

II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A partir de agora o método de elementos finitos será apresentado formalmente. Isto porque, todos os mais importantes assuntos que se relacionam com o método já foram abordados. A seguir serão descritos, em linhas gerais, a formulação e seus aspectos particulares, e nos capítulos seguintes, os principais elementos com suas formulações serão discutidos.

2.1 INTRODUÇÃO

O método de elementos finitos é uma ferramenta numérico-computacional utilizada para a solução aproximada de equações diferenciais. Sendo assim, verifica-se que o mesmo pode ser aplicado a quase todas as áreas da engenharia. Além da área de estruturas (de onde o método originou-se) pode-se aplicá-lo em transferência de calor, escoamento de fluidos, lubrificação, campos elétricos e magnéticos, e muitos outros. Para proposta deste curso, o interesse maior será a análise de estruturas e meios contínuos.

Até quatro décadas atrás, a solução de problemas tido hoje como simples, demandava malabarismos de cálculos e aproximações grosseiras. A simplicidade em resolvê-los hoje é creditada à potencialidade dos métodos numéricos, tais como elementos finitos, volumes finitos, elementos de contorno e diferenças finitas, juntamente com o crescente desenvolvimento dos equipamentos e sistemas computacionais.

A Figura 2.1-1 mostra uma barra de seção circular não prismática com um carregamento axial na sua extremidade, em que, por simplicidade, procedeu-se sua substituição por uma barra prismática por partes. Esse tipo de idealização, configura-se em um dos conceitos básicos do método de elementos finitos que é a *discretização*. Ou seja, a substituição do sistema original por outro, mais simples na sua forma, por partes. Para esse exemplo, o deslocamento da extremidade final é obtida calculando-se, para cada elemento prismático do modelo simplificado, o alongamento δ_e , somando-se a contribuição de cada um e obtendo-se o deslocamento total na extremidade da barra.

$$\delta_e = \frac{PL_e}{A_e E} \quad (2.1-1)$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad (2.1-2)$$

A discretização do domínio da estrutura permite descrever de forma mais simplificada o seu comportamento. Ela pode ser feita subdividindo o domínio em formas diferentes de

elementos. Isso vai depender, além do tipo de análise e da precisão desejada, se o problema é unidimensional (como em treliças ou vigas), bidimensional (elasticidade plana, placas ou cascas) ou tridimensional. Alguns tipos e formas de elementos são mostrados em Figura 2.1-2.

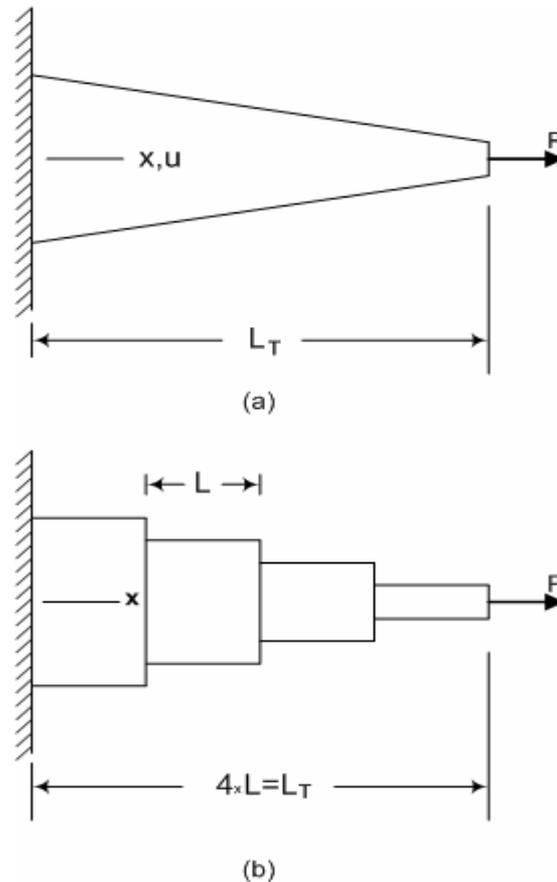


Figura 2.1-1 - Barra discretizada em elementos prismáticos.

De uma forma geral, o método dos elementos finitos consiste em modelar a estrutura como uma montagem de pequenas partes, as quais são chamadas de elementos, onde a conexão dessas pequenas partes é feita não mais em uma área ou linha, mais em pontos discretos os quais chamam-se nós (ver Figura 2.1-3). As cargas distribuídas são agora aplicadas, de forma consistente, nos nós. Ou seja, calcula-se o valor da carga aplicada que irá atuar em cada de forma a produzir a mesma energia do sistema original. Com essa nova modelagem analisa-se a estrutura de forma local em cada elemento, somando-se em seguida a contribuição das partes para restaurar o sistema completo. Como os diversos elementos da estrutura apenas interagem nos nós, supõe-se que as cargas e deslocamentos atuantes nesses nós são os responsáveis pelo estado de tensão ou deformação do elemento e por conseguinte da estrutura. Com esse raciocínio, verifica-se que não mais necessita-se saber o comportamento da estrutura ponto a ponto, como é o resultado da solução analítica de uma equação diferencial. Basta que os valores das variáveis nodais dos elementos sejam

conhecidos de alguma forma. O problema reduz-se de um de infinitos graus de liberdade para um de finitos graus de liberdade. A questão é: como relacionar estes valores nodais de diferentes elementos com o que ocorre dentro dele? E como isso se relaciona com o todo? A resposta está na aplicação dos métodos utilizados na seção anterior, só que de forma localizada e não mais global. E para facilitar a implementação computacional e dar um caráter mais físico à formulação, o ideal seria utilizar os parâmetro a_i das funções aproximação como sendo os valores nodais das variáveis interpoladas. Isso facilitaria a implementação, pois, como será visto mais a frente, é necessário garantir a compatibilidade entre os elementos nos nós. Para tal é necessário relacionar os parâmetros entre os elementos que compartilham um nó. Isso dificulta muito a automação computacional. Com os parâmetros sendo os valores nodais das variáveis interpoladas, além de evitar tal problema, facilita-se o entendimento da formulação e análise de seus resultados, pois, as variáveis interpoladas são entidades físicas. O formato final do método é uma equação de equilíbrio dada por

$$[K]\{U\} = \{R\}, \quad (2.1-3)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez do problema estrutural. Esta matriz representa as propriedades físicas discretizadas da estrutura. Ela é simétrica e positiva definida, o que facilita enormemente sua manipulação;

$\{U\}$ é o vetor que contém os valores nodais dos deslocamentos utilizados como parâmetros;

$\{R\}$ é o vetor que contém as cargas atuantes em cada nó do modelo estrutural discretizado.

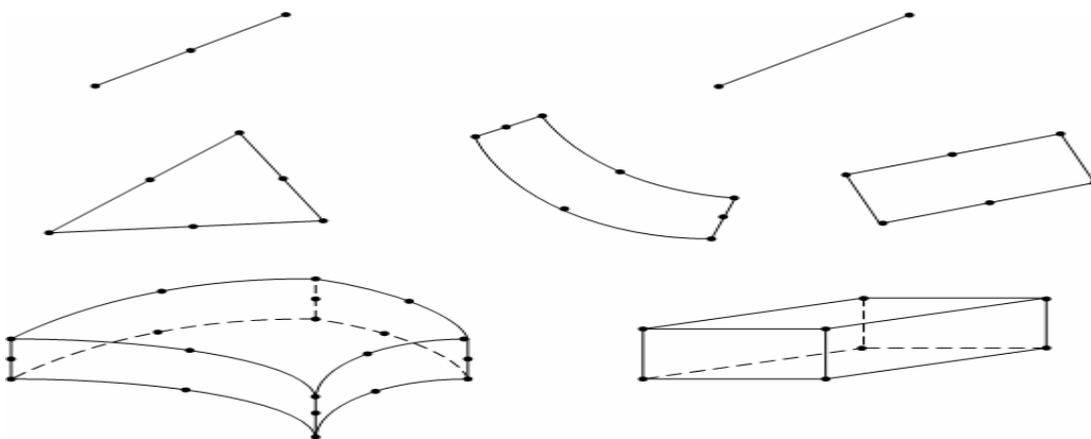


Figura 2.1-2 - Tipos de elementos

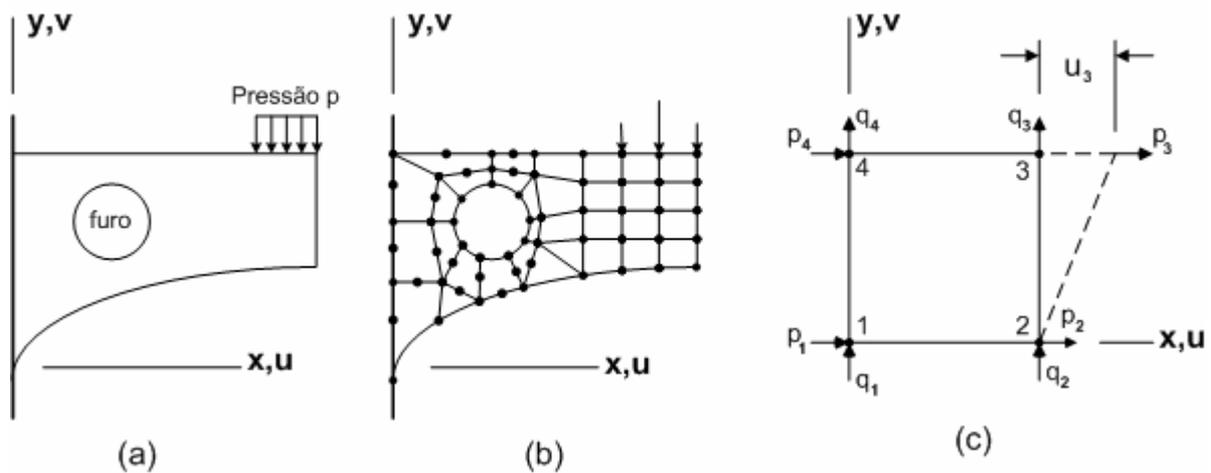


Figura 2.1-3 - Discretização de uma estrutura em elementos plano.

Os passos que constituem, em última análise, o próprio método dos elementos finitos podem ser assim resumidos:

- a) Dividir a estrutura ou meio contínuo em elementos finitos;
- b) Formular as propriedades de cada elemento. Em análise estrutural, isto significa determinar as cargas nodais associadas com todos os estados de deformações que são permitidos;
- c) Montar os elementos para obter o modelo de elementos finitos da estrutura;
- d) Aplicar as cargas conhecidas: forças e momentos nodais em análise de tensão;
- e) Aplicar as condições de contorno da estrutura. Ou seja, restringir impor os valores de deslocamentos conhecidos em cada nó;
- f) Resolver o sistema de equações algébricas derivadas da condição de equilíbrio;
- g) Em análise de tensão, calcular as deformações e tensões nos nós e no interior do elemento se necessário;
- h) Avaliação dos resultados encontrados.

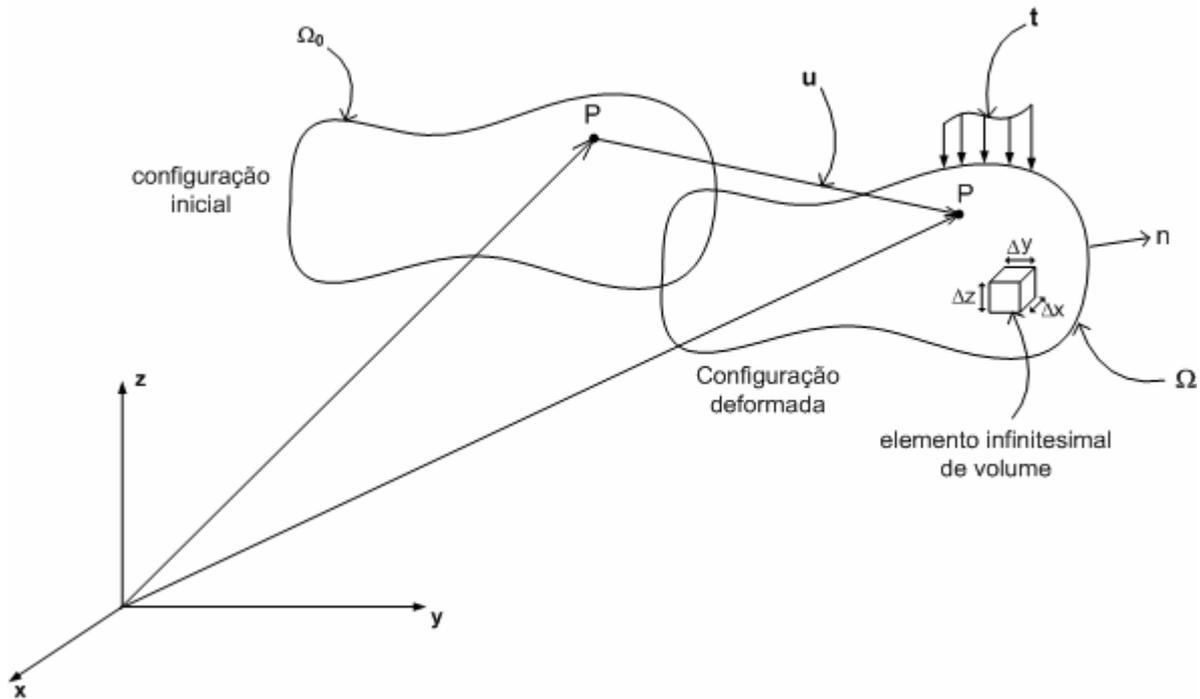


Figura 2.2-1 Configuração inicial e final de um corpo carregado.

2.2 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL ESTACIONÁRIA

Nesta seção será abordada a metodologia de se encontrar a configuração de um sistema estrutural, não dependente do tempo, através da utilização do funcional *energia potencial total*.

O conceito inicial a ser apresentado diz respeito a um *sistema* (a estrutura física e as cargas aplicadas a ela) em que, através de um conjunto de forças em equilíbrio estático, muda de uma *configuração* inicial C_o (posições iniciais de todas as partículas ou graus de liberdade da estrutura) para uma *configuração* final C_d (posições finais ou deformadas de todas as partículas ou graus de liberdade da estrutura) como indicado na Figura 2.2-1. Esses sistemas são chamados de conservativos se o trabalho feito pelas forças internas e externas, cada um, seja independente do caminho adotado entre a configuração inicial e final (ver Figura 2.2-2).

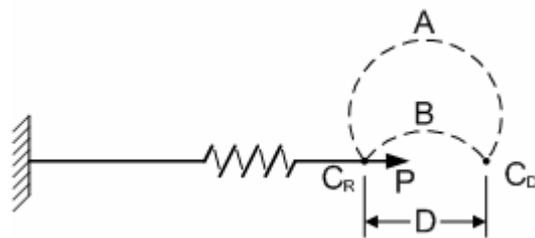


Figura 2.2-2 - Configuração deformada de um sistema elástico.

Considerando um sistema conservativo dado por uma estrutura elástica submetida a um carregamento quasi-estático, o trabalho feito pelas cargas externas é igual em magnitude à mudança de energia de deformação armazenada no corpo. Da primeira lei da termodinâmica, tem-se para qualquer configuração,

$$W + Q = E_I + E_C, \quad (2.2-1)$$

onde W é o trabalho das cargas externas aplicadas à estrutura;

Q é a quantidade de calor fornecida ao sistema;

E_I é a energia interna do sistema;

E_C é a energia cinética do sistema.

Desprezando-se as transformações de energia de calor e considerando-se velocidade do carregamento quase nula, obtém-se a seguinte expressão:

$$W = E_I. \quad (2.2-2)$$

Considerando-se a Figura 2.2-2, verifica-se que o trabalho externo da força é dado por $\frac{1}{2}PD$, enquanto a energia interna de deformação acumulada é $\frac{1}{2}kD^2$. Igualando-se os dois valores, obtém-se $D = \frac{P}{k}$. Para esse caso, que possui apenas um grau de liberdade a ser encontrado, é suficiente apenas uma equação para obtê-lo. No caso de se ter mais do que um grau de liberdade, esse método já não é mais viável. Se for observado com cuidado, pode-se escrever que

$$P = \frac{dE_i}{dD} = kD \quad \therefore \quad D = \frac{P}{k} \quad (2.2-3)$$

A relação acima que fornece o mesmo resultado que o balanço de energia é o primeiro teorema de Castigliano. De outra forma, pode-se chegar ao mesmo resultado através do “Princípio da Energia Potencial Estacionária”. A energia potencial total II , como antes definida, é o trabalho total realizado para deslocar a estrutura, com todas as forças atuantes, de sua configuração deformada para a configuração inicial. Em outras palavras, pode-se dizer que é o trabalho realizado por todas as forças atuantes na estrutura quando a mesma é deslocada de sua configuração final para a inicial. Sendo assim, pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\Pi = U + V \quad (2.2-4)$$

onde $U = E_I$ é a energia de deformação elástica da estrutura, e

V é a energia potencial das cargas externas com sinal negativo.

Uma *configuração admissível* é qualquer configuração que satisfaz a compatibilidade interna e condições de contorno essenciais (ou cinemáticas). A Figura 2.2-3 mostra configurações admissíveis (A e B) e não admissíveis (C e D). Uma configuração admissível não necessita satisfazer as condições de contorno naturais.

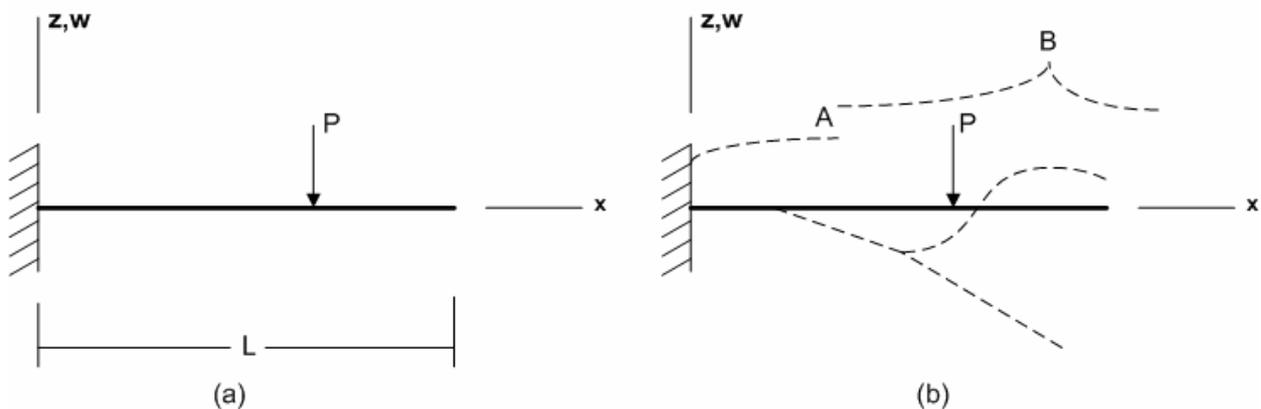


Figura 2.2-3 - Configurações admissíveis e não admissíveis.

Um sistema mecânico conservativo possui uma energia potencial. Ou seja, a energia do sistema é independente da trajetória. A energia potencial tem um princípio que gera a configuração de equilíbrio de um sistema mecânico. Este princípio é obtido com a estacionaridade do funcional energia potencial. O mesmo é anunciado abaixo (Cook, 1988).

Princípio da Energia Potencial Estacionária

Entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquela que satisfaz as equações de equilíbrio torna a energia potencial estacionária com respeito a pequenas variações admissíveis de deslocamento.

Este princípio é aplicável independentemente da relação carga versus deformação ser linear ou não. Se a condição de estacionaridade é um mínimo, o equilíbrio é estável.

Exemplo 2. Aplicar o princípio da energia potencial estacionária à estrutura abaixo e calcular seu deslocamento D .

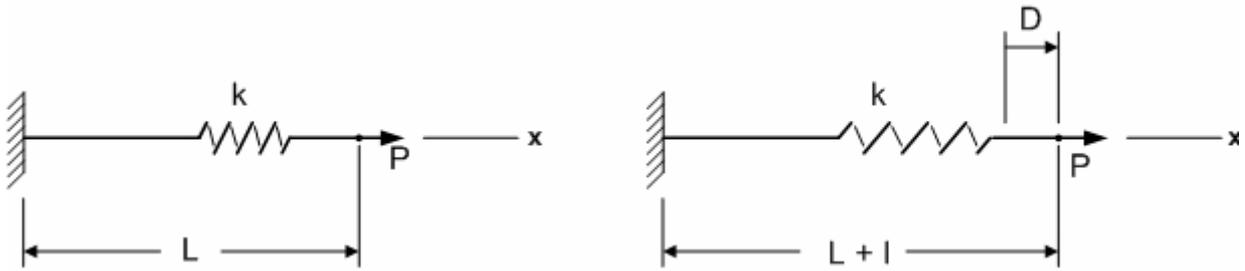


Figura 2.2-4 - Mola com carregamento na extremidade.

Solução:

A energia potencial total do sistema é dado por

$$\Pi = U + V \quad (2.2-5)$$

onde U é a energia de deformação armazenada na mola, dada por

$$U = \frac{1}{2} k D^2 \quad (2.2-6)$$

e V é a energia potencial das cargas externas, e representa a energia necessária para fazer retornar a carga à posição inicial, ou seja

$$V = - P D \quad (2.2-7)$$

A Energia Potencial é

$$\Pi = \frac{1}{2} k D^2 - P D \quad (2.2-8)$$

Aplicando princípio da estacionaridade (ver Apêndice B),

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial D} \delta D = 0 \cdot \quad (2.2-9)$$

Como a variação sobre o campo deslocamento é arbitrária, tem-se como condição de estacionaridade

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D} = 0 \quad (2.2-10)$$

Substituindo-se a energia potencial na equação acima tem-se

$$kD_{eq} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{eq} = \frac{P}{k} \quad (2.2-11)$$

onde D_{eq} é o deslocamento para a configuração de equilíbrio.

Pode-se observar que a Equação 2.2-9 é o próprio princípio dos trabalhos virtuais. Uma demonstração gráfica do método é visto em Figura 2.2-5.

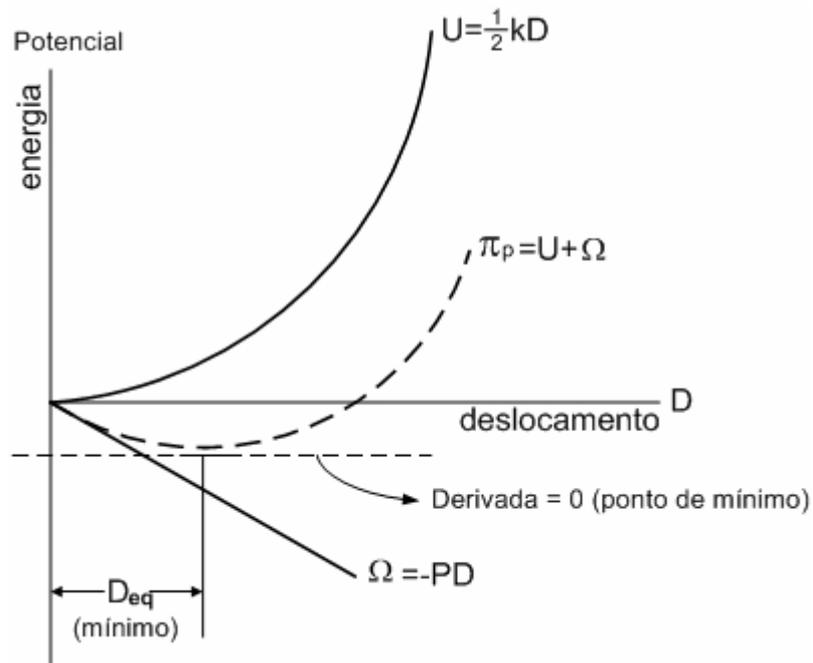


Figura 2.2-5 - Gráfico da variação da energia potencial com o deslocamento.

Para os problemas com vários graus de liberdade, ou seja, dependente de uma coleção de deslocamentos $\{\mathbf{D}\} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, o princípio estacionário será dado por:

$$\Pi = \Pi(D_1, D_2, \dots, D_n) \quad (2.2-12)$$

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial D_i} \delta D_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial D_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.2-13)$$

Exemplo 3. Encontrar os deslocamentos nos pontos 1, 2 e 3 de uma estrutura como indicado na Figura 2.2-6.

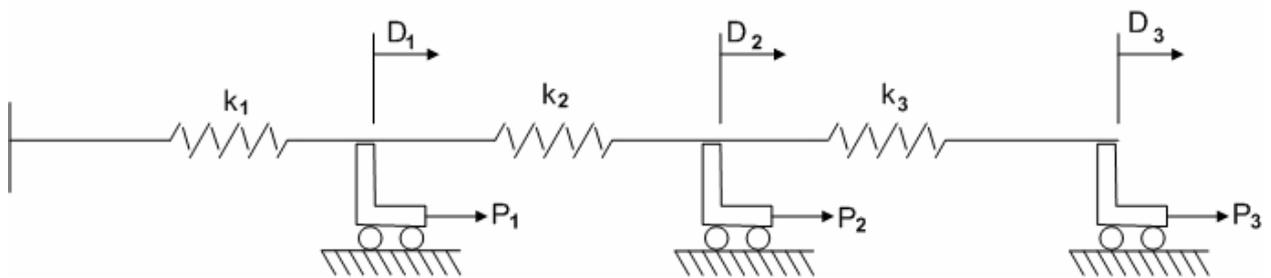


Figura 2.2-6 - Sistema com múltiplas rigidezes.

Solução:

A energia de deformação elástica total é

$$U = \frac{1}{2}k_1 D_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (D_2 - D_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 (D_3 - D_2)^2 \quad (2.2-14)$$

$(D_2 - D_1)$: deslocamento da mola k_2 apenas

A energia potencial das cargas é dado por

$$V = -P_1 D_1 - P_2 D_2 - P_3 D_3 \quad (2.2-15)$$

Aplicando a condição da Equação 2.2-13, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial D_1} &= 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial D_2} &= 0. \\ \frac{\partial\Pi}{\partial D_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2-16)$$

Logo,

$$\begin{aligned} k_1 D_1 - k_2 (D_2 - D_1) - P_1 &= 0 \\ k_2 (D_2 - D_1) - k_3 (D_3 - D_2) - P_2 &= 0. \\ k_3 (D_3 - D_2) - P_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

Na forma matricial tem-se

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}, \text{ou seja,}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}, \quad (2.2-18)$$

onde $[\mathbf{K}]$, é a matriz de rigidez do problema. Pode-se observar que a mesma é simétrica. Isso sempre ocorre para problemas lineares da mecânica estrutural. Cada coluna, representa o conjunto de forças que aparecem nas molas quando se aplica um deslocamento unitário no grau de liberdade referente à coluna, mantendo os outros nulos;

$\{\mathbf{D}\}$ é o vetor que contém os graus de liberdade de deslocamentos nodais a serem determinados;

$\{\mathbf{R}\}$ é o vetor força do problema que contém as cargas aplicadas em cada nó.

Resolvendo o sistema de equações algébricas, obtém-se os deslocamentos D_1 , D_2 e D_3 .

Com a ajuda dos exemplos anteriores, pode-se fazer algumas observações importantes de caráter geral:

1. Um sistema cuja relação carga versus deslocamentos seja linear possuirá uma matriz de rigidez simétrica; onde $K_{ij} = K_{ji}$. Isso acontece porque cada par de coeficientes simétricos fora da diagonal principal, origina-se de um único termo $K_{ij}D_iD_j$ da expressão da energia

$$\text{potencial } \Pi. \text{ Logo, } K_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial D_i \partial D_j} = K_{ji} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial D_j \partial D_i};$$

2. Se D_i é um deslocamento nodal (ou rotação nodal), a equação $\frac{\partial \Pi}{\partial D_i} = 0$ é uma equação de

equilíbrio nodal, pois, impõe que a somatória das forças na direção do deslocamento D_i seja nula;

3. A indeterminância estática não altera o procedimento ou torna o problema mais complicado;

4. A energia potencial da estrutura pode ser escrita na forma

$$\Pi = U + V \quad \text{onde } U = \frac{1}{2} \{\mathbf{D}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{D}\} \quad \text{e} \quad V = - \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{R}\}. \quad (2.2-19)$$

Se U for nulo, então $\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\}$ ou $\{\mathbf{D}\}$ expressa um movimento de corpo rígido. Se a estrutura é estável e é suportada de tal forma a impedir o movimento de corpo rígido, então $U = \frac{1}{2} \{\mathbf{D}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{D}\} > 0$ para qualquer valor de $\{\mathbf{D}\}$ diferente de zero. Quando isto acontece diz-se que $[\mathbf{K}]$ é positiva definida.

A energia potencial pode ser utilizada para a formulação da matriz de rigidez e vetor carga dos elementos de uma estrutura, o que será visto em breve. Para finalizar esta seção será apresentada a expressão da energia potencial para o caso mais genérico, a partir do qual pode-se deduzir os casos particulares.

Considerando um corpo elástico linear submetido a um carregamento conservativo, pode-se expressar a energia potencial de forma genérica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [E] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [E] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{\mathbf{u}\}^T \{\Phi\} d\Gamma - \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{P}\} \end{aligned} \quad (2.2-20)$$

onde Ω representa o domínio e Γ o contorno do corpo. As duas últimas integrais juntamente com o último termo representam os potenciais das forças de corpo, forças distribuídas e forças concentradas respectivamente. A primeira integral representa a energia de deformação por unidade de volume, e possui três termos que são a energia de deformação interna devido às cargas, uma parcela devido a deformação inicial e uma devido a tensão inicial. Pode-se deduzir tal termo considerando inicialmente um cubo unitário, como na Figura 2.2-7, onde atua sobre ele as tensões e força de corpo. As tensões que agem sobre as faces do cubo realizam trabalho quando o mesmo é deslocado para a configuração inicial. Para um incremento de deformação, e desprezando-se termos de ordem superior, esse trabalho é dado por

$$dU_0 = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \quad (2.2-21)$$

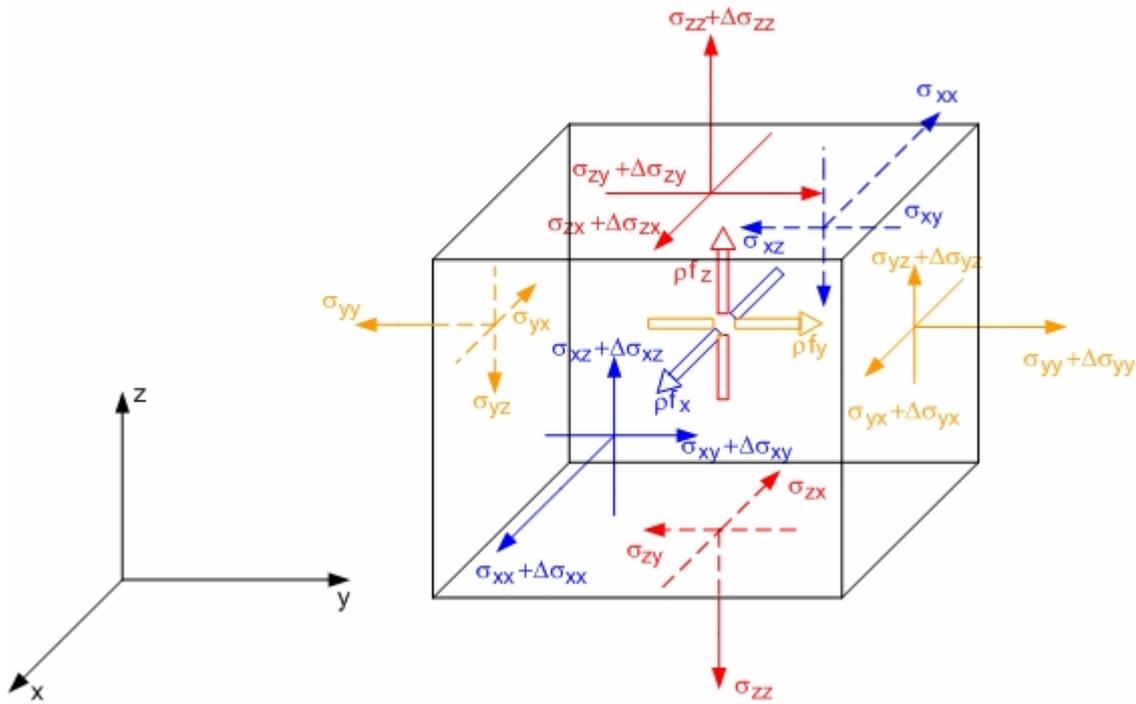


Figura 2.2-7 - Cubo de tensões em corpo em equilíbrio.

Da expressão acima, conclui-se que $\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$, e assim por diante para cada componente. Escrevendo-se todas as derivadas na forma matricial obtém-se

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\} = \{\sigma\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\} = [E]\{\varepsilon\} - [E]\{\varepsilon_0\} + \{\sigma\} \quad (2.2-22)$$

As integrais que possuem as forças de corpo $\{F\}$ e distribuídas $\{\Phi\}$ representam a energia potencial total das cargas aplicadas, ou seja, o trabalho realizado por essas forças quando leva-se o corpo da posição deformada para a posição inicial. O vetor $\{u\}^T = [u \ v \ w]$ representa os deslocamentos nas direções X, Y e Z de cada partícula. E por último, tem-se o produto das cargas nodais externas com o deslocamento no ponto de aplicação, resultando a energia potencial das mesmas.

Um caso particular do desenvolvimento acima é a viga da Figura 2.2-8. A expressão de sua energia potencial pode ser derivada sabendo-se que

$$u = -z \frac{dw}{dx} \quad \text{e} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (2.2-23)$$

tem-se

$$U = \int \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 d\Omega = \iint \frac{1}{2} E \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dz dx = \int \frac{1}{2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx. \quad (2.2-24)$$

Logo,

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_0^L w q dx - \{w\}^T \{F\} - \{\theta\}^T \{M\} \quad (2.2-25)$$

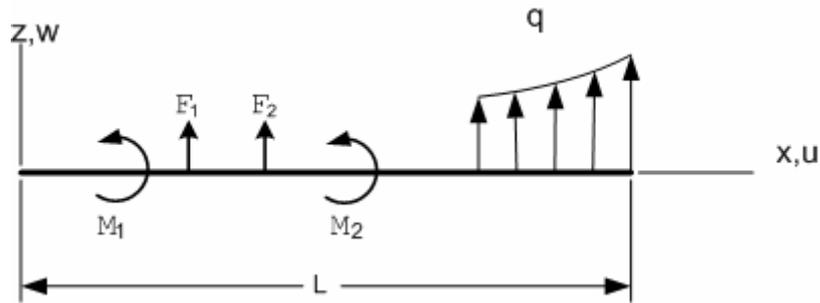


Figura 2.2-8 - Viga com carregamento distribuído e concentrado.

onde os vetores nodais $\{w\}^T = [w_1 \ w_2 \dots]$ e $\{\theta\}^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots]$ referem-se aos pontos de aplicação cargas.

2.3 MÉTODO VARIACIONAL LOCALIZADO

Nessa seção abordar-se-á o que será a formulação do método dos elementos finitos propriamente dito. Para isso será utilizado um exemplo simples de barra com carregamento axial, como indicado na Figura 2.3-1. Será abordado primeiro o caso global e depois o discretizado. O método de Rayleigh-Ritz juntamente com o funcional de energia potencial total será utilizado para gerar a configuração de equilíbrio.

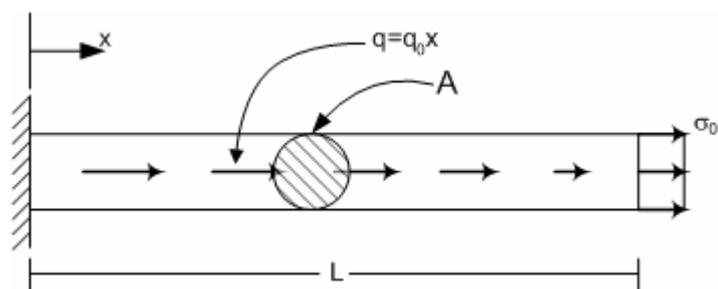


Figura 2.3-1 - Barra axialmente carregada.

Aplicando o método de Rayleigh-Ritz o problema será resolvido inicialmente de forma global. Ou seja, interpolação será feita sobre o campo deslocamento em todo domínio. Considerando-se a função aproximação do tipo

$$u(x) \cong u_a = \sum_{i=1}^n \phi_i a_i = \phi_1 a_1 + \phi_2 a_2 + \dots + \phi_n a_n \quad (2.3-1)$$

onde, inicialmente

$$u_a = x^1 a_1 + x^0 a_0. \quad (2.3-2)$$

A energia potencial total do problema é dado por

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 dx - \int_0^L q u dx - \sigma_0 A u_L. \quad (2.3-3)$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.3-4)$$

$$u \cong u_a = x^1 a_1 + x^0 a_0. \quad (2.3-5)$$

Como a solução deve satisfazer as condições de contorno essenciais,

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0. \quad \therefore \quad u_a = x^1 a_1. \quad (2.3-6)$$

Substituindo as equações na energia potencial obtém-se

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = a_1 \quad (2.3-7)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \frac{1}{2} EA a_1^2 dx - \int_0^L q_0 x (x a_1) dx - \sigma_0 A u_L \\ &= \frac{1}{2} AEL a_1^2 - \frac{1}{3} q_0 L^3 a_1 - \sigma_0 A (L a_1) \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

Variando o funcional e aplicando a condição de mínimo, tem-se que

$$\delta \Pi = (AEL a_1 - \frac{1}{3} q_0 L^3 - \sigma_0 AL) \delta a_1 = 0 \quad \therefore$$

$$(AELa_1 - \frac{1}{3}q_0L^3 - \sigma_0AL) = 0 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \frac{q_0L^2}{AE} + \frac{\sigma_0}{E}. \quad (2.3-9)$$

Com isso,

$$u \cong u_a = \left(\frac{1}{3} \frac{q_0L^2}{AE} + \frac{\sigma_0}{E} \right) x. \quad (2.3-10)$$

O campo de tensão é dada por,

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (2.3-11)$$

sendo $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = a_1$, temos

$$\sigma_x = Ea_1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{1}{3} \frac{q_0L^2}{A} + \sigma_0. \quad (2.3-12)$$

Ou seja, o campo de tensão é constante. Comparando esses resultados com a solução exata da Resistência dos Materiais (ver Figura 2.3-2) verifica-se que esse resultado é muito insatisfatório. Para melhorá-lo, será usado uma função aproximação melhor, dada por

$$u_a = x^2 a_2 + x a_1 + a_0. \quad (2.3-13)$$

Aplicando a condição de contorno essencial, e desenvolvendo o funcional obtém-se,

$$\varepsilon_x = 2x a_2 + a_1 \quad (2.3-14)$$

e

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA (2x a_2 + a_1)^2 dx - \int_0^L q_0 x (x^2 a_2 + x a_1) dx - \sigma_0 A (L^2 a_2 + L a_1) \quad (2.3-15)$$

Para a condição de estacionaridade

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \delta a_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0. \quad (2.3-16)$$

O que nos leva a calcular os parâmetros com as seguintes equações:

$$EAL(La_2 + a_1) - \frac{L^3}{3} q_0 - \sigma_0 AL = 0 \quad (2.3-17)$$

$$EAL^2\left(\frac{4}{3}La_2 + a_1\right) - \frac{L^4}{4}q_0 - \sigma_0AL^2 = 0. \quad (2.3-18)$$

$$\text{Logo, } a_1 = \frac{1}{4} \frac{q_0L}{EA} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-(7q_0L^2 + 12\sigma_0A)}{12EA}. \quad (2.3-19)$$

Os campos aproximados de deslocamento e tensão são vistos na Figura 2.3-2. Ou seja,

$$u_a = \frac{-(7q_0L^2 + 12\sigma_0A)}{12EA}x^2 + \frac{1}{4} \frac{q_0L}{EA}x + \frac{\sigma_0}{E}x \quad (2.3-20)$$

$$\sigma_x = \frac{-(7q_0L^2 + 12\sigma_0A)}{6A}x + \frac{1}{4} \frac{q_0L}{A} + \sigma_0 \quad (2.3-21)$$

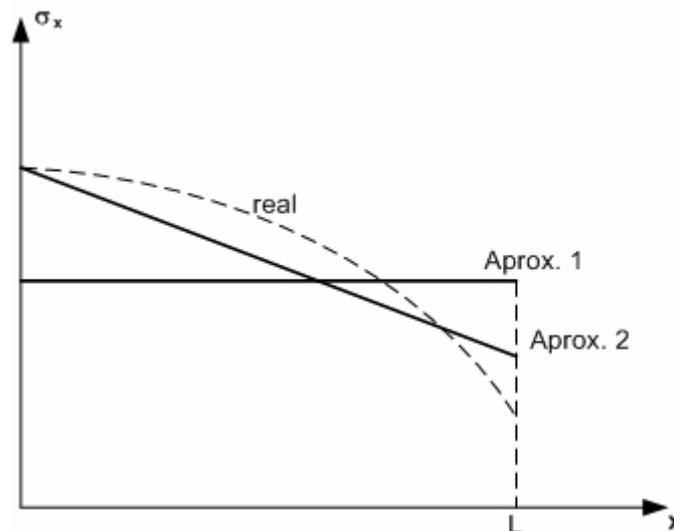


Figura 2.3-2 - Comparação dos valores reais e aproximados da barra carregada.

Os resultados encontrados demonstram que o método de Rayleigh-Ritz aproxima tanto o campo de deslocamentos (e em conseqüência o de tensão) quanto as condições de contorno naturais. No entanto, a aproximação será exata se a solução estiver contida no espaço formado pela função aproximação. Sendo assim, para uma aproximação exata, devemos usar um campo de deslocamento cúbico. Ou seja,

$$u_a = x^3a_3 + x^2a_2 + x^1a_1, \quad (2.3-22)$$

$$\text{onde tem-se } a_1 = \frac{q_0 L^2}{2EA} + \frac{\sigma_0}{E}, a_2 = 0 \text{ e } a_3 = -\frac{q_0}{6EA}. \quad (2.3-23)$$

O método clássico de Rayleigh-Ritz apresentado até aqui, gera bons resultados para problemas simples ou bem comportados cuja representação através de uma base de funções é facilmente obtida. No entanto, se o problema torna-se mais complexo, os termos da função aproximação também devem ser. Isto torna o método limitado, pois, a função de aproximação dependerá fortemente do problema a ser analisado, tornando-o pouco genérico; inclusive para a imposição das condições de contorno não essenciais. Para contornar tal problema, pode-se utilizar o mesmo método, só que interpolando o campo aproximado por partes. Para tal, basta que divida-se o domínio em partes menores (ou elementos) e interpole-se o campo separadamente dentro de cada domínio. O único cuidado que deve-se ter é o de manter satisfeito a continuidade (ou compatibilidade) interna entre os limites dos elementos (os nós).

O mesmo problema anterior será utilizado para a apresentação do método variacional localizado. Dividindo-se domínio em três elementos de mesmo tamanho $\frac{L}{3}$, e interpolando-se um polinômio linear em cada um deles (ver Figura 2.3-3). Observe que se pode interpolar cada elemento com funções aproximadas diferentes. Para um elemento genérico tem-se que,

$$u_a^{(e)} = x^1 a_1^{(e)} + x^0 a_0^{(e)}. \quad (2.3-24)$$

E em cada elemento,

$$\begin{aligned} u_a^{(1)} &= x a_1^{(1)} + a_0^{(1)} & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 & \Rightarrow & \text{elemento 1;} \\ u_a^{(2)} &= x a_1^{(2)} + a_0^{(2)} & \text{para } x_2 \leq x \leq x_3 & \Rightarrow & \text{elemento 2;} \\ u_a^{(3)} &= x a_1^{(3)} + a_0^{(3)} & \text{para } x_3 \leq x \leq x_4 & \Rightarrow & \text{elemento 3.} \end{aligned} \quad (2.3-25)$$

$$\text{onde } x_1 = 0, x_2 = L/3, x_3 = 2L/3 \text{ e } x_4 = L. \quad (2.3-26)$$

As deformações são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= a_1^{(1)} \\ \varepsilon_x^{(2)} &= a_1^{(2)} \\ \varepsilon_x^{(3)} &= a_1^{(3)} \end{aligned} \quad (2.3-27)$$

A energia potencial é escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_0^L \frac{1}{2} EA (\varepsilon_x)^2 dx - \int_0^L (q_0 x) u dx - (\sigma_0 A) u_L = \\
&= \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} EA (\varepsilon_x)^2 dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{2} EA (\varepsilon_x)^2 dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{1}{2} EA (\varepsilon_x)^2 dx \right) - \\
&\quad - \left(\int_{x_1}^{x_2} (q_0 x) u dx + \int_{x_2}^{x_3} (q_0 x) u dx + \int_{x_3}^{x_4} (q_0 x) u dx \right) - (\sigma_0 A) u_L
\end{aligned} \tag{2.3-28}$$

Substituindo-se os deslocamentos e deformações nas suas respectivas parcelas, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Pi &= \left(\int_0^{L/3} \frac{1}{2} EA (a_1^{(1)})^2 dx + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{1}{2} EA (a_1^{(2)})^2 dx + \int_{2L/3}^L \frac{1}{2} EA (a_1^{(3)})^2 dx \right) - \\
&\quad - \left(\int_0^{L/3} (q_0 x) (x a_1^{(1)} + a_0^{(1)}) dx + \int_{L/3}^{2L/3} (q_0 x) (x a_1^{(2)} + a_0^{(2)}) dx + \int_{2L/3}^L (q_0 x) (x a_1^{(3)} + a_0^{(3)}) dx \right) - \\
&\quad - (\sigma_0 A) (L a_1^3 + a_0^3)
\end{aligned} \tag{2.3-29}$$

Aplicando-se a compatibilidade interna para tornar o campo aproximado admissível, conclui-se que

$$u^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow a_0^{(1)} = 0$$

$$u^{(1)}(L/3) = u^{(2)}(L/3) \Rightarrow a_0^{(2)} = \frac{L}{3} (a_1^{(1)} - a_1^{(2)}) \tag{2.3-30}$$

Se as relações de compatibilidade interna forem substituídas no funcional da energia potencial e, aplicada a condição de estacionaridade, obtém-se os valores de todos os parâmetros a_i . O deslocamento seria uma função linear por partes dos parâmetros independentes (Figura 2.3-3), como indicado abaixo.

$$\begin{aligned}
u_a^{(1)} &= x a_1^{(1)} && \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 \\
u_a^{(2)} &= \left(x - \frac{L}{3}\right) a_1^{(2)} + \frac{L}{3} a_1^{(1)} && \text{para } x_2 \leq x \leq x_3 \\
u_a^{(3)} &= \left(x - \frac{2L}{3}\right) a_1^{(3)} + \frac{L}{3} a_1^{(2)} + \frac{L}{3} a_1^{(1)} && \text{para } x_3 \leq x \leq x_4
\end{aligned} \tag{2.3-31}$$

Os valores de tensão são constantes por partes. Veja na Figura 2.3-3 que os valores centrais de cada trecho se aproxima muito dos valores exatos. Essa é uma característica importante do método dos elementos finitos baseado em deslocamento. Os valores nodais são bons para deslocamento, variável interpolada, porém menos preciso para tensão, variável derivada. Os melhores valores de tensão estão no interior do elemento. Para obter-se melhores resultados deve-se aumentar o número de elementos.

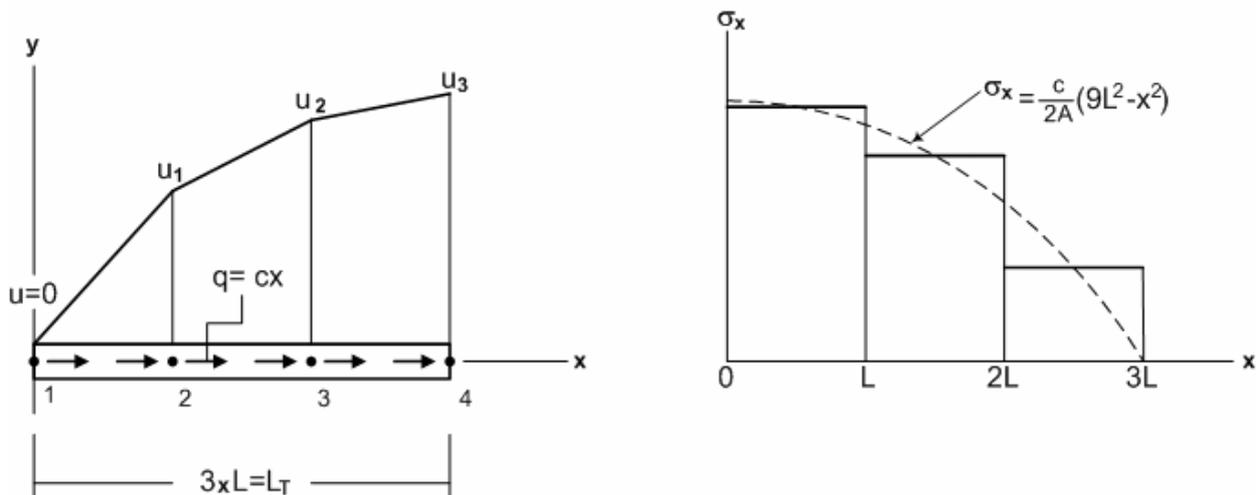


Figura 2.3-3 - Discretização de barra axialmente carregada.

No procedimento anterior, os parâmetros a_i não possuíam um significado físico muito claro. Também, a introdução da condição de compatibilidade interna entre os elementos, bem como a resolução do sistema de equações em a_i , gerado pela condição de estacionaridade, não é muito confortável para se codificar em um programa de computador. Principalmente se o programa tiver caráter genérico com relação aos carregamentos, geometria, condições de contorno e refino para melhoramento de resultados. Todos esses problemas podem ser facilmente evitados se a função aproximação tiver como parâmetros desconhecidos os próprios valores nodais do campo interpolado. Ou seja, se usar como parâmetros a_i os valores nodais dos deslocamentos u_i . O procedimento para ter-se tal situação resumisse em encontrar-se as chamadas “funções de forma” ou “funções de interpolação”. Este assunto será abordado na próxima seção.

2.4 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Nesta seção, a função aproximação no elemento será dependente dos valores nodais da própria função. O procedimento é muito simples. Considerando-se ainda o exemplo da Figura 2.3-3, onde tem-se um elemento genérico com um sistema de coordenadas local s , uma função de deslocamento linear será proposta para interpolar o campo desconhecido. Pode-se desenvolver as funções de interpolação em relação ao sistema local, que é outra característica do método dos elementos finitos. Ou seja,

$$u = a_1 + a_2 s \quad \text{ou, na forma matricial} \quad u = [1 \quad s] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4-1)$$

Para satisfazer a condição de compatibilidade interna entre os elementos esse campo deve atender as seguintes relações:

$$u = u_i \text{ em } s = 0 \text{ e } u = u_j \text{ em } s = L^{(e)},$$

onde u_i e u_j são os deslocamentos nodais dos nós i e j respectivamente, e $L^{(e)}$ é o comprimento do elemento e em análise.

Escrevendo-se essas condições na forma matricial obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{d\} = [A]\{a\} \quad (2.4-2)$$

Resolvendo-se a equação matricial acima para o valor de $\{a\}$, e substituindo-se na Equação 1.4.4-1, tem-se

$$\{a\} = [A]^{-1} \{d\} \quad \text{e} \quad u = [1 \quad s][A]^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (2.4-3)$$

A matriz das funções forma é

$$[N] = [1s][A]^{-1} = [1s] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L-s & s \\ L & L \end{bmatrix} \quad (2.4-4)$$

Para o exemplo em análise, todos os elementos tem a mesma função forma, porém os valores são diferentes. Isto porque os valores nodais $\{d\}$ e o comprimento $L^{(e)}$ são, em geral, diferentes para cada um. A compatibilidade entre os elementos é assegurada a priori porque os mesmos compartilham o mesmo grau de liberdade nos pontos nodais. Além disso, uma forma matricial é conseguida para a formulação.

O que caracteriza o método dos elementos finitos, e o torna poderoso, é a sua generalidade e facilidade de implementação numérico-computacional. O que foi descrito acima, além da própria discretização, é o que mais caracteriza o método dos elementos finitos. Faz-se uma aplicação local de um dos métodos de solução aproximada, tomando-se como parâmetros os valores nodais da variável interpolada, bem como suas derivadas. As palavras chaves do método são:

- i) discretização;*
- ii) interpolação local do campo por partes,, através das funções de interpolação;*
- iii) valores nodais do campo (ou suas derivadas) como parâmetros das funções de forma;*
- iv) descrição matricial direta;*
- v) generalidade.*

As funções de forma podem ser encontradas para qualquer elemento como descrito acima, porém, as mesmas exigem requisitos já satisfeitos por um grupo de funções chamadas “Funções de Interpolação de Lagrange” e “Funções de Interpolação de Hermite”. Antes de descrevê-las serão abordados mais algumas idéias sobre a interpolação do campo.

A interpolação nada mais é que aproximar o valor de uma função entre valores conhecidos, utilizando-se uma função diferente da real. Isso foi feito nos itens anteriores, utilizando-se como forma de ajustar a curva (cálculo dos parâmetros), a minimização de um funcional. Considere que a expressão diferencial dentro de um funcional, tenha uma ordem máxima de derivada igual a m . O método de Rayleigh-Ritz, que é utilizado para formulação, exige que a função de interpolação tenha uma continuidade (compatibilidade essencial) até a sua derivada de ordem $m - 1$. Ou seja, para o problema da barra, resolvido na seção anterior, a maior ordem de derivada no funcional é 1 , logo exige-se uma continuidade de ordem 0 , que é a própria função. Em um problema de viga exige-se uma continuidade de grau 1 , que é a continuidade da função e sua primeira derivada. Isso reflete no tipo de funções de interpolação, pois, em última análise, as funções de interpolação devem garantir essa continuidade entre os elementos. Com isso, pode-se definir, a princípio, dois tipos de funções de interpolação mais utilizadas: as funções de Lagrange e as de Hermite.

Funções de Interpolação de Lagrange. Esse tipo de função apenas garante a continuidade da própria função nos pontos nodais. Ou seja, elas devem ser utilizadas quando a maior ordem das derivadas no funcional for **1**. Nessa situação, diz-se ter uma continuidade C^0 entre os elementos. Desta forma, em uma discretização por elementos C^0 , as derivadas $\phi_{,x}$, $\phi_{,y}$, $\phi_{,z}$ de um campo ϕ , exibe um salto quando se passa de um elemento a outra, como pode-se notar na Figura 2.3-3.

De uma forma geral, uma variável de campo ϕ pode ser interpolada sobre um elemento com n valores nodais $\{\phi_e\} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \dots \phi_n\}^T$ de acordo com a fórmula

$$\phi = [N]\{\phi_e\} \quad \text{ou} \quad \phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i, \quad (2.4-5)$$

onde os N_i 's são as funções das coordenadas (normalmente locais). A função forma N_i define a distribuição de ϕ do elemento quando i th grau de liberdade nodal ϕ_i assume um valor unitário e todos os outros graus de liberdade ϕ_j são zeros.

Para o caso unidimensional (ver Figura 2.4-1), as funções forma são dadas pelo polinômio de Lagrange e são função do número de graus de liberdade a ser interpolada. Cada grau de liberdade em um nó tem associado a ele uma função de interpolação que são dadas por

$$N_i = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_{i-1} - x)(x_{i+1} - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_i)(x_2 - x_i) \dots (x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_i) \dots (x_n - x_i)}. \quad (2.4-6)$$

Essas funções possuem as seguintes características:

1. Todas as funções N_i são polinômios do mesmo grau. A função interpolada, conseqüentemente, tem o mesmo grau das funções forma;
2. Para qualquer função forma N_i , $N_i = 1$ quando $x = x_i$ e $N_i = 0$ quando $x = x_j$ onde $i \neq j$;
3. A somatória das funções forma C^0 é a unidade.

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1. \quad (2.4-7)$$

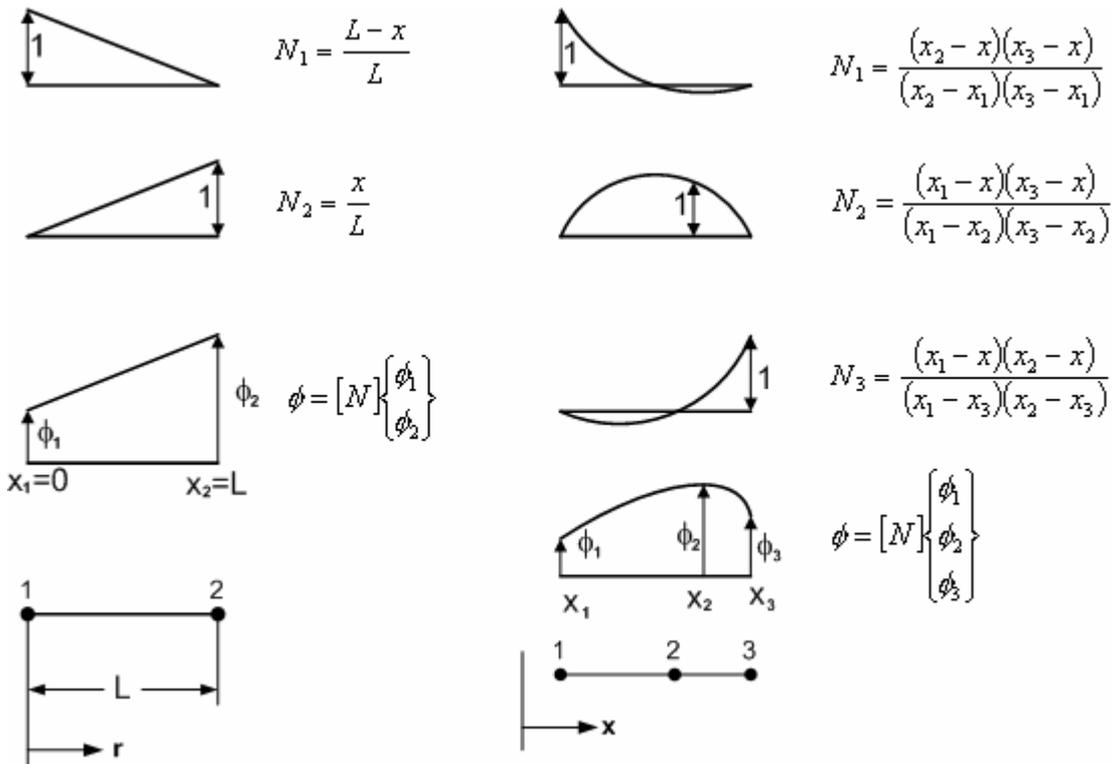


Figura 2.4-1 - Funções de forma de Lagrange unidimensional.

Para o caso bidimensional, onde a variável $\phi = \phi(x,y)$ deve ser interpolada dentro de uma região retangular, as funções de interpolação são obtidas considerando-se o produto das funções de Lagrange. Para o caso em que a função é bilinear(ver Figura 2.4-2),

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy, \tag{2.4-8}$$

as funções de interpolação são dadas por

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \\
 N_2 &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\
 N_3 &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \\
 N_4 &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab}
 \end{aligned}
 \tag{2.4-9}$$

Essas funções são mostradas em Figura 2.4-3.

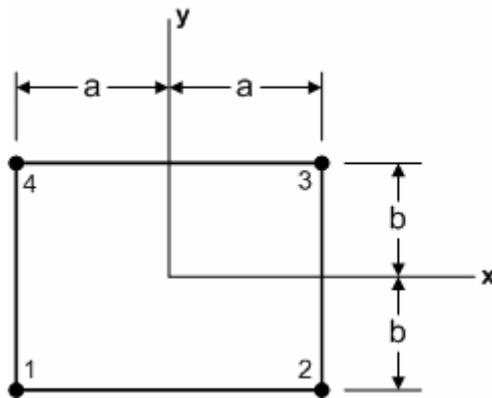


Figura 2.4-2 - Funções de interpolação bidimensional.

O elemento associado com a Figura 2.4-2 e Figura 2.4-3 é chamado bilinear. Da mesma forma, tem-se os elementos biquadráticos, bicúbicos e etc. Os biquadrados possuem nove nós, distribuídos nos vértices, meio das arestas e centro do elemento. Os termos que participam da interpolação podem ser identificados através do triângulo de Pascal na Figura 2.4-4. Para uma determinada ordem, a depender do número de termos que contenha a função de interpolação, o elemento é dito *Serendipity* ou de *Lagrange*.

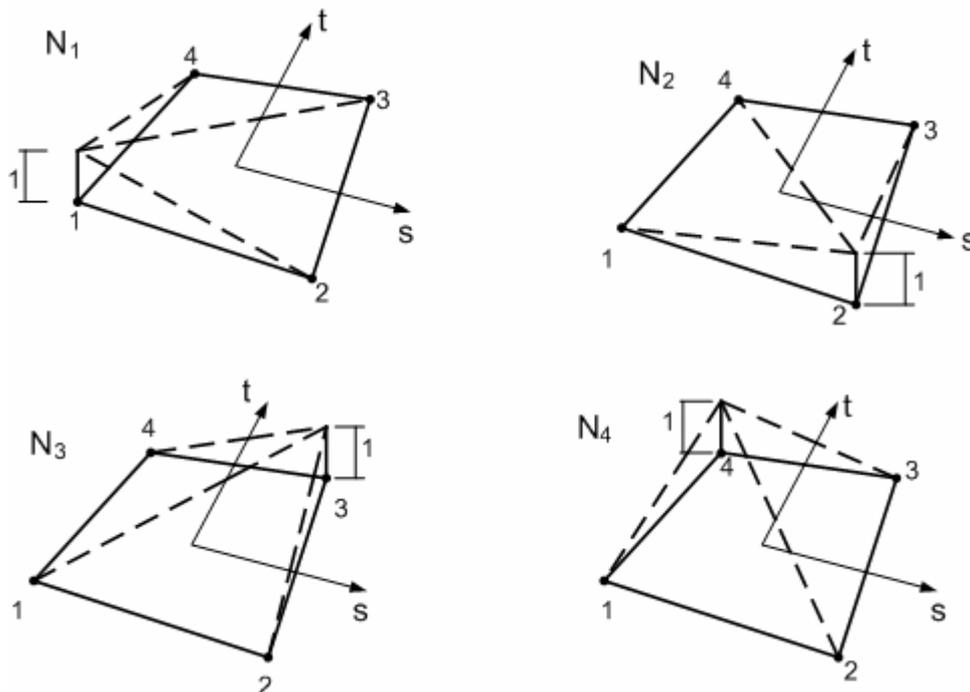


Figura 2.4-3 - Distribuição das funções de interpolação N_1, N_2, N_3, N_4

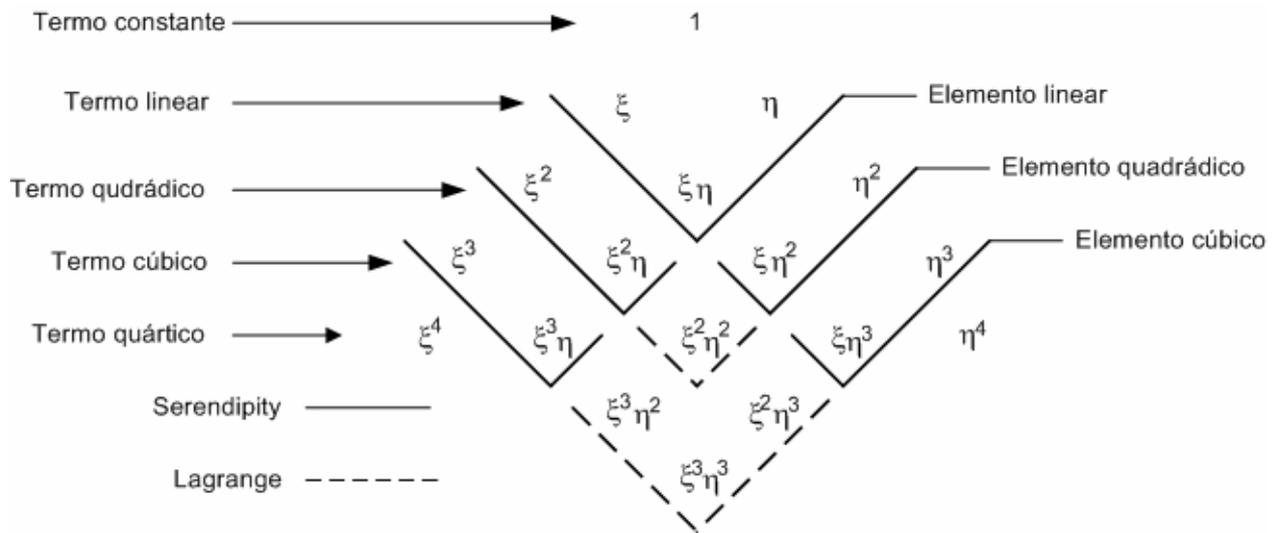


Figura 2.4-4 - Coeficientes polinomiais para elementos planos de Lagrange e Serendipity

Quando tem-se mais de uma variável para interpolar, como é o caso, por exemplo, de elasticidade plana (campo vetorial), procede-se da mesma forma para cada variável. Ou seja,

$$u = u(x,y) \quad \text{e} \quad v = v(x,y) \tag{2.4-10}$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \tag{2.4-11}$$

sendo os N_i os mesmos da Equação 2.4-9 para o elemento retangular.

Funções de Interpolação de Hermite. Essa classe de funções é muito utilizada em problemas estruturais que envolvem flexão. Nesse caso, não apenas a continuidade da função é desejada, mas também de suas derivadas até uma ordem a menos da maior ordem que aparece no funcional. No caso de viga, a maior ordem no funcional é dois. Sendo assim, exige-se também por critérios de convergência, que se tenha continuidade entre elementos da primeira derivada, ou seja, da rotação (gerada pela flexão). Elementos desse tipo são chamados de continuidade C^1 . Outro caso onde se aplica esse tipo de função é no problema clássico de placas.

O elemento mais simples de Hermite ocorre em problemas de flexão unidimensional, ou seja, em problemas clássicos de viga. Para essa situação, o campo a ser interpolado é a deflexão lateral $w = w(x)$. Para o caso da Figura 2.4-5, tem-se a seguinte função aproximação

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{ou} \quad w = [X]\{a\} \quad (2.4-12)$$

onde

$$[X] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \mathbf{e} \quad \{a\} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \quad (2.4-13)$$

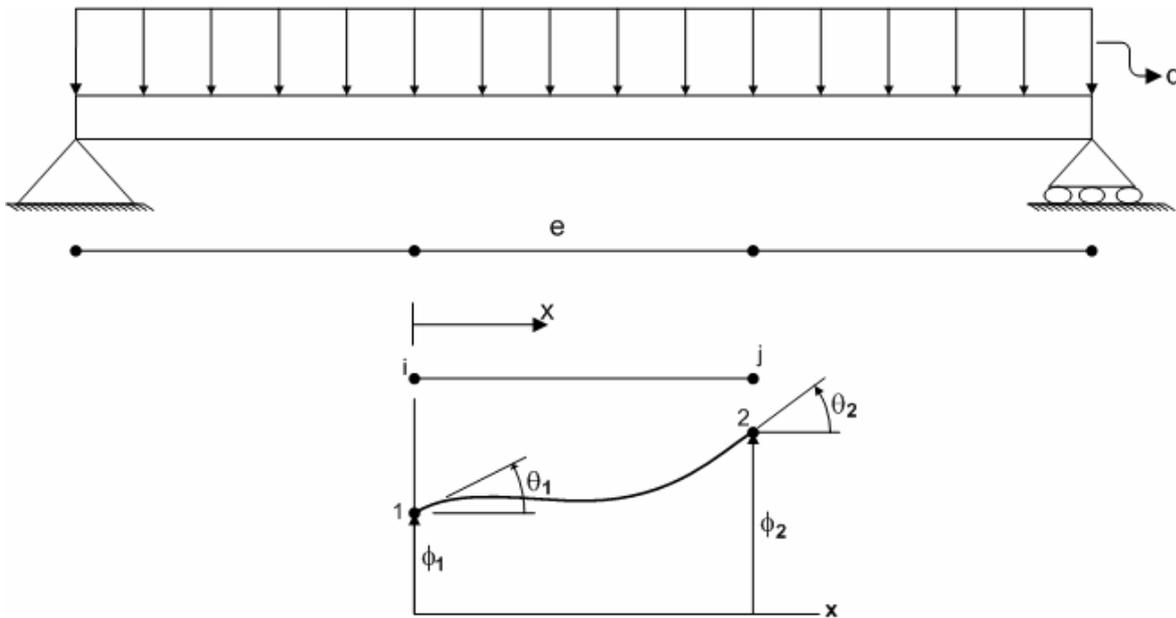


Figura 2.4-5 - Função interpolação de Hermite para vigas.

Para descrever o campo em função dos deslocamentos e inclinações (rotações) nodais, procede-se da mesma forma que nas funções de Lagrange. Da Figura 2.4-5 tem-se

$$\begin{aligned} w = w_1 \quad \text{e} \quad w_{,x} = \theta_1 & \quad \text{para } x = 0 \\ w = w_2 \quad \text{e} \quad w_{,x} = \theta_2 & \quad \text{para } x = L^{(e)} \end{aligned} \quad (2.4-14)$$

Resolvendo-se da mesma que para os polinômios de Lagrange, obtém-se na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{d\} = [A] \{a\} \quad (2.4-15)$$

Com isso, sendo $\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$ e utilizando-se a Equação 1.4.4-12, tem-se

$$w = [N]\{d\}, \quad \text{onde } [N] = [X][A]^{-1} \quad (2.4-16)$$

A representação dessas funções pode ser vista logo abaixo na Figura 2.4-6.

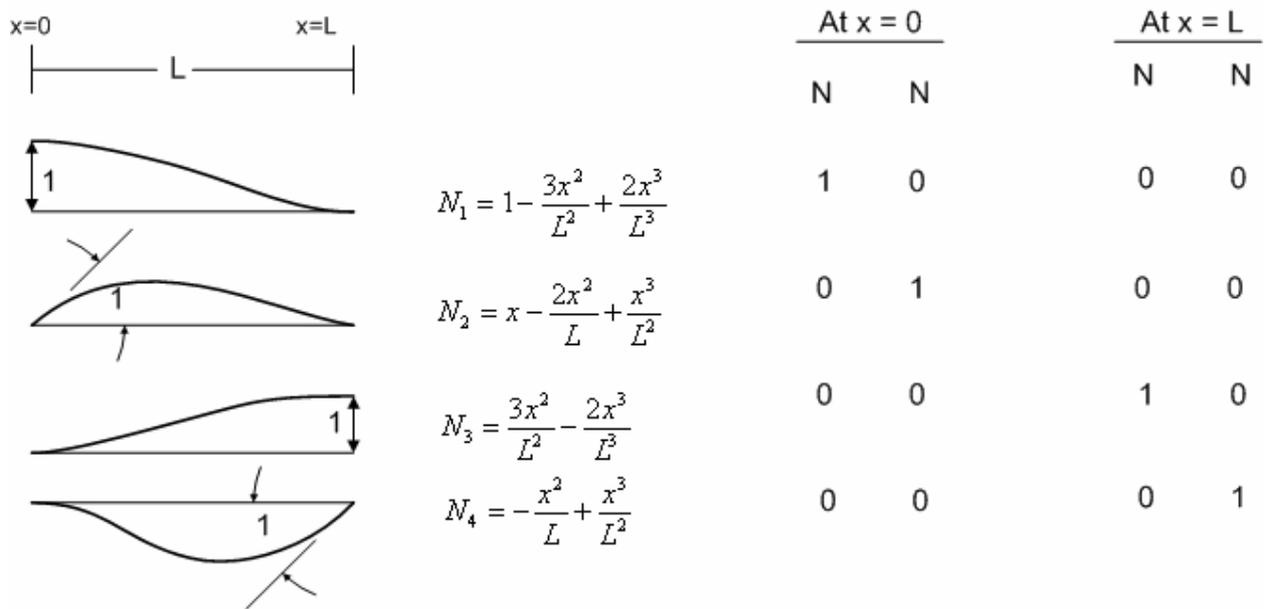


Figura 2.4-6 - Funções de interpolação de Hermite para o caso de flexão de viga.

2.5 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS A PARTIR DE RAYLEIGH-RITZ

Será apresentada a formulação geral do método de elementos finitos baseado em deslocamentos a partir do princípio de Rayleigh-Ritz. Para tal, utilizar-se-á o campo deslocamento como variável dependente a ser aproximada. O funcional a ser minimizado será a energia potencial total do sistema. O campo deslocamento será interpolado por partes através de uma função aproximação admissível (normalmente polinomial), tendo como parâmetros os graus de liberdade nodais de cada elemento. A expressão geral da energia potencial para um corpo elástico linear é,

$$\Pi = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \{u\}^T \{F\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{\Phi\} d\Gamma - \{D\}^T \{P\} \quad (2.5-1)$$

onde

$\{u\} = [u \ v \ w]^T$ é o vetor campo deslocamento

$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$ é o vetor campo deformação

$[E]$ é matriz das propriedades constitutivas do material

$\{\varepsilon_o\} = \{\sigma_o\}$ são os vetores de deformação inicial e tensão inicial respectivamente

$\{F\} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ é o vetor força de corpo

$\{\Phi\} = [\Phi_x \ \Phi_y \ \Phi_z]^T$ é o vetor força de superfície

$\{D\}$ é o vetor dos graus de liberdade nodais da estrutura

$\{P\}$ cargas nodais aplicadas por agentes externos

$\Omega, \Gamma =$ domínio e contorno da estrutura respectivamente.

Para problemas mais simples como vigas, elasticidade plana e placas, a expressão simplifica-se. Isto será visto nos capítulos que sucedem-se.

O campo deslocamento dentro de cada elemento é interpolado da seguinte forma,

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (2.5-2)$$

onde $[N]$ é a matriz das funções de interpolação e $\{d\}$ é o vetor dos graus de liberdade nodais de um elemento.

O campo deformação é encontrado através da diferenciação do deslocamento. Com isso tem-se

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{d\} = [B]\{d\} \quad (2.5-3)$$

onde $[B] = [\partial][N]$ é a matriz deformações-deslocamentos, que contém as derivadas das funções de forma. O operador $[\partial]$ é uma matriz que contém operadores diferenciais.

Substituindo-se $\{u\}$ e $\{\varepsilon\}$ dentro do funcional de energia obtém-se,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{numel} \{d\}_n^T [k]_n \{d\}_n - \sum_{n=1}^{numel} \{d\}_n^T \{r_e\}_n - \{D\}^T \{P\}, \quad (2.5-4)$$

onde a somatória indica a contribuição de todos os elementos para a energia potencial total, e a matriz de rigidez e vetor carga equivalente de cada elemento são dadas por:

$$[k] = \int_{\Omega_e} [B]^T [E] [B] d\Omega \quad (2.5-5)$$

$$\{r_e\} = \int_{\Omega_e} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} d\Omega - \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma_0\} d\Omega + \int_{\Omega_e} [N]^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\Phi\} d\Gamma \quad (2.5-6)$$

onde as integrais são realizadas sobre o domínio e o contorno de cada elemento.

Para finalizar, será obtida as equações de equilíbrio em cada direção dos graus de liberdade. Antes tem-se que rescrever a expressão de energia de forma mais compacta.

As somatórias na Equação 2.5-4 podem ser escritas de forma ainda mais compacta, através da expansão da matriz de rigidez e do vetor de carga de forma a descrever todo o sistema. Todo o grau de liberdade em um elemento também deve aparecer no vetor de cargas global $\{D\}$. Dessa forma, expandindo-se e sobrepondo-se as contribuições de cada elemento na matriz de rigidez e no vetor de carga obtém-se

$$\Pi = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{R\} \quad (2.5-7)$$

onde

$$[K] = \sum_{n=1}^{numel} [k]_n \quad \text{e} \quad \{R\} = \{P\} + \sum_{n=1}^{numel} \{r_e\}_n \quad (2.5-8)$$

Essas somatórias indicam uma operação que chama-se “*montagem da matriz de rigidez e do vetor carga nodal consistente*”. O funcional de energia Π agora é função dos graus de liberdade nodais $\{D\}$. Aplicando-se o princípio de estacionaridade

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial D} \right\} = \{0\} \quad \text{obtém-se} \quad [K] \{D\} = \{R\} \quad (2.5-9)$$

A última relação representa a equação de equilíbrio do sistema, e deve ser resolvida para os valores desconhecidos dos graus de liberdade nodais e reações nos apoios. A manipulação torna-se muito facilitada porque a matriz de rigidez global $[K]$ é simétrica, bandada e positiva-definida (após aplicarmos as condições de contorno essenciais necessárias). Ver sobre propriedades das matrizes no Apêndice A.

2.6 BREVE HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método de resolução de problemas estruturais através da substituição da estrutura real por uma menos complexa, iniciou-se no início deste século. No início da década de 40, McHenry, Hrenikoff e Newmark aplicavam a técnica da substituição do contínuo por barras elásticas, cujas propriedades eram escolhidas de forma a que seus deslocamentos nodais representassem os deslocamentos dos pontos do contínuo. Em 1943, Courant publicou um trabalho onde usava o princípio da energia potencial estacionária, juntamente com a idéia de interpolação por partes, sobre sub-regiões triangulares, para o estudo de problemas de torção de Saint-Venant. Este trabalho talvez seja o primeiro, com a idéia de elementos finitos que conhecemos hoje, porém, ficou esquecido até que mais tarde, engenheiros, independentemente, o desenvolveram.

Em 1957 surgiu uma publicação que se tornou um marco para o método de elementos finitos. Seus autores eram Turner, Clough, Martin & Topp. Nessa mesma época, Argyris & Kelsey também publicaram trabalho importante. Nesses trabalhos, uniu-se os conceitos de análise e estrutural e do contínuo, e estabeleceu-se as bases para uma descrição matricial do problema de forma a que pudesse ser implementado de forma sistematizada nos computadores digitais. Naquela oportunidade, os computadores digitais começavam a aparecer com força na análise estrutural, principalmente por causa da corrida espacial. De relevada importância também, é o trabalho de Szmelter publicado em 1958, onde o conceito do método baseado na minimização de energia, e utilizando-se elementos retangulares, foi apresentado. O nome *Elementos Finitos* foi dado em 1960 por Clough. Em 1963, o método ganhou respeitabilidade por ter sido provada a sua consistência matemática. A partir daí muitos pesquisadores começaram a estudar e aplicar o método em várias áreas. Desenvolvendo novos elementos e aplicando-o em muitos tipos de análises diferentes.

Para se ter uma idéia do desenvolvimento do método, em 1961 dez artigos foram publicados, 134 em 1966, e 844 em 1971. Até 1986 tinham-se cerca de 20.000 publicações sobre o método.

O interesse justifica-se, não só por sua generalidade e eficiência, mas, sobretudo, pelo grande desenvolvimento dos sistemas de computação; permitindo-se a realização de análises inimagináveis duas décadas atrás.

2.7 APLICAÇÕES

A seguir são mostrados algumas aplicações de sucesso do método de elementos finitos em diversas áreas e tipos de análises.

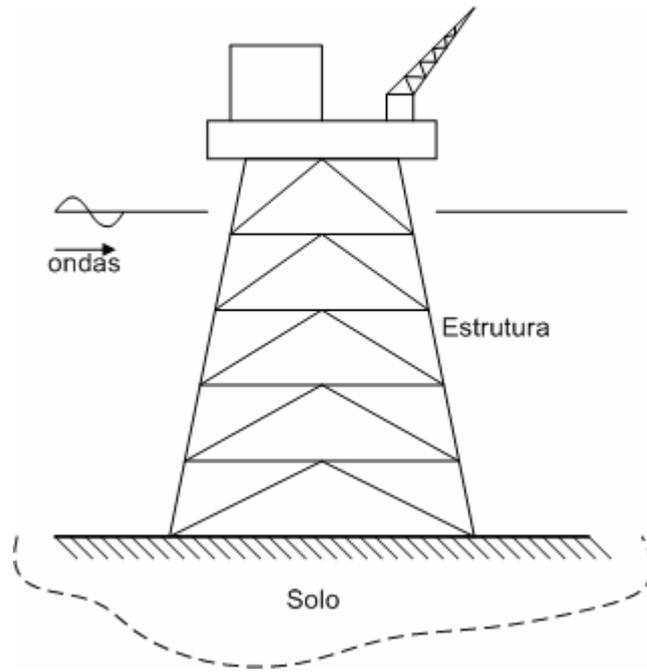
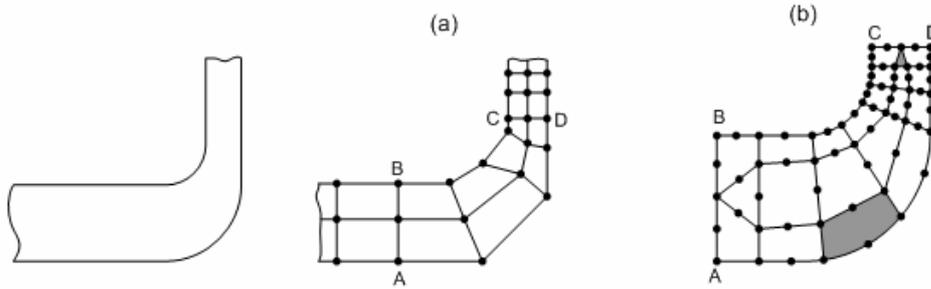
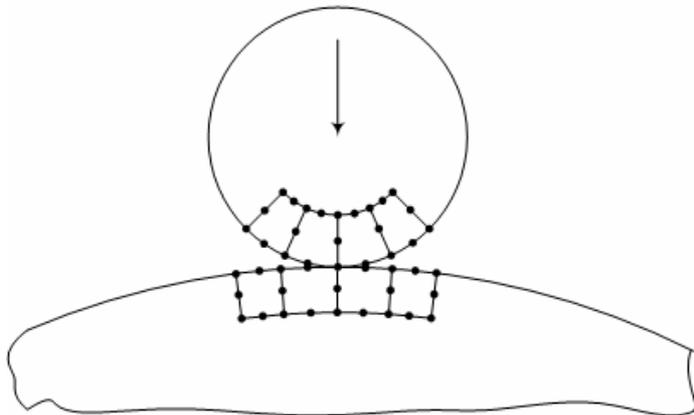


Figura 2.7-1 - Problema de iteração fluido-estrutura.

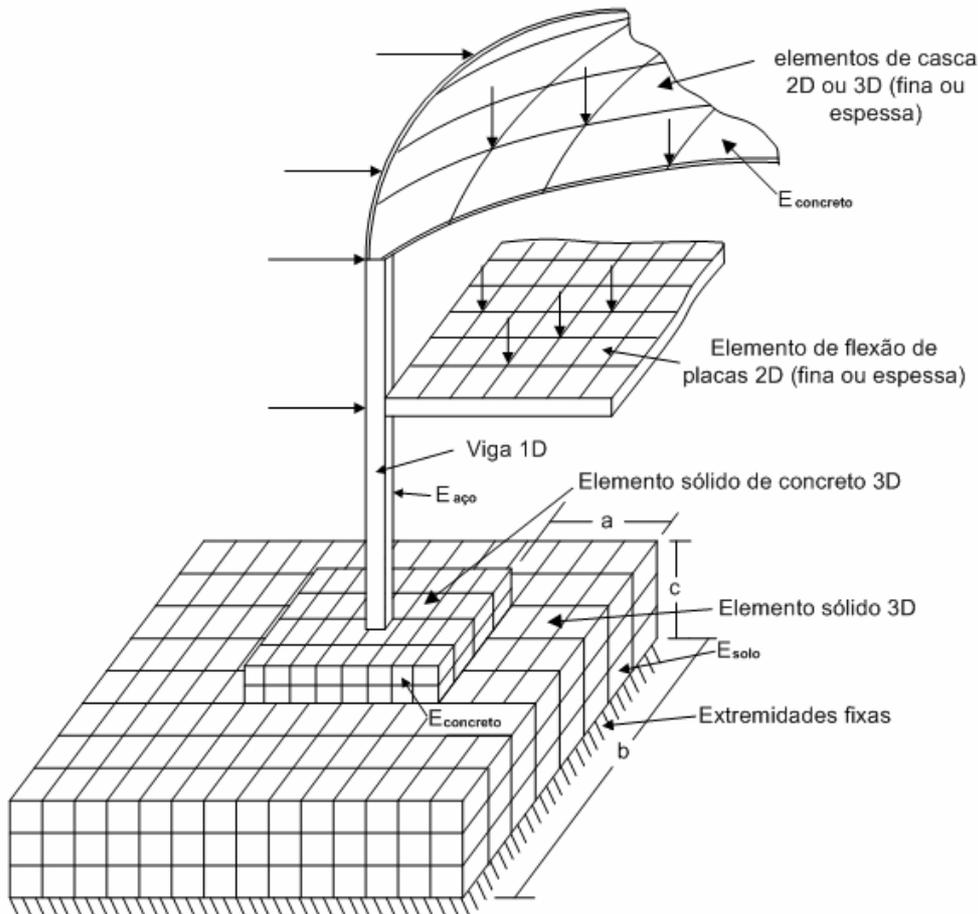


Região de particular interesse de uma estrutura plana.

- (a) Malha grosseira.
- (b) Malha mais refinada usando elementos com nós nas arestas



Malha grosseira para análise da região de contato entre dois cilindros



Estrutura típica de engenharia civil e sua discretização