1) não é satisfeita exatamente para $\hat{u}(x)$, gerando um resíduo $R(x)$ no domínio:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + f(x) = R(x) \quad \text{em } [0,1] \tag{1.14}$$

A idéia central do MEF é ponderar este resíduo no domínio (Método dos Resíduos Ponderados) usando as funções de ponderação $\hat{w}(x)$:

$$\int_0^1 R \hat{w} dx = 0, \quad \forall \hat{w} \in \hat{W} \tag{1.15}$$

Dentre os métodos de ponderação, o Método de Galerkin é aquele em que as funções ϕ_i em (1.11) são consideradas como sendo iguais as funções N_i em (1.10):

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) w_i \tag{1.16}$$

Integrando por partes o primeiro termo em (1.15) obtém-se a equação

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + f \right) \hat{w} dx = \frac{d\hat{u}}{dx}(1) \hat{w}(1) - \frac{d\hat{u}}{dx}(0) \hat{w}(0) - \int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{d\hat{w}}{dx} dx + \int_0^1 f \hat{w} dx = 0$$

resultando em

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{d\hat{w}}{dx} dx = \int_0^1 f \hat{w} dx - g \hat{w}(0) \tag{1.17}$$

Como pode-se observar, a equação acima corresponde ao problema (1.3), com $u(x)$ e $w(x)$ substituídas por $\hat{u}(x)$ e $\hat{w}(x)$. Introduzindo (1.10) e (1.16) em (1.17) chega-se à expressão:

$$\sum_{i=1}^n w_i \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n N_j u_j \right) \frac{dN_i}{dx} dx = \sum_{i=1}^n w_i \left(\int_0^1 f N_i dx - g N_i(0) \right) \quad (1.18)$$

Como as constantes w_i são arbitrárias, fazendo $w_i = 1$ e $w_j = 0$, para $j \neq i$ e $i = 1, \dots, n$, obtém-se um sistema de n equações algébricas e n incógnitas u_j :

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n N_j u_j \right) \frac{dN_i}{dx} dx = \int_0^1 f N_i dx - g N_i(0) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.19)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) u_j = \int_0^1 f N_i dx - g N_i(0) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.20)$$

O sistema acima pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = F_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.21)$$

onde K_{ij} e F_i são iguais a

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \quad (1.22)$$

$$F_i = \int_0^1 f N_i dx - g N_i(0) \quad (1.23)$$

Matricialmente, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Observações:

1) A matriz \mathbf{K} é simétrica:

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_0^1 \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = K_{ji}$$

2) A matriz \mathbf{K} é esparsa (muitos de seus coeficientes são iguais a zero). De fato, os suportes das funções de interpolação N_i e N_j possuem interseção nula, se o nó i não está conectado ao nó j , resultando em coeficientes $K_{ij} = 0$:

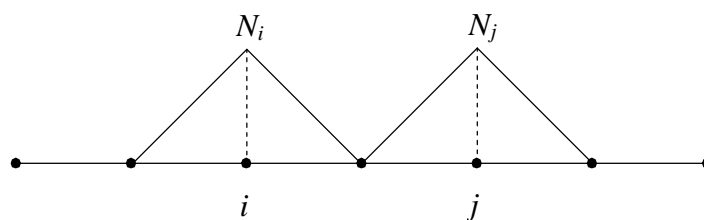


Figura 1.3

3) Os coeficientes K_{ij} podem ser calculados efetuando-se a integral somente no elemento que conecta os nós i e j :

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

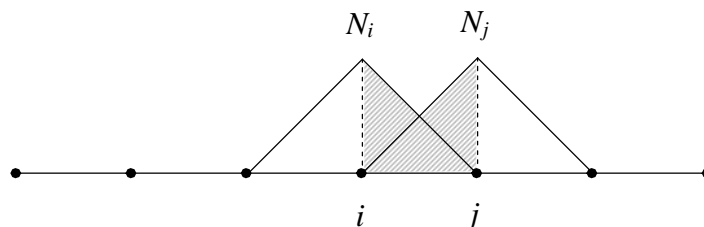


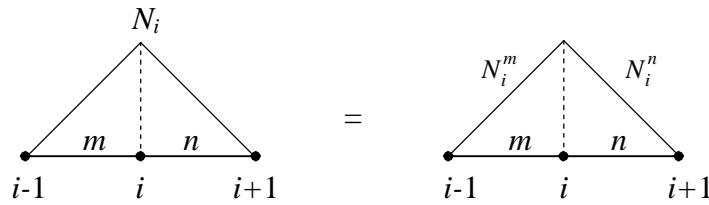
Figura 1.4

4) Os coeficientes da diagonal principal são positivos e maiores que zero:

$$K_{ii} = \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx > 0$$

5) Os coeficientes da diagonal K_{ii} podem ser calculados efetuando-se a integral somente nos elementos que contribuem para o nó i :

$$K_{ii} = \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{dN_i^m}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{dN_i^n}{dx} \right)^2 dx$$



$$K_{ii} = K_{ii}^m + K_{ii}^n$$

Figura 1.5

1.4 Condições para convergência do MEF

Seja $\hat{u}(x)$ uma solução aproximada do problema (1.3), e $u(x)$ a solução exata. Defina-se com erro $e(x)$ da solução aproximada a diferença

$$e(x) = u(x) - \hat{u}(x) \quad (1.26)$$

Supondo que $u(x)$ seja continuamente diferenciável em todo o domínio ($u(x) \in C^\infty$), uma série de Taylor pode ser empregada para representá-la:

$$u(\Delta x) = u \Big|_{x=0} + \Delta x \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{\Delta^2 x}{2!} \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=0} + \dots + \frac{\Delta x^p}{p!} \frac{d^p u}{dx^p} \Big|_{x=0} + \dots \quad (1.27)$$

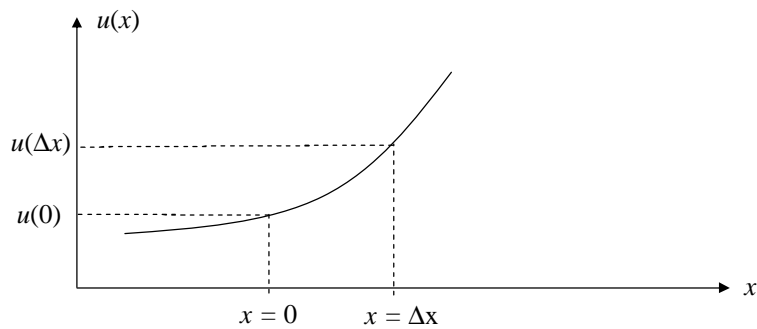


Figura 1.6

Portanto, se a solução aproximada for constituída por polinômios de grau p , pode-se esperar um erro da ordem de Δx^{p+1} . Considerando o intervalo Δx como sendo equivalente ao tamanho h dos elementos,

$$e \approx O(\Delta x^{p+1}) \quad (1.28)$$

Da mesma forma, os erros das derivadas de $\hat{u}(x)$ são:

$$\frac{d\hat{u}}{dx}: e_1 \approx O(h^p) \quad (1.29)$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}: e_2 \approx O(h^{p-1}) \quad (1.30)$$

$$\frac{d^n\hat{u}}{dx^n}: e_n \approx O(h^{p+1-n}) \quad (1.31)$$

Para que haja convergência, todas as derivadas que aparecem na formulação variacional (1.3) devem ser representadas corretamente, no limite, quando o tamanho h dos elementos tende a zero:

$$e_n \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0 \quad (1.32)$$

Portanto, a seguinte relação deve ser válida:

$$p+1-n \geq 1 \Rightarrow p \geq n \quad (1.33)$$

Então, uma primeira condição para que haja convergência é que as funções de interpolação utilizadas na aproximação de $\hat{u}(x)$ sejam representadas por polinômios completos de grau n (condição de completude).

A segunda condição necessária decorre de que as integrais em (1.17) devem ser limitadas, para que o problema possa ser resolvido:

$$\int_0^1 \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{d\hat{w}}{dx} dx < \infty \quad (1.34)$$

A expressão acima equivale a dizer que as derivadas que aparecem na integral devem ser de quadrado integrável. Uma função contínua por partes, por exemplo, é de quadrado integrável. Em outras palavras, se n é a ordem mais alta das derivadas que aparecem na integral, as derivadas da aproximação de ordem $n-1$ devem ser contínuas nas interfaces dos elementos, como mostra a Figura 1.7.

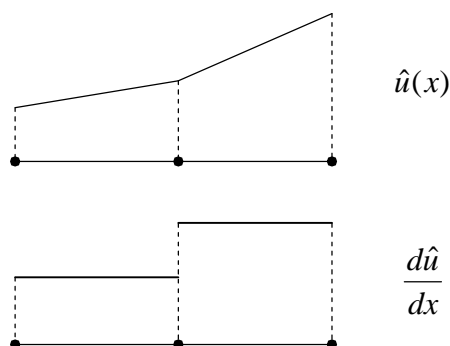


Figura 1.7 – Aproximação $\hat{u}(x)$ contínua e derivada descontínua nas interfaces dos elementos.

Resumindo, são duas as condições para convergência de uma aproximação:

- **Condição de completude:** a aproximação $\hat{u}(x)$ deve ser representada por polinômios completos de grau n .
- **Condição de compatibilidade:** as derivadas da aproximação de ordem $n-1$ devem ser contínuas nas interfaces dos elementos (continuidade C^{n-1}).

Observações:

- 1) Uma função $f(x)$ definida em um domínio Ω pertence ao espaço vetorial L_2 de funções de quadrado integrável se a integral de seu quadrado é limitada:

$$\int_{\Omega} f(x)^2 d\Omega < \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \in L_2$$

Exercícios proposto:

- 1) Resolver o problema (1.1) para $f(x) = -2$ e $g = -2$, utilizando malhas de 1, 2 e 3 elementos lineares igualmente espaçados. Comparar os resultados com a solução exata $u(x) = x^2 - 2x + 1$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2 = 0 \quad \text{em } [0,1]$$

$$u(1) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(0) = -2$$

2 ELASTICIDADE PLANA

2.1 Introdução

Os problemas de elasticidade plana se dividem em dois grupos: problemas de estado plano de tensões e problemas de estado plano de deformações. Os problemas de estado plano de tensões são caracterizados por estruturas na forma de chapas planas carregadas no próprio plano, sendo o carregamento uniforme ao longo da espessura. Neste caso, o estado de tensões é completamente definido pelas componentes de tensões s_x , s_y e t_{xy} , constantes ao longo da espessura. As demais componentes, s_z , t_{yz} e t_{xz} , são iguais a zero.

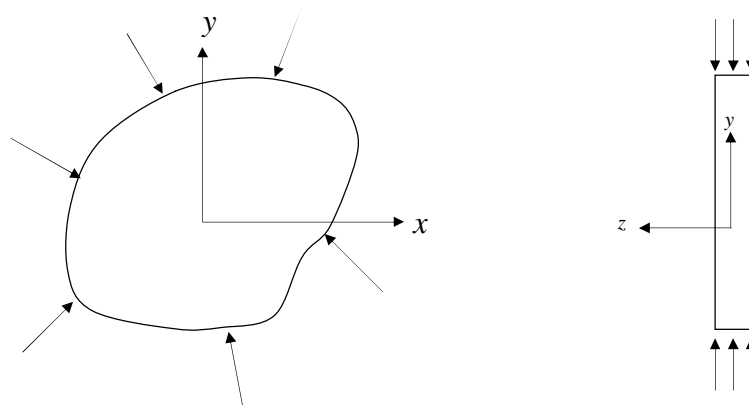


Figura 2.1 – Estado plano de tensões.

Por outro lado, os problemas de estado plano de deformações caracterizam-se por estruturas nas quais a dimensão na direção z é muito maior que as dimensões no plano x - y . As cargas são paralelas ao plano x - y e não variam na direção z . Assume-se que os deslocamentos na direção z sejam restringidos. Desta forma, qualquer seção transversal (paralela ao plano x - y) encontra-se submetida ao mesmo estado de deformações, onde as deformações ϵ_z , γ_{yz} e γ_{xz} são iguais a zero e a tensão normal σ_z pode ser obtida em função das tensões normais σ_x e σ_y . Portanto, para efeito de análise, basta considerar uma faixa de espessura unitária compreendida entre duas seções transversais.

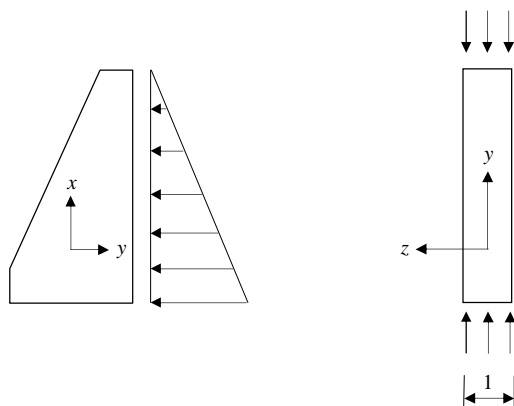


Figura 2.2 – Estado plano de deformações.

2.2 Formulação Clássica do Problema de Elasticidade Plana

Dados $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_x, \bar{t}_y)$ e $\bar{\mathbf{u}} = (u_x, u_y)$, determinar $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ tal que

$$\mathcal{L}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equações de equilíbrio}) \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{relações constitutivas}) \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}\mathbf{u} \quad (\text{deformações}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (\text{cond. de contorno naturais}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{cond. de contorno essenciais}) \quad (2.5)$$

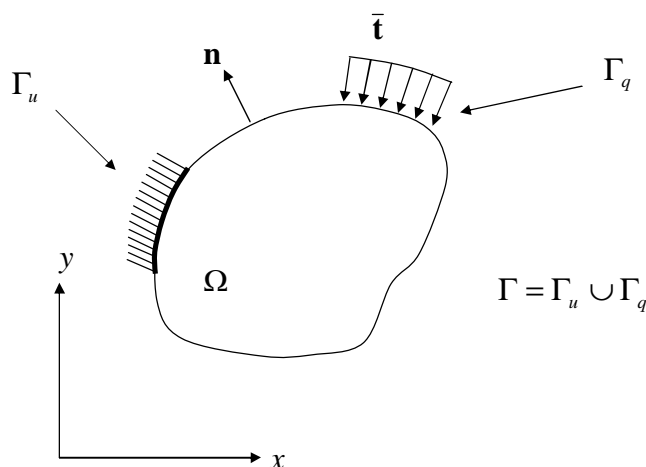


Figura 2.3 – Problema de elasticidade plana

Nas equações acima, $\boldsymbol{\sigma}$ é a representação em matriz coluna do tensor de tensões \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

\mathbf{b} são as forças de volume, \mathbf{u} é o campo de deslocamentos, $\bar{\mathbf{t}}$ são forças distribuídas no contorno Γ_q , $\bar{\mathbf{u}}$ são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_u , $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ é a normal externa ao contorno, \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material, $\boldsymbol{\varepsilon}$ são as deformações e \mathcal{L} é o operador diferencial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para problemas de estado plano de tensões a matriz \mathbf{D} é igual a

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e para o estado plano de deformações, a matriz \mathbf{D} assume a forma

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

2.3 Formulação Variacional

Dados \mathbf{b} , $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$, determinar $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$,

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{w})^t \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{w} \, d\Gamma \quad (2.10)$$

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} = (u_x, u_y) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \in L_2 \right\} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{w} = (w_x, w_y) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \in L_2 \right\} \quad (2.12)$$

Verificação:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^t \mathbf{w} \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W} \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) w_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) w_y \, d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

Integrando por partes,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} w_x \, d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_x n_x w_x \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} \, d\Omega \quad (2.15)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} w_x d\Omega = \int_{\Gamma} \tau_{xy} n_y w_x d\Gamma - \int_{\Omega} \tau_{xy} \frac{\partial w_x}{\partial y} d\Omega \quad (2.16)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} w_y d\Omega = \int_{\Gamma} \tau_{xy} n_x w_y d\Gamma - \int_{\Omega} \tau_{xy} \frac{\partial w_y}{\partial x} d\Omega \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} w_y d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_y n_y w_y d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} d\Omega \quad (2.18)$$

e substituindo,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) w_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) w_y d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) w_x + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) w_y d\Gamma + \\ & - \int_{\Omega} \left(\sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + \left(\tau_{xy} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} b_x w_x + b_y w_y d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

A expressão acima pode ser escrita de forma matricial:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^t \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q} (\mathbf{T}\mathbf{n})^t \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{w})^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

Introduzindo as condições de contorno, obtém-se a igualdade,

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{w})^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{w} d\Gamma \quad (2.21)$$

e finalmente, substituindo as tensões pelas relações constitutivas chega-se à equação (2.10):

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{w})^t \mathbf{D}\mathcal{L}\mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{w} d\Gamma$$

Pode-se também chegar a esta mesma forma variacional empregando-se o princípio dos trabalhos virtuais ou o princípio da energia potencial total mínima, como será visto a seguir.

2.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser enunciado da seguinte maneira:

“Seja um corpo em equilíbrio, submetido a um sistema de forças externas. Se a este corpo é imposto um campo de deslocamentos virtuais, compatível com os vínculos da estrutura, o trabalho das forças externas é igual ao trabalho das forças internas”.

Denotando o campo de deslocamentos virtuais por $\delta \mathbf{u}$ e as deformações virtuais por $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, o trabalho das forças internas é igual a

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.22)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões resultantes das forças externas impostas à estrutura. O trabalho destas das forças externas é dado por:

$$W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.23)$$

Igualando as duas expressões acima, e introduzindo as relações constitutivas em (2.10) obtém-se

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^t \mathbf{D}(\mathcal{L} \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.24)$$

Comparando este resultado com (2.10), observa-se que as funções \mathbf{w} desempenham o papel dos campos de deslocamentos virtuais ($\delta \mathbf{u} = \mathbf{w}$), com deformações virtuais $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L} \mathbf{w}$.

2.5 Energia Potencial Total

Define-se energia potencial de um corpo, em uma configuração deformada qualquer, como sendo o trabalho realizado por todas as forças que agem sobre o corpo, externas e internas, quando o corpo retorna de sua configuração deformada para a configuração indeformada. A energia potencial das forças internas é igual à energia de deformação do corpo:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.25)$$

O trabalho das forças externas (energia potencial das forças externas) é negativo, quando o corpo retorna a sua configuração indeformada:

$$W = - \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.26)$$

A energia potencial total do corpo, que é função da configuração deformada \mathbf{u} , será portanto igual a:

$$\Pi(\mathbf{u}) = U + W \quad (2.27)$$

A expressão acima corresponde ao funcional de energia $\Pi(\mathbf{u})$, associado às equações diferenciais de equilíbrio (2.1). O Princípio da Energia Potencial Total tem o seguinte enunciado:

“Seja um corpo impedido de se deslocar como corpo rígido e submetido a forças externas. Dentre todas as configurações deformadas possíveis (que atendem às condições de contorno), aquela que corresponde à configuração de equilíbrio minimiza o funcional de energia potencial total”

Isto significa que para a configuração de equilíbrio, a primeira variação do funcional de energia deve ser igual a zero:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \delta U + \delta W = 0 \quad (2.28)$$

As variações das energias interna e externa são

$$\delta U = \int_{\Omega} (\delta\boldsymbol{\varepsilon})^t \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.29)$$

$$\delta W = - \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \delta\mathbf{u} d\Gamma \quad (2.30)$$

Somando estas duas equações e igualando a zero obtém-se a mesma expressão de (2.24).

Como a solução exata do problema representa um mínimo absoluto do funcional de energia, qualquer aproximação por deslocamentos superestima a energia potencial total. A medida em que se refina a aproximação, introduzindo-se novos graus de liberdade, mais próximo se chega do valor mínimo de Π .

Pelo princípio da conservação de energia, quando um corpo se deforma sob a influência de forças externas aplicadas lentamente (variando uniformemente a partir de zero), o trabalho realizado pelas forças externas é igual à variação da energia de deformação. Como este trabalho é igual a $-W/2$, pode-se escrever:

$$U + W/2 = 0 \quad (2.31)$$

Substituindo este resultado em (2.27):

$$\Pi(\mathbf{u}) = U + W = -U \quad (2.32)$$

Portanto, pode-se deduzir da expressão acima que, sendo a energia potencial total Π superestimada, a energia de deformação U será sempre subestimada na formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos, na ausência de tensões ou deformações iniciais.

É importante ressaltar que nem sempre é possível estabelecer um funcional de energia associado às equações diferenciais do problema. Isto só ocorre quando o operador diferencial é auto-adjunto, como é o caso de problemas de elasticidade. Por este motivo, a forma variacional obtida a partir da ponderação de resíduos ponderados é mais geral, e pode ser aplicada a qualquer tipo de problema, como por exemplo, problemas de mecânica dos fluidos.

2.6 Formulação Variacional Discreta

Para obter a formulação variacional discreta deve-se proceder da mesma forma que no item 1.3, com a diferença que agora a solução da equação diferencial $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ é uma função vetorial de duas componentes, e portanto deve ser aproximada por uma função vetorial:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j \mathbf{u}_j \quad (2.33)$$

Da mesma forma, as funções de ponderação também são vetoriais, com duas componentes:

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_x \\ \hat{w}_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x^i \\ w_y^i \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i \quad (2.34)$$

Substituindo estas aproximações em (2.10) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\hat{\mathbf{w}})^t \mathbf{D} \mathcal{L} \hat{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \hat{\mathbf{w}} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \hat{\mathbf{w}} d\Gamma \quad (2.35)$$

Desenvolvendo,

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{L} \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i \right)^t \mathbf{D} \mathcal{L} \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j \mathbf{u}_j d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^t \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i d\Gamma \quad (2.36)$$

Fazendo $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($j \neq i$) para $i = 1, \dots, n$, obtém-se um sistema de $2n$ equações e $2n$ incógnitas:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{N}_i)^t \mathbf{D} (\mathcal{L} \mathbf{N}_j) d\Omega \mathbf{u}_j = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.37)$$

Denotando por \mathbf{B}_i o operador diferencial aplicado às funções de interpolação N_i ,

$$\mathbf{B}_i = \mathcal{L} \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

as equações algébricas (2.37) são escritas na forma,

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i)^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_j) d\Omega \mathbf{u}_j = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.39)$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{k}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.40)$$

Os coeficientes constantes e os termos independentes são dados por:

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i)^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_j) d\Omega \quad (2.41)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.42)$$

De forma mais compacta, pode-se escrever:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.43)$$

onde,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \cdot & \cdot & \mathbf{k}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{k}_{n1} & \cdot & \cdot & \mathbf{k}_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.6.1 Energia de Deformação

Considerando uma aproximação $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{U}$, com $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \dots \mathbf{N}_n]$, e as deformações $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{U}$, sendo $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n]$, a energia de deformação da solução aproximada será igual a:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^t \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.45)$$

Do fato de a energia de deformação ser positiva decorre que a matriz \mathbf{K} , além de simétrica, é sempre positiva definida, ou seja, para $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} > 0 \quad (2.46)$$

3 PROBLEMAS DE ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL

3.1 Introdução

A formulação do problema de elasticidade plana apresentada no capítulo anterior é um caso particular do problema geral de elasticidade, que envolve as três dimensões x , y e z . Na elasticidade tridimensional, o campo de deslocamentos $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é uma função vetorial de três componentes, e as tensões e deformações são representadas por seus tensores completos.

3.2 Formulação Clássica do Problema de Elasticidade Tridimensional

Dados $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_x, \bar{t}_y, \bar{t}_z)$ e $\bar{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$, determinar $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ tal que

$$\mathcal{L}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equações de equilíbrio}) \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{relações constitutivas}) \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}\mathbf{u} \quad (\text{deformações}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (\text{cond. de contorno naturais}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{cond. de contorno essenciais}) \quad (3.5)$$

Enquanto que no problema plano o contorno é uma linha, no problema tridimensional o contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ é uma superfície, de normal externa $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$. Os tensores completos de tensões e deformações são:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

As relações deformações/deslocamentos envolvem o operador diferencial \mathcal{L} , com derivadas parciais em relação a x , y e z :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A matriz \mathbf{D} (matriz constitutiva) das relações constitutivas é:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

simétrica

3.3 Formulação do MEF

Adotando as aproximações típicas do MEF,

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^j \\ u_y^j \\ u_z^j \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j \mathbf{u}_j \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_x \\ \hat{w}_y \\ \hat{w}_z \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x^j \\ w_y^j \\ w_z^j \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i \quad (3.11)$$

e procedendo exatamente como no problema de elasticidade plana, chega-se às expressões dos coeficientes da matriz de rigidez e dos termos independentes:

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i)^t \mathbf{D} (\mathbf{B}_j) d\Omega \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B}_i = \mathcal{L} \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.14)$$

4 ELEMENTOS DE BARRA

4.1 Barra Submetida a Esforços Axiais

O problema de determinar os deslocamentos de uma barra submetida a esforços axiais (Figura 4.1) é regido pela equação diferencial:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \text{em } [0, L] \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \text{(condição de contorno essencial)} \\ EA \frac{du}{dx}(L) = R & \text{(condição de contorno natural)} \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e A a área da seção transversal da barra.

A relação constitutiva envolve apenas as tensões e deformações longitudinais,

$$s_x = E e_x$$

e as deformações são:

$$e_x = \frac{du}{dx}$$

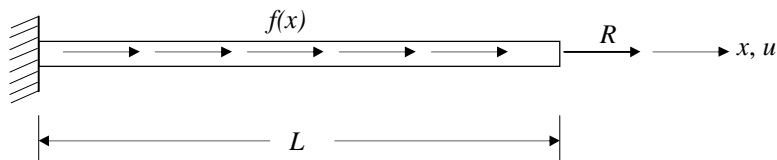


Figura 4.1 – Barra submetida a esforços axiais.

A formulação variacional correspondente é:

Dadas a força distribuída $f(x)$ e a força R aplicada na extremidade livre, determinar $u(x) \in U \mid \forall w(x) \in W$,

$$-EA \frac{du}{dx}(L) w(L) + EA \frac{du}{dx}(0) w(0) + EA \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^L f w dx \quad (4.3)$$

sendo U o espaço de funções admissíveis:

$$U = \left\{ u(x) \mid u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} \in L_2 \right\} \quad (4.4)$$

O espaço W é idêntico ao espaço U , ou seja, $U \equiv W$. Introduzindo as condições de contorno $EA \frac{du}{dx}(L) = R$ e $w(0) = 0$ obtém-se:

$$EA \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^L f w dx + R w(L) \quad (4.5)$$

Chega-se ao mesmo resultado pelo princípio dos trabalhos virtuais. Considerando du como sendo o campo de deslocamentos virtuais e de as deformações virtuais, pode-se escrever,

$$\text{Trabalho das forças internas: } \int_0^L \mathbf{s}_x \mathbf{de}_x A dx = EA \int_0^L \mathbf{e}_x \mathbf{de}_x dx$$

$$\text{Trabalho das forças externas: } \int_0^L f du dx + R du(L)$$

Ou ainda, pelo princípio da energia potencial total mínima:

$$p(u) = U + W = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{s}_x \mathbf{e}_x A dx - \int_0^L f u dx - R u(L) \quad (4.6)$$

$$dp(u) = dU + dW = EA \int_0^L \mathbf{e}_x \mathbf{de}_x dx - \int_0^L f du dx - R du(L) = 0 \quad (4.7)$$

Introduzindo as aproximações

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j, \quad \hat{u}(x) \in \hat{U} \quad (\hat{U} \subset U) \quad (4.8)$$

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) w_i, \quad \hat{w}(x) \in \hat{W} \quad (\hat{W} \subset W) \quad (4.9)$$

obtém-se a formulação variacional discreta correspondente:

$$EA \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{d\hat{w}}{dx} dx = \int_0^L f \hat{w} dx + R \hat{w}(L) \quad (4.10)$$

Como as constantes w_i são arbitrárias, fazendo $w_i = 1$ e $w_j = 0$, para $j \neq i$ e $i = 1, \dots, n$, obtém-se um sistema de n equações algébricas e n incógnitas u_j :

$$\sum_{j=1}^n \left(EA \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) u_j = \int_0^L f N_i dx + R N_i(L) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.11)$$

O sistema acima pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = F_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.12)$$

onde K_{ij} e F_i são iguais a

$$K_{ij} = EA \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \quad (4.13)$$

$$F_i = \int_0^L f N_i dx + R N_i(L) \quad (4.14)$$

Adotando um sistema local de coordenadas para cada elemento, no qual as coordenadas das extremidades são $x'_1=0$ e $x'_2=\mathbf{1}$, como mostra a Figura 4.2, as funções de interpolação lineares no elemento são:

$$N_1 = -\frac{x'}{\mathbf{1}} + 1 \quad (4.15)$$

$$N_2 = \frac{x'}{\mathbf{1}} \quad (4.16)$$

As deformações no elemento são dadas por:

$$\hat{e}_x = \frac{d\hat{u}}{dx'} = \frac{dN_1}{dx'} u_1 + \frac{dN_2}{dx'} u_2 = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx'} & \frac{dN_2}{dx'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e \quad (4.17)$$

Desta forma, obtém-se a matriz de rigidez de elementos de treliça:

$$\mathbf{K}^e = EA \int_0^{\mathbf{1}} (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{B}^e dx' = \frac{EA}{\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$



Figura 4.2 – Elemento de treliça.

4.2 Barra Submetida a Esforços de Flexão

De acordo com a teoria de vigas, a deflexão de uma barra carregada transversalmente, como mostra a Figura 1.1, é representadas pela equação diferencial

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \quad \text{em } [0, \mathbf{l}] \quad (4.19)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia referido ao eixo perpendicular ao plano x - y , $v(x)$ são as deflexões e $q(x)$ é o carregamento transversal. V_1 , M_1 , V_2 e M_2 são condições de contorno em termos de esforços (momentos e cortantes) nas extremidades.

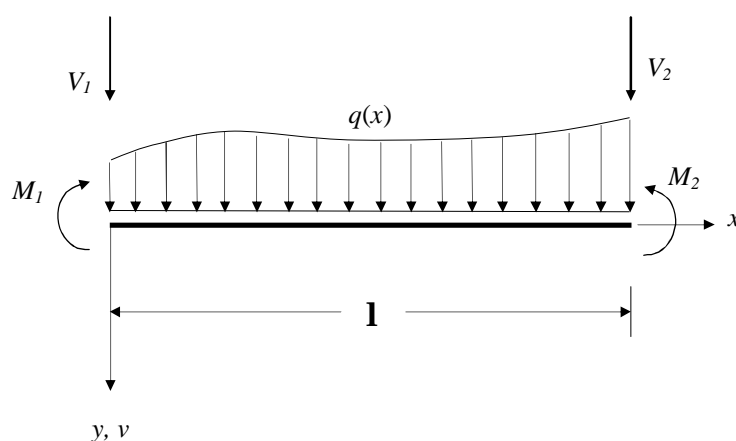


Figura 4.3 – Barra submetida a esforços de flexão.

Assumem-se as seguintes hipóteses:

- i) As seções transversais da viga permanecem planas e normais às fibras longitudinais, o que equivale a desprezar as deformações por esforço cortante.
- ii) Os deslocamentos são suficientemente pequenos para que se possa considerar a curvatura k como sendo aproximadamente igual a

$$k \approx \frac{dq}{dx} \quad (4.20)$$

- iii) O ângulo q , que mede a inclinação da tangente à deformada da viga é aproximado por

$$q \approx \tan q = \frac{dv}{dx} \quad (4.21)$$

Momentos e esforços cortantes são dados pelas expressões:

$$M = -EI\kappa = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.22)$$

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3v}{dx^3} \quad (4.23)$$

A formulação variacional correspondente é

$$EI \int_0^1 \frac{d^4v}{dx^4} w dx = \int_0^1 q w dx \quad (4.24)$$

Integrando por partes duas vezes obtém-se:

$$\left[EI \frac{d^3v}{dx^3} w \right]_0^1 - \left[EI \frac{d^2v}{dx^2} \frac{dw}{dx} \right]_0^1 + EI \int_0^1 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} dx = \int_0^1 q w dx \quad (4.25)$$

Expandindo a expressão acima:

$$\begin{aligned} & EI \frac{d^3v}{dx^3}(\mathbf{1})w(\mathbf{1}) - EI \frac{d^3v}{dx^3}(0)w(0) + EI \frac{d^2v}{dx^2}(0) \frac{dw}{dx}(0) + \\ & - EI \frac{d^2v}{dx^2}(\mathbf{1}) \frac{dw}{dx}(\mathbf{1}) + EI \int_0^1 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} dx = \int_0^1 q w dx \end{aligned} \quad (4.26)$$

As derivadas de ordem 0 e 1 (deflexões e rotações) no contorno representam as condições de contorno essenciais enquanto que as derivadas de ordem 2 e 3 (momentos e cortantes) representam as condições de contorno naturais do problema. Introduzindo estas condições de contorno obtém-se a forma final da formulação variacional:

$$EI \int_0^1 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} dx = \int_0^1 q w dx - V_1 w(0) + V_2 w(\mathbf{1}) + M_1 \frac{dw}{dx}(0) - M_2 \frac{dw}{dx}(\mathbf{1}) \quad (4.27)$$

Conseqüentemente, para que haja convergência é necessário adotar aproximações de grau no mínimo igual a 2 e as derivadas de ordem 1 devem ser contínuas nas interfaces dos elementos, ou seja, os elementos devem ter continuidade C^1 . Para satisfazer estes requisitos pode-se empregar polinômios cúbicos de Hermite, definidos a partir dos valores nodais das deflexões e rotações, como aproximação para as deflexões transversais:

$$\hat{v} = \sum_{j=1}^n [N_j \quad H_j] \begin{bmatrix} v_j \\ q_j \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\hat{w} = \sum_{i=1}^n [N_i \quad H_i] \begin{bmatrix} w_i \\ w_{,x}^i \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

As aproximações \hat{v} e \hat{w} pertencem ao espaço de funções cujas derivadas de segunda ordem pertencem ao espaço L_2 . Discretizando a viga com um único elemento típico, como ilustra a Figura 4.4, as aproximações acima assumem a forma:

$$\hat{v} = N_1 v_1 + H_1 q_1 + N_2 v_2 + H_2 q_2 \quad (4.30)$$

$$\hat{w} = N_1 w_1 + H_1 w_{,x}^1 + N_2 w_2 + H_2 w_{,x}^2 \quad (4.31)$$

onde o índice $,x$ denota derivação em x , e as funções de interpolação são:

$$N_1 = -\frac{3x^2}{\mathbf{l}^2} + 1 + \frac{2x^3}{\mathbf{l}^3} \quad (4.32)$$

$$H_1 = \frac{x^3}{\mathbf{l}^2} + x - \frac{2x^2}{\mathbf{l}} \quad (4.33)$$

$$N_2 = -\frac{2x^3}{\mathbf{l}^3} + \frac{3x^2}{\mathbf{l}^2} \quad (4.34)$$

$$H_2 = \frac{x^3}{\mathbf{l}^2} - \frac{x^2}{\mathbf{l}} \quad (4.35)$$

Substituindo estas aproximações na formulação variacional obtém-se a sua forma discreta:

$$EI \int_0^{\mathbf{l}} \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} dx = \int_0^{\mathbf{l}} q \hat{w} dx - V(0) \hat{w}(0) + V(\mathbf{l}) \hat{w}(\mathbf{l}) + \\ + M(0) \frac{d\hat{w}}{dx}(0) - M(\mathbf{l}) \frac{d\hat{w}}{dx}(\mathbf{l}) \quad (4.36)$$

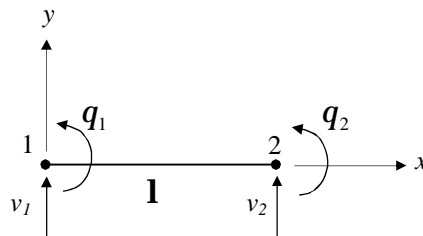


Figura 4.4 – Barra submetida a esforços de flexão.

Variando \hat{w} chega-se ao sistema de equações:

$$EI \int_0^1 (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{B} dx \begin{bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} qN_1 \\ qH_1 \\ qN_2 \\ qH_2 \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} -V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

onde o operador \mathbf{B}^e é

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 H_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 H_2}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Assumindo uma carga q constante e integrando as matrizes acima obtém-se o equilíbrio no elemento:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.39)$$

onde

$$\mathbf{K}^e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} & -\frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} \\ \frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{4}{\mathbf{l}} & -\frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{2}{\mathbf{l}} \\ \frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} \\ -\frac{12}{\mathbf{l}^3} & -\frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{12}{\mathbf{l}^3} & -\frac{6}{\mathbf{l}^2} \\ \frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{2}{\mathbf{l}} & -\frac{6}{\mathbf{l}^2} & \frac{4}{\mathbf{l}} \\ \frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} & -\frac{12}{\mathbf{l}^3} & \frac{6}{\mathbf{l}^2} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{U}^e = [v_1 \quad q_1 \quad v_2 \quad q_2]^t \quad (4.41)$$

$$\mathbf{F}^e = \left[\frac{q\mathbf{l}}{2} - V \quad \frac{q\mathbf{l}^2}{12} + M_1 \quad \frac{q\mathbf{l}}{2} + V_2 \quad \frac{q\mathbf{l}^2}{12} - M_2 \right]^t \quad (4.42)$$

A matriz de rigidez em (4.40) é exatamente aquela que se obtém através do método dos deslocamentos. Deve-se ainda observar que a curvatura k desempenha o papel das deformações, sendo igual a:

$$k = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \quad (4.43)$$

A energia de deformação na viga é

$$U = \frac{1}{2} \int_0^1 -M k dx = \frac{EI}{2} \int_0^1 k^2 dx \quad (4.44)$$

e a primeira variação de U tem a forma:

$$dU = EI \int_0^1 k dk dx \quad (4.45)$$

Comparando a expressão acima com (4.7) pode-se notar a analogia entre a curvatura k e as deformações longitudinais no problema de barras submetidas a esforços axiais.

5 PROBLEMAS DE POTENCIAL

5.1 Introdução

Problemas de potencial tratam do fluxo difusivo de uma quantidade física (massa, calor, etc.) e têm muitas aplicações na engenharia, como por exemplo, problemas de condução de calor, escoamento em meios porosos, distribuição de potencial elétrico ou eletromagnético, torção de barras prismáticas e outras.

O fluxo difusivo, descrito pelo campo vetorial $\mathbf{q}(x, y) = (q_x, q_y)$, é dado pelo produto do coeficiente de difusão k pelo gradiente da função potencial $\phi(x, y)$:

$$\mathbf{q} = -k\nabla\phi \quad (5.1)$$

Sendo $Q(x, y)$ a fonte ou sumidouro da quantidade envolvida, o balanço de fluxos resulta na igualdade:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = Q(x, y) \quad (5.2)$$

Substituindo (5.1) na expressão acima obtém-se a equação de Poisson (ou simplesmente equação de difusão)

$$\nabla \cdot (k\nabla\phi) + Q = 0 \quad (5.3)$$

que deve ser satisfeita em todo o domínio.

5.2 Formulação Clássica

Dados $k(x, y)$, $Q(x, y)$, $\bar{\phi}$ e $\bar{\mathbf{q}}$, determinar a função potencial $\phi(x, y)$ tal que

$$\nabla \cdot (k\nabla\phi) + Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.4)$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{em } \Gamma_\phi \quad (5.5)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ representa a normal externa ao contorno Γ (Figura 5.1).

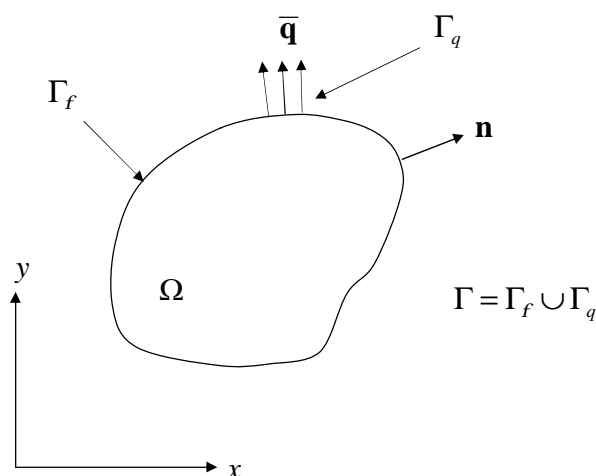


Figura 5.1

5.3 Formulação Variacional

Dados k , Q , $\bar{\phi}$ e $\bar{\mathbf{q}}$, determinar a função potencial $\phi \in \Phi \mid \forall w \in W$,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot (k \nabla \phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} Q w \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{q}} w \, d\Gamma \quad (5.7)$$

$$\Phi = \left\{ \phi(x, y) \mid \phi = \bar{\phi} \text{ em } \Gamma_{\phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L_2 \right\} \quad (5.8)$$

$$W = \left\{ w(x, y) \mid w = 0 \text{ em } \Gamma_{\phi}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in L_2 \right\} \quad (5.9)$$

Verificação:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (k \nabla \phi) + Q) w \, d\Omega = 0, \quad \forall w \in W \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (k \nabla \phi) + Q) w \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot (k \nabla \phi) w + Q w) \, d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \nabla w \cdot (k \nabla \phi) \, d\Omega + \int_{\Gamma} w (k \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} Q w \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad \forall w \in W \quad (5.11)$$

Introduzindo as condições de contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot (k \nabla \phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} Q w \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{q}} w \, d\Gamma, \quad \forall w \in W \quad (5.12)$$

5.4 Formulação Variacional Discreta

Aproximações:

$$\hat{\phi} = \sum_{j=1}^n N_j \phi_j \quad (5.13)$$

$$\hat{w} = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (5.14)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{w} \cdot (k \nabla \hat{\phi}) \, d\Omega = \int_{\Omega} Q \hat{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \hat{w} \, d\Gamma, \quad \forall \hat{w} \in \hat{W} \subset W \quad (5.15)$$

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot (k \nabla N_j) \, d\Omega \, \phi_j = \int_{\Omega} Q N_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_i \, d\Gamma, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (5.16)$$

Sistema de equações resultante:

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.17)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.18)$$

$$f_i = \int_{\Omega} Q N_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_i \, d\Gamma \quad (5.19)$$

6 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

6.1 Integração no Domínio Real

Uma aproximação característica do MEF tem a forma

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n N_j u_j \quad (6.1)$$

onde $N_j(x)$ é a função de interpolação global do nó j e u_j representa os valores nodais da aproximação (ver exemplo da Figura 6.1).

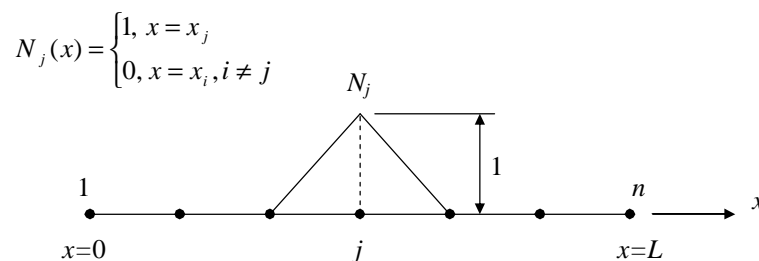


Figura 6.1 – Funções de interpolação lineares em uma dimensão.

Para calcular os coeficientes da matriz \mathbf{K} e os termos independentes é necessário efetuar integrações no interior do domínio e no seu contorno. Estas integrais típicas, resultantes da discretização por elementos finitos, tem a forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{coeficientes da matriz K}) \quad (6.2)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{N}_i d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{N}_i d\Gamma \quad (\text{termos independentes}) \quad (6.3)$$

e são calculadas a nível de elemento. Estas integrais podem ser efetuadas diretamente no domínio real do problema. Na prática, no entanto, os elementos são distorcidos ou se encontram inclinados em relação aos eixos de coordenadas, o que torna complicado sistematizar o cálculo das integrais. Este é o motivo pelo qual o uso de elementos isoparamétricos tornou-se padrão. A idéia principal deste tipo de elemento é mapear a geometria em um sistema local de coordenadas naturais, onde as integrais podem ser facilmente efetuadas, analítica ou numericamente. Para isto, a solução aproximada e suas derivadas devem ser escritas em função dessas coordenadas naturais. O termo *isoparamétrico* (parâmetros iguais) vem do fato de que o mapeamento da geometria é

feito através do uso dos mesmos parâmetros utilizados na interpolação da solução aproximada. Deve-se observar que embora os parâmetros sejam os mesmos, não há nenhuma restrição quanto ao uso de interpolações diferentes para a geometria e para a aproximação da solução.

6.2 Mapeamento Isoparamétrico

O mapeamento isoparamétrico consiste em mapear os elementos em um domínio regular de coordenadas naturais, sendo o mapeamento dado por funções polinomiais idênticas àquelas utilizadas na aproximação da solução (mesma parametrização para geometria e aproximação). Por exemplo, para um elemento quadrilátero definido no plano x - y (Figura 6.2), a aproximação $\hat{u}(x, y)$ escrita em termos de coordenadas naturais (ξ, η) é dada pela expressão

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_j(\xi, \eta) u_j \quad (6.4)$$

onde $N_j(\xi, \eta)$ é a função de interpolação local (de elemento) do nó j . A geometria é descrita por:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_j(\xi, \eta) x_j \quad (6.5)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_j(\xi, \eta) y_j \quad (6.6)$$

sendo (x_j, y_j) as coordenadas dos nós do elemento.

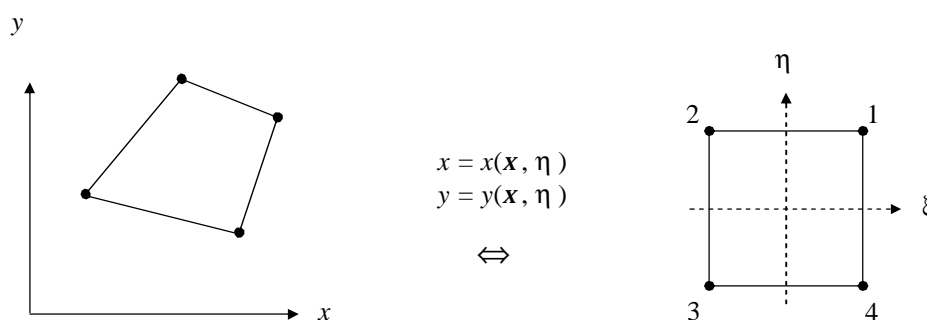


Figura 6.2 – Parametrização de um elemento quadrilátero.

Com a aproximação escrita em termos de coordenadas naturais, os integrandos em (6.2) e (6.3) passam a ser funções de (ξ, η) :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}'(\xi, \eta) \mathbf{DB}(\xi, \eta) d\Omega \quad (6.7)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}' \mathbf{N}_i(\xi, \eta) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{t}}' \mathbf{N}_i(\xi, \eta) d\Gamma \quad (6.8)$$

Para que as integrais acima possam ser calculadas no domínio de coordenadas naturais, é necessário mudar o domínio e os limites de integração. Isto é feito através da matriz Jacobiana \mathbf{J} de transformação de coordenadas, que relaciona um elemento infinitesimal no domínio real a um elemento infinitesimal no domínio de coordenadas naturais:

$$d\Omega = \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (6.9)$$

Assim, uma integral de elemento pode ser efetuada utilizando-se o domínio de coordenadas naturais:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}'(\xi, \eta) \mathbf{DB}(\xi, \eta) d\Omega = \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \mathbf{B}'(\xi, \eta) \mathbf{DB}(\xi, \eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (6.10)$$

6.2.1 Jacobiano da Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas que mapeia um elemento bidimensional em um domínio regular de coordenadas naturais pode ser traduzida pelas relações:

$$\begin{cases} x = f_1(\xi, \eta) \\ y = f_2(\xi, \eta) \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = g_1(x, y) \\ \eta = g_2(x, y) \end{cases} \quad (6.11)$$

Usando a Regra da Cadeia, para uma função $f(x, y)$ pode-se escrever:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (6.13)$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{Jacobiano}) \quad (6.15)$$

Conseqüentemente, as derivadas em relação a x e y de uma função $f(\xi, \eta)$ são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Exercícios resolvidos:

- 1) Seja uma área infinitesimal $d\Omega$ definida no plano x - y , obtida a partir do mapeamento de uma região regular do plano ξ - η , como mostra a Figura 6.3. Demonstrar que $d\Omega = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$.

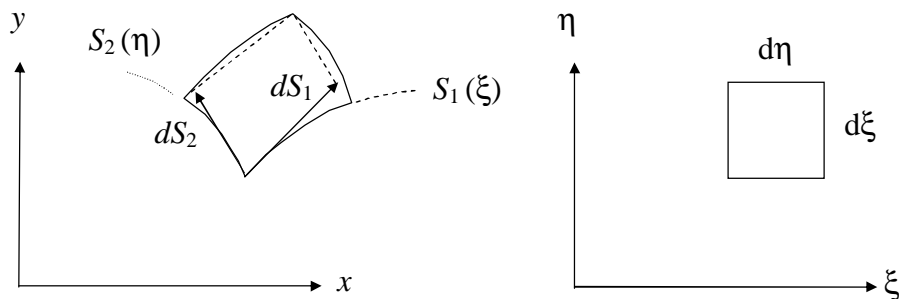


Figura 6.3

As curvas S_1 e S_2 que representam os lados dS_1 e dS_2 da região $d\Omega$ podem ser escritas na forma paramétrica:

Curva S_1 :

$$x = x(\xi)$$

$$y = y(\xi)$$

Curva S_2 :

$$x = x(\eta)$$

$$y = y(\eta)$$

e os vetores tangentes a estas curvas são iguais a:

$$\frac{dS_1}{d\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{j}$$

$$\frac{dS_2}{d\eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j}$$

Considerando que a área $d\Omega$ seja, no limite, igual a área do paralelogramo cujos lados são os vetores dS_1 e dS_2 , pode-se escrever que:

$$d\Omega = |dS_1 \times dS_2|$$

$$\left| \frac{dS_1}{d\xi} \times \frac{dS_2}{d\eta} \right| = \frac{1}{d\xi d\eta} |dS_1 \times dS_2| = \frac{1}{d\xi d\eta} d\Omega$$

$$d\Omega = \left| \frac{dS_1}{dx} \times \frac{dS_2}{dh} \right| dx dh = \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \eta_x / \eta_x & \eta_y / \eta_x & 0 \\ \eta_x / \eta_h & \eta_y / \eta_h & 0 \end{bmatrix} \right| dx dh$$

$$d\Omega = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Conseqüentemente, tem-se a seguinte relação envolvendo as integrais de área no plano x - y e no plano ξ - η :

$$A = \int d\Omega = \int \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

- 2) Determinar em que condições o determinante da matriz Jacobiana do elemento quadrilátero bilinear (Figura 6.4) é constante.

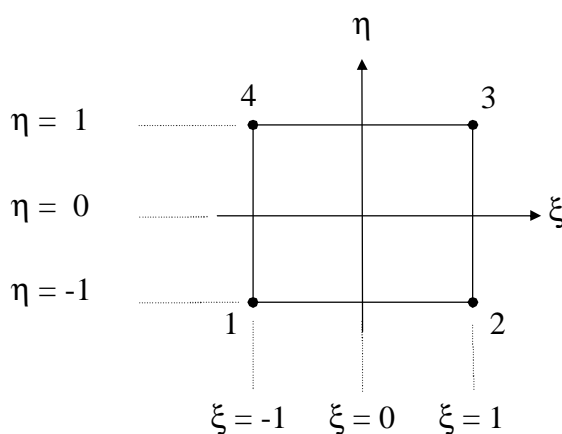


Figura 6.4

Funções de interpolação:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

Geometria:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_j(\xi, \eta) x_j$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_j(\xi, \eta) y_j$$

Matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Determinante da matriz Jacobiana:

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{4} (N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta_2 + N_3 \Delta_3 + N_4 \Delta_4)$$

$$\Delta_1 = x_{21} y_{41} - y_{21} x_{41}$$

$$\Delta_2 = x_{21} y_{32} - y_{21} x_{32}$$

$$\Delta_3 = x_{34} y_{32} - y_{34} x_{32}$$

$$\Delta_4 = x_{34} y_{41} - y_{34} x_{41}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j; \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

Condição para que $\det \mathbf{J}$ seja constante no elemento:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$$

$$x_{21} y_{41} - y_{21} x_{41} = x_{21} y_{32} - y_{21} x_{32} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{41} = y_{32} \\ x_{41} = x_{32} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_{21} y_{41} - y_{21} x_{41} = x_{34} y_{41} - y_{34} x_{41} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{21} = x_{34} \\ y_{21} = y_{34} \end{cases}$$

\Rightarrow elemento deve ser um paralelogramo.

- 3) Determinar a matriz de rigidez de um elemento de barra com 1 grau de liberdade (deslocamento axial).

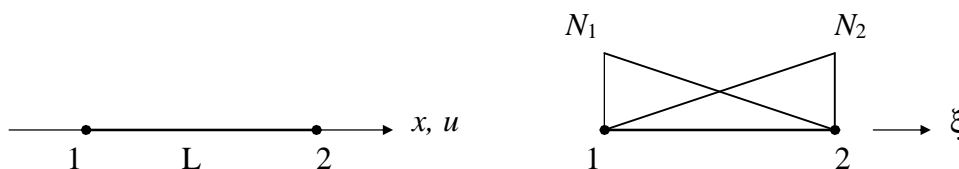


Figura 6.5

Funções de interpolação lineares:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Geometria:

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2$$

Deslocamento axial:

$$u(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \mathbf{B}^t E \mathbf{B} A dx = AE \int_{x=x_1}^{x=x_2} \mathbf{B}^t \mathbf{B} dx$$

A – área da seção transversal

E – módulo de elasticidade

Deformação:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} u_2 = \frac{d\xi}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \Rightarrow dx = \frac{L}{2} d\xi; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

Operador \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \frac{d\xi}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = AE \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \mathbf{B}^t \mathbf{B} \frac{L}{2} d\xi$$

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} d\xi = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.3 Mapeamento: Generalização

De modo geral os elementos finitos podem ser de uma, duas, ou três dimensões, conforme o número de parâmetros necessários para descrevê-los (Figura 6.6 a Figura 6.8). Podem também ser lineares ou de grau superior, dependendo do grau p de suas equações paramétricas. Frequentemente utiliza-se o termo *wire-frame* para designar a representação de estruturas por meio de elementos unidimensionais (ou uniaxiais), que são segmentos de reta (lineares) ou segmentos de curva ($p > 1$). Os elementos bidimensionais são superfícies curvas, quando o grau dos polinômios em ξ e η é maior do que 1, ou faces planas ou polígonos, quando as equações paramétricas são lineares. O mesmo raciocínio é válido para volumes, discretizados através de elementos sólidos. Em princípio, qualquer tipo de mapeamento ou parametrização pode ser utilizado para descrever a geometria dos elementos. No entanto, com o objetivo de facilitar o cálculo das integrais adota-se como padrão no MEF o mapeamento isoparamétrico, que é um caso particular de mapeamento em que a parametrização da geometria é idêntica àquela utilizada na aproximação da solução.

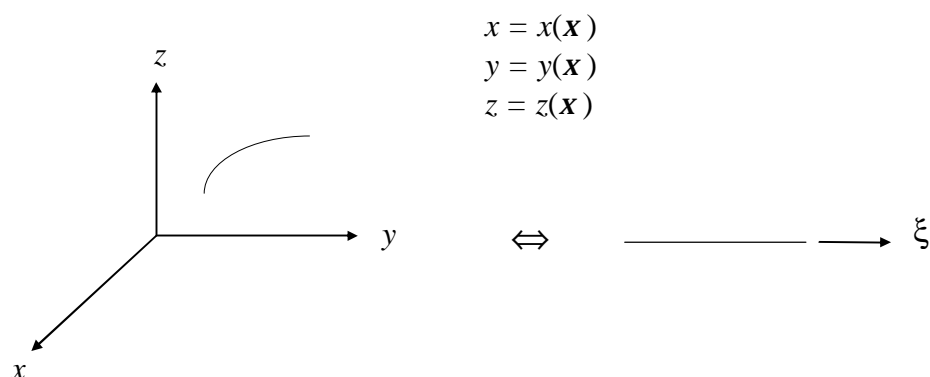


Figura 6.6 – Elementos uniaxiais.

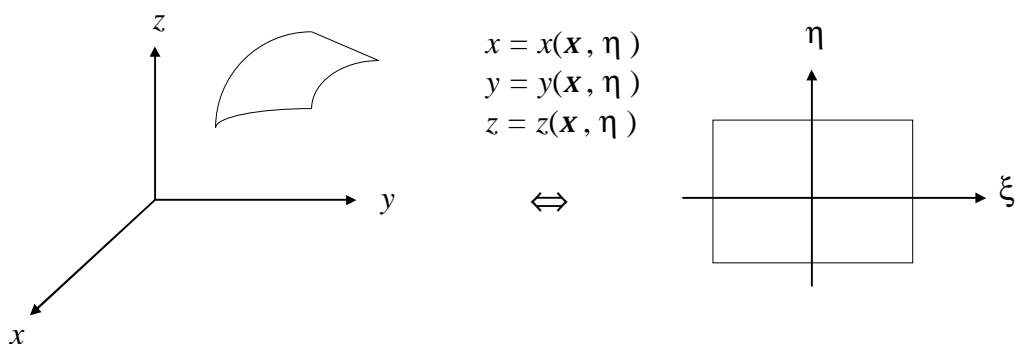


Figura 6.7 – Elementos de superfície.

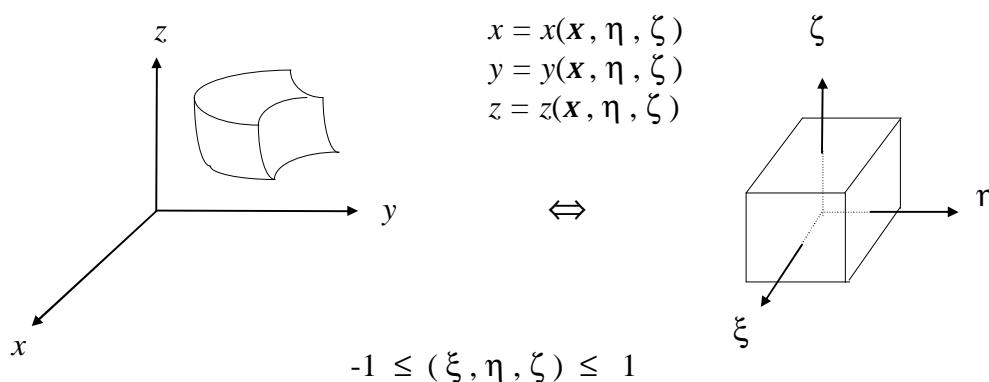


Figura 6.8 – Elementos sólidos.

6.4 Elementos Isoparamétricos de Continuidade C^0

A continuidade das funções de interpolação nas interfaces dos elementos, necessária para a convergência do MEF, depende da ordem das derivadas que aparecem no integrando da formulação variacional. A grande maioria dos problemas (o problema de flexão de placas é uma exceção) requer elementos de continuidade C^0 , nos quais as funções de interpolação são infinitamente contínuas no interior dos elementos e apenas contínuas nas interfaces (primeira derivada descontínua). Descreve-se a seguir os elementos de classe C^0 mais empregados em análises do MEF.

6.4.1 Elementos Uniaxiais

A Figura 6.9 mostra a parametrização do elemento uniaxial linear. As funções de interpolação são retas que assumem os valores 0 e 1 nas extremidades (Figura 6.10):

$$N_1 = (1 - \xi) / 2 \tag{6.17}$$

$$N_2 = (1 + \xi) / 2 \tag{6.18}$$

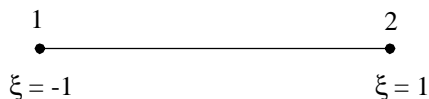


Figura 6.9 – Parametrização de um elemento uniaxial linear.

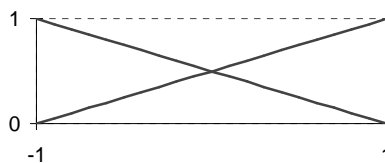


Figura 6.10 – Funções de interpolação de um elemento uniaxial linear.

No elemento quadrático, cuja parametrização é ilustrada na Figura 6.11, as funções de interpolação (Figura 6.12) são polinômios do segundo grau ($p = 2$) que assumem os valores 1 em um nó e 0 nos outros dois nós:

$$N_1 = (\xi - 1)\xi / 2 \quad (6.19)$$

$$N_2 = (1 + \xi)\xi / 2 \quad (6.20)$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (6.21)$$

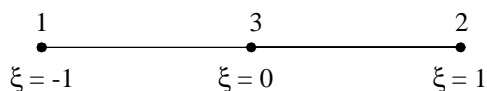


Figura 6.11 - Parametrização de um elemento uniaxial quadrático.

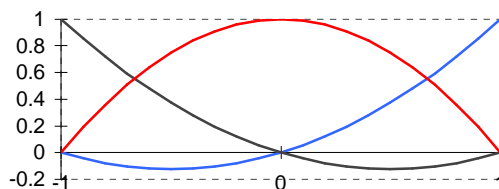


Figura 6.12 - Funções de interpolação de um elemento uniaxial quadrático.

Seguindo o mesmo raciocínio, e considerando a parametrização da Figura 6.13, as funções do elemento cúbico são:

$$N_1 = \frac{9}{16}(1 - \xi)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3) \quad (6.22)$$

$$N_2 = \frac{9}{16}(1 + \xi)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3) \quad (6.23)$$

$$N_3 = \frac{27}{16}(1 + \xi)(\xi - 1/3)(\xi - 1) \quad (6.24)$$

$$N_4 = \frac{27}{16}(1 - \xi)(\xi + 1/3)(\xi + 1) \quad (6.25)$$

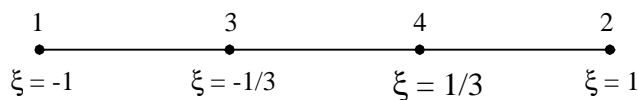


Figura 6.13 - Parametrização de um elemento uniaxial cúbico.

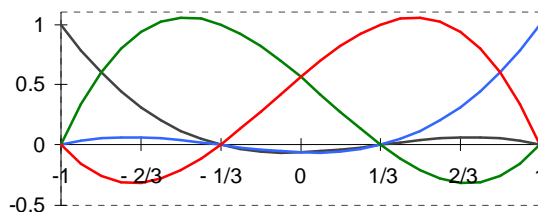


Figura 6.14 - Funções de interpolação de um elemento uniaxial cúbico.

Um elemento genérico de grau p possui $p+1$ nós, e as funções de interpolação são determinadas pelos polinômios de Lagrange:

$$N_i^p = \mathbf{1}_i^p \quad (6.26)$$

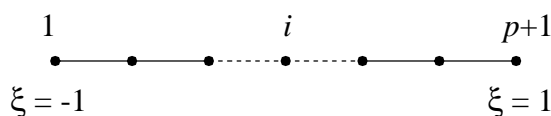


Figura 6.15 - Parametrização de um elemento genérico de grau p .

sendo o polinômio de Lagrange de grau p referente ao nó i dado pela expressão:

$$\mathbf{1}_i^p = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{p+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{p+1})} \quad (6.27)$$

6.4.2 Elementos Quadriláteros - Família de Lagrange

Nos elementos da família de Lagrange, as funções de interpolação são obtidas a partir dos produtos dos polinômios de Lagrange em cada direção, resultando em elementos com $p+1$ nós:

$$N_i^p(\xi, \eta) = \mathbf{1}_i^p(\xi) \mathbf{1}_i^p(\eta) \quad \Rightarrow \quad (p+1)^2 \text{ nós} \quad (6.28)$$

Desta forma, as funções de interpolação do quadrilátero bilinear de 4 nós ($p = 1$) são:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (6.29)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (6.30)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (6.31)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (6.32)$$

ou, de forma compacta:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.33)$$

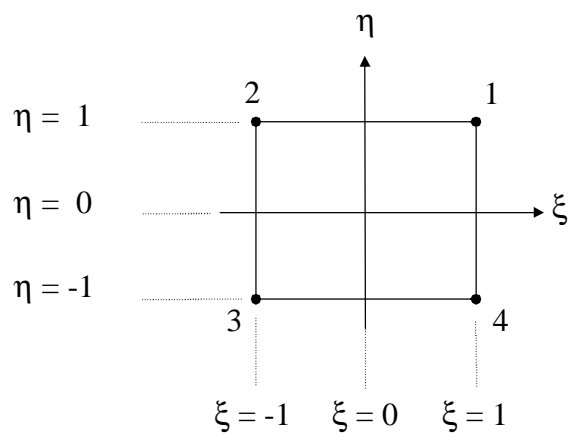


Figura 6.16 – Parametrização de um elemento quadrilátero bilinear (4 nós).

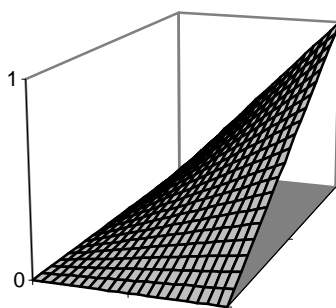


Figura 6.17 – Funções de interpolação do elemento quadrilátero bilinear.

As funções do elemento quadrilátero biquadrático de 9 nós ($p = 2$) são ilustradas nas figuras Figura 6.19-Figura 6.21.

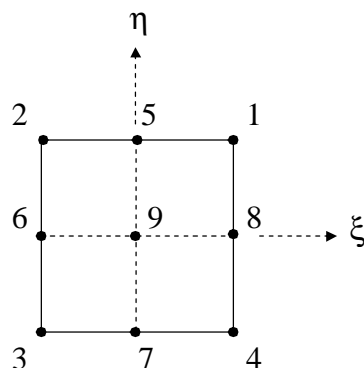


Figura 6.18 – Parametrização do elemento quadrilátero de 9 nós.

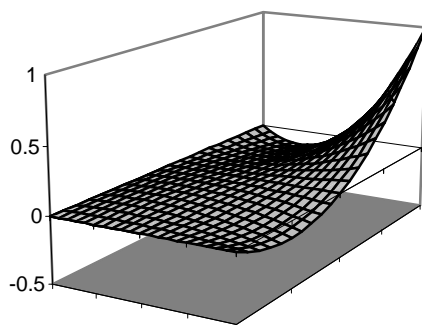


Figura 6.19 – Funções de interpolação dos nós dos vértices (N_i , $i=1, 2, 3, 4$) do elemento quadrilátero de 9 nós.

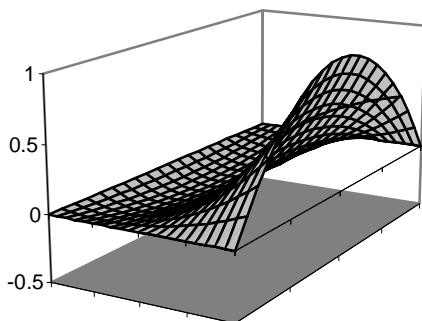


Figura 6.20 – Funções de interpolação dos pontos médios dos lados (N_i , $i=5, 6, 7, 8$) do elemento quadrilátero de 9 nós.

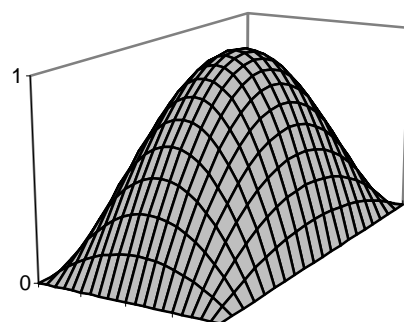


Figura 6.21 – Função de interpolação do nó central, ou função bolha (N_9), do elemento quadrilátero de 9 nós.

O triângulo de Pascal da Figura 6.22 apresenta os monômios de um polinômio completo de grau p , enquanto que a Figura 6.23 mostra os monômios presentes em um elemento de Lagrange de grau p . Comparando estas duas figuras, observa-se que os elementos de Lagrange possuem monômios em excesso.

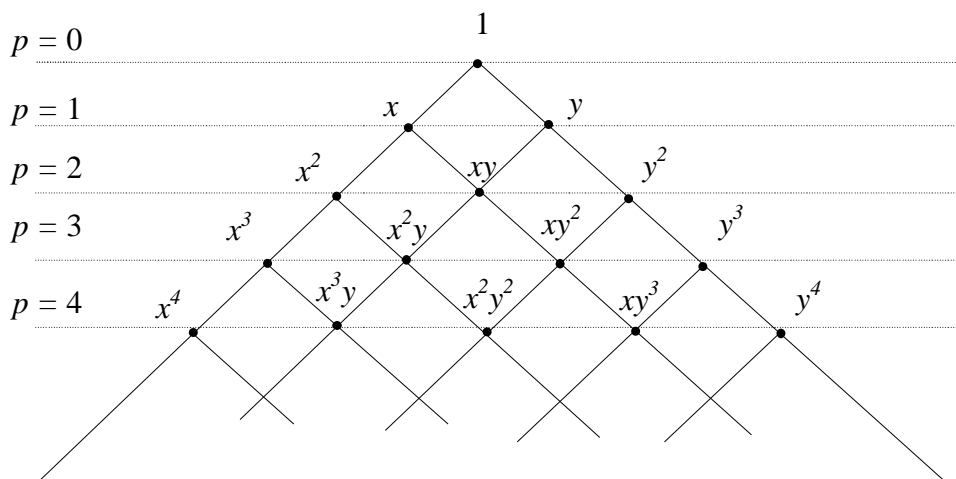


Figura 6.22 - Monômios de um polinômio completo de grau p (Triângulo de Pascal).

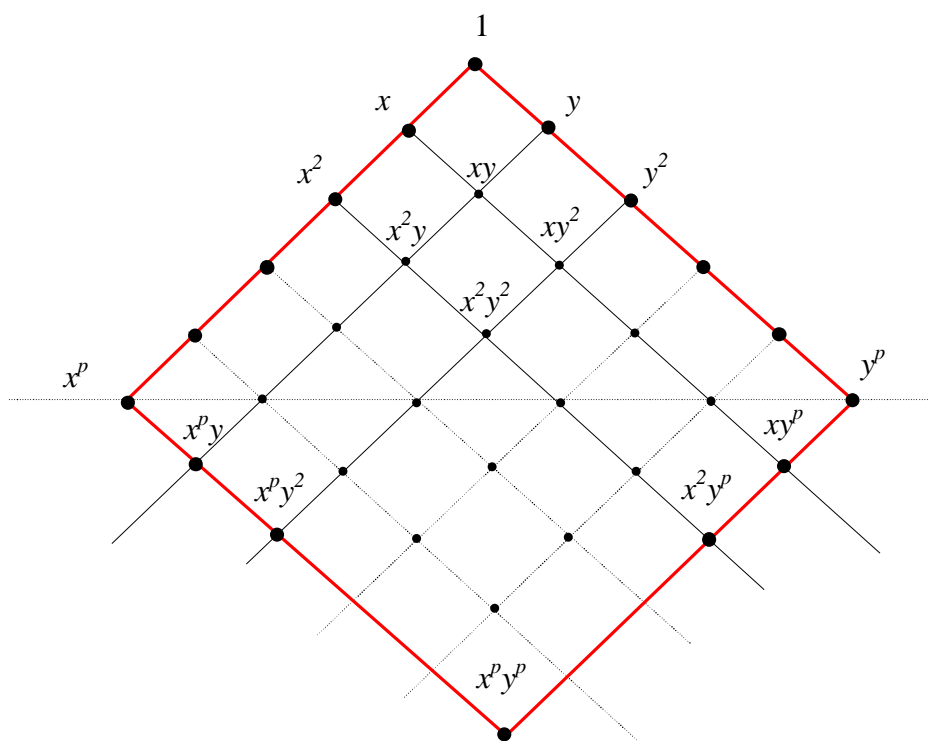


Figura 6.23 - Monômios presentes em um elemento de Lagrange de grau p .

6.4.3 Elementos Quadriláteros - Família de Serendipity

Os elementos de Serendipity são uma alternativa aos elementos de Lagrange que, como foi visto anteriormente, possuem monômios em excesso, resultando em elementos com um número de nós maior do que o necessário para que se tenha um polinômio completo de um determinado grau p . Os elementos de Serendipity são construídos através do produto e da combinação linear de funções de interpolação de diferentes graus de modo a se obter o grau desejado.

Para $p = 2$ o elemento de Serendipity tem 8 nós (Figura 6.24), 1 a menos do que o correspondente de Lagrange. As funções de interpolação dos pontos médios dos lados (Figura 6.25) são obtidas através do produto de uma variação quadrática no bordo por uma variação linear na direção oposta:

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \xi)(1 - \xi) \quad (6.34)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \quad (6.35)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \xi)(1 - \xi) \quad (6.36)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \quad (6.37)$$

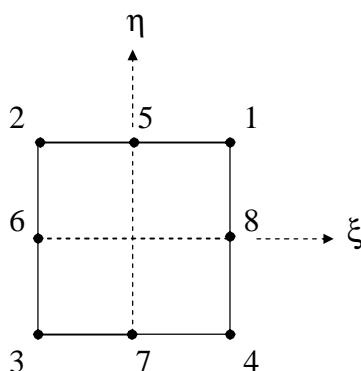


Figura 6.24 - Parametrização de um elemento quadrilátero quadrático de Serendipity (8 nós).

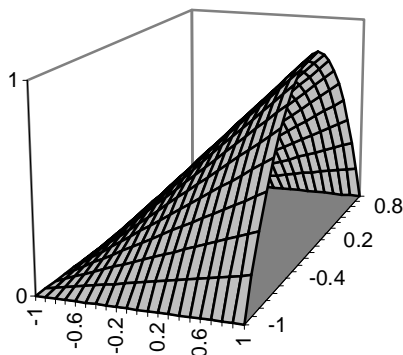


Figura 6.25 - Funções de interpolação dos pontos médios dos lados (N_i , $i=5, 6, 7, 8$) do elemento quadrilátero de 8 nós.

As funções dos nós dos vértices do quadrilátero (Figura 6.27) são obtidas a partir da combinação linear de funções bilineares com as funções quadráticas dos pontos médios dos lados, como mostra a Figura 6.26, resultando em:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) \quad (6.38)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) \quad (6.39)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) \quad (6.40)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) \quad (6.41)$$

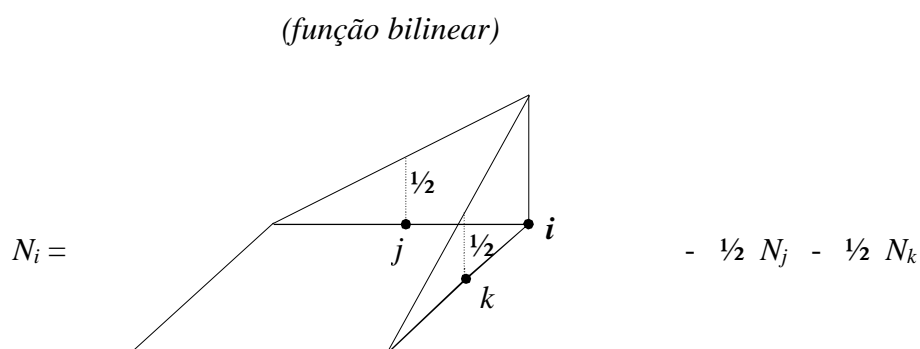


Figura 6.26 – Combinação linear das funções dos pontos médios dos lados com funções bilineares dos vértices do quadrilátero.

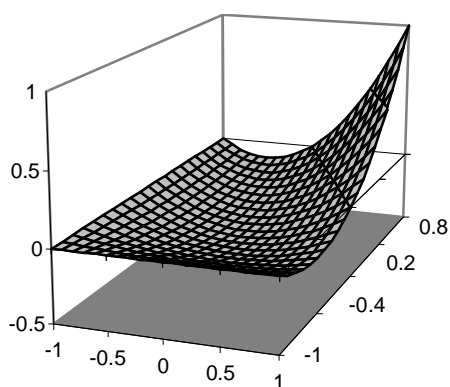


Figura 6.27 – Funções de interpolação dos vértices do quadrilátero quadrático de 8 nós.

O elemento cúbico de Serendipity tem 12 nós (Figura 6.28), e as funções de interpolação do nós intermediários dos lados são construídas a partir do produto de um variação cúbica no bordo por uma variação linear na direção oposta, como mostra a Figura 6.29:

$$N_i = \frac{1}{2}(1 \pm h) \mathbf{I}_i^3(x) \quad (i = 5, 9, 7, 11) \quad (6.42)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 \pm x) \mathbf{I}_i^3(h) \quad (i = 8, 12, 6, 10) \quad (6.43)$$

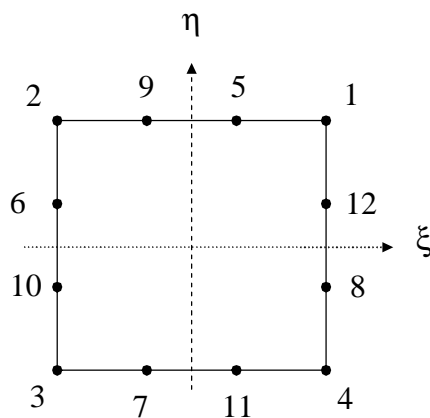


Figura 6.28 – Elemento cúbico de Serendipity.

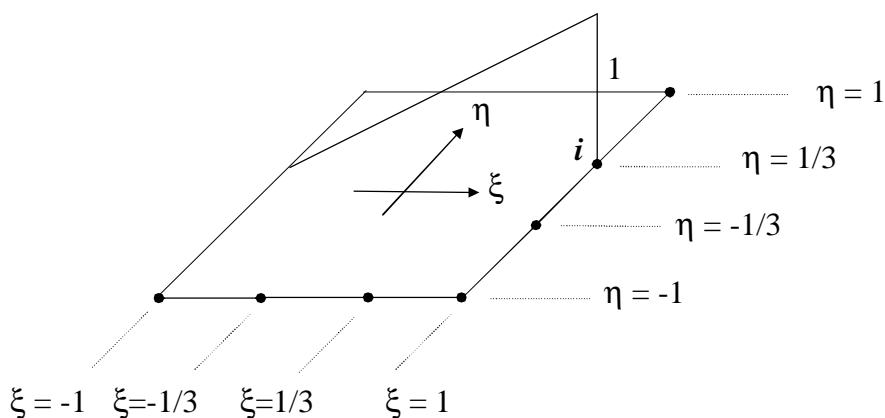


Figura 6.29 - Funções dos nós intermediários dos lados (variação cúbica no bordo x variação linear na direção oposta).

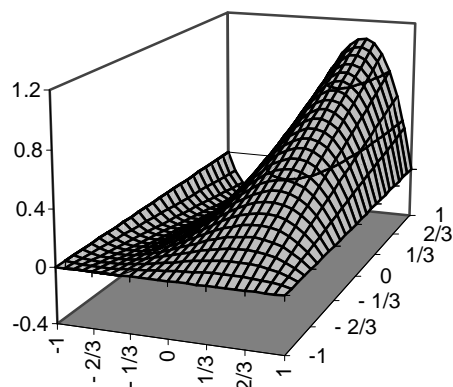


Figura 6.30 – Funções de interpolação dos nós intermediários.

Assim como no elemento quadrático, as funções dos vértices do elemento cúbico (Figura 6.27) são obtidas a partir da combinação linear de funções bilineares com as funções cúbicas dos pontos intermediários dos bordos, como mostra a Figura 6.31.

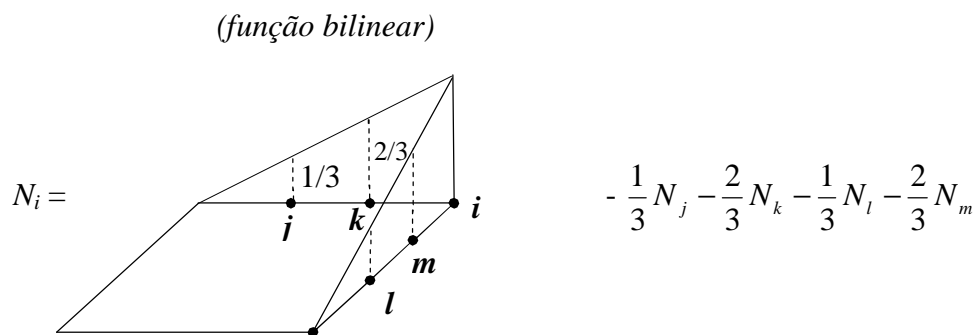


Figura 6.31 – Combinação linear das funções dos nós intermediários dos lados com funções bilineares dos vértices do quadrilátero.

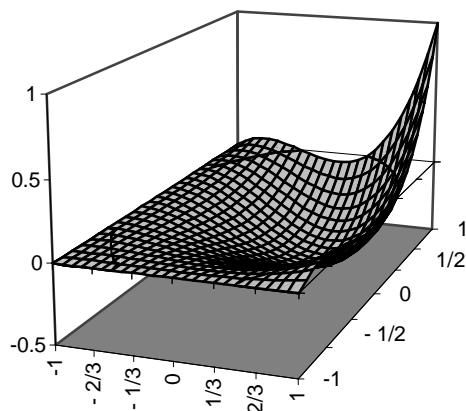


Figura 6.32 – Funções de interpolação dos vértices do quadrilátero cúbico de 12 nós.

A generalização da sistemática utilizada nos elementos quadráticos e cúbicos para um elemento de grau p , ou seja, a construção das funções a partir de:

- funções dos nós intermediários dos lados: variação de grau p nos bordos e variação linear na direção oposta
- funções de canto: função bilinear + combinação linear das funções dos lados

resultaria em elementos cujos monômios são apresentados na Figura 6.33. Observa-se nesta figura que a partir de $p = 4$ ficariam faltando monômios (ver Tabela 6.1). Particularmente para $p = 4$, as funções dos nós dos cantos e dos nós intermediários são obtidas com o procedimento utilizado nos elementos quadráticos e cúbicos, sendo necessária a adição de uma função correspondente ao nó do centro do elemento (função bolha) presente no elemento quadrático de Lagrange, resultando em um elemento de 17 nós (Figura 6.34).

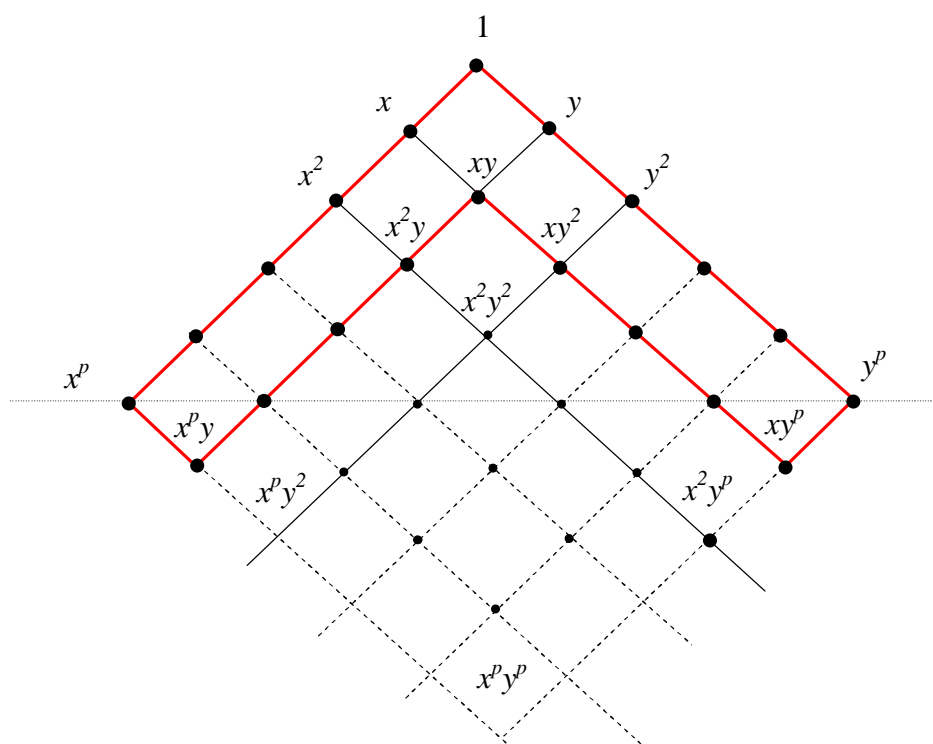


Figura 6.33 - Monômios presentes em um elemento de Serendipity.

Tabela 6.1 – Monômios presentes e ausentes em um elemento de Serendipity.

p	monômios de grau $> p$	monômios ausentes
1	xy	—
2	$x^2 y, xy^2$	—
3	$x^3 y, xy^3$	—
4	$x^4 y, xy^4$	$x^2 y^2$

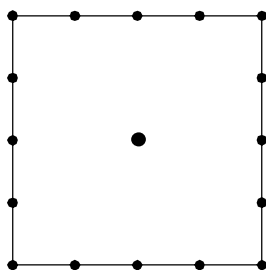


Figura 6.34 – Elemento de Serendipity de grau 4 (17 nós).

Assim, as funções deste elemento são,

- Funções dos nós intermediários dos lados: variação de grau $p = 4$ nos bordos e variação linear na direção oposta.
- Funções dos nós dos pontos médios dos lados: variação de grau $p = 4$ nos bordos e variação quadrática na direção oposta.
- Funções dos nós dos cantos: combinação linear de funções bilineares com as funções do nós intermediários dos bordos.

Para os bordos paralelos à direção η as funções são as seguintes (Figura 6.35):

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi \mathbf{I}_i^4(\eta) \quad (6.44)$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 - \xi)\xi \mathbf{I}_j^4(\eta) \quad (6.45)$$

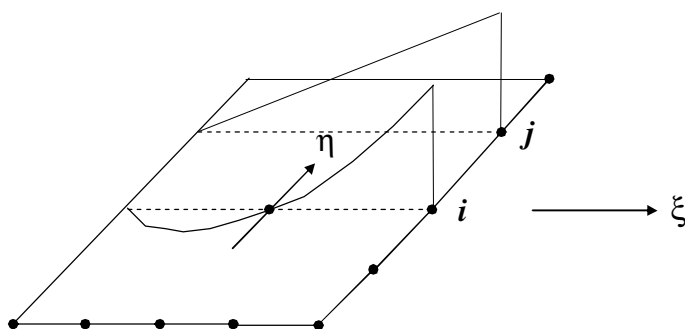


Figura 6.35 - Funções dos nós intermediários ($p = 4$).

e a função do nó do centro do elemento é a função bolha:

$$(1 + \xi)(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \quad (6.46)$$

Como pode ser visto na Figura 6.36, os elementos de Lagrange exigem um esforço computacional maior para o cálculo das matrizes de elemento maior do que os elementos de Serendipity, em consequência do maior número de nós.

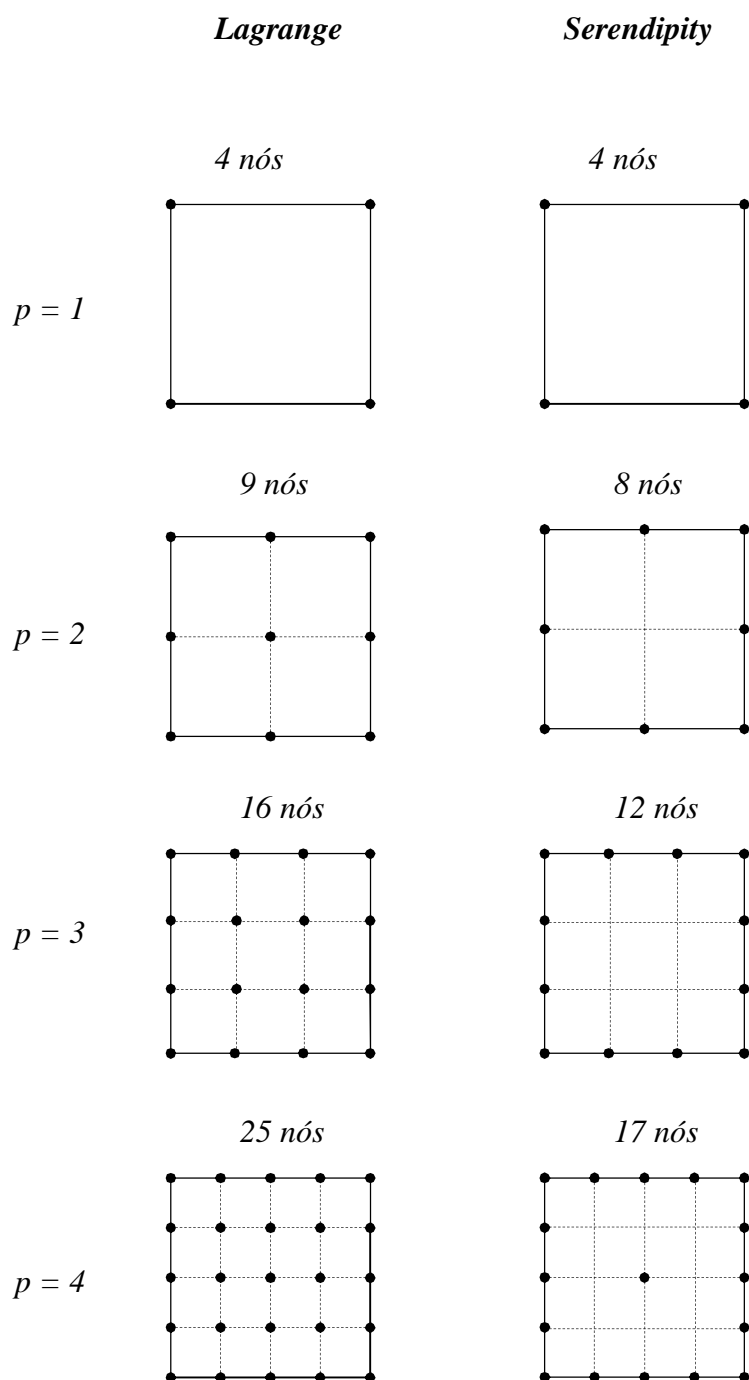


Figura 6.36 – Comparação entre elementos de Lagrange e de Serendipity.

6.4.4 Elementos Triangulares

Nos elementos triangulares isoparamétricos os parâmetros ou coordenadas naturais são as coordenadas de área do elemento. Em coordenadas de área, cada ponto P do triângulo fica determinado por suas coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , como mostra a Figura 6.37. Designando por Δ a área do triângulo e por ΔP_{ij} a área do triângulo formado pelo ponto P e os vértices i e j do triângulo, as coordenadas de áreas são definidas de modo que:

$$\xi_1^P = \frac{\Delta P_{23}}{\Delta}; \quad \xi_2^P = \frac{\Delta P_{31}}{\Delta}; \quad \xi_3^P = \frac{\Delta P_{12}}{\Delta} \quad (6.47)$$

De acordo com a definição acima, é válida a relação para qualquer triângulo:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (6.48)$$

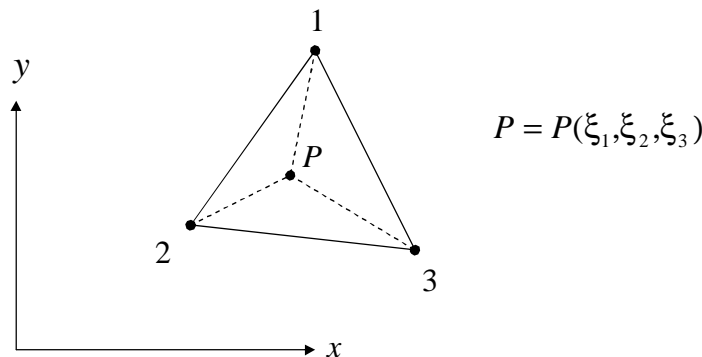


Figura 6.37 – Coordenadas de área de um ponto P do triângulo.

Sendo (x_i, y_i) as coordenadas cartesianas do vértice i , pode-se mostrar que a área do triângulo é dada pela expressão

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{área do triângulo}) \quad (6.49)$$

e que para um ponto qualquer de coordenadas (x, y) as coordenadas de área são determinadas por:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y}{2\Delta} \\ \xi_2 &= \frac{\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y}{2\Delta} \\ \xi_3 &= \frac{\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y}{2\Delta} \end{aligned} \quad (6.50)$$

onde α_i , β_i e γ_i são iguais a

$$\begin{aligned}\alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j\end{aligned}\tag{6.51}$$

Nas expressões acima, os índices i, j e k referem-se aos vértices tomados em seqüência e no sentido anti-horário, como mostra a Figura 6.38.

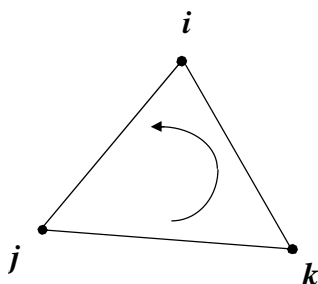


Figura 6.38 – Vértices do triângulo.

Claramente percebe-se que as coordenadas de área variam linearmente no triângulo, assumindo o valor 1 no próprio vértice e 0 na aresta oposta, como ilustra a Figura 6.39.

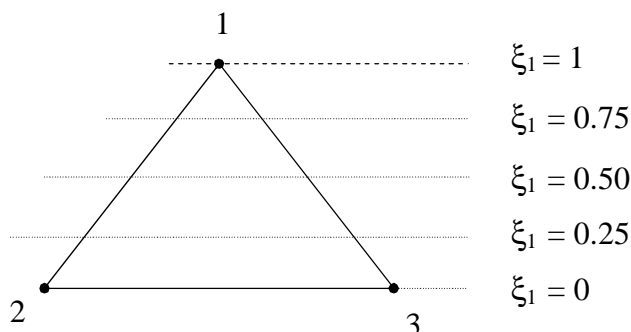


Figura 6.39 – Variação linear das coordenadas de área.

Desta forma, a geometria de um triângulo linear, ou seja, a geometria de um triângulo cujas arestas são retas, pode ser descrita por

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3\tag{6.52}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3\tag{6.53}$$

com,

$$N_1 = \xi_1; \quad N_2 = \xi_2; \quad N_3 = \xi_3\tag{6.54}$$

Conclui-se, portanto, que as coordenadas de área são funções lineares (Figura 6.41) que mapeiam um elemento triangular de geometria linear no domínio triangular de coordenadas naturais (ξ_1, ξ_2) da Figura 6.40.

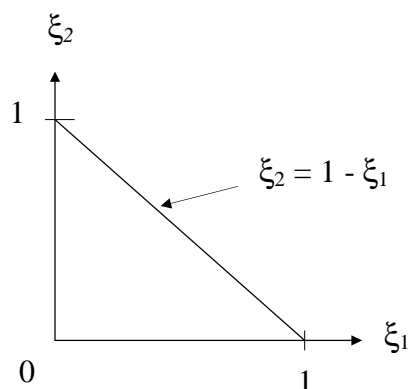


Figura 6.40 – Parametrização de um triângulo de geometria linear.

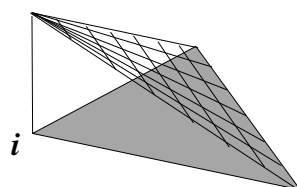


Figura 6.41 – Função de interpolação $N_i = \xi_i$ do triângulo linear.

Tendo em conta que a coordenada de área ξ_3 depende linearmente de ξ_1 e ξ_2 , as derivadas de x e y em relação às coordenadas de área ξ_1 e ξ_2 são:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = x_1 - x_3; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = x_2 - x_3 \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = y_1 - y_3; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = y_2 - y_3 \quad (6.56)$$

Conseqüentemente, a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas e o seu determinante são iguais a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

$$\det \mathbf{J} = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3) = 2\Delta \quad (6.58)$$

Para a obtenção de elementos de ordem superior faz-se uso do sistema de identificação dos nós através de coordenadas inteiras (I, J, K), como ilustrado na Figura 6.42:

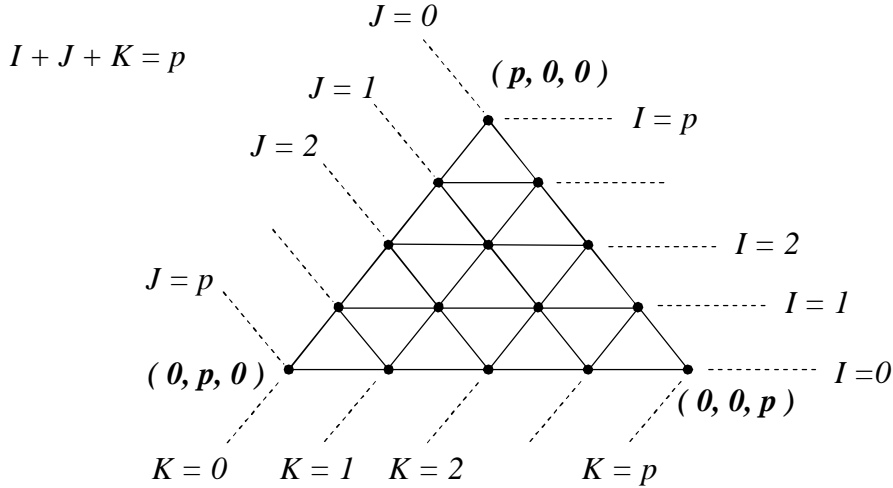


Figura 6.42 – Identificação dos nós de um triângulo genérico de grau p através de coordenadas inteiras.

Com este sistema de numeração, a função do nó (I, J, K) de grau p é determinada por:

$$N_i^p = \mathbf{I}_I^I(\xi_1) \mathbf{I}_J^J(\xi_2) \mathbf{I}_K^K(\xi_3) \quad (6.59)$$

onde $\mathbf{I}_I^I(\xi_1)$ é o polinômio de Lagrange de grau I referente ao nó I . Assim, para o elemento quadrático (Figura 6.43), a função do nó 1 seria

$$N_1 = \mathbf{I}_2^2(\xi_1) \mathbf{I}_0^0(\xi_2) \mathbf{I}_0^0(\xi_3) \quad (6.60)$$

Calculando os termos acima obtêm-se os polinômios:

$$\mathbf{I}_2^2(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - 0)(\xi_1 - 1/2)}{(1 - 0)(1 - 1/2)} = \xi_1(2\xi_1 - 1) \quad (6.61)$$

$$\mathbf{I}_0^0(\xi_2) = 1 \quad (6.62)$$

$$\mathbf{I}_0^0(\xi_3) = 1 \quad (6.63)$$

Substituindo estes termos obtêm-se a função N_1 :

$$N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \quad (6.64)$$

Os gráficos dos polinômios $\mathbf{I}_2^2(\xi_1)$ e $\mathbf{I}_0^0(\xi_2)$ são ilustrados na Figura 6.44 e na Figura 6.45, respectivamente.

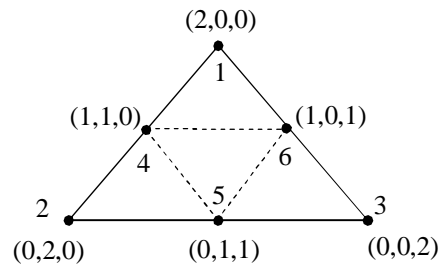


Figura 6.43 – Elemento triangular quadrático.

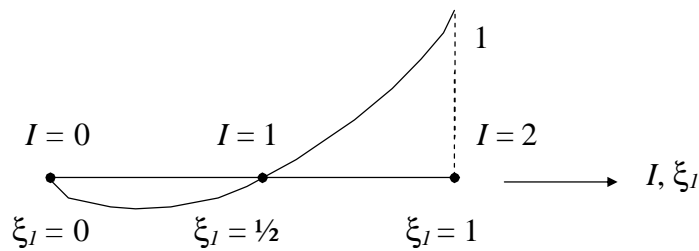


Figura 6.44 – Polinômio de Lagrange $\mathbf{I}_2^2(\xi_1)$.

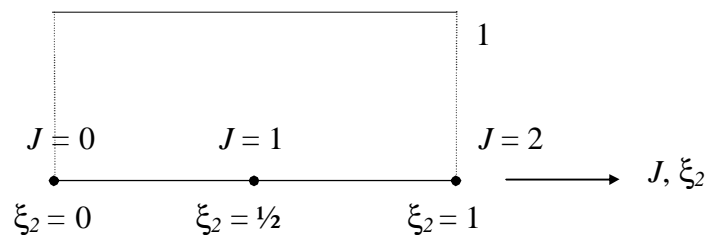


Figura 6.45 – Polinômio de Lagrange $\mathbf{I}_0^1(\xi_2)$.

Novamente utilizando a expressão (6.60), a função do nó 4 será igual a

$$N_4 = \mathbf{I}_1^1(\xi_1) \mathbf{I}_1^1(\xi_2) \mathbf{I}_0^0(\xi_3) \quad (6.65)$$

Calculando o termo $\mathbf{I}_1^1(\xi_1)$ (Figura 6.46) obtém-se:

$$\mathbf{I}_1^1(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - 0)}{(1/2 - 0)} = 2\xi_1 \quad (6.66)$$

e por analogia,

$$\mathbf{I}_1^1(\xi_2) = 2\xi_2 \quad (6.67)$$

Substituindo os termos acima,

$$N_4 = 4\xi_1\xi_2 \quad (6.68)$$

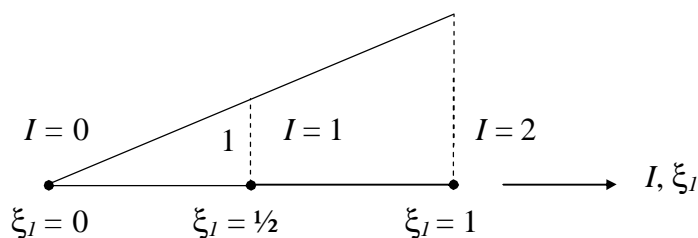


Figura 6.46 – Polinômio de Lagrange $\mathbf{I}_1^1(\xi_2)$.

Procedendo da mesma forma obtêm-se as demais funções de interpolação do elemento triangular quadrático:

$$N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \quad (6.69)$$

$$N_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \quad (6.70)$$

$$N_5 = 4\xi_2\xi_3 \quad (6.71)$$

$$N_6 = 4\xi_1\xi_3 \quad (6.72)$$

6.4.5 Hexaedros

Os elementos hexaédricos de Lagrange de grau p são uma extensão tridimensional dos elementos quadriláteros, e suas funções de interpolação são obtidas através de produtos de polinômios unidimensionais de Lagrange nas 3 direções ξ , η e ζ (Figura 6.47), resultando em elementos com $(p + 1)^3$ nós,

$$N_i^p(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{I}_i^p(\xi)\mathbf{I}_i^p(\eta)\mathbf{I}_i^p(\zeta) \quad \Rightarrow \quad (p+1)^3 \text{ nós} \quad (6.73)$$

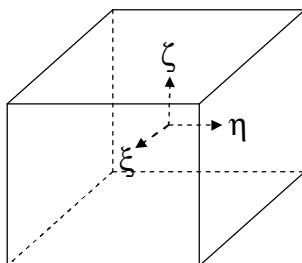


Figura 6.47 – Parametrização de elementos hexaédricos.

Para $p = 1$ o elemento resultante é o elemento hexaédrico trilinear de 8 nós, com funções iguais a:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (6.74)$$

onde,

$$\xi_0 = \xi \xi_i$$

$$\eta_0 = \eta \eta_i$$

$$\zeta_0 = \zeta \zeta_i$$

$$\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1:$$

Os elementos sólidos de Serendipity são obtidos através do mesmo processo discutido anteriormente. Para o grau $p = 2$, o elemento de Serendipity tem 20 nós, todos nos vértices e nos pontos médios das arestas, e as funções de interpolação são dadas por:

$$\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1:$$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (6.75)$$

$$\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1:$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (6.76)$$

$$\xi_i = \pm 1, \eta_i = 0, \zeta_i = \pm 1:$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad (6.77)$$

$$\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = 0:$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (6.78)$$

6.4.6 Tetraedros

O elemento tridimensional correspondente ao triângulo é o tetraedro. Analogamente às coordenadas de área do triângulo, os parâmetros usados no tetraedro são as coordenadas de volume do elemento. Em coordenadas de volume, cada ponto P do tetraedro fica determinado por suas coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, como mostra a Figura 6.48.

Designando por Δ o volume do tetraedro e por ΔP_{ijk} o volume do tetraedro formado pelo ponto P e os vértices i, j e k do tetraedro, as coordenadas de volume são definidas de modo que:

$$\xi_1 = \frac{P_{234}}{\Delta}; \quad \xi_2 = \frac{P_{134}}{\Delta}; \quad \xi_3 = \frac{P_{124}}{\Delta}; \quad \xi_4 = \frac{P_{123}}{\Delta} \quad (6.79)$$

verificando-se a seguinte relação:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \quad (6.80)$$

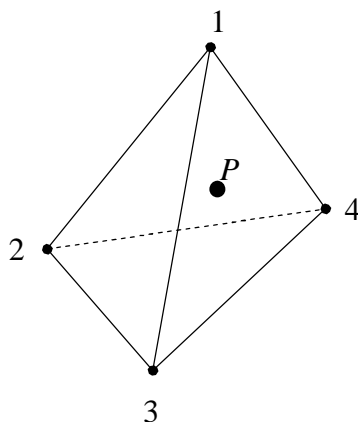


Figura 6.48 – Coordenadas de volume em um tetraedro.

As funções de interpolação do tetraedro linear de 4 nós, ilustrado na Figura 6.49, são:

$$N_i = \xi_i \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (6.81)$$

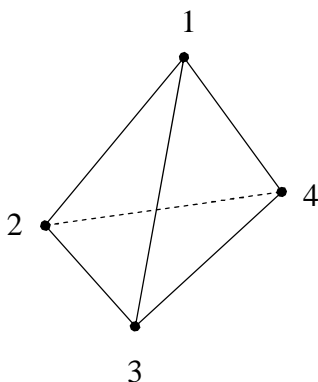


Figura 6.49 – Tetraedro linear.

Para $p = 2$, o tetraedro resultante tem 10 nós, como mostra a Figura 6.50, e as funções de interpolação são iguais a:

$$N_i = \xi_i (2\xi_i - 1) \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (6.82)$$

$$N_5 = 4\xi_1\xi_2 \quad (6.83)$$

$$N_6 = 4\xi_1\xi_3 \quad (6.84)$$

$$N_7 = 4\xi_1\xi_4 \quad (6.85)$$

$$N_8 = 4\xi_2\xi_3 \quad (6.86)$$

$$N_9 = 4\xi_3\xi_4 \quad (6.87)$$

$$N_{10} = 4\xi_2\xi_4 \quad (6.88)$$

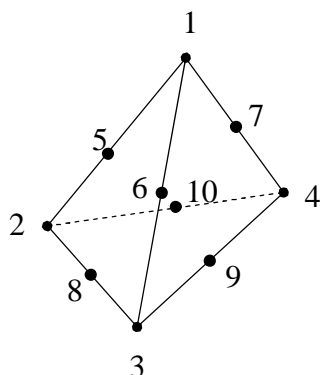


Figura 6.50 – Tetraedro quadrático.

Como somente três das coordenadas paramétricas são linearmente independentes, a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas é igual a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

Para tetraedros de faces planas, a geometria é descrita por:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 \quad (6.90)$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 \quad (6.91)$$

$$z = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 \quad (6.92)$$

Neste caso, a matriz Jacobiana se reduz a:

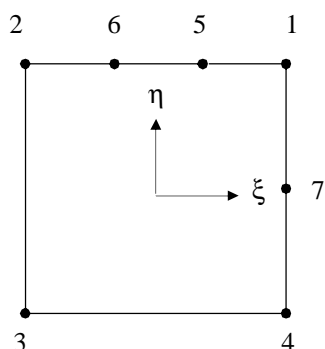
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

e o seu determinante:

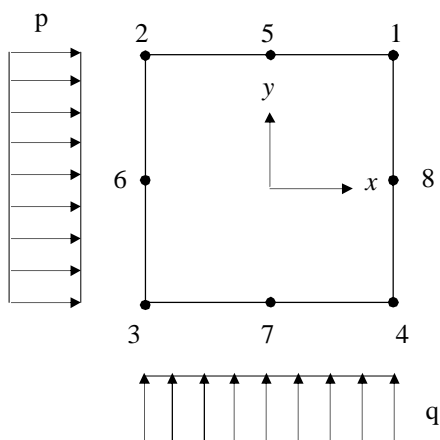
$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= (x_1 - x_4)(y_2 - y_4)(z_3 - z_4) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_4)(z_2 - z_4) + \\ &+ (x_2 - x_4)(y_3 - y_4)(z_1 - z_4) - (x_3 - x_4)(y_2 - y_4)(z_1 - z_4) + \\ &- (x_2 - x_4)(y_1 - y_4)(z_3 - z_4) - (x_1 - x_4)(y_3 - y_4)(z_2 - z_4) = 6\Delta \end{aligned} \quad (6.94)$$

6.5 Exercícios Propostos

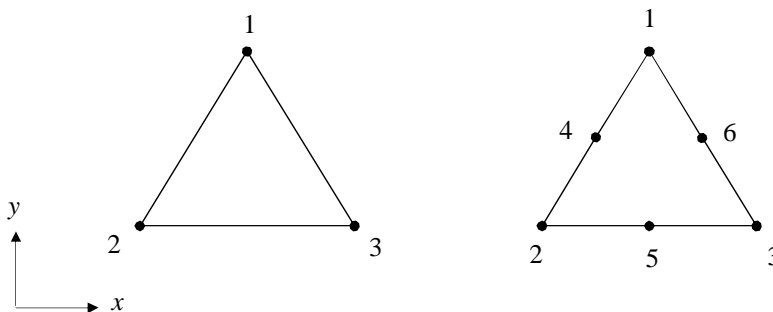
1) Determinar as funções de interpolação do elemento bidimensional da figura abaixo:



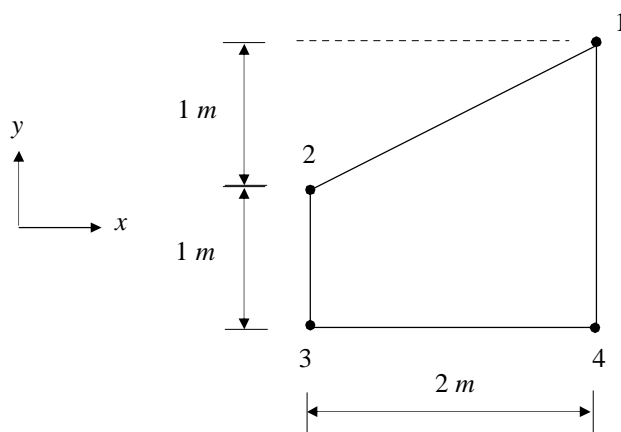
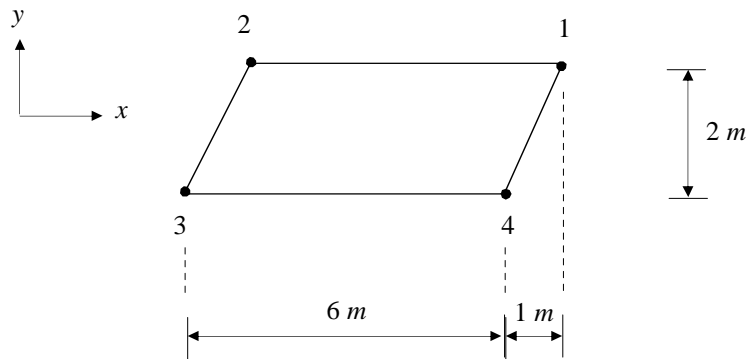
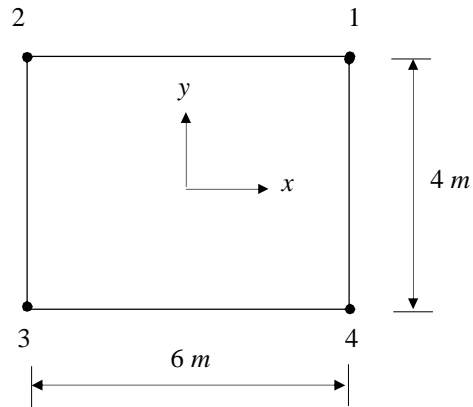
2) Calcular as forças nodais equivalentes do elemento quadrilátero quadrático de elasticidade plana:



3) Calcular as forças nodais equivalentes para os elementos de elasticidade plana abaixo, considerando uma distribuição uniforme de forças de volume na direção y :



4) Calcular o operador Jacobiano dos seguintes elementos:



7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

7.1 Integração Numérica de Gauss

A integração numérica é utilizada a nível de elemento, para avaliar as integrais na formulação variacional de um problema:

$$\int_{\Omega^e} f(x) d\Omega = \int_{\Omega^e} f(\xi) \det \mathbf{J} d\xi \quad (7.1)$$

\mathbf{J} - Jacobiano da transformação de coordenadas

A regra de integração numérica mais utilizada em elementos finitos é a *Quadratura de Gauss*, por sua precisão e eficiência computacional:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(\xi_i) \quad (7.2)$$

n - número de pontos de integração de Gauss

ξ_i - coordenadas dos pontos de integração

α_i - peso do i -ésimo ponto de integração

A quadratura de Gauss integra corretamente funções que podem ser representadas exatamente por polinômios de grau p , tal que:

$$p \leq (2n - 1) \quad (7.3)$$

No caso multidimensional, a integração numérica é obtida através do emprego da quadratura de Gauss em cada coordenada separadamente. Por exemplo, em duas dimensões:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{n_\xi} g(\xi_i, \eta) \alpha_i \right) d\eta = \sum_{i=1}^{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\eta} g(\xi_i, \eta_j) \alpha_i \alpha_j \quad (7.4)$$

n_ξ - número de pontos na direção ξ

n_η - número de pontos na direção η

A integração exata via integração numérica é virtualmente impossível em elementos isoparamétricos, pois o integrando pode ser um polinômio de grau infinito. Isto acontece em elementos com distorções geométricas exageradas.

De acordo com a expressão (7.2), suponha-se que a função $f(\xi)$ da Figura 7.1 seja integrada exatamente:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\xi_i) \quad (7.5)$$

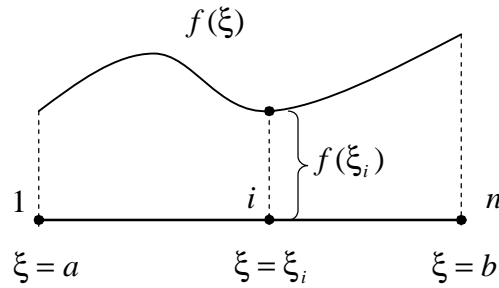


Figura 7.1 – Quadratura de Gauss.

Para que esta integral possa ser calculada numericamente, os n pontos de integração ξ_i e os seus respectivos fatores de ponderação α_i devem ser determinados. Considerando os polinômios $\psi(\xi)$ de grau $n-1$ tal que $\psi(\xi_i) = f(\xi_i)$ pode-se escrever:

$$\psi(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mathbf{I}_i^{n-1}(\xi) \quad (7.6)$$

Tomando o polinômio de grau $P(\xi)$, de grau n tal que $P(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$,

$$P(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n) \quad (7.7)$$

a função $f(\xi)$ pode ser escrita sob a forma:

$$f(\xi) = \psi(\xi) + P(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \xi^j \quad (7.8)$$

Integrando:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left(\int_a^b \mathbf{I}_i^{n-1}(\xi) d\xi \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \left(\int_a^b \xi^j P(\xi) d\xi \right) \quad (7.9)$$

Comparando (7.5) e (7.9):

$$\alpha_i = \left(\int_a^b \mathbf{I}_i^{n-1}(\xi) d\xi \right) \quad (7.10)$$

$$\int_a^b \xi^j P(\xi) d\xi = 0, \quad j = 0, \dots, \infty \quad (7.11)$$

Portanto, para n pontos de integração as incógnitas $\xi_i, i = 1, \dots, n$ podem ser determinadas por:

$$\int_a^b \xi^j P(\xi) d\xi = 0, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (7.12)$$

Considerando as condições acima, observa-se que a integração numérica de Gauss com n pontos de integração integra exatamente um polinômio de grau $2n-1$, uma vez que a função

$$f(\xi) = \psi(\xi) + P(\xi) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \xi^j$$

possui grau $2n-1$.

A Tabela 7.1 apresenta os pontos de integração de Gauss e os fatores de ponderação até $n = 10$.

Tabela 7.1 - Pontos de integração de Gauss.

n	$\pm \xi_i$	α_i
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	0.93246 95142 03152 0.66120 93864 66265 0.23861 91860 83197	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691
7	0.94910 79123 42759 0.74153 11855 99394 0.40584 51513 77397 0.00000 00000 00000	0.12948 49661 68870 0.27970 53914 89277 0.38183 00505 05119 0.41795 91836 73469
8	0.96028 98564 97536 0.79666 64774 13627 0.52553 24099 16329 0.18343 46424 95650	0.10122 85362 90376 0.22238 10344 53374 0.31370 66458 77887 0.36268 37833 78362
9	0.96816 02395 07626 0.83603 11073 26636 0.61337 14327 00590 0.32425 34234 03809 0.00000 00000 00000	0.08127 43883 61574 0.18064 81606 94857 0.26061 06964 02935 0.31234 70770 40003 0.33023 93550 01260
10	0.97390 65285 17172 0.86506 33666 88985 0.67940 95682 99024 0.43339 53941 29247 0.14887 43389 81631	0.06667 13443 08688 0.14945 13491 50581 0.21908 63625 15982 0.26926 67193 09996 0.29552 42247 14753

Exemplo: Determinar os pontos de integração e os fatores de ponderação para $n = 2$, considerando os limites de integração $a = -1$ e $b = 1$.

Escrevendo o polinômio $P(\xi)$ para $n = 2$:

$$P(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$$

Resolvendo o sistema de 2 equações e duas incógnitas ξ_1 e ξ_2 :

Primeira equação ($j = 0$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= \int_{-1}^1 (\xi^2 - \xi\xi_2 - \xi_1\xi + \xi_1\xi_2) d\xi = \\ &= \left[\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2}\xi_2 - \frac{\xi^2}{2}\xi_1 + \xi\xi_1\xi_2 \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_1 + \xi_1\xi_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_1 + \xi_1\xi_2 = \\ &= \frac{2}{3} + 2\xi_1\xi_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3}$$

Segunda equação ($j = 1$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \xi(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^1 \xi(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi &= \int_{-1}^1 (\xi^3 - \xi^2\xi_2 - \xi_1\xi^2 + \xi\xi_1\xi_2) d\xi = \\ &= \left[\frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^3}{3}\xi_2 - \frac{\xi^3}{3}\xi_1 + \frac{\xi^2}{2}\xi_1\xi_2 \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_1\xi_2 = \\ &= -\frac{2}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi_1 + \xi_2 = 0$$

Solução do sistema de equações:

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Fatores de ponderação:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-1}^1 \mathbf{I}_1^1 d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi \right) d\xi = \\ &= \left[\frac{1}{2} \xi - \frac{\sqrt{3}}{4} \xi^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \int_{-1}^1 \mathbf{I}_2^1 d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) d\xi = \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi \right]_{-1}^1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

7.2 Regras de Integração para Triângulos e Tetraedros

Em um triângulo qualquer, a integral de uma função das coordenadas de área pode ser efetuada no domínio de coordenadas paramétricas (Figura 7.2), de acordo com a expressão:

$$\int_{\Omega} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\Omega = \int_{\xi_1=0}^1 \int_{\xi_2=0}^{1-\xi_1} f(\xi_1, \xi_2, 1-\xi_1-\xi_2) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.13)$$

Para a integração numérica pode-se utilizar a fórmula:

$$\int_{\Omega} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\det \mathbf{J})_i f_i \alpha_i \quad (7.14)$$

A Tabela 7.2 apresenta os pontos de integração e os pesos para a regra de integração acima.

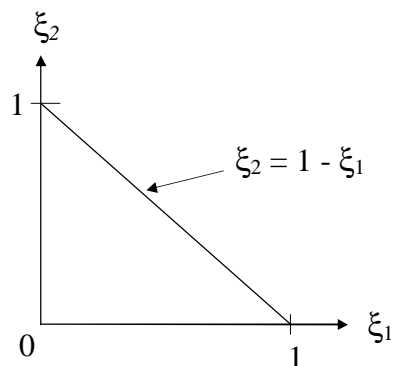


Figura 7.2 - Parametrização de triângulos.

Tabela 7.2 – Pontos de integração ξ_i e pesos α para triângulos: n = número de pontos de integração; p = grau de precisão; m = multiplicidade (permutações).

n	p	ξ_1	ξ_2	ξ_3	α	m
1	1	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	1.00000 00000 00000	1
3	2	0.50000 00000 00000	0.50000 00000 00000	0.00000 00000 00000	0.33333 33333 33333	3
3	2	0.66666 66666 66667	0.16666 66666 66667	0.16666 66666 66667	0.33333 33333 33333	3
4	3	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	-0.56250 00000 00000	1
		0.60000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.52083 33333 33333	3
6	4	0.81684 75729 80459	0.09157 62135 09771	0.09157 62135 09771	0.10995 17436 55322	3
		0.10810 30181 68070	0.44594 84909 15965	0.44594 84909 15965	0.22338 15896 78011	3
7	5	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.22503 00003 00000	1
		0.79742 69853 53087	0.10128 65073 23456	0.10128 65073 23456	0.12593 91805 44827	3
		0.47014 20641 05115	0.47014 20641 05115	0.05971 58717 89770	0.13239 41527 88506	3
9	5	0.12494 95032 33232	0.43752 52483 83384	0.43752 52483 83384	0.20595 05047 60887	3
		0.79711 26518 60071	0.16540 99273 89841	0.03747 74207 50088	0.06369 14142 86223	6
12	6	0.87382 19710 16996	0.06308 90144 91502	0.06308 90144 91502	0.05084 49063 70207	3
		0.50142 65096 58179	0.24928 67451 70910	0.24928 67451 70911	0.11678 62757 26379	3
		0.63650 24991 21399	0.31035 24510 33785	0.05314 50498 44816	0.08285 10756 18374	6

O procedimento para tetraedros é análogo. A integral de uma função das coordenadas de volume é dada por:

$$\int_{\Omega} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) d\Omega = \int_{\xi_1=0}^1 \int_{\xi_2=0}^{1-\xi_1} \int_{\xi_3=0}^{1-\xi_1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1-\xi_1-\xi_2-\xi_3) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (7.15)$$

Para a integração numérica utiliza-se a fórmula:

$$\int_{\Omega} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) d\Omega = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (\det \mathbf{J})_i f_i \alpha_i \quad (7.16)$$

A Tabela 7.3 apresenta os pontos de integração e os pesos correspondentes para a integração numérica em tetraedros.

Tabela 7.3 – Pontos de integração ξ_i e pesos α para tetraedros: n = número de pontos de integração; p = grau de precisão; m = multiplicidade (permutações).

n	p	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	α	m
1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1	1
4	2	0.58541020	0.13819660	0.13819660	0.13819660	1/4	4
5	3	1/4	1/4	1/4	1/4	-4/5	1
		1/3	1/6	1/6	1/6	9/20	4

8 ESTIMATIVAS DE ERRO

8.1 Estimativas de Erro Globais e Locais

Define-se o erro associado a uma aproximação como sendo a função que mede a diferença entre a solução exata e a solução aproximada:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (8.1)$$

Normalmente, utiliza-se a norma de energia para a aferição da magnitude do erro. Em problemas de elasticidade, a norma de energia do erro é dada pela expressão:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathcal{L}\mathbf{e})^t \mathbf{D} (\mathcal{L}\mathbf{e}) d\Omega \quad (8.2)$$

Outra norma frequentemente utilizada é a norma de L_2 :

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}^t \mathbf{e} d\Omega \quad (8.3)$$

Desenvolvendo a expressão do erro medido na norma de energia obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_E^2 &= \int_{\Omega} (\mathcal{L}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}))^t \mathbf{D} (\mathcal{L}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^t \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^t \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \end{aligned} \quad (8.4)$$

Como pode-se observar nesta expressão, o erro pode ser escrito em função da diferença entre os campos de tensão exato e aproximado. Conseqüentemente, um campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}^*$ melhorado de alguma forma conduz a uma estimativa do erro:

$$\|\hat{\mathbf{e}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^t \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (8.5)$$

Uma maneira eficiente de se obter o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}^*$ consiste em suavizar o campo de tensões $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ obtido no método dos elementos finitos, tornando-o contínuo. Isto pode ser feito interpolando valores nodais médios $\boldsymbol{\sigma}_i$ das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \boldsymbol{\sigma}_i \quad (8.6)$$

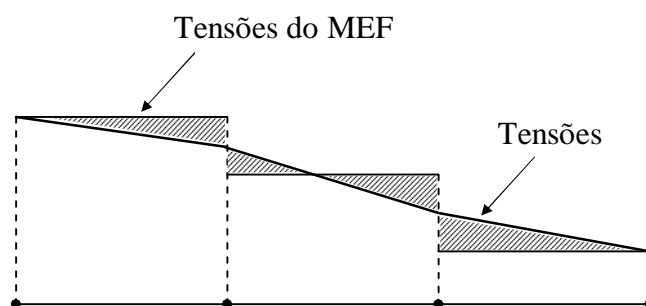


Figura 8.1

A integral em (8.5) pode ser avaliada a nível de elemento, resultando em estimativas locais de erro:

$$\|\hat{\mathbf{e}}\|_E^2 = \sum_{i=1}^{numel} \|\hat{\mathbf{e}}_i\|_E^2 \quad (8.7)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}_i\|_E^2 = \int_{\Omega_i} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^t \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (8.8)$$

Define-se então o erro médio dos elementos com sendo igual a:

$$e_m = \frac{\|\hat{\mathbf{e}}\|_E}{\sqrt{numel}} \quad (8.9)$$

O erro médio é um parâmetro importante em métodos adaptativos. Para um determinado número de equações, a malha ideal (malha ótima) é aquela com uma distribuição de erros por elemento mais uniforme possível. Para chegar a esta malha ótima pode-se adotar a seguinte estratégia de refinamento: até que seja alcançado um nível de erro pré-especificado, são refinados os elementos com um erro maior que o erro médio.

A magnitude do erro medido na norma de energia depende das unidades utilizadas. Portanto, deve-se preferencialmente usar o erro relativo η :

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E} \quad (8.10)$$

Se a solução exata é desconhecida, o erro relativo pode ser estimado por:

$$\hat{\eta} = \frac{\|\hat{\mathbf{e}}\|_E}{\|\hat{\mathbf{u}}\|_E} \quad (8.11)$$

A norma de energia da solução aproximada é igual a:

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathcal{L} \hat{\mathbf{u}})' \mathbf{D} (\mathcal{L} \hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \mathbf{U}' \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (8.12)$$

8.2 Taxas de Convergência

Uma aproximação do MEF (atendendo aos critérios de convergência) converge para a solução exata, na norma de energia, quando o tamanho h dos elementos tende a zero e/ou o grau p dos polinômios utilizados tende a infinito, ou seja,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^\mu p^{-\lambda} \quad (8.13)$$

C – constante que independe de h e p .

μ - $\min(p, \lambda)$.

λ - real positivo que mede a intensidade das singularidades.

Fixando o grau dos polinômios ($p = \text{constante}$) a expressão acima reduz-se a:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^\mu \quad (8.14)$$

onde μ é a taxa de convergência h .

Em duas dimensões, o número de equações pode ser estimado em função de um tamanho característico dos elementos e do grau p :

$$neq \approx \frac{p^2}{h^2} \quad (8.15)$$

Com a relação acima, o limite superior do erro em função do número de equações passa a ser:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Cneq^{-\mu/2} \quad (8.16)$$

ou equivalentemente,

$$\log \|\mathbf{e}\|_E \leq \log C - \frac{\mu}{2} \log neq \quad (8.17)$$

A igualdade desta expressão representa uma reta com coeficiente angular igual a $-\mu/2$, conforme a figura abaixo:

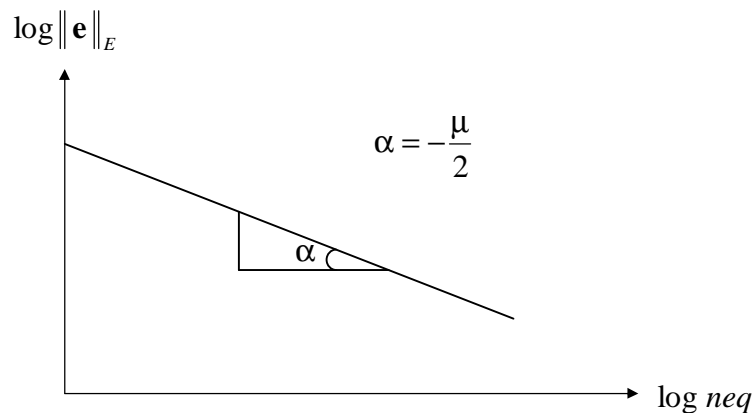


Figura 8.2 – Taxa de convergência.

9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

9.1 Estado Plano de Deformação

O exemplo de estado plano de deformação (Figura 9.1) apresentado a seguir ilustra a importância do papel desempenhado pela adaptatividade no método dos elementos finitos. Duas malhas foram utilizadas: uma uniforme (Figura 9.2a) e uma outra adaptada (Figura 9.2b), concentrando elementos nas regiões onde ocorrem os maiores erros (onde ocorrem as maiores variações nas tensões). A Tabela 9.1 apresenta os resultados obtidos comparando as normas de energia da solução numérica com a solução exata. Nota-se que com um número menor de equações, a malha adaptada chega a um resultado mais próximo da solução exata $\|\mathbf{u}\|_E = 1.379745$. O erro exato foi calculado de acordo com a expressão:

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left(\|\mathbf{u}\|_E^2 - \|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 \right)^{1/2} \quad (9.1)$$

Pode-se mostrar que a relação acima é válida somente para problemas auto-adjuntos.

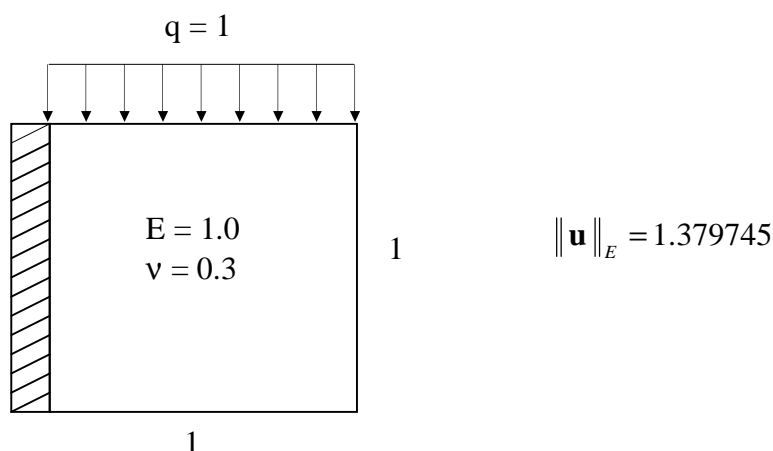


Figura 9.1

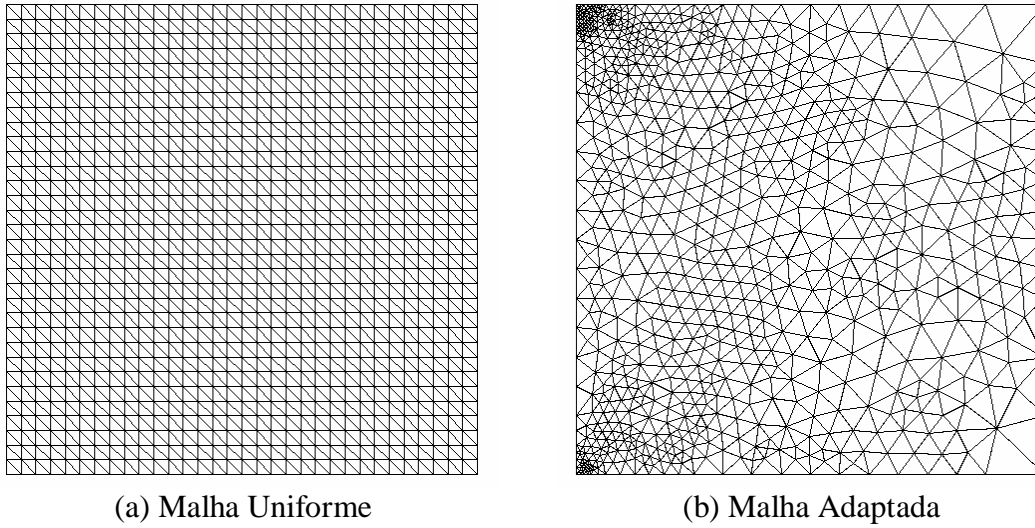


Figura 9.2

Malha	$numel$	neq	$\ \hat{\mathbf{u}}\ _E$	$\ \hat{\mathbf{e}}\ _E$	$\hat{\eta}(\%)$	$\ \mathbf{e}\ _E$	$\eta(\%)$
Uniforme	2048	2112	1.37459580	0.098939132	7.2	0.1191	8.63
Adaptada	1473	1506	1.37754767	0.074322133	5.4	0.0778	5.64

Tabela 9.1

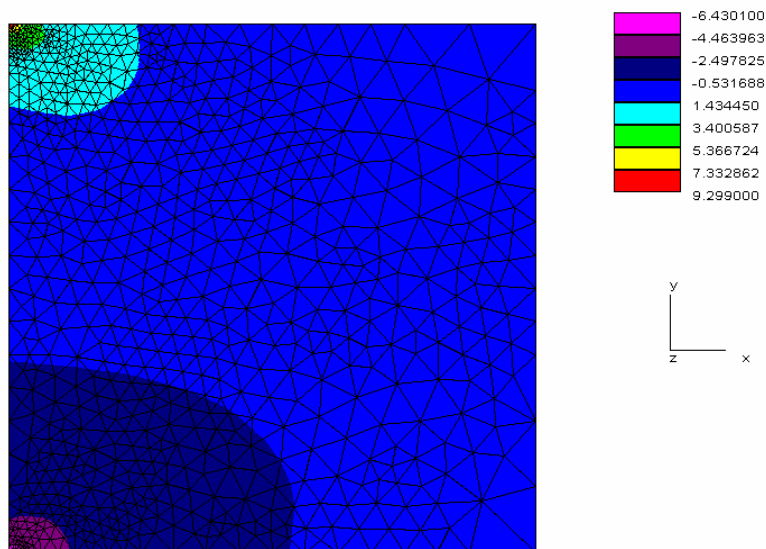


Figura 9.3 - Tensões S_x .

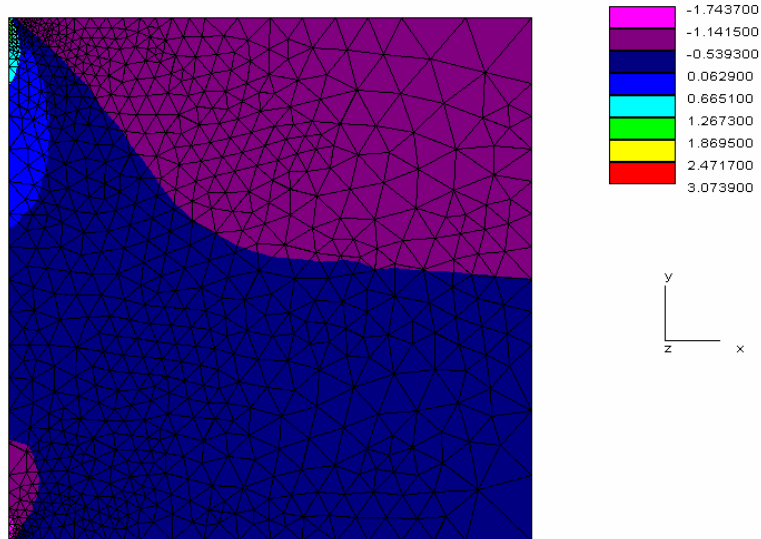


Figura 9.4 - Tensões S_y .

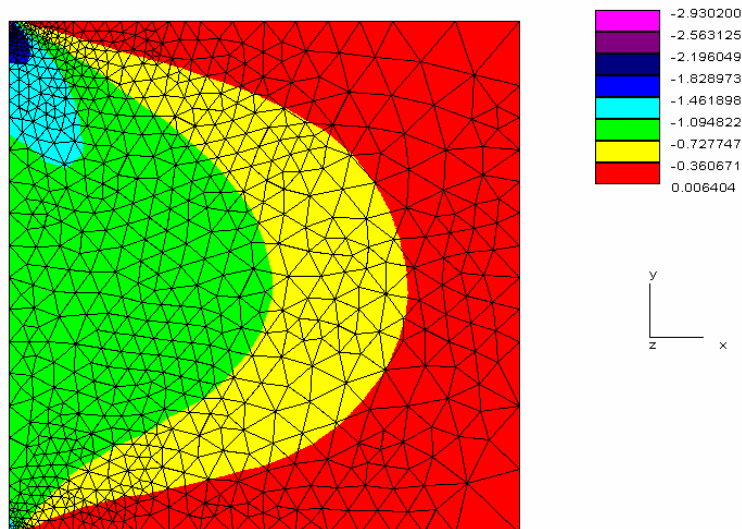


Figura 9.5 - Tensões t_{xy} .

9.2 Elasticidade Tridimensional

Este exemplo apresenta a análise de uma estrutura sólida em forma de paralelepípedo apoiada na base, situada no plano x - y ($z = 0$) e submetida a um carregamento uniforme no sentido vertical aplicado na face superior ($z = 1$), como mostra a Figura 9.6. Para uma mesma malha uniforme de 64 elementos hexaédricos de 8 nós (Figura 9.7), duas situações foram consideradas: (a) deslocamentos horizontais livres na base e (b) deslocamentos horizontais restringidos. A situação (a) dá origem a um campo linear de deslocamentos e , conseqüentemente, a um campo constante de tensões (Figura 9.8 a Figura 9.13). A solução numérica é exata, uma vez que as funções de interpolação dos elementos utilizados são trilineares. Na situação (b) os deslocamentos são de ordem superior, e a solução de elementos finitos é apenas aproximada (Figura 9.14 a Figura 9.25).

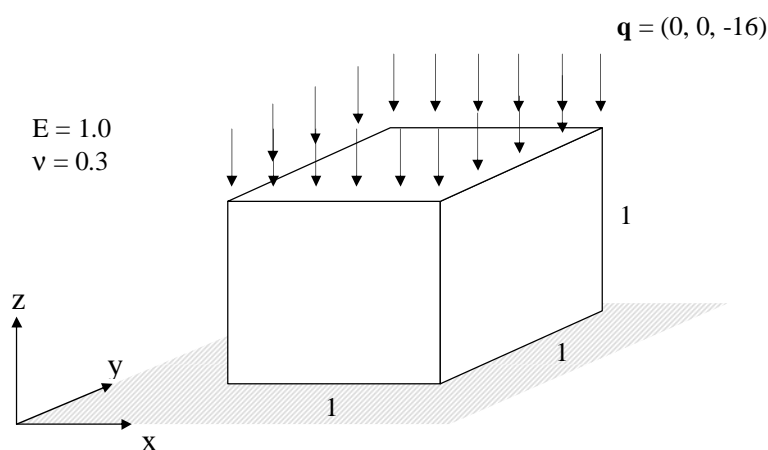


Figura 9.6

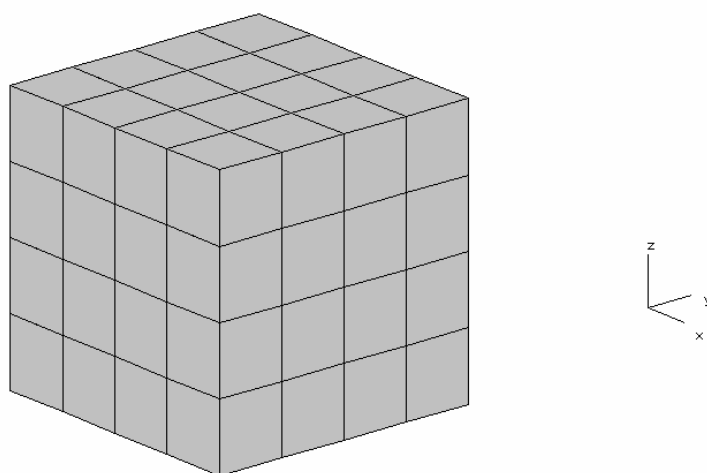


Figura 9.7 – Malha de hexaedros.

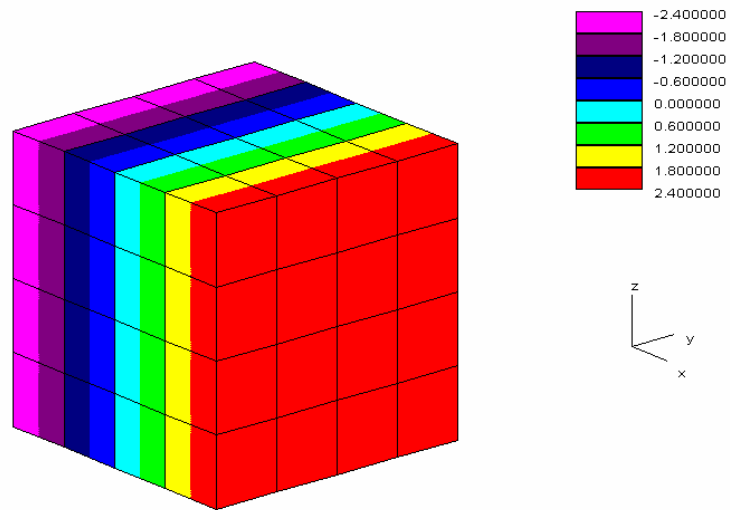


Figura 9.8 – Deslocamentos na direção x .

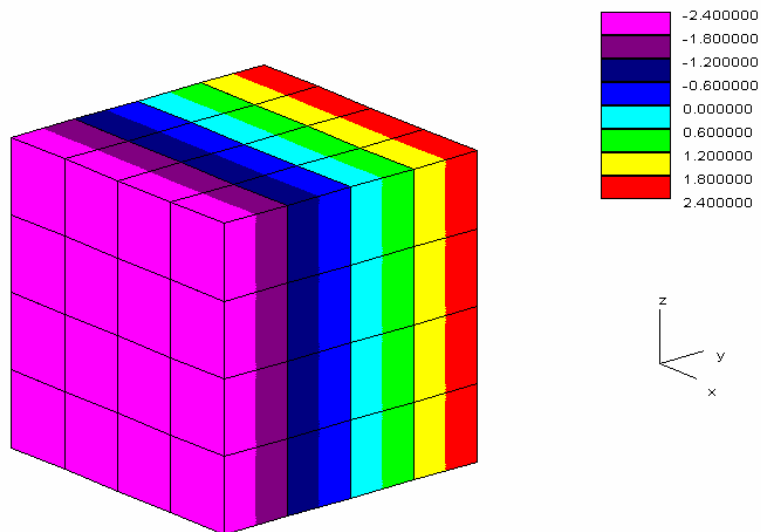


Figura 9.9 – Deslocamentos na direção y .

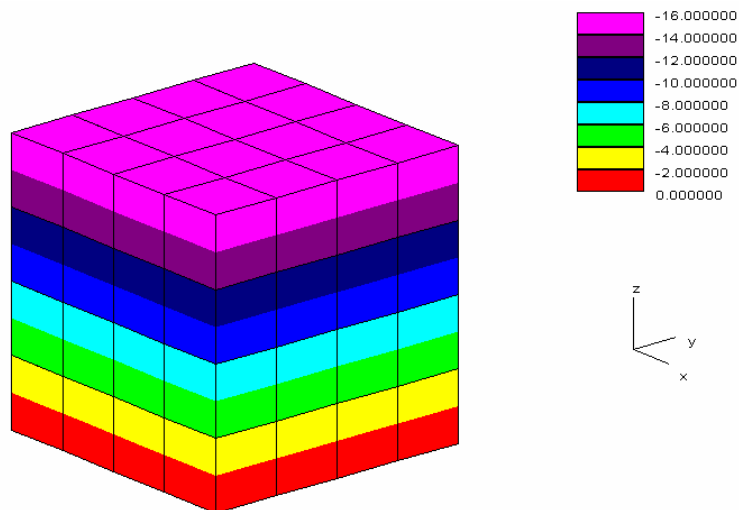


Figura 9.10 – Deslocamentos na direção z .

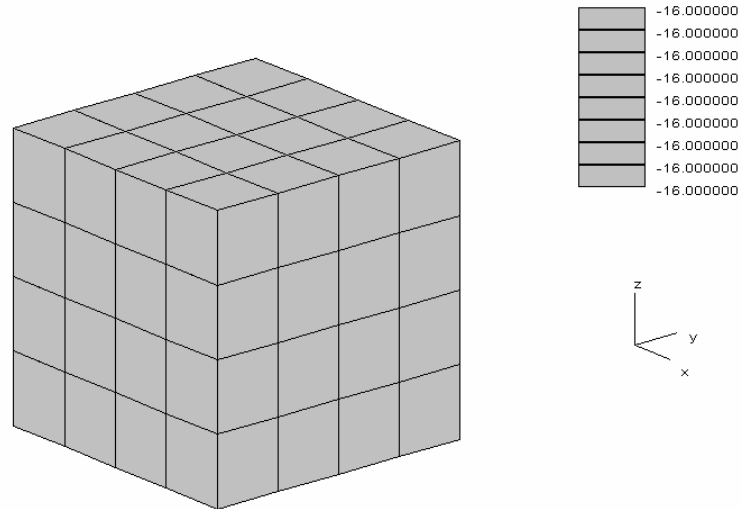


Figura 9.11 – Tensões principais σ_1 .

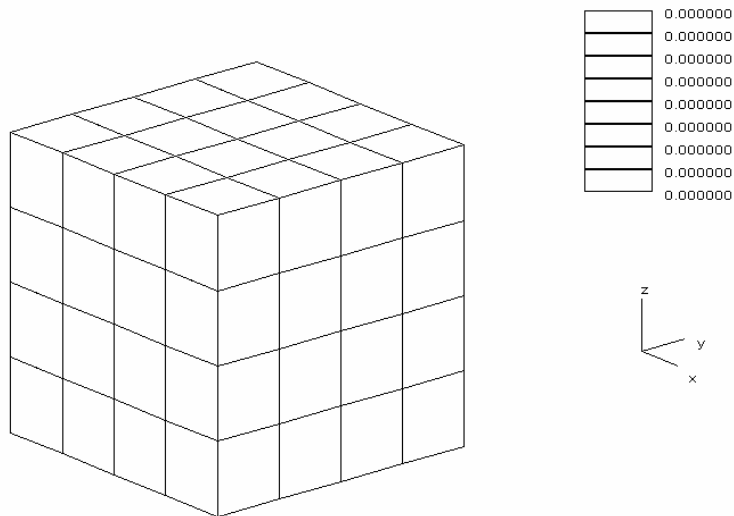


Figura 9.12 - Tensões principais σ_2 .

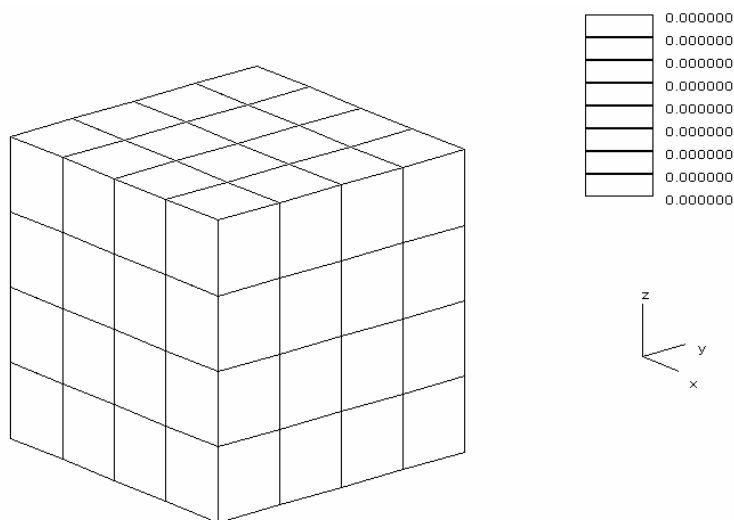


Figura 9.13 - Tensões principais σ_3 .

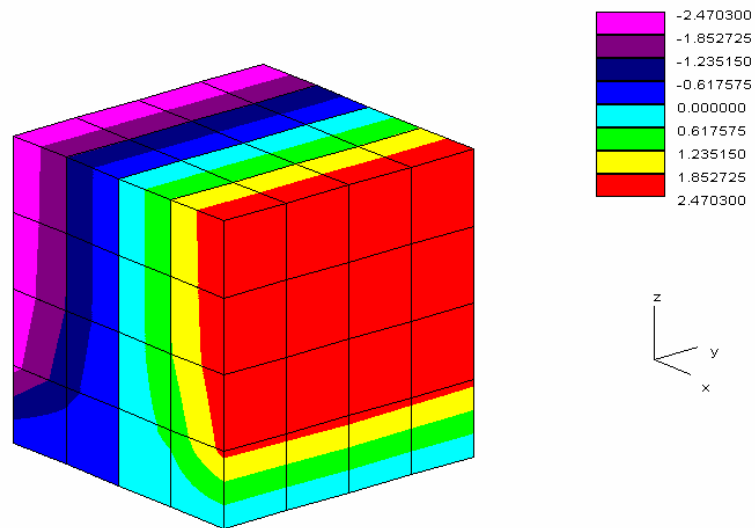


Figura 9.14 – Deslocamentos na direção x .

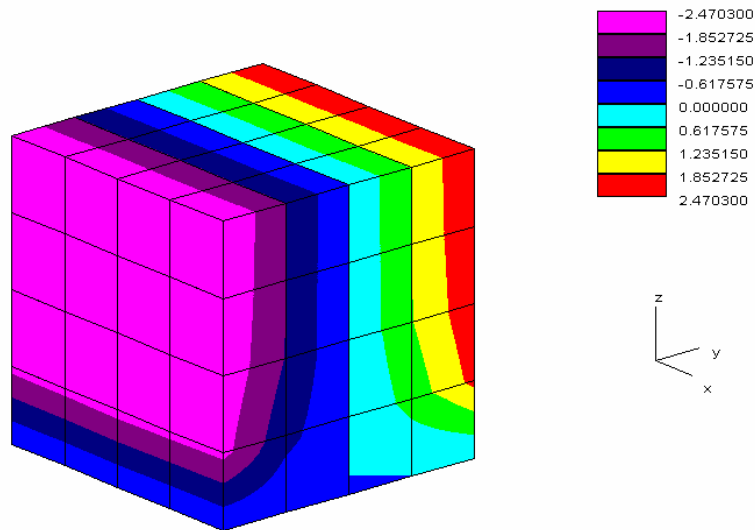


Figura 9.15 – Deslocamentos na direção y .

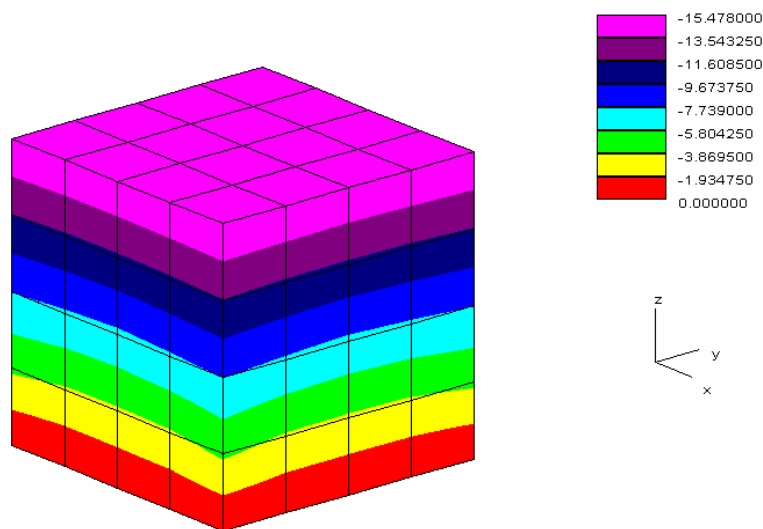


Figura 9.16 – Deslocamentos na direção z .

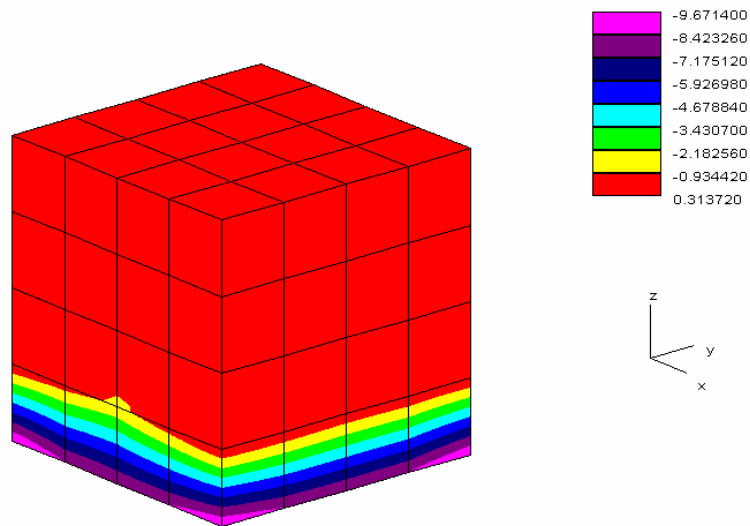


Figura 9.17 - Tensões σ_x .

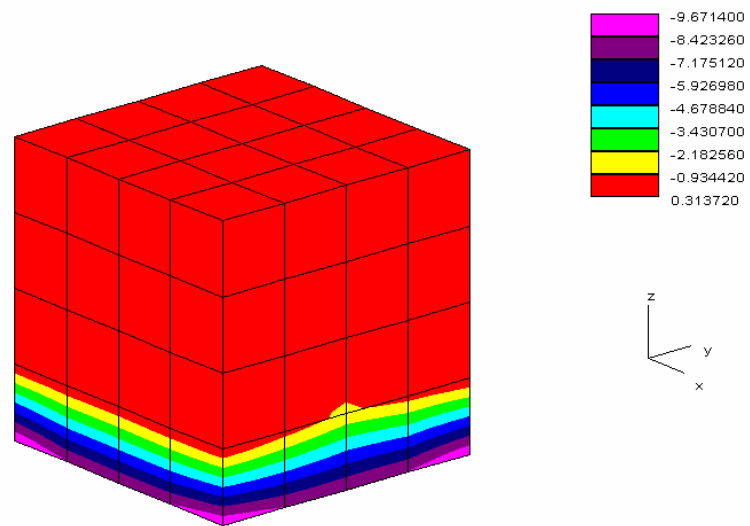


Figura 9.18 - Tensões σ_y .

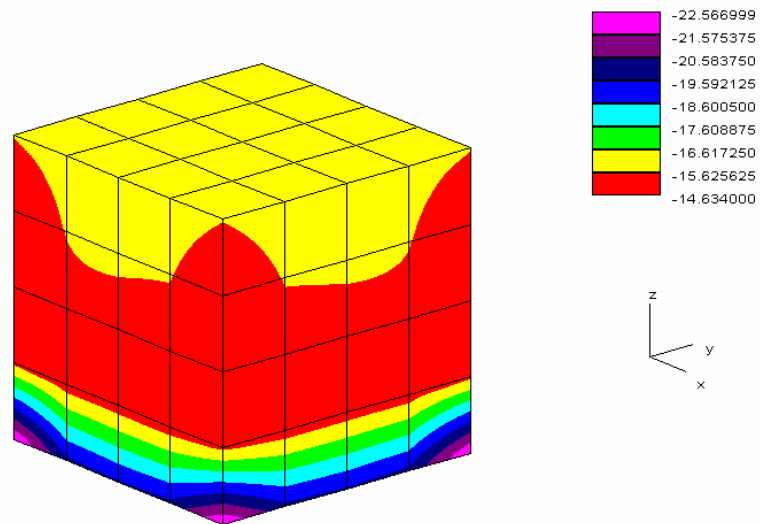


Figura 9.19 - Tensões σ_z .

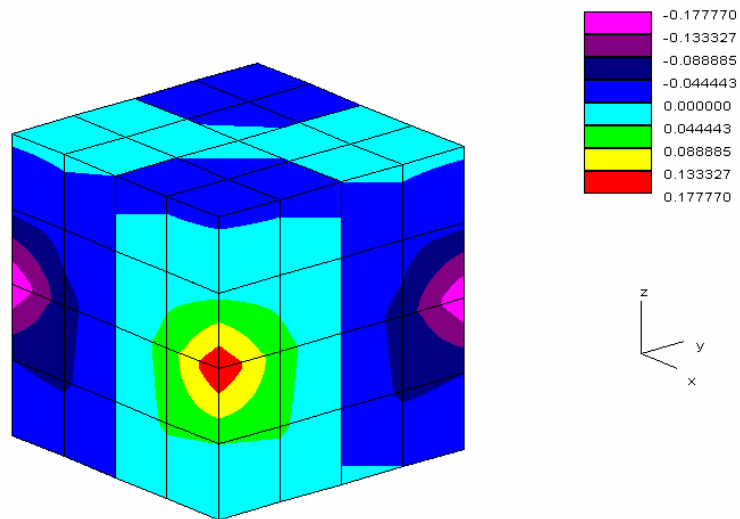


Figura 9.20 - Tensões τ_{xy} .

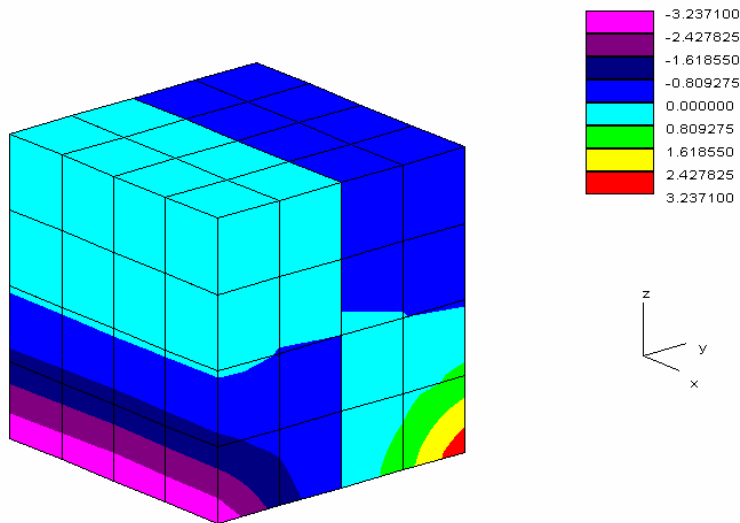


Figura 9.21 - Tensões τ_{yz} .

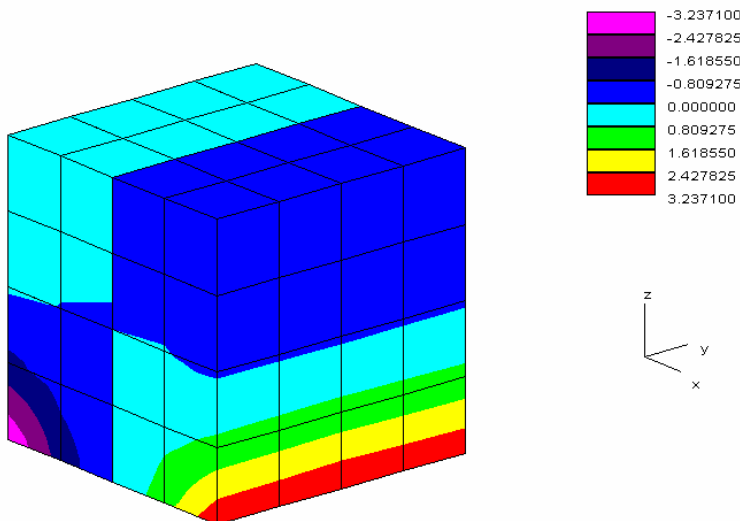


Figura 9.22 - Tensões τ_{xz} .

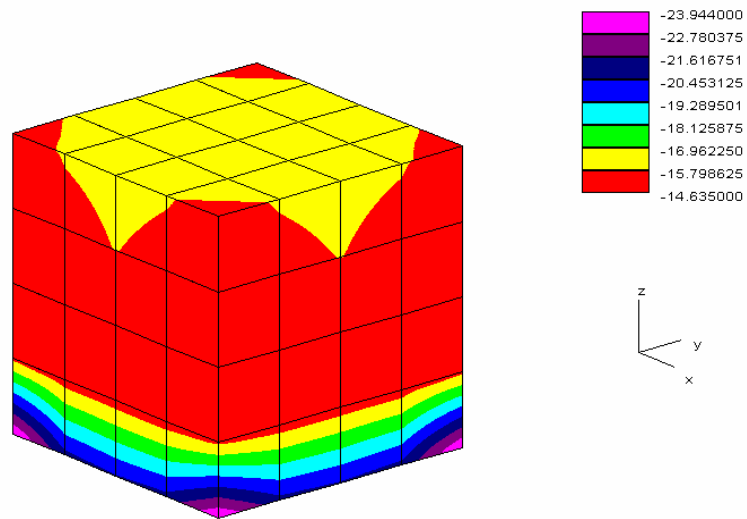


Figura 9.23 – Tensões principais σ_1 .

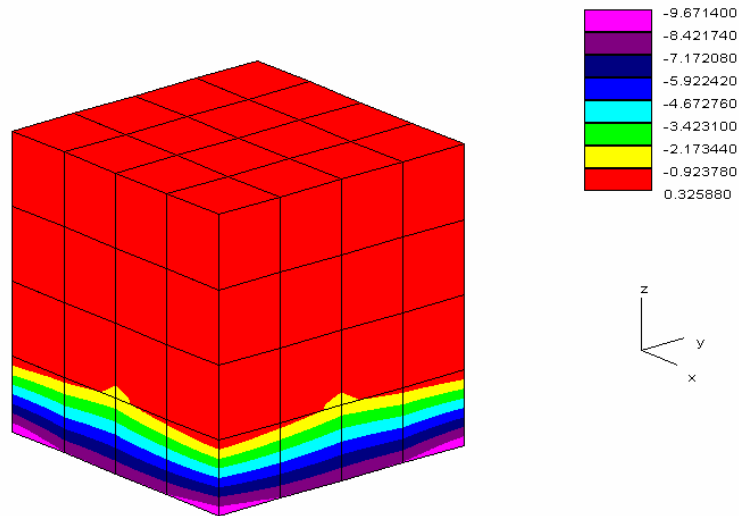


Figura 9.24 - Tensões principais σ_2 .

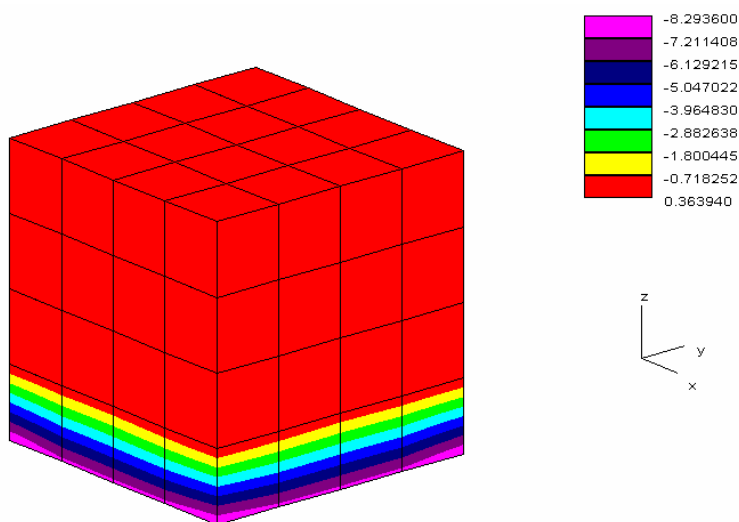


Figura 9.25 - Tensões principais σ_3 .

9.3 Problema de Potencial

A Figura 9.26 ilustra um problema de potencial em um domínio quadrado, com fontes pontuais prescritas nos cantos superior direito e inferior esquerdo e potencial prescrito nos cantos superior esquerdo e inferior direito. O fluxo normal no contorno é igual a zero e o coeficiente de difusão k é igual a 100. Os resultados para a malha da Figura 9.27, em termos de potencial e de fluxos, são ilustrados na Figura 9.28 e na Figura 9.29.

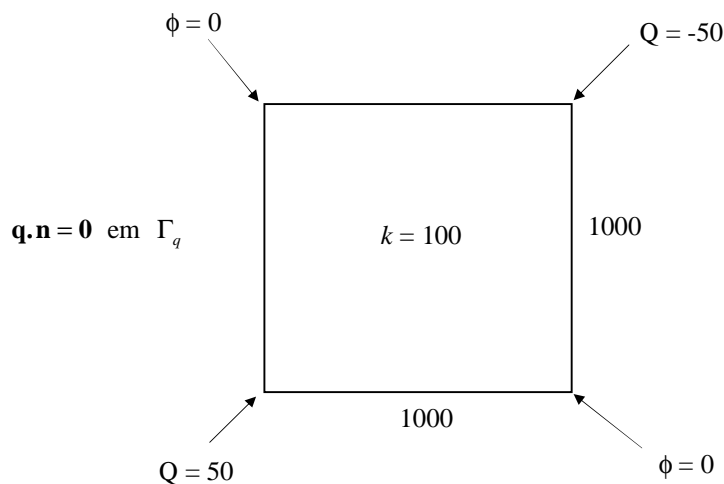


Figura 9.26 – Problema de potencial.

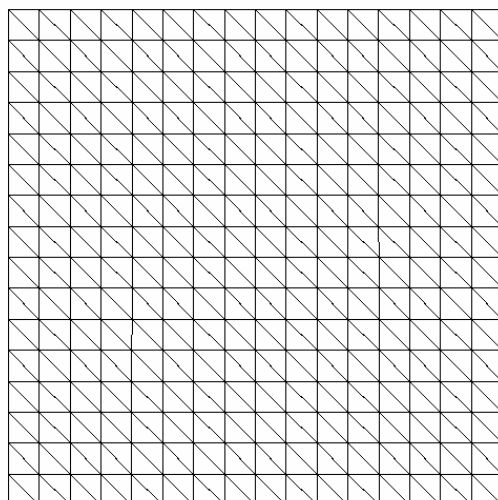


Figura 9.27 – Malha de elementos triangulares lineares.

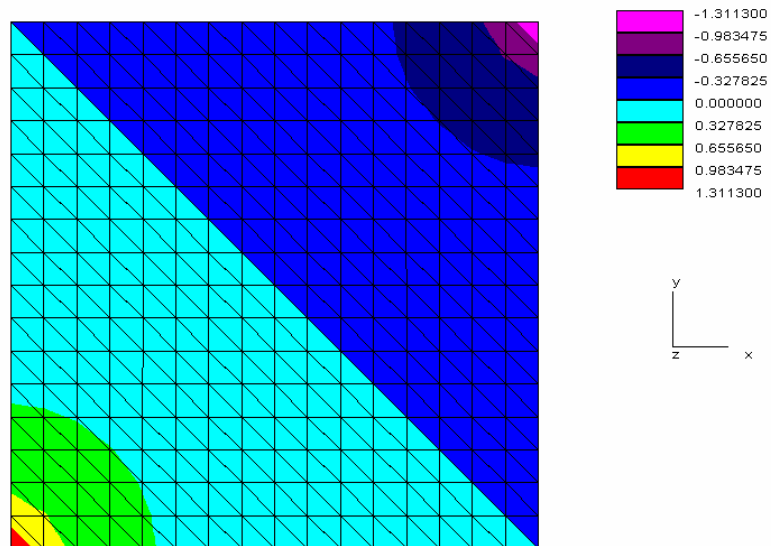


Figura 9.28 – Solução ϕ .

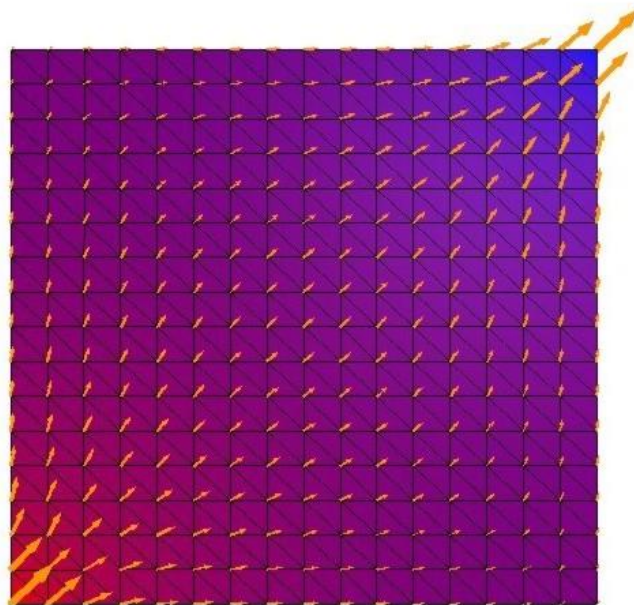


Figura 9.29 – Fluxo $\mathbf{q} = -k \nabla \phi$ (média nodal).

10 REFERÊNCIAS

- [1] Malvern, L. E., “*Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*”, Prentice-Hall, 1969.
- [2] Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E., “*Introduction to Continuum Mechanics*”, Butterworth-Heinemann, 1993.
- [3] Turner, M. R., Clough, R., Martin, H. and Topp, L., “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, *J. Aero. Sci.*, **23**, no. 9, pp. 805-823, September, 1956.
- [4] Argyris, J. H. and Kelsey, S., “*Energy Theorems and Structural Analysis*”, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.
- [5] Zienkiewicz, O. C., “The Finite Element Method: From Intuition to Generality”, *Appl. Mech. Rev.*, **23**, no. 23, pp. 249-256, March, 1970.
- [6] Rudin, W., “*Principles of Mathematical Analysis*”, McGraw-Hill, 1976.
- [7] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., “*Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*”, Ed. Mir-Moscú, 1982.
- [8] Rektorys, K., “*Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*”, D. Reidel Publishing Company, 1977.
- [9] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., “*The Finite Element Method*”, 4th Edition, vol. 1: “*Basic Formulation and Linear Problems*”, MacGraw-Hill, 1989.
- [10] Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K., “*Finite Elements and Approximation*”, Wiley-Interscience, 1983.
- [11] Hughes, T. J. R., “*The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*”, Prentice-Hall, 1987.
- [12] Bathe, K. J., “*Finite Element Procedures*”, Prentice-Hall, 1996.
- [13] Crisfield, M. A., “*Finite Element Procedures for Structural Analysis*”, vol. 1: “*Linear Analysis*”, Pineridge Press, 1986.
- [14] Johnson, C., “*Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element method*”, Cambridge University Press, 1987.