INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

- Tecnólogo em Fabricação Mecânica

- Projeto de Ferramentas II

- Prof. Mauro César Rabuski Garcia
- Adapatado de D. A. Rade

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Sapucaia do Sul

Fundamentos do método dos elementos finitos

- Definição

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica destinada à obtenção de soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais.

Aplicações do MEF

- Aplicado a uma grande variedade de problemas de engenharia:
- Mecânica dos Sólidos
- Mecânica dos Fluidos
- Transmissão de Calor
- Eletromagnetismo

Exemplos de pacotes comerciais existentes no mercado

- ANSYS
- NASTRAN
- ABAQUS
- SYSTUS
- COSMOS
- MOLDFLOW

O Problema

- Em todo problema formulado em domínios contínuos, as incógnitas do problema, denominadas variáveis de campo (que podem ser grandezas escalares, como temperaturas ou vetoriais, como deslocamentos) podem assumir valores independentes em cada ponto do domínio. Conseqüentemente, o problema tem número infinito de incógnitas, sendo caracterizado como um problema infinito-dimensional. Este tipo de problema é geralmente modelado por equações diferenciais parciais, cuja solução analítica é dada por funções que fornecem os valores das variáveis de campo em função das coordenadas espaciais para todos os pontos do domínio.

MEF

- O MEF é essencialmente um processo de discretização, que visa transformar um problema infinito-dimensional em um problema finito-dimensional, com número finito de incógnitas. O método consiste em dividir o domínio sobre o qual o problema é estudado em várias regiões interconectadas, denominadas elementos. Cada elemento dispõe de um certo número de pontos (interiores e/ou limítrofes), denominados nós ou pontos nodais. O conjunto de elementos utilizados na discretização é denominado malha.

O QUE ACONTECE NOS ELEMENTOS E NÓS

- Uma vez definidos os elementos e seus respectivos nós, no interior de cada elemento são admitidas soluções aproximadas para as variáveis de campo, expressas como funções arbitrárias dos valores que as incógnitas assumem nos nós (valores nodais). Estas funções são denominadas *funções de interpolação ou funções de forma. São também impostas condições garantindo a continuidade da solução nos nós compartilhados por vários elementos. As incógnitas do problema, denominadas graus de liberdade (g.d.l.), passam a ser os valores das variáveis de campo nos pontos nodais, sendo o número destas incógnitas (agora finito), denominado número de graus de liberdade do modelo. Dependendo da natureza do problema, após a discretização, o modelo matemático regente resulta representado por um número finito de equações diferenciais ordinárias ou de equações algébricas, cuja resolução numérica conduz aos valores das incógnitas nodais. Uma vez determinadas estas incógnitas, os valores das variáveis de campo no interior dos elementos podem ser avaliados empregando as funções de interpolação.*

VANTAGENS DO MEF

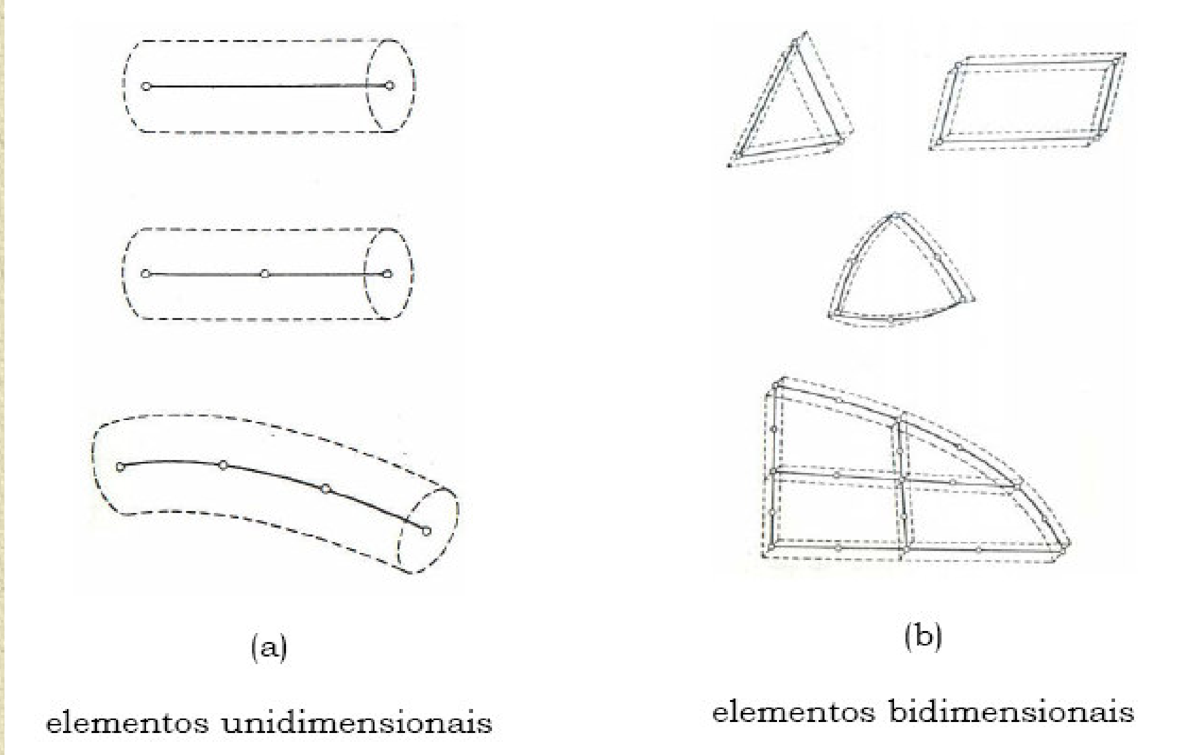
- elementos de diferentes formas e tamanhos podem ser associados para discretizar domínios de geometria complexa.
- a divisão do contínuo em regiões facilita a modelagem de problemas envolvendo domínios não homogêneos, onde as propriedades físicas variam em função das coordenadas espaciais.
- o método pode ser todo formulado matricialmente, facilitando sua implementação computacional.

PRINCIPAIS ETAPAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

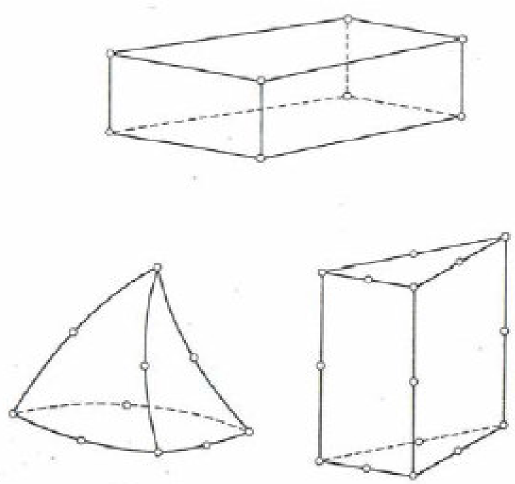
1ª) Discretização do domínio.

- O primeiro passo é a divisão do domínio em elementos. O tipo e número de elementos a serem utilizados devem ser escolhidos de modo a representar adequadamente a geometria do problema e caracterizar convenientemente as variações da solução ao longo do domínio.

Tipos de elementos do MEF

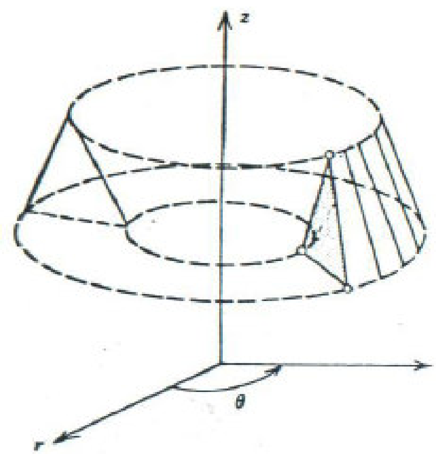


Elementos usados no MEF



(c)

elementos tridimensionais



(d)

elemento axissimétrico

2ª) Escolha das funções de interpolação.

- Nesta etapa são escolhidas as funções de interpolação que representam as variáveis de campo no interior de cada elemento. Freqüentemente, mas nem sempre, funções polinomiais são escolhidas como funções de interpolação, devido à facilidade que oferecem para derivação e integração. Os graus dos polinômios utilizados estão relacionados ao número de incógnitas nodais de cada elemento, devendo também atender a certos requisitos de continuidade das variáveis de campo a serem satisfeitos nos nós e nas fronteiras entre elementos imediatamente vizinhos.

3ª) Construção das matrizes elementares.

- Uma vez escolhidos o tipo e número de elementos e as funções de interpolação, devemos estabelecer as relações matriciais expressando o comportamento (relações de causa-efeito), em termos de propriedades físicas e geométricas, para cada elemento, individualmente. Em outras palavras, procede-se à formulação em nível elementar.

4ª) Montagem das matrizes elementares para obtenção das matrizes globais.

- Para caracterizar o comportamento do sistema completo, resultante da associação dos vários elementos, devemos agrupar as matrizes de cada um dos elementos de uma forma adequada. Em outras palavras, devemos combinar as equações matriciais expressando o comportamento dos elementos individuais para formar as equações matriciais que descrevem o comportamento do sistema em todo o domínio. Este processo é conhecido como *montagem das matrizes globais*. *No processo de montagem, impõe-se a condição que em cada nó onde vários elementos estão interconectados, os valores das variáveis de campo são os mesmos para cada elemento compartilhando aquele nó.*

5ª) Imposição dos carregamentos externos e das condições de contorno.

- **As equações matriciais globais devem ser modificadas para satisfazer as condições de contorno do problema, que expressam o fato que alguns valores das incógnitas nodais são prescritos. Assim, por exemplo, em problemas de transferência de calor, os valores da temperatura em alguns pontos do contorno podem ser previamente conhecidos. Da mesma forma, deve-se alterar as equações globais para leva em conta que, em alguns nós, cargas externas conhecidas (forças, fluxos de calor, etc.) são aplicadas. Ao final deste processo, o número total de incógnitas nodais remanescentes define o chamado *número de graus de liberdade do modelo*.**

6ª) Resolulção do sistema de equações.

- As equações matriciais globais devem ser modificadas para satisfazer as condições de contorno do problema, que expressam o fato que alguns valores das incógnitas nodais são prescritos. Assim, por exemplo, em problemas de transferência de calor, os valores da temperatura em alguns pontos do contorno podem ser previamente conhecidos. Da mesma forma, deve-se alterar as equações globais para leva em conta que, em alguns nós, cargas externas conhecidas (forças, fluxos de calor, etc.) são aplicadas. Ao final deste processo, o número total de incógnitas nodais remanescentes define o chamado *número de graus de liberdade do modelo*.

7ª) Realização de cálculos complementares.

- Em várias situações, cálculos complementares devem ser realizados para a determinação de grandezas dependentes das variáveis de campo, determinadas na etapa precedente. Assim, por exemplo, nos problemas de Mecânica dos Sólidos, uma vez determinados os deslocamentos, cálculos adicionais são necessários para a determinação das deformações (utilizando as relações deformação-deslocamento) e das tensões (utilizando as relações tensão-deformação).

Domínios de aplicação do MEF

- ***problemas de equilíbrio.***

  Esta é a classe de problemas cuja solução é independente do tempo. São exemplos os problemas da Mecânica dos Sólidos envolvendo a determinação de tensões e deformações em elementos estruturais submetidos a carregamentos estáticos e os problemas da Mecânica dos Fluidos tratando da determinação de distribuições de pressão, velocidade em regime permanente e os problemas de Transferência de Calor em regime permanente. Para este tipo de problema, o processo de discretização através do MEF conduz a um modelo matemático representado por um conjunto de equações algébricas, que podem ser lineares ou não lineares.

Domínios de aplicação do MEF

- *problemas de autovalor.*

  Nesta classe de problemas, o modelo matemático obtido é representado por um conjunto de equações lineares homogêneas, caracterizado pela dependência em relação a um parâmetro, cuja resolução conduz a um conjunto de autovalores e autovetores. São exemplos os problemas que tratam da determinação de freqüências naturais e modos de vibração de meios sólidos e fluidos, além de cargas de flambagem de elementos estruturais. No primeiro caso os autovalores correspondem às freqüências naturais e os autovetores associam-se aos modos naturais de vibração; no segundo, os autovalores correspondem às cargas de flambagem e os autovetores dizem respeito aos campos de deslocamentos correspondentes.

Domínios de aplicação do MEF

- ***problemas de propagação.***

  Os problemas de propagação são aqueles em que se busca caracterizar a evolução das variáveis de campo em função do tempo. É o caso típico de fenômenos que se desenvolvem em regime transitório. Os seguintes exemplos podem ser mencionados: determinação do movimento de sistemas estruturais submetidos a cargas de impacto e determinação de distribuições de temperatura geradas por fluxos de calor variáveis.

Limitações do MEF

Algumas fontes de incerteza inerentes à modelagem por EF são:

• a não consideração de certos tipos de efeitos físicos, tais como não linearidades, histerese, amortecimento, etc.

• erros de discretização, devidos à impossibilidade de se obter uma perfeita representação de domínios de geometria complexa utilizando os tipos de elementos disponíveis.

• conhecimento impreciso dos valores de alguns parâmetros físicos e/ou geométricos que são utilizados na elaboração do modelo (ex.: módulo de elasticidade, densidade, condutividade térmica, viscosidade, etc.)

• dificuldade de modelar efeitos localizados, tais como junções parafusadas e rebitadas.

• erros oriundos do processo de resolução numérica.