

Ferramentas de Simulação em Mecânica:  
Elementos Finitos

Jun Fonseca

2002

## **Resumo**

Este é um material compilado para a disciplina de Elementos Finitos para alunos no final da graduação e no início da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Muito do material está inspirado nas aulas da graduação e na apostila dos professores Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC), Luiz Teixeira do Vale Pereira (UFSC), Jun Sérgio Ono Fonseca (UFRGS) e Rogério José Marczak (UFRGS), com colaboração dos professores Domingos Boechat Alves (UFSC) e Marco Antônio Luersen (CEFET-PR).

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Síntese Histórica . . . . .	3
1.2	Organização do texto . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Equações Básicas da Elasticidade Linear</b>	<b>7</b>
2.1	Deslocamentos . . . . .	7
2.2	Deformações . . . . .	8
2.3	Tensões . . . . .	9
2.4	Equações Constitutivas . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Elemento de Barra</b>	<b>11</b>
3.1	Teoria de Barras . . . . .	11
3.2	Formulação Direta do Elemento de Barra: Matriz de Rigidez e Vetor de Carga . . . . .	11
3.3	Superposição dos Elementos de Barra: Matriz de Rigidez Global e Vetor de Carga Global	14
3.4	Condições de Contorno . . . . .	17
3.5	Resolução do Problema . . . . .	18
3.6	Métodos de Solução . . . . .	19
3.7	Transformação de Coordenadas . . . . .	22
3.8	Arquitetura Básica de um Programa de Elementos Finitos . . . . .	26
3.9	Formulação Energética do Elemento de Barra . . . . .	27
3.9.1	Métodos Energéticos . . . . .	27
3.9.2	Energia Potencial . . . . .	28
3.9.3	Elemento de Barra - Formulação Energética . . . . .	29
3.9.4	Determinação de U e W . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Elemento de Viga</b>	<b>33</b>
4.1	Formulação Direta - Flexão Simples - Viga Plana e Reta . . . . .	33
4.2	Elemento de Viga - Flexão e tração - com cisalhamento . . . . .	37
4.2.1	CARGAS AXIAIS: $P_1$ e $P_2$ . . . . .	39
4.2.2	CARGAS TRANSVERSAIS: $V_1$ e $V_2$ . . . . .	40
4.2.3	MOMENTOS FLETORES: $M_1$ e $M_2$ . . . . .	42
4.3	Elemento de Viga: Formulação Energética . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Elementos de Elasticidade Plana</b>	<b>56</b>
5.1	Estado de Tensões Planas . . . . .	56
5.2	Estado de Deformações Planas . . . . .	57
5.3	Triângulo de Deformações Constantes . . . . .	58
5.3.1	Superposição de Elementos Triangulares . . . . .	61
5.4	Elemento quadrilátero Isoparamétrico . . . . .	62
5.4.1	Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento Isoparamétrico . . . . .	68
5.4.2	Cálculo da Matriz de Rigidez e do Vetor de Carga do Elemento . . . . .	69
5.5	Exemplo Comparativo de Algumas Malhas para um Estado Plano de Tensão . . . . .	72

<b>6</b>	<b>Elementos de Flexão de Placas</b>	<b>74</b>
6.1	Noções da Teoria de Flexão de Placas . . . . .	74
6.2	Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento de Placa de Kirchhoff . . . . .	81
6.3	Matriz de Rigidez e Vetor Carga do Elemento de Placa de Mindlin . . . . .	85

# 1. INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Meios Contínuos, e mais especificamente a Teoria da Elasticidade, tem como preocupação básica o desenvolvimento de modelos matemáticos que possam representar adequadamente a situação física real de componentes industriais sujeitos a esforços mecânicos. Em análise estrutural, o objetivo pode ser a determinação do campo de deslocamentos, as deformações internas ou as tensões atuantes no sistema devido à aplicação de cargas, além de outros. A teoria matemática da Elasticidade, que muito tem auxiliado na determinação das variáveis envolvidas na deformação de componentes, deve muito a pesquisadores como Navier, Cauchy, Poisson, Green, dentre outros

Porém, a aplicação de tais teorias a casos práticos apresenta dificuldades às vezes intransponíveis. Por exemplo, na análise estrutural, a perfeita representação matemática de carregamentos, geometria, condições de contorno, comportamento dos materiais etc, em muitas situações, apresenta-se de forma complexa, havendo, assim, a necessidade de se introduzir muitas hipóteses simplificativas no problema real, para permitir alguma forma de modelagem matemática que conduza a soluções mais simples.

Por outro lado, engenheiros têm demonstrado um interesse crescente por estudos mais precisos para a análise de estruturas. Este interesse vem unido a uma necessidade cada vez maior de se estudar o comportamento de elementos estruturais complexos, o que conduz a tratamentos analíticos mais elaborados, baseados em teorias gerais, e que são, via de regra, de soluções extremamente difíceis.

Desta forma, engenheiros têm procurado desenvolver e/ou aplicar métodos aproximados que permitam aplicar os princípios daquelas teorias de forma acessível e precisa. Dentre estes métodos, os que tem sido mais utilizados são aqueles baseados na divisão do meio contínuo em partes mais simples (a estrutura, o fluido, o gás, etc).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é seguramente o processo que mais tem sido usado para a discretização de meios contínuos. A sua larga utilização se deve também ao fato de poder ser aplicado, além dos problemas clássicos da mecânica estrutural elástico-linear - para os quais foi o método inicialmente desenvolvido - , também para problemas tais como:

- problemas não lineares, estáticos ou dinâmicos;
- mecânica dos sólidos;
- mecânica dos fluidos;
- eletromagnetismo;
- transmissão de calor;
- filtração de meios porosos;
- campo elétrico;
- acústica; etc.

Além disso, pode-se afirmar também que o MEF é muito utilizado face à analogia física direta que se estabelece, com o seu emprego, entre o sistema físico real (a estrutura em análise) e o modelo (malha de elementos finitos).

## 1.1. Síntese Histórica

As limitações da mente humana são tais que o homem não consegue dominar completamente o comportamento do complexo mundo que o cerca numa só operação global. Por isso, uma forma natural de proceder dos engenheiros, cientistas e outros profissionais, consiste em separar os sistemas em componentes básicos, ou seja, aplicar o processo de análise do método científico de abordagem de problemas. Com essa

operação, tem-se a oportunidade de estudar o comportamento dos elementos - que é mais simples -, e depois sintetizar as soluções parciais para o estudo do sistema global.

A discretização de sistemas contínuos tem objetivos análogos aos acima descritos, ou seja, particiona-se o domínio - o sistema - em componentes cujas soluções são mais simples e, depois, unem-se as soluções parciais para obter a solução do problema.

Em alguns casos essa subdivisão prossegue indefinidamente e o problema só pode ser definido fazendo-se uso da definição matemática de infinitésimo. Isto conduz a equações diferenciais, ou expressões equivalentes, com um número infinito de elementos.

Com a evolução dos computadores digitais, os problemas discretos podem ser resolvidos geralmente sem dificuldades, mesmo que o número de elementos seja muito elevado. Entretanto, como a capacidade dos computadores é finita, os problemas contínuos só podem ser resolvidos de forma precisa com o uso da matemática.

A discretização de problemas contínuos tem sido abordada, ao longo dos anos, de forma diferente por matemáticos e engenheiros. Os matemáticos têm desenvolvido técnicas gerais aplicáveis diretamente a equações diferenciais que regem o problema, tais como: aproximações por diferenças finitas, métodos de resíduos ponderados, técnicas aproximadas para determinar pontos estacionários de funcionais. Os engenheiros procuram abordar problemas mais intuitivamente, estabelecendo analogias entre os elementos discretos reais e porções finitas de um domínio contínuo.

O conceito de análise de estruturas, pode-se afirmar, teve início logo após o período compreendido entre 1850 e 1875 - Escola Francesa com Navier e St. Venant -, com os trabalhos de Maxwell, Castigliano, Mohr e outros.

Progressos no desenvolvimento de teorias e de técnicas analíticas para o estudo de estruturas foram particularmente lentos entre 1875 e 1920. Isto foi devido, certamente, às limitações práticas na solução das equações algébricas. Neste período, as estruturas de interesse eram basicamente treliças e pórticos, que tinham um processo de análise aproximada baseada numa distribuição de tensões - com forças incógnitas - e que era universalmente empregado.

Por volta de 1920, em função dos trabalhos de Maney (EUA) e de Ostenfeld (Dinamarca), passou-se a utilizar a idéia básica de análise aproximada de treliças e pórticos baseada nos deslocamentos como incógnitas. Estas idéias são as precursoras do conceito de análise matricial de estruturas, em uso hoje em dia.

Várias limitações no tamanho dos problemas a solucionar, que podiam ter forças ou deslocamentos incógnitos, continuaram a prevalecer até 1932, quando Hardy Cross introduziu o Método da Distribuição de Momentos. Este método facilitou a solução de problemas de análise estrutural, e passou-se a poder trabalhar com problemas mais complexos do que os mais sofisticados problemas até então tratados. Este foi o principal método de análise estrutural que foi praticado pelos próximos 25 anos.

No começo de 1940, McHenry, Hrenikoff e Newmark demonstraram - no campo da mecânica dos sólidos - que podiam ser obtidas soluções razoavelmente boas de um problema contínuo, substituindo-se pequenas porções do contínuo por uma distribuição de barras elásticas simples. Mais tarde, Argyris, Turner, Clough, Martin & Topp demonstraram que era possível substituir as propriedades do contínuo de um modo mais direto, e não menos intuitivo, supondo que as pequenas porções - os elementos - se comportavam de forma simplificada.

Computadores digitais apareceram por volta de 1950, mas a sua real aplicação à teoria e à prática não se deu, aparentemente, de forma imediata. Entretanto, alguns indivíduos previram o seu impacto e estabeleceram codificações para análise estrutural em forma adequada - a forma matricial. Contribuições deste tipo foram feitas por Argyris e Patton.

Dois publicações notáveis, que podem ser consideradas marcos no estudo do MEF, foram os trabalhos de Argyris & Kelsey e de Turner, Clough, Martin & Topp. Tais publicações uniram os conceitos de análise estrutural e análise do contínuo, e lançaram os procedimentos resultantes na forma matricial; elas representaram uma influência preponderante no desenvolvimento do MEF nos anos subsequentes. Assim, as equações de rigidez passaram a ser escritas em notação matricial e resolvidas em computadores digitais. A publicação clássica de Turner et alii é de 1956. Com estas e com outras publicações um

desenvolvimento explosivo do MEF aconteceu.

Mas já em 1941, o matemático Courant sugeria a interpolação polinomial sobre uma subregião triangular como uma forma de obter soluções numéricas aproximadas. Ele considerou esta aproximação como uma solução de Rayleigh-Ritz de um problema variacional. Este é o MEF como se conhece hoje em dia. O trabalho de Courant foi no entanto esquecido até que engenheiros, independentemente, o desenvolveram.

O nome Elementos Finitos, que identifica o uso preciso da metodologia geral aplicável a sistemas discretos, foi dado em 1960 por Clough.

É de 1950 o trabalho de Courant, McHenry & Hrenikoff, particularmente significativa por causa da sua ligação com problemas governados por equações aplicáveis a outras situações que não a mecânica estrutural.

Durante ainda a década de 1950, pesquisadores, motivados por uma formulação específica de elementos para o estado plano de tensões, estabeleceram elementos para sólidos, placas sob flexão, cascas finas e outras formas estruturais.

Tendo sido estabelecidos estudos para casos lineares, estáticos e análise elástica, a atenção voltou-se para fenômenos especiais, tais como: resposta dinâmica, estabilidade e materiais e geometria não lineares. Isto foi necessário não somente para estender a formulação dos elementos, mas também para generalizar a análise estrutural.

Este período foi seguido por um intenso desenvolvimento de programas computacionais para colocar as potencialidades do MEF ao alcance dos usuários.

Em 1963 o método foi reconhecido como rigorosamente correto e tornou-se uma respeitável área de estudos acadêmicos. Até 1967, engenheiros e matemáticos trabalharam com elementos finitos, aparentemente, com desconhecimento uns dos outros. Hoje as duas áreas estão cientes uma da outra embora os matemáticos raramente se interessam pelos problemas da engenharia. Em contrapartida, os engenheiros raramente estão habilitados para entender a matemática.

Dez artigos foram publicados em 1961 sobre elementos finitos: 134 em 1966 e 844 em 1971. Em 1976, como apenas duas décadas de aplicações do MEF na engenharia, o número de publicações na área já excedia a 7000.

Hoje muitos pesquisadores continuam a se ocupar com o desenvolvimento de novos elementos e de melhores formulações e algoritmos para fenômenos especiais, e na elaboração de novos programas que facilitem o trabalho dos usuários.

Os interesses de estudos na área continuam com a análise de fenômenos não apenas estruturais. Por exemplo: análise termoestrutural, onde o cálculo de tensões térmicas é integrado com o cálculo do transiente de temperatura; a interação fluido-estrutura, na análise de hidroelasticidade e aeroelasticidade, e problemas multicampo em geral, tais como acústica da aeroelasticidade.

Mais recentemente, houve um enorme avanço na simplificação do procedimento das análises mais simples (elasticidade isotrópica linear), através da geração automática de malha e da adaptação automática da malha para a redução de erro. Desta maneira, finalmente, a ferramenta de elementos finitos está mais próxima do engenheiro comum. Como exemplo desta popularização, basta citar que a grande tendência de hoje é a integração da análise de tensões, assim como da análise de movimento, em programas de CAD. Nas palavras de R. McNeal, a análise integrada aos programas de CAD estão transformando o método dos elementos finitos em uma ferramenta onipresente, e seu uso será cada vez mais similar ao de um motor de um automóvel: todos poderão usá-lo apenas com um entendimento básico de seu funcionamento. Poucos dos usuários realmente precisarão entender o método, para extrair dele um melhor desempenho e confiabilidade.

Uma bibliografia básica do método dos elementos finitos hoje inclui:

- Dym, C. L. e I. H. Shames: Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, McGraw-Hill, 1996.
- Bathe, K. J.: Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- Cook, R. D.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, J. Wiley & Sons, New York, 1974, 1981, 1989.

- Cook, R. D.: Finite Element Modeling for Stress Analysis, J. Wiley, New York, 1995.
- Crisfield, M. A.: Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis, Vol. 1: Linear Analysis, Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.
- Hughes, T. J. R.: Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- Reddy, J. N.: An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill Book Co., 1984, 1993.
- Reddy, J. N.: Energy and Variational Methods in Applied Mechanics With an Introduction to the Finite Element Method, J. Wiley, New York, 1984.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.: Finite Element Method- Basic Formulation and Linear Problems, Vol.1, McGraw-Hill Co., New York, 1989.
- Roarke, W.D.: Formulas for Stress & Strain, McGraw-Hill, 1978.

## 1.2. Organização do texto

Este texto destina-se primordialmente a introdução do método dos elementos finitos a engenheiros formados ou no final do curso. Os conceitos de Mecânica dos Sólidos são apresentados de forma bastante resumida, e os conceitos matemáticos mínimos são utilizados; muitos necessários para o verdadeiro entendimento do método são referenciados para textos mais avançados.

O primeiro capítulo introduz uma breve revisão das equações da elasticidade linear isotrópica. O segundo trata da teoria de barras e sua aproximação pelo método dos elementos finitos. O terceiro capítulo deduz os elementos de viga mais tradicional. O quarto capítulo trata da elasticidade plana. Os capítulos posteriores, atualmente em revisão, mostram os elementos de placas, cascas axissimétricas, e fazem uma breve introdução a análise dinâmica e de condução de calor.



## 2. EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE LINEAR

A elasticidade linear infinitesimal trata do estudo das deformações e da distribuição dos esforços internos de um sólido sujeito a cargas externas. As limitações da teoria restringem a aplicação desta teoria apenas para deformações elásticas e de magnitude muito pequena.

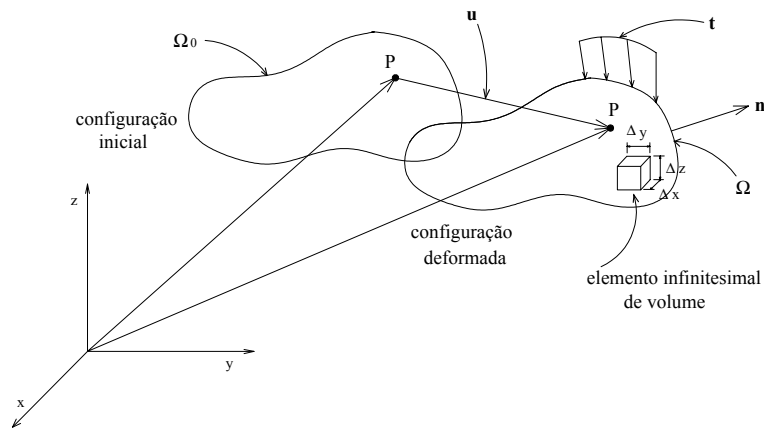


Figura 2.1: Descrição da deformação de um corpo

### 2.1. Deslocamentos

Considera-se um corpo deformável (ou estrutura)  $\Omega_0$  mostrada na figura 2.1 que se deforma sob a ação de um sistema de forças atingindo a configuração deformada  $\Omega_f$ . O vetor  $\mathbf{u}$  denota o deslocamento de um ponto genérico  $P$  de sua posição na configuração inicial para a nova posição na configuração deformada. Este vetor deslocamento é tratado como uma função contínua da posição inicial, isto é, para cada ponto  $\mathbf{x}$  da peça existe um vetor  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Esta descrição é possível devido a hipótese de um meio contínuo, que desconsidera a microestrutura do material.

## 2.2. Deformações

A partir dos deslocamentos, pode-se calcular as deformações em qualquer ponto da estrutura. As equações deformações-deslocamentos para elasticidade infinitesimal linear tridimensional são:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  são as componentes do vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Estas equações representam adequadamente as deformações somente se forem bem pequenas. Por exemplo, uma rotação de corpo rígido de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$  é escrita como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta - x \\ x \sin \theta + y \cos \theta - y \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

tem as deformações infinitesimais dadas por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \cos \theta - 1 \\
 \varepsilon_{yy} &= \cos \theta - 1 \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que não é zero, apesar do corpo não estar se deformando, apenas girando. Mas  $\cos \theta - 1$  é muito próximo de zero para valores na ordem de décimos de grau, que pode ser tomado como o limite da validade da teoria infinitesimal. Se as deformações ultrapassarem a ordem de décimo-milésimo, recomenda-se utilizar a elasticidade finita, que utiliza a definição de deformações de Green.

As equações 2.1 podem ser colocadas na forma matricial  $\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$ ,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

onde se faz uso de uma representação vetorial para a deformação, somente com seis componentes. Esta notação, apesar de imprecisa, é mais compacta.

### 2.3. Tensões

O tensor de tensão de Cauchy expressa os esforços internos em uma partícula de um sólido, para todas as direções. A força interna distribuída de um ponto sobre seu vizinho é determinada pela direção do vizinho  $\mathbf{n}$  através da fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ t_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ t_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z, \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{t}$  é a força distribuída em  $N/m^2$ , e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão. Na superfície do corpo, tomando  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  como as componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$  à superfície,  $t_x$ ,  $t_y$  e  $t_z$  tem que equilibrar as forças aplicadas. A tensão em um ponto tem que ser representada por um tensor para poder expressar o vetor força em qualquer direção. Para o estudo do estado de tensões no interior do corpo deformado, isola-se um elemento infinitesimal de um volume de dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

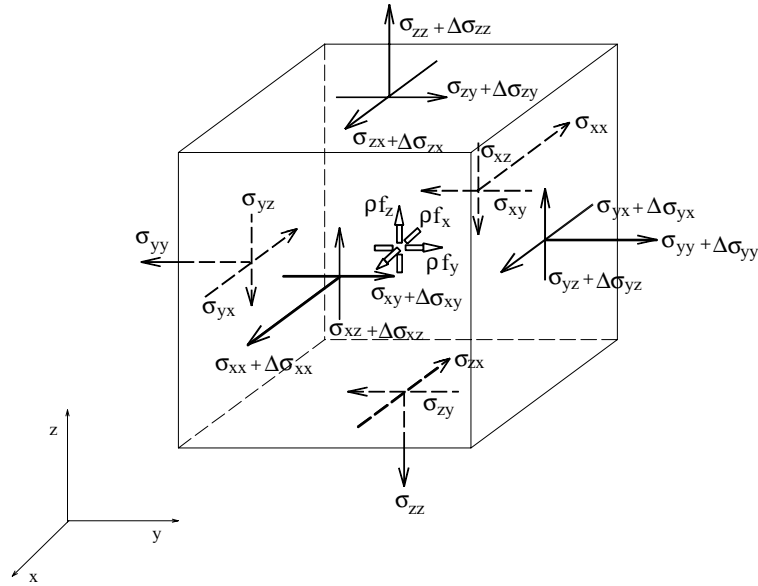


Figura 2.2: Estado de tensões em um elemento infinitesimal.

As tensões atuantes sobre este elemento de volume são mostradas na figura 2.2. Observe que  $\Delta\sigma_{ij}$  representam os incrementos de tensão, devido à presença das forças de corpo  $\rho f_i$ , por exemplo. Substituindo os incrementos de tensão

$$\Delta\sigma_{ij} \text{ por } \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k} dx_k$$

e escrevendo as equações de equilíbrio nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  obtém-se as equações de equilíbrio para tensões, também chamadas de equações diferenciais de equilíbrio, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

e

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz}, \quad \sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \quad (2.9)$$

onde 2.9 expressa a condição de simetria das componentes do tensor tensão.

## 2.4. Equações Constitutivas

As equações constitutivas (ou equações tensões-deformações) para sólidos elásticos lineares homogêneos são dadas pela Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2G) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2G \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2G \varepsilon_{zx}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a constante de Lamé pode ser expressa como

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

e o módulo de elasticidade transversal por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para materiais cujas propriedades variam com as direções, como os materiais reforçados por fibras ou laminados a frio, deve-se usar relações constitutivas apropriadas, com propriedades elásticas dependentes da direção.

O conjunto de equações 2.1, 2.8, 2.9, 2.10 e 2.5 representam as equações fundamentais para a elasticidade tridimensional. Detalhes do processo de obtenção destas equações podem ser observados livros básicos de Mecânica dos Sólidos, como Popov, E., "Introdução à Mecânica dos Sólidos", Editora Edgard Blücher, 1978, ou em qualquer bom livro de elasticidade. Uma boa recomendação é Boresi, A.P. & P.P. Lynn. "Elasticity in Engineering Mechanics", Prentice-Hall, 1974.

## 3. ELEMENTO DE BARRA

### 3.1. Teoria de Barras

Há duas possibilidades de se reduzir um problema de Mecânica dos Sólidos para uma dimensão. Pode-se utilizar uma hipótese de que a tensão seja unidimensional (exista apenas a componente  $\sigma_{xx}$ ) ou que a deformação seja unidimensional. A hipótese de tensão unidimensional é utilizada para barras.

Seja um corpo de seção transversal constante orientado com o eixo  $x$ . Supomos agora que todos os carregamentos  $\mathbf{t}$  estão aplicado na direção  $x$  e uniformemente na seção transversal.

Temos então que as condições de força na superfície podem ser simplificadas neste caso que as cargas são aplicadas apenas em planos normais ao eixo 1, o que diz que

$$\sigma_{xx} = t_x \text{ em } \Gamma$$

e que as trações se anulam nas outras faces

$$t_y = t_z = 0$$

Podemos assumir que as condições de contorno no restante da peça é de tensões nulas em todas as fronteiras, o que nos leva a assumir que todas as outras tensões se anulam. A única equação de equilíbrio que não é identicamente nula é

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + b_x = 0 .$$

Se não houverem forças de corpo,

$$0 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

a tensão vai ser constante, e seu valor depende apenas das cargas aplicadas no contorno. Este é o caso clássico da teoria de barras.

Para materiais isotrópicos, escrevemos

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = E\varepsilon_{xx}$$

e a deformações como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \nu \varepsilon_{xx} \end{aligned}$$

Esta teoria aplica-se a poucas estruturas reais, basicamente somente para cabos e treliças, e ainda assim longe das extremidades e fixações.

### 3.2. Formulação Direta do Elemento de Barra: Matriz de Rigidez e Vetor de Carga

Considere uma barra de comprimento  $l$  e área de seção transversal  $A$ , engastada e submetida à ação de uma carga axial  $P$ , conforme mostra a Figura 3.1.

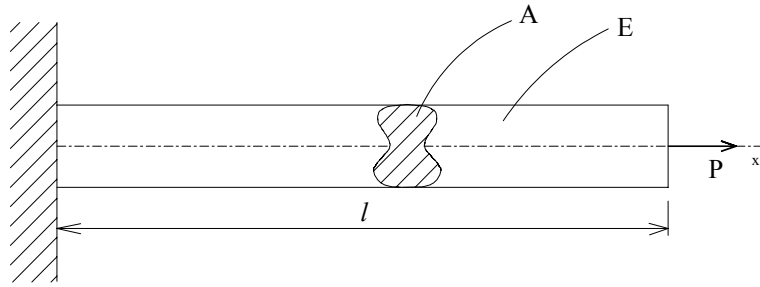


Figura 3.1: Barra sob tração.

A barra é constituída de um material isotrópico, homogêneo e linear. Deseja-se estudar esta estrutura simples usando um processo de discretização, que pode ser o Método dos Elementos Finitos. Para tal, a barra da figura 3.1 é modelada do modo apresentado na Figura 3.2, onde são usados pedaços de barra, ou seja, elementos de barra.

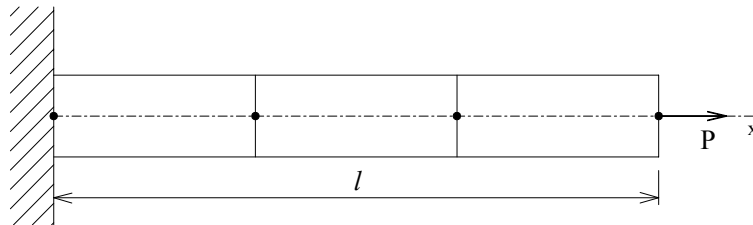


Figura 3.2: Barra sob tração discretizada

O elemento de barra usado tem dois nós (1 e 2), área de seção transversal  $A$ , comprimento  $L$  e dois graus de liberdade  $u_{x1}$  e  $u_{x2}$  (aos quais poderiam ser associadas forças nodais  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente). Este elemento é mostrado na Figura 3.3 de duas maneiras. A primeira apresenta o elemento do modo como foi na discretização da barra sob tração, e a segunda apresenta a maneira mais comum de se representar o elemento de barra de dois nós, uma vez que o comportamento da barra é representado pelo comportamento de sua linha centroidal.

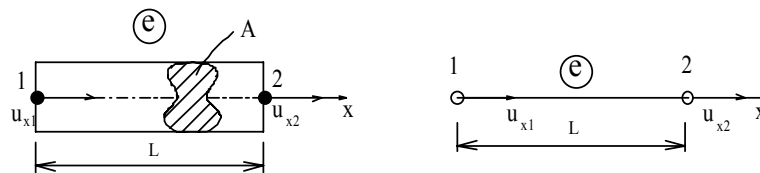


Figura 3.3: Elemento de barra.

Este elemento (o mais simples dos elementos finitos) será usado para ilustrar diversos pontos fundamentais da teoria de elementos finitos. Como ainda não foram introduzidos os métodos energéticos, os conceitos de equilíbrio serão para a obtenção das equações referentes a este elemento; esta formulação é chamada de formulação direta.

Considere a Figura 3.4, com as forças nodais do elemento de barra. A equação de equilíbrio de forças

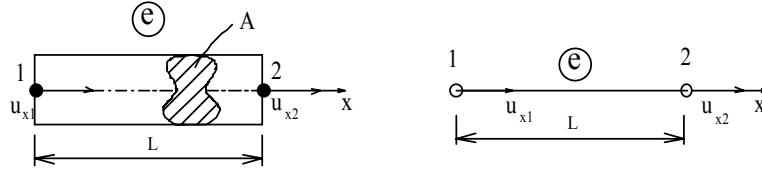


Figura 3.4: Forças nodais do elemento de barra.

na direção  $x$  fornece

$$P_2 = -P_1 . \quad (3.1)$$

O estudo de barras sob carregamento axial realizado em Resistência dos Materiais mostra que a equação constitutiva (equação tensão - deformação), para este caso, é a lei de Hooke para tensões na sua forma mais simples (unidimensional), isto é,

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} , \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{xx}$  é a tensão normal,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\varepsilon_{xx}$  é a deformação axial, que é dada em função do deslocamento axial  $u_x(x)$  ao longo do elemento por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x(x)}{dx} . \quad (3.3)$$

A equação deformação - deslocamento 3.3 pode ser reescrita considerando que a deformação  $\varepsilon_{xx}$  é constante ao longo do elemento, como

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} , \quad (3.4)$$

onde  $\Delta L$  é a variação do comprimento do elemento, devido à ação das forças nodais. Utilizando a definição dos deslocamentos nodais (graus de liberdade)  $u_{x1}$  e  $u_{x2}$ , pode-se escrever a equação deformação-deslocamento em termos das variáveis nodais, isto é,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{L} . \quad (3.5)$$

Note que, para um elemento de área de seção transversal constante esta expressão é exata, o que implica que a tensão também é constante ao longo do elemento.

Considerando o equilíbrio nos nós 1 e 2, com auxílio da Figura 3.5, obtém-se, respectivamente,

$$P_1 = -E A \varepsilon_{xx} \quad (3.6)$$

$$P_2 = E A \varepsilon_{xx} , \quad (3.7)$$

Substituindo-se a relação 3.2 nas expressões 3.6 e 3.7 tem-se

$$P_1 = -E A \varepsilon_{xx} \quad (3.8)$$

$$P_2 = E A \varepsilon_{xx} , \quad (3.9)$$

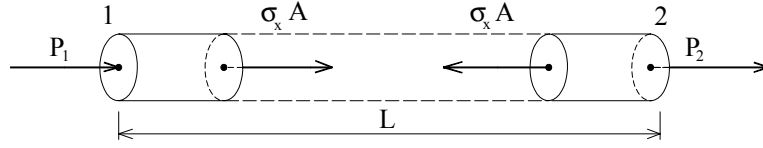


Figura 3.5: Equilíbrio nos nós.

e a subsequente substituição da relação 3.5 nas expressões obtidas acima leva às equações

$$P_1 = -\frac{EA}{L} (u_{x2} - u_{x1}) \quad (3.10)$$

$$P_2 = \frac{EA}{L} (u_{x2} - u_{x1}) \quad (3.11)$$

que podem ser reescritas na forma matricial como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.12)$$

Esta é a equação do elemento de barra, na forma da equação fundamental de elementos finitos, ou seja, a equação carregamentos-deflexões (ou carregamentos-deslocamentos).

A matriz obtida

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

é denominada de matriz de rigidez  $[K^e]$  do elemento de barra. O vetor

$$\{P^e\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

é denominado de vetor carga  $\{P^e\}$  do elemento de barra. A equação 3.12 pode ser escrita como

$$[K^e] u^e = \{P^e\} \quad (3.15)$$

onde  $\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix}$  é o vetor dos deslocamentos nodais.

### 3.3. Superposição dos Elementos de Barra: Matriz de Rigidez Global e Vetor de Carga Global

Após obtidas as equações para o elemento de barra, retoma-se o problema da estrutura global, isto é, a barra tracionada, discretizada, da Figura 3.2. Para representar esta estrutura modelada por elementos de barra, necessita-se superpor os três elementos usados na discretização (considerar os três elementos em conjunto). O processo de superposição de elementos finitos é direto e o meio de visualizá-lo é considerar os três elementos de barra separadamente, e então uní-los.

As equações equivalentes à equação 3.12 para cada um dos elementos de barra são

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x3} \\ u_{x4} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{Bmatrix} P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x5} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$



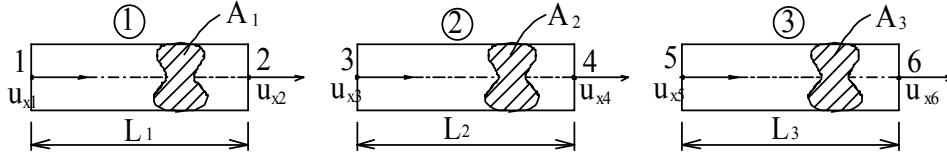


Figura 3.6: Os três elementos de barra usados na discretização da barra sob tração.

Para superpor estas equações, cria-se uma matriz grande o suficiente para que cada elemento possa ser inserido nela. Como após a superposição  $u_{x3} = u_{x2}$  e  $u_{x4} = u_{x5}$ , existirão apenas quatro deslocamentos nodais independentes. Então escreve-se

$$\{ \}_{4 \times 1} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]_{4 \times 4} \left\{ \begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{array} \right\}_{4 \times 1} \quad (3.19)$$

que é a forma lógica para a matriz que representa o sistema superposto. Usando esta forma tem-se, para o primeiro elemento

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{array} \right\}, \quad (3.20)$$

para o segundo elemento

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ P_3 \\ P_4 \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

e para o terceiro elemento

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \right\} = \frac{E_3 A_3}{L_3} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

Adicionando as equações 3.20, 3.21 e 3.22, obtém-se a equação representando os três elementos superpostos, ou seja, a equação de elementos finitos para a barra sob tração modelada por três elementos de barra, isto é,

$$\{P^G\} = [K^G] \{u^G\}, \quad (3.23)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 + P_3 \\ P_4 + P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

A matriz obtida

$$[K^G] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

é denominada de matriz de rigidez global  $[K^G]$  de uma estrutura (ou de uma combinação de elementos). O vetor

$$\{P^G\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 + P_3 \\ P_4 + P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

é denominado de vetor carga da estrutura  $\{P^G\}$ . O vetor  $\{u^G\}$  é o vetor global de deslocamentos nodais, ou vetor solução do problema.

Para o caso particular em que a barra sob tração foi discretizada por elementos iguais, ou seja, com a mesma área de seção transversal, o mesmo comprimento e o mesmo material, a matriz de rigidez global pode ser escrita como

$$[K^G] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde pode-se notar, similarmente ao observado na equação 3.25, que a matriz obtida é simétrica e apresenta valores não nulos apenas na diagonal principal e nas diagonais adjacentes a esta, caracterizando o que se chama de matriz banda. Estas duas propriedades facilitam a resolução do sistema de equações simultâneas 3.24.

Na seção 2.1 foi mencionado que os deslocamentos nodais poderiam estar associados às forças nodais  $P_i$ ,  $i = 1, 4$ . O caráter destas forças pode ser relacionado a forças distribuídas ao longo do elemento, como as forças concentradas aplicada ao modelo global. Esta diferenciação ficará clara na apresentação da formulação energética do elemento de barra. Ao analisar a estrutura discretizada nas seções 2.1 e 2.2 e equação respectiva 3.24, vê-se que na ausência de forças distribuídas ao longo dos elementos e interpretando as forças nodais como carregamentos concentrados aplicados ao modelo global, as forças nodais  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  são nulas. A única força não nula é  $P_6$ , cujo valor é tomado como o da carga aplicada  $P$ . Assim, para o caso em que a barra é discretizada usando-se elementos iguais, a equação de elementos finitos 3.24 é escrita como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

O sistema de equações 3.28 ainda não pode ser resolvido, pois a matriz de rigidez global é singular (tente obter uma solução para o sistema acima. Não é possível.). Esta propriedade é comum a todas as matrizes

globais obtidas pelo processo de superposição de matrizes de rigidez de elementos finitos. Fisicamente, a razão para tal é o fato de não se ter imposto ao modelo a sua vinculação, ou seja, é como se a barra sob tração estivesse livre no espaço. Portanto, é necessário impor condições de contorno sobre o sistema de equações 3.28 para possibilitar a solução do mesmo.

### 3.4. Condições de Contorno

Para a barra sob tração dada na Figura 3.1, foi obtido o sistema equações simultâneas 3.28, que é a equação de elementos finitos para a estrutura discretizada da Figura 3.2, usando-se elementos de características iguais. Escrevendo cada equação de 3.28 separadamente, tem-se:

$$\begin{cases} u_{x1} - u_{x2} = 0 \\ -u_{x1} + 2u_{x2} - u_{x4} = 0 \\ -u_{x2} + 2u_{x4} - u_{x6} = 0 \\ -u_{x4} + u_{x6} = \frac{PL}{EA} \end{cases} \quad (3.29)$$

Como a barra sob tração está engastada no seu extremo esquerdo, o deslocamento do nó 1 deve ser zero,

$$u_{x1} = 0$$

e o sistema acima é reescrito

$$\begin{cases} u_{x1} = 0 \\ -0 + 2u_{x2} - u_{x4} = 0 \\ -u_{x2} + 2u_{x4} - u_{x6} = 0 \\ -u_{x4} + u_{x6} = \frac{PL}{EA} \end{cases} \quad (3.30)$$

Notar que se  $u_{x1} \neq 0$ , a segunda equação teria um valor diferente de zero no seu lado direito. Por exemplo, se o deslocamento do nó 1 fosse prescrito com  $\bar{u}_1$ , então o sistema de equações seria escrito como

$$\begin{cases} u_{x1} = \bar{u}_1 \\ -0 + 2u_{x2} - u_{x4} = \bar{u}_1 \\ -u_{x2} + 2u_{x4} - u_{x6} = 0 \\ -u_{x4} + u_{x6} = \frac{PL}{EA} \end{cases} \quad (3.31)$$

Retornando ao sistema 3.30, pode-se escrevê-lo na seguinte forma matricial

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Nota-se novamente que se  $u_{x1} \neq 0$ , a forma matricial seria

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Existem vários outros métodos de imposição das condições de contorno. Dentre estes vale mencionar o método da penalização. Por exemplo, no caso em que  $u_{x1} = \bar{u}_1$  e a equação era

$$u_{x1} - u_{x2} = 0,$$

adiciona-se  $Ku_{x1}$  no lado esquerdo da equação e  $K\bar{u}_1$  no lado direito, ou seja,

$$(1 + K) u_{x1} - u_{x2} = 0 + K \bar{u}_1 .$$

Se  $K$  é um número grande comparado com os coeficientes de  $u_{x1}$  e  $u_{x2}$  (neste caso 1), então a equação acima é aproximadamente a condição de contorno, pois

$$K u_{x1} \approx K \bar{u}_1$$

ou

$$u_{x1} \approx \bar{u}_1 .$$

A discussão sobre os métodos de imposição de condições de contorno não será estendida, deixando-se ao leitor a sugestão de consulta à vasta bibliografia existente sobre elementos finitos, se o interesse no assunto existir.

### 3.5. Resolução do Problema

A equação 3.32 representa a equação de elementos finitos para a barra sob tração discretizada, usando-se elementos iguais e com as condições de contorno impostas ao sistema de equações. Como  $u_{x1}$  é conhecido, ou seja,  $u_{x1} = 0$ , a primeira equação pode ser descartada e o sistema de equações 3.32 pode ser escrito como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Escrevendo cada equação separadamente resulta em

$$\begin{cases} u_{x4} = 2 u_{x2} \\ -u_{x2} + 2 u_{x4} - u_{x6} = 0 & \therefore u_{x6} = 3 u_{x2} \\ -u_{x4} + u_{x6} = \frac{PL}{EA} & \therefore u_{x2} = \frac{PL}{EA} \end{cases} \quad (3.35)$$

e então a solução do sistema de equações 3.32 é

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

A expressão 3.36 fornece o vetor global dos deslocamentos nodais para uma barra de comprimento  $l$  e área de secção transversal  $A$ , constituída de um material isotrópico, homogêneo e linear (módulo de elasticidade  $E$ ), submetida à tração por uma força  $P$ . Esta barra foi discretizada usando-se três elementos de barra iguais, de comprimento  $L$  e área da secção transversal  $A$ . Obtida a solução para o problema proposto na figura 3.1, deve-se verificar a precisão deste resultado.

EXEMPLO (Fig. 3.7):

A solução analítica deste problema pode ser obtida da Resistência dos Materiais e é dada pela expressão do deslocamento axial ao longo de uma barra submetida a carregamento axial (ver Popov, E.; "Introdução à Mecânica dos Sólidos". Edgard Blücher, 1978, pág. 116) :

$$u_{x(x)} = \int_0^x \frac{P_x(x)}{EA} dx + C_1 \quad (3.37)$$

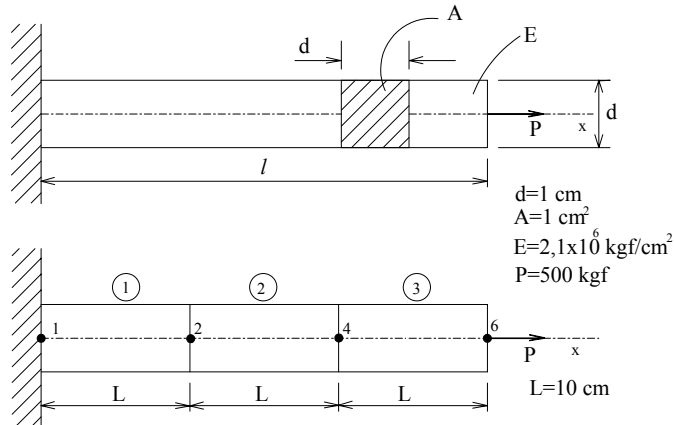


Figura 3.7: Barra sob tração

onde  $P_x(x)$  é o esforço axial ao longo da barra, sendo constante para este caso e igual a  $P$ .  $C_1$  é a condição de contorno de deslocamento no início da barra, sendo igual a zero para este caso. Então, o deslocamento do extremo livre da barra é dado por:

$$u_x = \frac{PL}{EA}. \quad (3.38)$$

Utilizando os dados acima, obtém-se

$$u_x(x=l) = 7,143 \times 10^{-3} \text{ cm}. \quad (3.39)$$

A solução deste problema utilizando o Método dos Elementos Finitos é dada pela equação 3.36. Fazendo uso dos dados fornecidos, incluindo a consideração de usar três elementos iguais de 10 cm de comprimento cada um, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2,381 \times 10^{-3} \\ 4,762 \times 10^{-3} \\ 7,143 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ cm}. \quad (3.40)$$

Comparando 3.39 e 3.40 pode-se verificar a excelente precisão da solução fornecida pela aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema da barra sob tração. Os valores  $u_{x2}$  e  $u_{x4}$  também podem ser comparados com soluções analíticas obtidas de 3.37, apenas trocando-se o limite de integração.

### 3.6. Métodos de Solução

Os métodos de solução das equações que representam a estrutura estudada são os mais variados. Entre os mais usados destacam-se o método de eliminação de Gauss e suas variantes, o método Skyline e o método de solução frontal. Nesta secção, será descrito o método de eliminação de Gauss.

A equação de elementos finitos representando uma determinada estrutura tem a forma genérica

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (3.41)$$

ou

$$K_{ij} u_j = P_i, \quad (3.42)$$

ou

$$[K^G] \{u^G\} = \{P^G\} , \quad (3.43)$$

que é um sistema de equações lineares, que pode ser escrito como

$$a_{ij}^{(1)} x_j = b_i \quad i = 1, N . \quad (3.44)$$

Na forma expandida, o sistema de equações é

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2N}^{(1)} x_N &= b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \dots + a_{3N}^{(1)} x_N &= b_3^{(1)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{N1}^{(1)} x_1 + a_{N2}^{(1)} x_2 + a_{N3}^{(1)} x_3 + \dots + a_{NN}^{(1)} x_N &= b_N^{(1)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

e na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2N}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \dots & a_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_N^{(1)} \end{bmatrix} . \quad (3.46)$$

Um método de eliminação de Gauss padrão é dividido em duas partes, a eliminação progressiva e a retro-substituição. A eliminação progressiva será descrita em detalhe para os dois primeiros passos e será generalizada para os outros usando notação indicial.

O primeiro passo é eliminar os termos  $a_{21} x_1$ ,  $a_{31} x_1$ , ...,  $a_{N1} x_1$  do sistema de equações lineares 3.45, como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} \text{definindo o pivô: } p_n &= \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ \left( a_{21}^{(1)} - p_2 a_{11}^{(1)} \right) x_1 + \left( a_{22}^{(1)} - p_2 a_{12}^{(1)} \right) x_2 + \dots + \left( a_{2N}^{(1)} - p_2 a_{1N}^{(1)} \right) x_N &= b_2^{(1)} - p_2 b_1^{(1)} \\ \left( a_{31}^{(1)} - p_3 a_{11}^{(1)} \right) x_1 + \left( a_{32}^{(1)} - p_3 a_{12}^{(1)} \right) x_2 + \dots + \left( a_{3N}^{(1)} - p_3 a_{1N}^{(1)} \right) x_N &= b_3^{(1)} - p_3 b_1^{(1)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \left( a_{N1}^{(1)} - p_N a_{11}^{(1)} \right) x_1 + \left( a_{N2}^{(1)} - p_N a_{12}^{(1)} \right) x_2 + \dots + \left( a_{NN}^{(1)} - p_N a_{1N}^{(1)} \right) x_N &= b_N^{(1)} - p_N b_1^{(1)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Denotando os coeficientes das novas equações por  $a_{ij}^{(2)}$  onde

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - p_2 b_1^{(1)} ; b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - p_3 b_1^{(1)} ; \dots \quad (3.48)$$

tem-se :

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2N}^{(2)} x_N &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3N}^{(2)} x_N &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{N2}^{(2)} x_2 + a_{N3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{NN}^{(2)} x_N &= b_N^{(2)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

O segundo passo é eliminar os termos  $a_{32}^{(2)} x_2$ ,  $a_{42}^{(2)} x_2$ , ...,  $a_{N2}^{(2)} x_2$ . Usando a segunda equação,

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2N}^{(2)} x_N &= b_2^{(2)} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, ao se terminar (N-1) passos do processo da eliminação progressiva, tem-se

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2N}^{(2)} x_N &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3N}^{(2)} x_N &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{NN}^{(N)} x_N &= b_N^{(N)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cada um dos passos acima apresenta um sistema de equações com a mesma solução, a qual pode ser obtida diretamente a partir da última equação, caracterizando o processo de retro-substituição, que começa com

$$x_N = \frac{b_N^{(N)}}{a_{NN}^{(N)}} \quad (3.52)$$

e a solução para  $x_{N-1}$  pode ser obtida da equação (N-1), ou seja,

$$x_{N-1} = \frac{b_{N-1}^{(N-1)}}{a_{N-1,N-1}^{(N-1)}} - \frac{a_{N-1,N}^{(N-1)}}{a_{N-1,N-1}^{(N-1)}} x_N \quad (3.53)$$

O valor de qualquer  $x_k$  pode ser obtido através da expressão genérica

$$x_k = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} - \sum_{j=k+1}^N \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} x_j . \quad (3.54)$$

O método apresentado acima é conhecido por Método de Eliminação de Gauss, o qual, com certas modificações, leva aos métodos de Crout, Jordan, Aitken e Gauss-Doolittle.

### 3.7. Transformação de Coordenadas

Nas secções 2.1 a 2.4 foi usado o elemento de barra referenciado a um sistema de coordenadas  $x$  coincidente com seu eixo centroidal. Isto não causou problemas na resolução da barra sob tração, mas seria desejável que as matrizes de rigidez e os vetores de carga pudessem ser escritos referenciados a um sistema de coordenadas global, não coincidente com o eixo centroidal do elemento de barra. A razão para tal seria a possibilidade da solução de problemas de treliça, a mais importante aplicação dos elementos de barra. Portanto, considere o elemento de barra inclinado em relação ao eixo  $x$ , (ver figura 3.8).

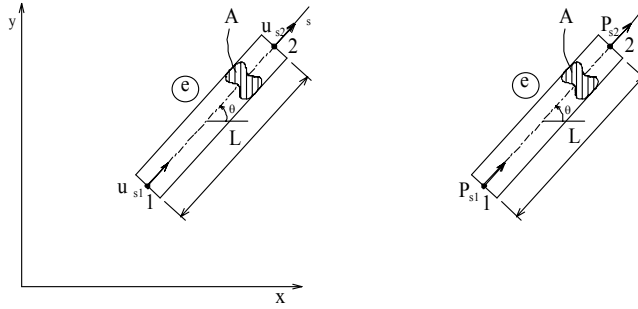


Figura 3.8: Elemento de barra inclinado em relação ao sistema x-y.

Observe que a coordenada ao longo do eixo centroidal do elemento de barra é  $s$  e que o deslocamento ao longo do elemento de barra é dado por  $u_s$ , sendo  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$  os deslocamentos nodais.  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $s$  e o eixo  $x$ . A relação entre o deslocamento  $u_s$  ao longo do elemento e suas componentes  $u_x$  e  $u_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, é

$$u_s = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta. \quad (3.55)$$

Uma força axial  $F$  pode ser decomposta em componentes nas direções  $x$  e  $y$  como

$$P_x = P \cos \theta \quad (3.56)$$

$$P_y = P \sin \theta \quad (3.57)$$

Pode-se então escrever as relações entre os deslocamentos nodais e suas componentes nas direções  $x$  e  $y$  como

$$\begin{Bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$



e entre as forças nodais e suas componentes nas direções  $x$  e  $y$  como

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.59)$$

Introduzindo as relações 3.58 e 3.59 na equação correspondente à equação do elemento de barra 3.8, agora reescrita em termos de  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$ , ou seja,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

Após as multiplicações obtém-se

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta^2 & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta^2 \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta^2 & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

A equação acima é a equação para o elemento de barra em relação a um sistema de coordenadas  $x$ - $y$  que não passa pelo seu eixo centroidal, o qual está inclinado em relação ao eixo  $x$  de um ângulo  $\theta$ . São estas as matrizes de rigidez e os vetores de carga usados quando da resolução de problemas de treliças usando elementos de barra.

**EXEMPLO:**

Determinar os deslocamentos nodais usando o MEF.

Dados:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = 20 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A = 1 \text{ cm}^2$$

$$L_1 = L_2 = L = 100 \text{ cm}$$

$$P = 70 \text{ kgf}.$$

Solução:

A matriz de rigidez de um elemento de barra no plano, de forma genérica, tem a seguinte forma:

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta^2 & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta^2 \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta^2 & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta^2 \end{bmatrix}.$$

Pode-se tabular as propriedades de cada elemento como

	ELEMENTO		
	1	2	3
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$
$L(\text{cm})$	100	100	$100\sqrt{2}$
$A(\text{cm}^2)$	1	1	1
$E(\text{kgf/cm}^2)$	$20 \times 10^5$	$20 \times 10^5$	$20 \times 10^5$

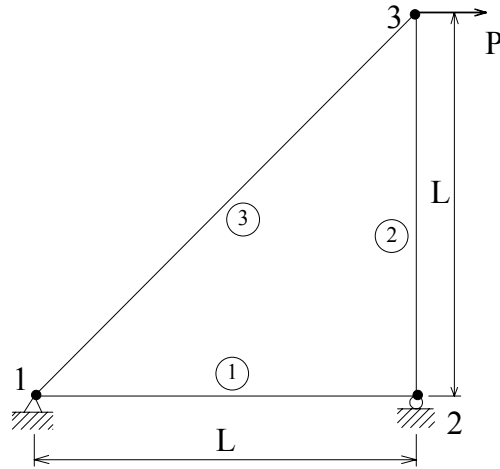


Figura 3.9: Treliza plana

sendo o vetor deslocamento  $\{u\}$  dado por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

A matriz de rigidez para cada elemento pode ser escrita como:

$$[K^1] = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1^{u_{x1}} & 0^{u_{y1}} & -1^{u_{x2}} & 0^{u_{y2}} \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{simétrica} & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{matrix} \quad (3.64)$$

$$[K^2] = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0^{u_{x2}} & 0^{u_{y2}} & 0^{u_{x3}} & 0^{u_{y3}} \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{matrix} \quad (3.65)$$

Como a estrutura possui 6 graus de liberdade, a matriz de rigidez global será de dimensão de 6x6. A superposição das matrizes dos elementos sobre a global, será feita com a soma dos coeficientes que afetam cada grau de liberdade do vetor deslocamento.

$$[K^G] = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} + \frac{1}{2L_3} & \frac{1}{2L_3} & -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{2L_3} & -\frac{1}{2L_3} \\ & \frac{1}{2L_3} & 0 & 0 & -\frac{1}{2L_3} & -\frac{1}{2L_3} \\ & & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ \text{simétrica} & & & & \frac{1}{2L_3} & \frac{1}{2L_3} \\ & & & & & \frac{1}{L} + \frac{1}{2L_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{matrix} \quad (3.66)$$

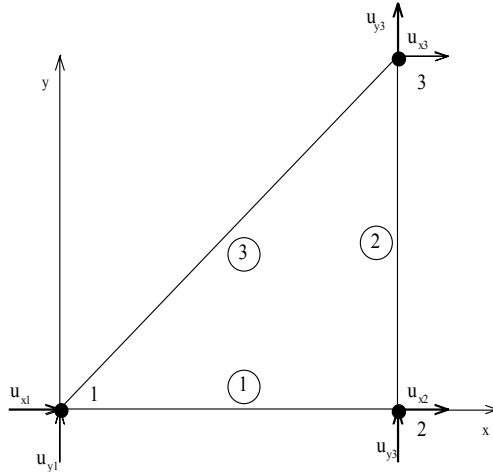


Figura 3.10: Graus de liberdade da estrutura.

As condições de contorno são especificadas de acordo com o tipo de vinculação do problema. O modelo apresentado na figura 2.10 ilustra todos os graus de liberdade possíveis, da estrutura, no plano.

A comparação entre os modelos das figuras 2.9 e 2.10 permite que se determine as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_{x1} &= 0 \\ u_{y1} &= 0 \\ u_{y2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

o vetor de cargas da estrutura é:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.68)$$

Com isto, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2L_3} & \frac{1}{2L_3} \\ & & & & & \frac{1}{L} + \frac{1}{2L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/E A \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Eliminando-se as linhas e colunas, 1, 2 e 4, tem-se que o sistema de equações acima fica reduzido a apenas:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2L_3} & \frac{1}{2L_3} \\ 0 & \frac{1}{2L_3} & \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{2L_3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P/E A \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.70)$$

A triangularização da matriz acima é obtida somando à terceira linha a segunda, com o sinal trocado. A primeira linha também é multiplicada por  $L$ , e a segunda multiplicada por  $2L_3$ . Com isto tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2PL_3/EA \\ -P/EA \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Da terceira equação deste sistema, tem-se:

$$u_{y3} = -\frac{PL}{EA} \quad (3.72)$$

da segunda equação:

$$u_{x3} + u_{y3} = \frac{2PL_3}{EA} \quad (3.73)$$

com a retrosubstituição tem-se:

$$u_{x3} = \frac{2PL_3}{EA} + \frac{PL}{EA} = \frac{P}{EA} (2L_3 + L). \quad (3.74)$$

Resumindo:

$$u_{x3} = \frac{PL}{EA} (2\sqrt{2} + 1) = 0,0134 \text{ cm} \quad (3.75)$$

$$u_{y3} = -\frac{PL}{EA} = -0,0035 \text{ cm} \quad (3.76)$$

### 3.8. Arquitetura Básica de um Programa de Elementos Finitos

A grande atração que o método dos elementos finitos exerce sobre os mais variados usuários impulsiona a uma procura crescente por programas com mais variadas aplicações. Mas, o que é um programa de elementos finitos? É um código computacional, projetado para ser usado na solução de certa classe de problemas, que pode ser ampla ou restrita, mas que contém uma certa estrutura mínima, inerente ao mais simples dos programas de elementos finitos. É dessa arquitetura básica, mínima, que trata esta secção.

Todo programa de elementos finitos deve ter pelo menos cinco etapas, quais sejam: A entrada de dados, a superposição das matrizes e vetores do elemento, a imposição das condições de contorno, a solução do sistema de equações e a saída dos resultados.

A fase da entrada de dados é uma das mais sofisticadas etapas de um programa de elementos finitos moderno. Basicamente, nesta fase são introduzidos no programa, o número de nós, o número de elementos, a conectividade dos elementos, as coordenadas dos nós, as constantes do material e as constantes geométricas do problema. Além disso, a leitura das condições de contorno pode ser feita nesta fase, como também as condições de carregamento podem ser aqui inseridas. O que torna esta fase sofisticada (se bem que facilmente utilizável pelo usuário) nos programas modernos, são os mecanismos de geração automática de malha, que produzem efeitos contundentes na qualidade dos resultados. Cite-se aqui, entre outros, os geradores de malha sensíveis à geometria a ser discretizada e os geradores de malha de refino, usando medidas de erro da solução do problema em um passo anterior.

A fase de superposição de matrizes e vetores de carga do elemento é direta, sem grandes segredos, a não ser quando a superposição deva ser feita tendo em vista um método de solução especial. Esta fase, evidentemente, contém as fases de geração das matrizes de rigidez do elemento e dos vetores de carga.

A fase de imposição das condições de contorno também é livre de complicações, podendo variar o modo como se fará esta alteração das equações globais da estrutura a ser estudada.

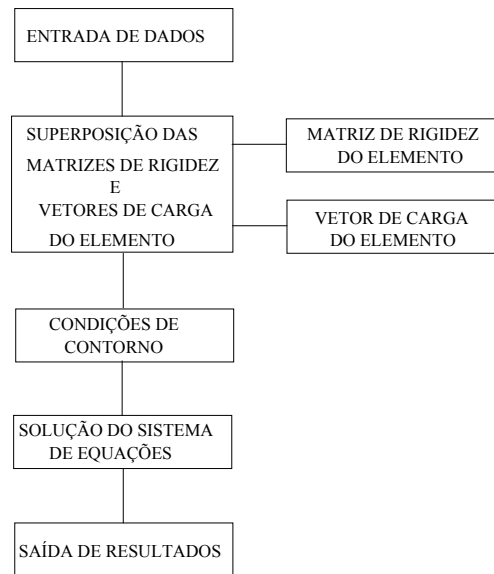


Figura 3.11: Arquitetura básica de um programa de elementos finitos.

Também a fase da solução do sistema de equações que representa a estrutura estudada é uma etapa direta, podendo variar os tipos de métodos de solução, que são muitos. Citam-se entre os mais usados, o método de eliminação de Gauss, o método Skyline e o método da solução frontal. Cada um destes métodos tem suas vantagens e desvantagens, cabendo ao usuário uma detalhada análise para a escolha do método mais apropriado, quando da montagem de um programa. Quando o usuário está utilizando um programa estabelecido, o conhecimento desta fase é advindo apenas de mera consciência profissional.

A fase de saída de resultados também é uma das mais sofisticadas etapas em modernos programas de elementos finitos. A saída de resultados pode ser feita apenas pela impressão de números, que devem ser interpretados pelo usuário. No entanto, qualquer programa moderno, que tenha ambições de se estabelecer no mercado, deve possuir saídas gráficas, que facilitem e acelerem o uso e interpretação dos resultados. Deve-se aqui citar o uso intensivo de programas de elementos finitos no campo de CAE/CAD/CAM, tornando-se a saída gráfica um imperativo.

Evidentemente, cada programa de elementos finitos possui sua estrutura própria que pode apresentar muito mais fases do que as aqui apresentadas, mas necessariamente ele deve conter as fases básicas aqui discutidas brevemente.

### 3.9. Formulação Energética do Elemento de Barra

#### 3.9.1. Métodos Energéticos

Os métodos energéticos são baseados na idéia de se encontrar estados consistentes de corpos ou estruturas associados com valores estacionários de uma quantidade escalar característica de corpos carregados. Em engenharia, esta quantidade é usualmente uma medida de energia ou trabalho. O processo de encontrar valores estacionários de energia requer o uso de uma disciplina matemática chamada Cálculo Variacional, que envolve o uso de princípios variacionais.

Neste curso introdutório, não será necessário discorrer sobre este assunto com profundidade, uma vez que os métodos energéticos serão introduzidos e utilizados com o uso de Cálculo Diferencial. Dentro do universo dos métodos energéticos existe uma gama variada de métodos e princípios variacionais, por exemplo, o princípio da energia potencial estacionária, o princípio da energia complementar, o princípio

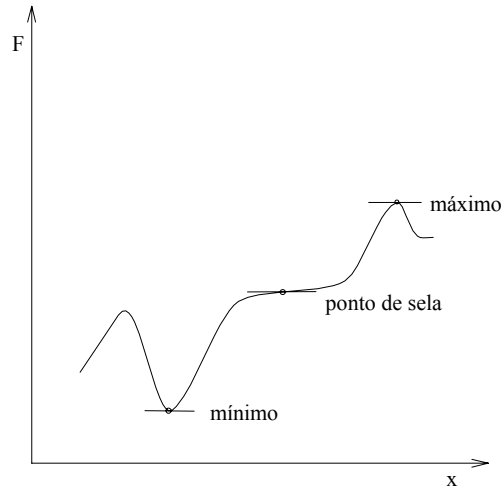


Figura 3.12: Pontos singulares de uma função  $F(x)$

misto de Reissner, os princípios híbridos, os quais são comumente usados em aplicações do método dos elementos finitos.

Em palavras simples, o termo estacionário pode significar um máximo, um mínimo ou um ponto de sela de uma função qualquer  $F(x)$ . Para encontrar o ponto ou valor estacionário, a derivada de  $F$  em relação a  $x$  é igualada a zero e equacionada isto é,

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad (3.77)$$

### 3.9.2. Energia Potencial

No caso de análise de tensões e deformações, a função  $F$  é freqüentemente representada por uma função de energia. Por exemplo, pode-se definir  $F$  como a energia potencial de um corpo carregado. Se um corpo elástico linear está em equilíbrio, pode-se mostrar que ele assume a energia potencial mínima. Usando a notação usual, a energia potencial será representada por  $\pi_p$ , onde o índice  $p$  indica energia potencial.

A energia potencial é definida como a soma da energia de deformação  $U$  trabalho realizado pelas forças externas  $W$ , isto é,

$$\pi_p = U + W \quad (3.78)$$

Ao aplicar o princípio de mínima energia potencial, essencialmente toma-se a derivada (ou variação) de  $\pi_p$  e iguala-se a mesma a zero. Assumindo que o carregamento permanece constante, tem-se

$$\delta \pi_p = \delta U + \delta W = 0, \quad (3.79)$$

onde o símbolo  $\delta$  indica a variação da energia potencial  $\pi_p$ . A variação pode ser interpretada como composta de uma série de derivadas parciais de  $\pi_p$ .  $\delta$  é um símbolo compacto usado para indicar a variação ou uma série de derivadas parciais. Para o uso deste símbolo neste curso, interpreta-se  $\delta$  como o símbolo que indica as derivadas de  $\pi_p$  em relação às coordenadas independentes ou variáveis em termos das quais ela é expressa. Por exemplo, se

$$\pi_p = \pi_p(u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xn})$$

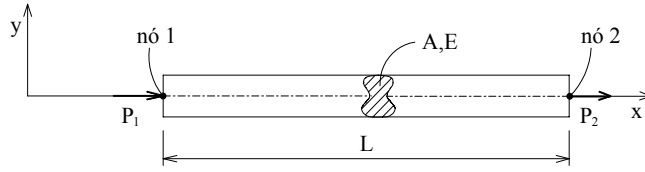


Figura 3.13: Elemento de barra.

onde  $u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xn}$  são o número total de variáveis (nos nós), então

$$\delta \pi_p = 0$$

implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_p}{\partial u_{x1}} &= 0 \\ \frac{\partial \pi_p}{\partial u_{x2}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \pi_p}{\partial u_{xn}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde  $n$  é o número total de variáveis.

O fato de que para corpos elásticos e lineares em equilíbrio o valor de  $\pi_p$  é um mínimo, pode ser verificado mostrando-se que a segunda derivada ou variação de  $\pi_p$  é maior que zero, isto é,

$$\delta^2 \pi_p = \delta^2 U + \delta^2 W > 0 \quad (3.81)$$

### 3.9.3. Elemento de Barra - Formulação Energética

O elemento de barra é um elemento reto - considerado aqui com secção constante - capaz de suportar apenas cargas axiais.

O estado de tensões na barra é:

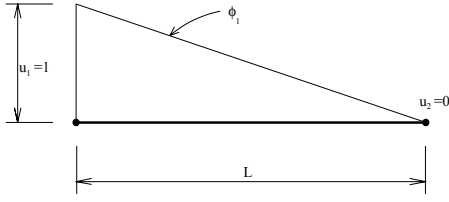
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &\neq 0 \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{yy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Como o deslocamento  $u$  ao longo do elemento varia linearmente, pode-se substituir a função deslocamentos exata pela seguinte função aproximada:

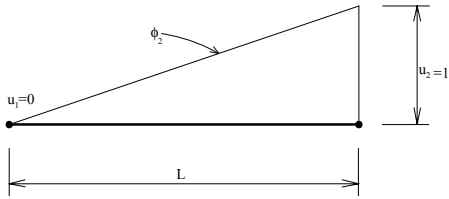
$$u_x(x) = \bar{u}_1 \varphi_1 + \bar{u}_2 \varphi_2 \quad (3.83)$$

onde  $\varphi_i$  são as funções de interpolação

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 x + a_2 \\ \varphi_1(x=0) &= 1 \rightarrow a_2 = 1 \\ \varphi_1(x=L) &= 0 \rightarrow a_1 L = -a_2 \\ \therefore \varphi_1 &= -\frac{x}{L} + 1 \end{aligned} \quad (3.84)$$



$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= b_1 x + b_2 & (3.85) \\
 \varphi_2(x=0) &= 0 \rightarrow b_2 = 0 \\
 \varphi_2(x=L) &= 1 \rightarrow b_1 = 1/L \\
 \therefore \varphi_2 &= \frac{x}{L}
 \end{aligned}$$



Substituindo 3.84 e 3.85 em 3.83, tem-se:

$$u_x(x) = \bar{u}_1 \left( -\frac{x}{L} + 1 \right) + \bar{u}_2 \left( \frac{x}{L} \right). \quad (3.86)$$

Para um estado uniaxial de tensão a deformação  $\varepsilon_{xx}$  é dada por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x(x)}{dx}$$

assim:

$$\varepsilon_{xx} = \bar{u}_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \bar{u}_2 \frac{d\varphi_2}{dx}$$

o que fornece

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\bar{u}_1}{L} + \frac{\bar{u}_2}{L} = \frac{1}{L} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1). \quad (3.87)$$

O método aqui empregado para a obtenção da matriz de rigidez é baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais, que é baseado na energia potencial do sistema. A energia potencial é aqui designada por  $\pi$ , sendo igual à soma da energia interna do trabalho realizado pelas forças externas  $W$ , podendo ser assim escrita:

$$\pi = U + W \quad (3.88)$$

onde a energia de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad (3.89)$$

e o trabalho externo, por:



$$W = - \int_V P_B^T u_x dV - \int_S P_S^T u_x dS \quad (3.90)$$

sendo  $P_B$  forças de corpo e  $P_S$  forças de superfície.

O princípio do trabalho virtual (PTV) é derivado da função energia potencial total, assumindo que um deslocamento virtual ( $u'$ ) é aplicado num estado de equilíbrio deslocamento. O PTV estabelece então que a soma do trabalho realizado pelas forças aplicadas e da energia armazenada para este deslocamento é zero. Em forma de equação, o PTV fica assim escrito:

$$U' + W' = 0 \quad (3.91)$$

onde:  $U'$  é a variação na energia da deformação para o deslocamento virtual e  $W'$  é o trabalho virtual realizado pelo deslocamento virtual.

### 3.9.4. Determinação de U e W

A expressão geral de U é:

$$\int_V \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right] \quad (3.92)$$

tendo em vista o estado de tensões, a expressão acima fica reduzida a:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{xx}^2 dV. \quad (3.93)$$

Substituindo-se a expressão da Lei de Hooke ( $\sigma_{xx} = \epsilon_{xx} E$ ) na expressão acima, vem:

$$U = \frac{1}{2E} \int_L \frac{E^2}{L^2} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2 A dx \quad (3.94)$$

isto porque  $\sigma_{xx}$  é constante na área e  $dV = A dx$ .

Então, como  $u_{x1}$  e  $u_{x2}$  são independentes de  $x$ , pode-se escrever 3.94 da seguinte forma (matricial):

$$U = \frac{1}{2} \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \int_0^L \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{matrix} \right\} \quad (3.95)$$

que integrando fornece:

$$U = \frac{1}{2} \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{matrix} \right\}. \quad (3.96)$$

Como a barra em estudo está submetida apenas a forças discretas, e nenhuma força de corpo atua, a expressão do trabalho fica reduzida a:

$$W = - \sum_{i=1}^N P_i u_{xi} \quad (3.97)$$

$$W = -\bar{P}_1 \bar{u}_1 - \bar{P}_2 \bar{u}_2 = \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{matrix} \right\}.$$

Desta forma, o potencial total da barra é:

$$\pi = \frac{1}{2} \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{matrix} \right\} - \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{matrix} \right\}. \quad (3.98)$$

Aplicando o PTV, ou seja, aplicando a variação  $U' + W' = 0$ , vem:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.99)$$

sendo

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

a matriz de rigidez do elemento num sistema de coordenadas coincidente com o eixo da peça,

$$\{u^e\} = \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \} \quad (3.101)$$

o vetor deslocamento no sistema local,

$$\{P^e\} = \{ \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \} \quad (3.102)$$

o vetor carga.

Pode-se escrever, finalmente:

$$[K^e] \{u^e\} = \{P^e\} . \quad (3.103)$$

## 4. ELEMENTO DE VIGA

De acordo com a teoria de deflexão de viga - teoria usada em engenharia - a deformação é caracterizada basicamente pela linha elástica.

São aqui desenvolvidas três formulações, duas usando o método direto - para dois graus de liberdade por nó e para três graus - e uma usando o método energético - para dois graus de liberdade.

### 4.1. Formulação Direta - Flexão Simples - Viga Plana e Reta

É aqui considerado um elemento de viga plana e reta, com dois graus de liberdade por nó, uma rotação em  $z$  e um deslocamento linear em  $y$ .

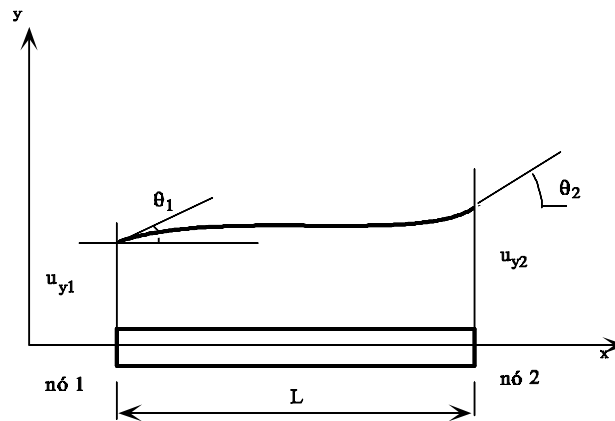


Figura 4.1: Elemento de Viga.

Na figura 4.2 estão apresentadas as decomposições dos deslocamentos mostrados na figura 4.1, ou seja, compondo adequadamente as deformações da figura 4.2 obtém-se a deformada da figura 4.1.

Lembrando o método RAYLEIGH-RITZ

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 \Phi_i \bar{u}_i, \quad (4.1)$$

onde  $\Phi_i$  são as funções de interpolação usadas para aproximar a solução exata.

A figura 4.2(a) representa o modo de deformação  $\Phi_1$ , onde  $u_{y1} = 1$ ,  $\theta_1 = 1$ ,  $u_{y2} = 1$  e  $\theta_2 = 1$  (lembrar que estão sendo considerados apenas dois graus de liberdade por nó - e caso plano -, assim,  $u_{x1}$  e  $u_{x2}$  não são considerados).

Na figura 4.3 está apresentada uma viga cuja vinculação (e carregamento) permite a deformação apresentada em 4.2(a).

A linha elástica ( $u_y(x)$ ) pode ser deduzida a partir da expressão 4.2, onde o momento  $M(x)$  é igual

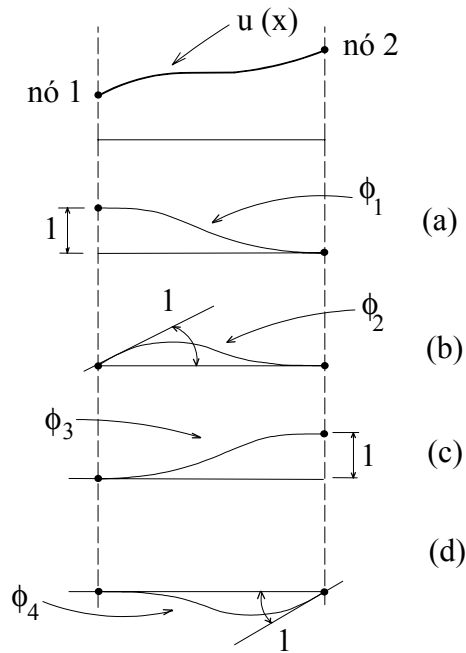


Figura 4.2: Funções de interpolação.

a  $V_1 x - M_1$  (CONFERIR!) :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M(x) = V_1 x - M_1. \quad (4.2)$$

Integrando duas vezes, vem :

$$EI u_y = V_1 \frac{x^3}{6} - M_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \quad (4.3)$$

Para determinar as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  pode-se usar as seguintes condições de contorno (ver figura 4.3):

$$\frac{d u_y}{dx}(x=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$u_y(x=L) = 0 \rightarrow C_2 = M_1 \frac{L^2}{2} - V_1 \frac{L^3}{6}$$

substituindo  $C_1$  e  $C_2$  4.4 em 4.3, tem-se :

$$u_y(x) = \frac{1}{EI} \left[ V_1 \frac{x^3}{6} - M_1 \frac{x^2}{2} + M_1 \frac{L^2}{2} - V_1 \frac{L^3}{6} \right]. \quad (4.5)$$

Para determinar os coeficientes da matriz de rigidez a partir de 4.5 é interessante escrever toda esta expressão em termos de  $V_1$  ou de  $M_1$ . Isto pode ser conseguido com o uso da seguinte condição de contorno :

$$\frac{d u_y}{dx}(x=L) = 0 \rightarrow M_1 = \frac{V_1 L}{2}. \quad (4.6)$$

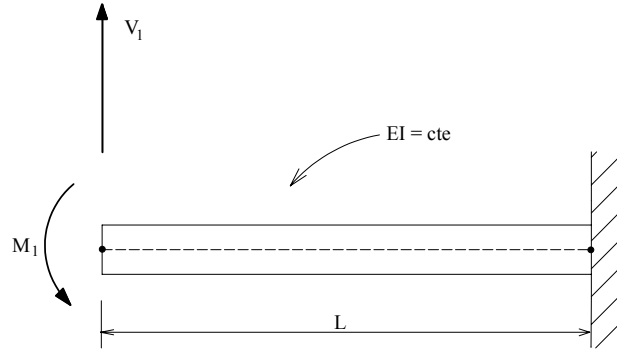


Figura 4.3: Viga Engastada.

Substituindo-se agora  $M_1$  4.6 em 4.5, vem :

$$u_y(x) = \frac{V_1}{EI} \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{4} + \frac{L^3}{12} \right]. \quad (4.7)$$

Define-se agora o coeficiente de influência de rigidez  $k_{ij}$ , como sendo a força associada com o  $i$ -ésimo grau de liberdade, devido a um deslocamento unitário no  $j$ -ésimo grau de liberdade, sendo os deslocamentos dos demais graus de liberdade nulos.

Para determinar  $k_{11}$  pode-se proceder da seguinte forma :

- Sabe-se que  $k_{11}$  é o valor da força aplicada no nó 1, direção  $u_{y1}$  (ver figura 4.1), quando  $u_{y1} = 1$  e  $\theta_1 = u_{y2} = \theta_2 = 0$ . Então, aplicando-se estas condições em 4.7, vem :

$$u_{y1} = 1 \quad ; \quad \theta_1 = u_{y2} = \theta_2 = 0, \text{ com } V_1 = k_{11} \rightarrow k_{11} = \frac{12 EI}{L^3}. \quad (4.8)$$

Por simetria, tem-se que  $k_{33} = k_{11}$ .

Colocando-se  $V_1$  em evidência em 4.6 e substituindo em 4.7, vem:

$$u_y(x) = \frac{2 M_1}{E I L} \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} + M_1 \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{12} \right]. \quad (4.9)$$

Assim, quando  $u_y(x=0) = u_{y1} = 1$ ,  $M_1 = k_{21}$ , portanto:

$$k_{21} = \frac{6 EI}{L^2}. \quad (4.10)$$

Por simetria  $k_{21} = k_{12}$  (lembrar que a matriz de rigidez é simétrica).

A matriz de rigidez para um elemento de viga plana, com dois graus de liberdade por nó é:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Portanto, já foram determinados - usando o modo direto, ou seja, determinando diretamente os coeficientes de rigidez a partir da linha elástica - os coeficientes  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$  e  $k_{33}$ . Em princípio tem-se ainda a determinar os demais doze coeficientes.

Para a determinação de  $k_{41}$ ,  $k_{14}$ ,  $k_{31}$  e  $k_{13}$  pode-se proceder da seguinte forma:  
Do somatório dos momentos em torno do ponto 2 (nó 2), figura 4.4, vem:

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0 \rightarrow k_{41} = k_{11}L - k_{21} \rightarrow k_{41} = \frac{12EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} \\ \therefore k_{41} &= \frac{6EI}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por simetria :  $k_{14} = k_{41}$ .

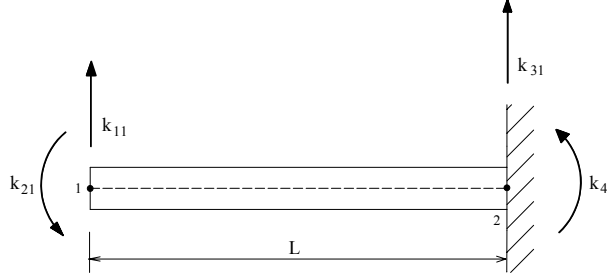


Figura 4.4: Coeficientes de rigidez.

Do somatório das forças na vertical, figura 4.4, vem :

$$\sum F_v = 0 \rightarrow k_{31} = -k_{11} = k_{13}. \quad (4.13)$$

Por simetria, tem-se:  $k_{43} = k_{34} = -k_{21}$  (ver figuras 4.2(a) e 4.2(c)).

Para determinar  $k_{22}$ ,  $k_{32}$  e  $k_{42}$  (lembrar que  $k_{12}$  já foi determinado anteriormente por simetria!) pode-se determinar a linha elástica da viga da figura 4.3 com as condições de contorno da figura 4.2(b), ou seja :

$$\begin{aligned} u_y(x=0) &= u_{y1} = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ \frac{du_y}{dx}(x=L) &= \theta_2 = 0 \rightarrow C_1 = M_1 L - \frac{V_1 L^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo  $C_1$  e  $C_2$  4.14 em 4.3 vem:

$$El u_y = V_1 \frac{x^3}{6} - M_1 \frac{x^2}{2} + \left( M_1 L - \frac{V_1 L}{2} \right) x + 0. \quad (4.15)$$

Com o uso da seguinte condição de contorno tira-se uma relação entre  $V_1$  e  $M_1$  :

$$u_y(x=L) = u_{y2} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{3M_1}{2L}, \quad (4.16)$$

que substituída em 4.15 fornece:

$$u_y(x) = \frac{M_1}{EI} \left[ \frac{x^3}{4L} - \frac{x^2}{2} + \frac{Lx}{4} \right]. \quad (4.17)$$

Da definição de coeficiente de rigidez tem-se que, para

$$\frac{du_y}{dx}(x=0) = \theta_1 = 1 \text{ (equação 4.17)} \rightarrow M_1 = k_{22},$$

assim, aplicando estas condições em 4.17, vem :

$$k_{22} = \frac{4EI}{L}. \quad (4.18)$$

Da condição de simetria tem-se  $k_{44} = k_{22}$  .

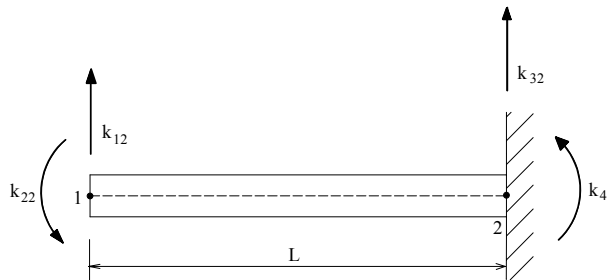


Figura 4.5: Coeficientes de rigidez.

Do somatório das forças na vertical (ver figura 4.5) tem-se  $k_{32} = -k_{12}$  (  $k_{12}$  já foi determinado anteriormente). Por simetria  $k_{23} = k_{32}$  .

Do somatório dos momentos em torno do nó 2 (figura 4.5), vem:

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0 \rightarrow k_{42} = k_{12}L - k_{22} \rightarrow k_{42} = \frac{6EI}{L} - \frac{4EI}{L} \\ \therefore k_{42} &= \frac{2EI}{L}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por simetria,  $k_{24} = k_{42}$  , e ainda  $k_{44} = k_{22}$  (ver figura 4.2).

Portanto, tem-se a seguinte matriz de rigidez para um elemento de viga plana, reta, com dois graus de liberdade por nó, sem considerar o efeito do cisalhamento para o cálculo da linha elástica:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

## 4.2. Elemento de Viga - Flexão e tração - com cisalhamento

De acordo com a teoria de flexão de vigas (teoria usada em engenharia) a deformação é caracterizada basicamente pela linha elástica. Será considerado aqui que o elemento de viga possui três graus de liberdade por nó: uma rotação em  $z$  e duas translações - deslocamentos vertical e horizontal.

Considere-se assim, para uma primeira análise, o elemento de viga como sendo uma barra reta de seção constante, capaz de suportar apenas cargas transversais e axiais.

O elemento possui dois nós com três graus de liberdade cada um. Assim, a matriz de rigidez do elemento será de ordem 6x6, relacionando os deslocamentos nodais com as seis forças nodais.

Uma maneira bastante simples de se obter os coeficientes da matriz de rigidez é através da utilização direta do conceito do coeficiente de rigidez  $k_{ij}$  , conhecido como método direto.

Aos deslocamentos nodais apresentados na figura 4.6 estão associados às seguintes cargas generalizadas:

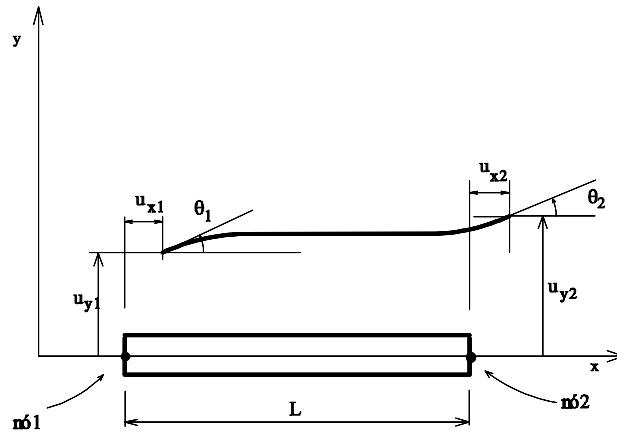


Figura 4.6: Elemento de viga com 3 graus de liberdade por nó (deslocamentos nodais).

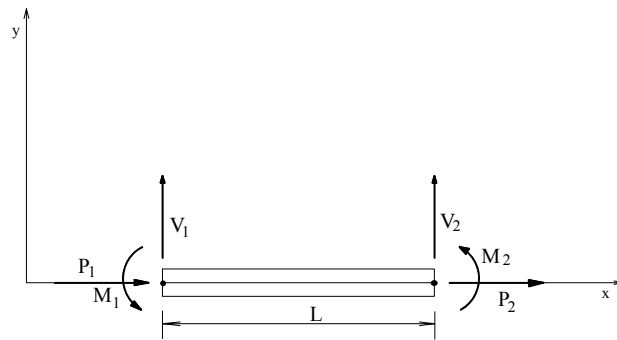


Figura 4.7: Elemento de Viga ( forças nodais).

Deslocamentos nodais  $u_{x1}$   $u_{y1}$   $\theta_1$   $u_{x2}$   $u_{y2}$   $\theta_2$   
 Cargas associadas  $P_1$   $V_1$   $M_1$   $P_2$   $V_2$   $M_2$   
 O sistema de equações é da forma:

$$[K] \{u\} = \{P\} \quad (4.21)$$

onde:

$[K]$  → matriz de rigidez ( coeficientes de influência de rigidez).

$\{P\}$  → vetor força.

$\{u\}$  → vetor deslocamento.

A matriz  $[K]$  é:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

sendo os  $k_{ij}$  os coeficientes de influência de rigidez que serão agora determinados.



O termo típico  $k_{ij}$  é definido como uma força no  $i$ -ésimo nó devido a um deslocamento unitário no  $j$ -ésimo nó, sendo os demais deslocamentos nulos.

#### 4.2.1. CARGAS AXIAIS: $P_1$ e $P_2$

A equação diferencial para o deslocamento axial  $u$  de uma viga de seção uniforme, sem cargas térmicas, é:

$$P = -EA \frac{du_x}{dx}; \varepsilon = \frac{du_x}{dx}; \sigma = \varepsilon E; \frac{du_x}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA}. \quad (4.23)$$

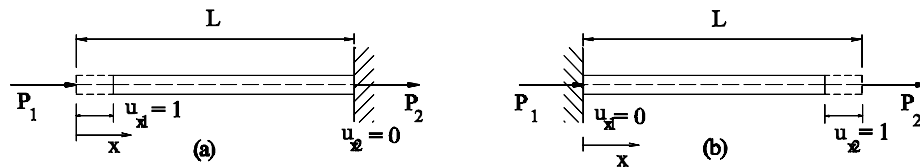


Figura 4.8: Deslocamento da barra sob carga axial.

Integrando a expressão acima vem:

$$P_1 x = -EA u_x + C_1. \quad (4.24)$$

Para determinação da constante de integração  $C_1$  pode-se usar a condição de contorno  $u_x(x=L) = 0$ , (figura 4.8a), o que fornece:

$$P_1 L = C_1 \quad (4.25)$$

assim:

$$P_1 x = -EA u_x + P_1 L \rightarrow u_x = \frac{P_1}{EA} (L - x). \quad (4.26)$$

Usando a definição do coeficiente de rigidez, faz-se  $u_x(x=0) = u_{x1} = 1$  tem-se:

$$k_{11} = \frac{EA}{L}, \quad (4.27)$$

ou seja, para  $u_{x2} = 0$ , deve-se aplicar uma carga  $P_1 = EA/L$  no ponto 1 para que

$$u_{x1} = 1.$$

Assim, para estas condições :

$$P_1 = k_{11}. \quad (4.28)$$

Das condições de equilíbrio na direção  $x$ , vem:

$$k_{11} + k_{41} = 0 \rightarrow P_1 + P_2 = 0 \quad \therefore \quad k_{41} = -\frac{EA}{L}. \quad (4.29)$$

Raciocínio análogo pode ser feito fixando-se  $u_{x1}$  (ou seja, fazendo-se  $u_{x1} = 0$ ) e fazendo-se  $u_{x2} = 1$  (figura 4.8b).

Daí resulta:

$$k_{44} = \frac{EA}{L} \quad ; \quad k_{14} = -\frac{EA}{L}. \quad (4.30)$$

Com estes elementos já definidos, a matriz de rigidez está assim montada:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & k_{12} & k_{13} & -\frac{EA}{L} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & k_{42} & k_{43} & \frac{EA}{L} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

#### 4.2.2. CARGAS TRANSVERSAIS: $V_1$ e $V_2$

A deflexão de vigas sujeitas a cargas transversais é dada por:

$$u_y = u_{yf} + u_{yc} \quad (4.32)$$

onde:

$u_{yf}$  → parcela devida à flexão.

$u_{yc}$  → parcela devida ao cisalhamento.

As relações carga-deslocamento, nesse caso, são dadas por:

$$\frac{du_{yc}}{dx} = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \quad (4.33a)$$

$$EI \frac{d^2 u_{yf}}{dx^2} = V_1 x - M_1 \quad (4.33b)$$

onde:

$\alpha$  → fator de correção para a tensão cisalhante média;

$A_y$  → área efetiva de cisalhamento;

$G$  → módulo de elasticidade transversal;

$I$  → momento de inércia em relação ao eixo  $z$ ;

$E$  → módulo de elasticidade longitudinal.

Integrando a expressão 4.33a, vem:

$$u_{yc} = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} x + C. \quad (4.34)$$

Integrando duas vezes a expressão 4.33b, vem:

$$EI u_{yf} = \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} + C_1 x + C_2. \quad (4.35)$$

Somando 4.34 e 4.35, e rearranjando, vem:

$$EI u_y = \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{\alpha E I V_1}{A_y G} x + C_1 x + C_2. \quad (4.36)$$

OBS:  $P_1$  e  $P_2$  não têm influência nos deslocamentos  $u_{y1}$ ,  $\theta_1$ ,  $u_{y2}$  e  $\theta_2$ .

Para a determinação das constantes de integração da expressão 4.36, aplicam-se as seguintes condições de contorno:

$$\frac{du_y}{dx} (x=0) = \frac{du_y}{dx} (x=L) = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \quad (4.37a)$$

$$u_y (x=L) = 0. \quad (4.37b)$$

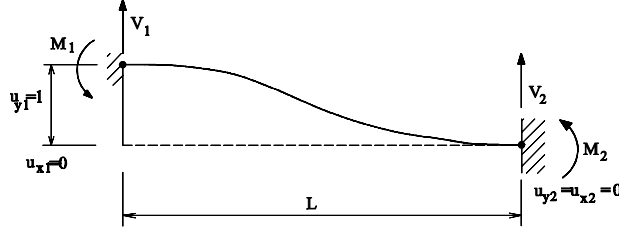


Figura 4.9: Viga com carga transversal.

Aplicando as condições 4.37a na expressão 4.36, vem:

$$\begin{aligned} \frac{du_y}{dx}(x=0) &= \frac{1}{EI} \left[ C_1 - \frac{\alpha EI V_1}{A_y G} \right] = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \quad \therefore C_1 = 0 \\ \frac{du_y}{dx}(x=L) &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_1 L^2}{2} - M_1 L - \frac{\alpha EI V_1}{A_y G} + C_1 \right] = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \quad \therefore M_1 = \frac{V_1 L}{2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aplicando a condição de contorno 4.37b em 4.36, vem:

$$\begin{aligned} EI u_y(x=L) &= 0 = \left[ \frac{V_1 L^3}{6} - \frac{M_1 L^2}{2} - \frac{\alpha EI V_1 L}{A_y G} + C_1 L + C_2 \right] \\ C_2 &= \frac{M_1 L^2}{2} - \frac{V_1 L^3}{6} + \frac{\alpha EI V_1 L}{A_y G}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Substituindo-se 4.38 na expressão acima e rearranjando, vem:

$$C_2 = \frac{V_1 L^3}{12} [1 + \phi], \text{ onde } \phi = \frac{12 \alpha EI}{A_y G L^2}. \quad (4.40)$$

Assim, substituindo-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  na expressão 4.36, fornece:

$$u_y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{V_1 \phi x L^2}{12} + \frac{V_1 L^3}{12} (1 + \phi) \right]. \quad (4.41)$$

De posse da equação 4.41, que representa a linha elástica da figura 4.9, pode-se, através do uso da definição do coeficiente de rigidez, determinar os  $k_{ij}$  correspondentes às forças aplicadas.

Assim, quando  $u_{y1} = 1$  e  $u_{x2} = u_{y2} = 0$ , tem-se  $V_1 = k_{22}$ ,

$$u_y(x=0) = u_{y1} = 1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_1 L^3}{12} (1 + \phi) \right] \quad \therefore k_{22} = \frac{12 EI}{L^3 (1 + \phi)}. \quad (4.42)$$

Para a determinação de  $k_{32}$  pode-se proceder da seguinte forma: aplicar o equilíbrio de momentos em torno do ponto 2 (figura 4.10).

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow k_{22} L = k_{62} + k_{32} \quad (4.43)$$

como

$$k_{62} = k_{32} \rightarrow k_{32} = \frac{k_{22} L}{2} \quad (4.44)$$

portanto:

$$k_{32} = \frac{6 EI}{L^2 (1 + \phi)} = k_{62}. \quad (4.45)$$

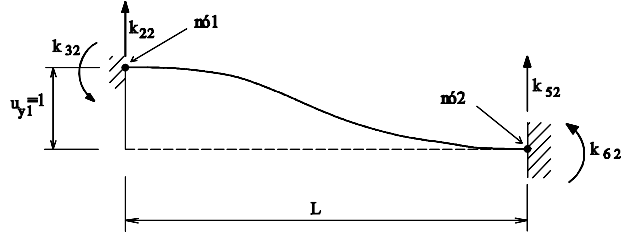


Figura 4.10: Modelo para análise do equilíbrio da viga.

Das condições de equilíbrio tira-se:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_2 = -V_1 \quad \therefore \quad k_{52} = -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)}. \quad (4.46)$$

#### 4.2.3. MOMENTOS FLETORES: $M_1$ e $M_2$

Para determinar os coeficientes de rigidez associados com as rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , submete-se a viga a cargas de flexão como mostrado na figura 4.11.

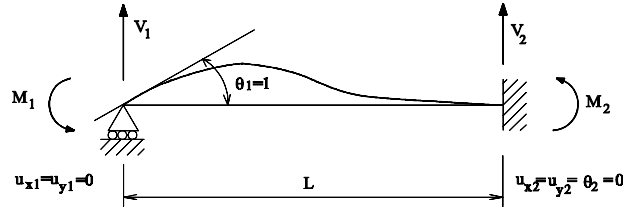


Figura 4.11: Viga sob flexão.

A equação diferencial da linha elástica é idêntica à equação 4.36, pois o sistema de forças atuantes é o mesmo. O que muda são as condições de contorno para este caso.

$$EI u_y = \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{\alpha EIV_1}{A_y G} x + C_1 x + C_2. \quad (4.47)$$

As condições de contorno são:

$$u_y(x=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (4.48a)$$

$$EI \frac{du_y}{dx}(x=L) = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \rightarrow C_1 = M_1 L - \frac{V_1 L^2}{2} \quad (4.48b)$$

$$u_y(x=L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_1 L^3}{6} - \frac{M_1 L^2}{2} - \frac{\alpha EIV_1 L}{A_y G} + M_1 L^2 + \frac{V_1 L^3}{2} \right]. \quad (4.48c)$$

Desta expressão resulta:

$$V_1 = \frac{6M_1}{(4+\phi)L} \rightarrow \phi = \frac{6M_1}{(4+\phi)L - 4} \rightarrow \phi = \frac{12\alpha EI}{A_y G L^2}. \quad (4.49)$$

Pela definição do coeficiente de rigidez pode-se tirar os seguintes  $k_{ij}$ :

- sabe-se que

$$M_1 = k_{33} \text{ quando } \theta_1 = 1 \text{ e } u_{y1} = u_{y2} = \theta_2 = 0. \quad (4.50)$$

- como está sendo considerado cisalhamento na expressão 4.47, pode-se tirar a parcela referente à flexão da seguinte maneira:

$$u_y = u_{yf} + u_{yc} \quad (4.51)$$

$$\frac{d u_y}{d x} = \frac{d u_{yf}}{d x} + \frac{d u_{yc}}{d x} \rightarrow \frac{d u_{yf}}{d x} = \frac{d u_y}{d x} - \frac{d u_{yc}}{d x}. \quad (4.52)$$

Para o ponto  $x = 0$ , tem-se:

$$\frac{d u_{yf}}{d x} \Big|_{(x=0)} = \frac{d u_y}{d x} \Big|_{(x=0)} - \frac{d u_{yc}}{d x} \Big|_{(x=0)} \quad (4.53)$$

onde:

(I)  $\rightarrow x = 0$  na expressão derivada de 4.47.

(II)  $\rightarrow$  inclinação na linha elástica referente ao cisalhamento.

Dai sai:

$$\frac{d u_{yf}}{d x} (x = 0) = \frac{1}{E I} \left[ M_1 L - \frac{V_1 L^2}{2} \right] \quad (4.54)$$

e substituindo-se o valor de  $V_1 = f(M_1)$  na expressão acima fornece:

$$\frac{d u_{yf}}{d x} (x = 0) = \frac{M_1 L}{E I} \left[ \frac{1 + \phi}{4 + \phi} \right]. \quad (4.55)$$

Da definição de coeficiente de rigidez:

$$\frac{d u_{yf}}{d x} (x = 0) = 1 \rightarrow M_1 = k_{33} \quad \therefore \quad k_{33} = \frac{(4 + \phi) E I}{(1 + \phi) L}. \quad (4.56)$$

Das condições de equilíbrio da viga, vem:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow V_2 = -V_1 \\ \sum M (x = L) &= 0 \rightarrow M_2 = -M_1 + V_1 L. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Destas expressões e da definição de coeficiente de rigidez, vem:

$$k_{53} = -\frac{6 E I}{L^2 (1 + \phi)} \quad ; \quad k_{63} = \frac{(2 - \phi) E I}{(1 + \phi) L}. \quad (4.58)$$

De raciocínio análogo, fixando-se agora a extremidade esquerda da viga (com engaste) e apoiando-se a direita, vem:

$$k_{66} = \frac{(4 + \phi) E I}{(1 + \phi) L}. \quad (4.59)$$

Das condições de equilíbrio e de simetria da viga sai:

$$k_{55} = k_{22} = \frac{12 E I}{L^2 (1 + \phi)} \quad ; \quad k_{56} = -k_{23} = -\frac{6 E I}{L^2 (1 + \phi)}. \quad (4.60)$$

Como a matriz de rigidez é simétrica, não há a necessidade de se determinar, por exemplo, o  $k_{65}$ , pois sabe-se que  $k_{65} = k_{56}$ ,  $k_{32} = k_{23}$  e assim por diante.

Por esta característica de simetria da matriz de rigidez, pode-se escrever a matriz de rigidez para um elemento de viga reta considerando cisalhamento da seguinte forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ & & \frac{4+\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{2-\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ & & & & & \frac{4+\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

*simétrica*

A matriz de rigidez para um elemento de viga reta sem considerar o efeito do cisalhamento (de acordo com T. H. Richards, Energy Methods in Stress Analysis, John Wiley, 1977), fica:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

*simétrica*

Comparando-se as duas matrizes pode-se verificar que a primeira refere-se a um caso mais geral e, através de simplificações, pode-se chegar facilmente à segunda.

As duas matrizes anteriores estão escritas para o sistema local de coordenadas do elemento de viga, ou seja, só pode ser aplicado para casos em que o sistema global de coordenadas coincide com o sistema local. Para que seja possível a resolução de vigas em que o seu sistema intrínseco (sistema local) esteja inclinado com relação ao sistema global, deve-se transladar a matriz de rigidez de um sistema para o outro.

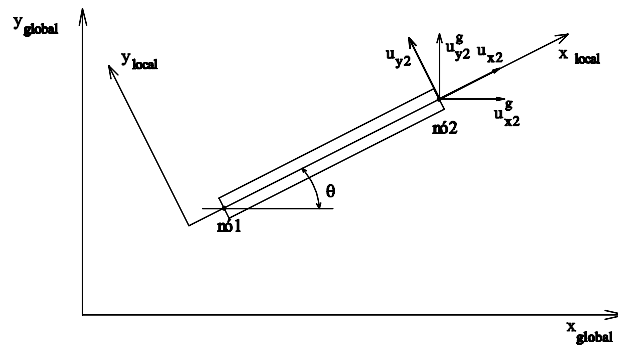


Figura 4.12: Sistemas de coordenadas local e global.

Para rotacionar o sistema de coordenadas, utiliza-se a expressão:

$$\{u\}_l = [T] \{u\}_g \quad (4.63)$$

onde:

- $\{u\}_l \rightarrow$  vetor deslocamento no sistema local;
- $\{u\}_g \rightarrow$  vetor deslocamento no sistema global;

$[T]$  → matriz de transformação de coordenadas.

A matriz de transformação no plano é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Os vetores deslocamento estão abaixo explicitados:

$$\begin{Bmatrix} u_{xlg} \\ u_{ylg} \\ \theta_l \\ u_{x2g} \\ u_{y2g} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.65)$$

Para obter a matriz de rigidez do elemento no sistema global deve-se efetuar a seguinte operação:

$$[K]_g^e = [T]^T [K]_l^e [T] \quad (4.66)$$

onde

$[K]_g^e$  → matriz do elemento no sistema local.

A primeira operação  $[T]^T [K]$ , fornece (considerando o elemento de viga sem cisalhamento):

$$[K] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} \cos \theta & \frac{A}{L} \sin \theta & 0 & -\frac{A}{L} \cos \theta & -\frac{A}{L} \sin \theta & 0 \\ -\frac{12I}{L^3} \sin \theta & \frac{12I}{L^3} \cos \theta & \frac{6I}{L^2} & \frac{12I}{L^3} \sin \theta & -\frac{12I}{L^3} \cos \theta & \frac{6I}{L^2} \\ -\frac{6I}{L^2} \sin \theta & \frac{6I}{L^2} \cos \theta & \frac{4I}{L} & \frac{6I}{L^2} \sin \theta & -\frac{6I}{L^2} \cos \theta & \frac{2I}{L} \\ -\frac{A}{L} \cos \theta & -\frac{A}{L} \sin \theta & 0 & \frac{A}{L} \cos \theta & \frac{A}{L} \sin \theta & 0 \\ \frac{12I}{L^3} \sin \theta & -\frac{12I}{L^3} \cos \theta & -\frac{6I}{L^2} & -\frac{12I}{L^3} \sin \theta & \frac{12I}{L^3} \cos \theta & -\frac{6I}{L^2} \\ -\frac{6I}{L^2} \sin \theta & \frac{6I}{L^2} \cos \theta & \frac{2I}{L} & \frac{6I}{L^2} \sin \theta & -\frac{6I}{L^2} \cos \theta & \frac{4I}{L} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Multiplicando agora a matriz acima por  $[T]$ , chega-se a

$$[K] = E \begin{bmatrix} \frac{AL^2c^2+12Is^2}{L^3} & \frac{AL^2-12I}{L^3}sc & \frac{6I}{L^2}s & -\frac{AL^2c^2-12Is^2}{L^3} & -\frac{AL^2+12I}{L^3}sc & -\frac{6I}{L^2}s \\ & \frac{AL^2s^2+12Ic^2}{L^3} & \frac{6I}{L^2}c & -\frac{AL^2+12I}{L^3}sc & -\frac{AL^2s^2-12Ic^2}{L^3} & \frac{6I}{L^2}c \\ & & \frac{4I}{L} & \frac{6I}{L^2}s & -\frac{6I}{L^2}c & \frac{2I}{L} \\ & & & \frac{AL^2c^2+12Is^2}{L^3} & \frac{AL^2-12I}{L^3}sc & \frac{6I}{L^2}s \\ & & & & \frac{AL^2s^2+12Ic^2}{L^3} & -\frac{6I}{L^2}c \\ & & & & & \frac{4I}{L} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

*simétrica*

onde  $s = \sin \theta$  e  $c = \cos \theta$ , é a matriz de rigidez de um elemento de viga plana, com 3 graus de liberdade por nó, no sistema global de coordenadas.

### 4.3. Elemento de Viga: Formulação Energética

Considere o elemento de viga de seção transversal simétrica, mostrado na figura 4.13, onde  $u_{t1}$  e  $u_{t2}$  são os deslocamentos nodais transversais. Note que o eixo  $s$ , inclinado em relação ao eixo  $x$  de um ângulo  $\theta$ , coincide com a linha centroidal do elemento.

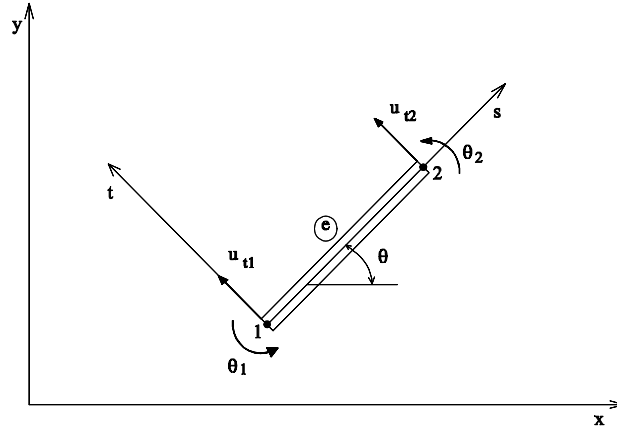


Figura 4.13: Elemento de viga.

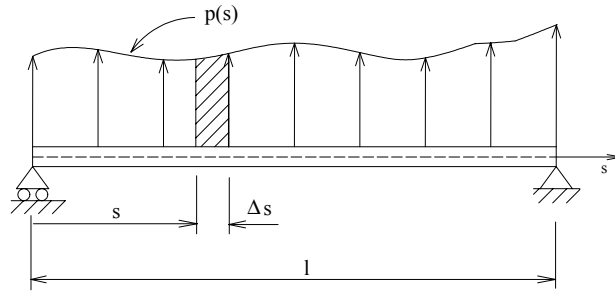


Figura 4.14: Viga bi-apoiada.

As equações que regem o comportamento deste elemento são aquelas obtidas da teoria de vigas em Resistência dos Materiais. Considere uma viga bi-apoiada (figura 4.14) com carregamento distribuído  $p(s)$ , da qual retira-se um elemento infinitesimal  $s$ , o qual é mostrado na figura 4.15, com os esforços com uma convenção coerente.

As equações de equilíbrio na direção  $t$  e em torno do eixo  $z$  fornecem:

$$V_t \left( s + \frac{\Delta s}{2} \right) - V_t \left( s - \frac{\Delta s}{2} \right) + p(s) \Delta s = 0 \quad (4.69)$$

e

$$\frac{\Delta s}{2} V_t \left( s - \frac{\Delta s}{2} \right) + \frac{\Delta s}{2} V_t \left( s + \frac{\Delta s}{2} \right) - p(s) \Delta s \frac{\Delta s}{2} = 0. \quad (4.70)$$

Dividindo as duas expressões por  $s$  e fazendo  $\Delta s \rightarrow 0$ , tendo em conta que

$$\Delta s \rightarrow 0 \lim \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{dF}{ds} \quad (4.71)$$

é a definição de derivada de uma função  $F$ , obtém-se as equações diferenciais de equilíbrio em vigas:

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{ds} &= -p(s) \\ \frac{dM_z}{ds} &= -V_y(s). \end{aligned} \quad (4.72)$$



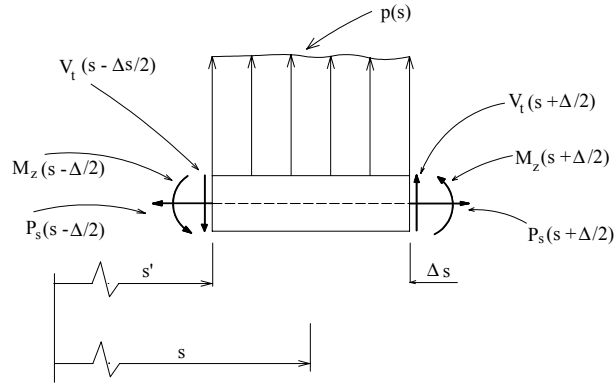


Figura 4.15: Elemento infinitesimal de viga.

Combinando as duas expressões obtém-se

$$\frac{d^2 M_z}{ds^2} = p(s). \quad (4.73)$$

O momento fletor  $M_z$  é a resultante da distribuição das tensões  $\sigma_s$  na seção transversal da viga:

$$M_z = - \int \sigma_s t dA \quad (4.74)$$

onde  $t$  é o eixo perpendicular ao eixo centroidal  $s$  da viga e  $A$  é a área da seção transversal. Suponha que o deslocamento axial  $u_s$  ao longo da viga é aproximado por

$$u_s = -t \frac{du_t}{ds} \quad (4.75)$$

e então não existe deformação no eixo centroidal da viga e os planos normais à viga, antes da deformação, permanecem normais depois da deformação.

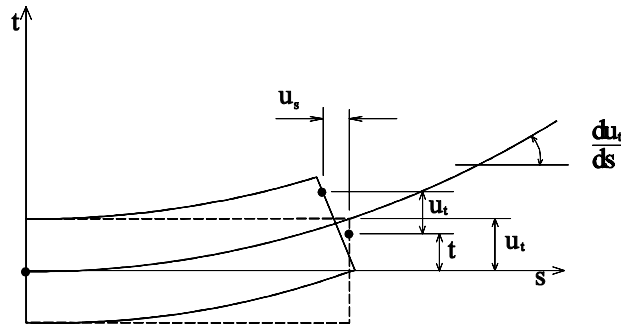


Figura 4.16: Hipótese cinemática de deformação de vigas.

As tensões  $\sigma_s$  na seção transversal são dadas por

$$\sigma_s = E \varepsilon_s = E \frac{du_s}{ds} = -Et \frac{d^2 u_t}{ds^2}. \quad (4.76)$$

O efeito de cisalhamento foi desprezado. O material é considerado linear.

O momento fletor é dado por

$$M_z = \left( \int_A E t^2 dA \right) \frac{d^2 u_t}{ds^2} \quad (4.77)$$

e introduzindo a definição de momento de inércia

$$I_z = \int_A t^2 dA \quad (4.78)$$

tem-se a relação momento-curvatura de uma viga,

$$M_z = E I_z \frac{d^2 u_t}{ds^2}. \quad (4.79)$$

Substituindo-se a relação acima na equação que relaciona momento fletor e carregamento, obtém-se a equação diferencial para vigas

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( E I_z \frac{d^2 u_t}{ds^2} \right) = p(s) \quad (4.80)$$

onde  $u_t$  é o deslocamento transversal,  $E I_z$  é a rigidez à flexão. Se  $E I_z$  é uniforme ao longo da viga, a equação acima é escrita como

$$E I_z \frac{d^4 u_t}{ds^4} = p(s). \quad (4.81)$$

A energia potencial do elemento de viga é dada por

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_s \varepsilon_s d\Omega - \int_{\Omega} \bar{p}(s) u_t d\Omega \quad (4.82)$$

onde  $\Omega$  é o volume do elemento de viga e  $\bar{p}(s)$  é o carregamento distribuído por unidade de área. Evidentemente, a expressão acima é a expressão particularizada do caso geral

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=x}^z \sum_{j=x}^z \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=x}^z b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} \sum_{i=x}^z t_i u_i d\Gamma. \quad (4.83)$$

Introduzindo-se as expressões para as tensões  $\sigma_s$  e deformações  $\varepsilon_s$  na expressão da energia potencial  $\Pi_p$ , e levando-se em conta que

$$I_z = \int_A t^2 dA, \quad (4.84)$$

obtém-se

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} E I_z \left( \frac{d^2 u_t}{ds^2} \right)^2 ds - \int_{s_1}^{s_2} p(s) u_t ds \quad (4.85)$$

onde  $s_1$  e  $s_2$  são as coordenadas de início e fim do elemento de viga, isto é,

O deslocamento vertical  $u_t$  é interpolado comumente usando-se

$$u_t(s) = N_1(\xi) u_{t1} + N_2(\xi) \theta_1 + N_3(\xi) u_{t2} + N_4(\xi) \theta_2 \quad (4.86)$$

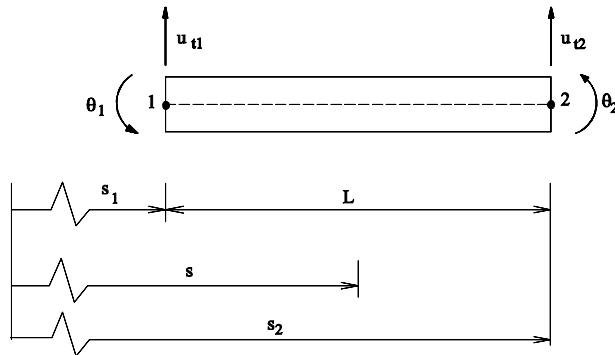


Figura 4.17: Elemento de viga.

onde  $\xi$  é a coordenada local, dada por  $\xi = \frac{s-s_1}{L}$  e  $s$  é a coordenada global. As funções de interpolação  $N_\alpha(\xi)$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 N_2(\xi) &= L\xi(1 - 2\xi + \xi^2) \\
 N_3(\xi) &= \xi^2(3 - 2\xi) \\
 N_4(\xi) &= L\xi^2(\xi - 1)
 \end{aligned}
 \tag{4.87}$$

as quais são chamadas de funções de interpolação de Hermite. Estas funções são representadas graficamente na figura 4.18

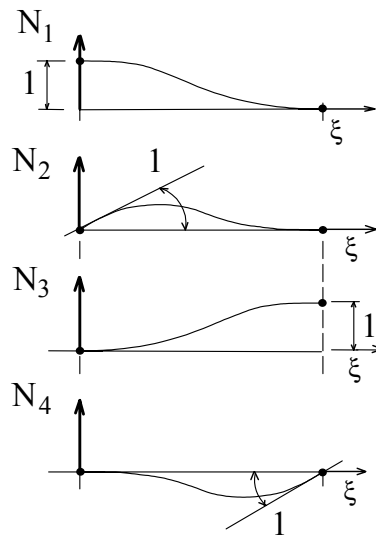


Figura 4.18: Funções de interpolação de Hermite.

O deslocamento  $u_t(s)$  também pode ser representado, em termos dos deslocamentos nodais  $u_{t1}, \theta_1, u_{t2}, \theta_2$ , na forma matricial como

$$u_t(s) = [N] \{q\}
 \tag{4.88}$$

onde

$$[N] = [ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 ] \quad (4.89)$$

e

$$\{q\}^T = \{ u_{t1} \quad \theta_1 \quad u_{t2} \quad \theta_2 \} . \quad (4.90)$$

O mesmo deslocamento  $u_t(s)$  pode ser representado por um polinômio cúbico

$$u_t(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3 \quad (4.91)$$

ou, em notação matricial,

$$u_t(s) = [\Phi] \{\alpha\} \quad (4.92)$$

onde

$$[\Phi] = [ 1 \quad s \quad s^2 \quad s^3 ] \quad (4.93)$$

e

$$\{\alpha\} = \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \}^T . \quad (4.94)$$

A rotação  $\theta(s) = \frac{du_t}{ds}$  é dada por

$$\theta(s) = [\Phi] \{\alpha\} \quad (4.95)$$

onde

$$[\Phi] = [ 0 \quad 1 \quad 2s \quad 3s^2 ] . \quad (4.96)$$

Para representar o deslocamento  $u_t(s)$  em termos dos deslocamentos nodais  $u_{t1}$  ,  $\theta_1$  ,  $u_{t2}$  ,  $\theta_2$  , avalia-se as expressões acima para  $u_t(s)$  e  $\theta(s)$  nos nós 1 e 2, ou seja,

$$q = \left\{ \begin{array}{l} u_{t1}(s=0) \\ \theta_1(s=0) \\ u_{t2}(s=L) \\ \theta_2(s=L) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \right\} \quad (4.97)$$

ou

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (4.98)$$

donde, pode-se escrever

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} \quad (4.99)$$

que, substituído na expressão para  $u_t(s)$ , leva a

$$u_t(s) = [\Phi] [A]^{-1} \{q\} \quad (4.100)$$

onde

$$[A]^{-1} = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{array} \right] \quad (4.101)$$

sendo que a multiplicação das matrizes  $[\Phi] [A]^{-1}$  produz a matriz  $[N]$  da expressão

$$u_t(s) = [N] \{q\} \quad (4.102)$$

Para a completa expressão da energia potencial, necessita-se a expressão da derivada segunda de  $u_t$  em relação aos deslocamentos nodais, isto é,

$$u_t''(s) = \frac{d^2 u_t}{ds^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 u_t}{d\xi^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2}{d\xi^2} [N] \{q\} \quad (4.103)$$

e

$$\frac{d^2 u_t}{ds^2} = [B] \{q\} \quad (4.104)$$

sendo que a matriz  $[B]$  é obtida através da correta diferenciação de  $u_t(s)$ , a qual é apresentada a seguir, como

$$\frac{d u_t}{ds} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\xi} (N_1(\xi) u_{t1} + N_2(\xi) \theta_1 + N_3(\xi) u_{t2} + N_4(\xi) \theta_2) \quad (4.105)$$

$$\frac{d u_t}{ds} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} (-6\xi + 6\xi^2) & L(1 - 4\xi + 3\xi^2) & (6\xi - 6\xi^2) & L(3\xi^2 - 2\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

e

$$\frac{d^2 u_t}{ds^2} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) & (-4L + 6L\xi) & (6 - 12\xi) & (6L\xi - 2L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.107)$$

Retornando à expressão da energia potencial

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} E I_z \left( \frac{d^2 u_t}{ds^2} \right)^2 ds - \int_{s_1}^{s_2} p(s) u_t ds \quad (4.108)$$

insere-se nela as expressões para  $d^2 u_t/ds^2$  e  $u_t$ , além de substituir-se  $ds = L d\xi$ , obtendo-se

$$\Pi_p = \frac{1}{2} E I_z L \int_0^1 \{q\}^T [B]^T [B] \{q\} d\xi - L \int_0^1 [N] \{q\} p d\xi \quad (4.109)$$

onde  $E I_z$  foi considerado uniforme ao longo do elemento. Fazendo-se a diferenciação de  $\Pi_p$  em relação aos deslocamentos nodais e igualando-se os resultados a zero, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial u_{t1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial u_{t2}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

obtem-se quatro equações as quais, expressas em forma matricial, fornecem

$$E I_z L \int_0^1 [B]^T [B] d\xi \{q\} = L \int_0^1 [N]^T p d\xi \quad (4.111)$$

ou

$$[K] \{q\} = \{Q\} \quad (4.112)$$

que é a equação do elemento finito de viga. A matriz de rigidez  $[K]$  é dada por

$$[K] = E I_z L \int_0^1 [B]^T [B] d\xi \quad (4.113)$$

e o vetor de carga  $\{Q\}$  é dado por

$$\{Q\} = L \int_0^1 [N]^T p d\xi. \quad (4.114)$$

Inserindo-se a matriz  $[B]$  na expressão da energia potencial obtém-se

$$[K] = \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} (2\xi - 1) \\ \frac{L}{2} (3\xi - 2) \\ \frac{6}{L^2} (2\xi - 1) \\ \frac{L}{2} (3\xi - 1) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{6}{L^2} (2\xi - 1) & \frac{L}{2} (3\xi - 2) & -\frac{6}{L^2} (2\xi - 1) & \frac{L}{2} (3\xi - 1) \end{array} \right] E I_z L d\xi \quad (4.115)$$

e após efetuar-se as integrações a matriz de rigidez apresenta a seguinte forma

$$[K] = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{simétrica} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

Considerando-se o vetor carga  $\{Q\}$ , após a introdução da matriz  $[N]$  na expressão para  $\{Q\}$  e considerando que o carregamento transversal varia linearmente com  $\xi$ , isto é,

$$p(\xi) = (1 - \xi) p_1 + \xi p_2 \quad (4.117)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os valores do carregamento nos nós 1 e 2, respectivamente, obtém-se

$$[Q] = L \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L\xi (1 - 2\xi + \xi^2) \\ \xi^2 (3 - 2\xi) \\ L\xi^2 (\xi - 1) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} 1 - \xi & \xi \end{array} \right] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\xi \quad (4.118)$$

e, após efetuar-se as integrações, obtém-se o vetor carga do elemento de viga da seguinte forma

$$\{Q\} = \frac{L}{20} \begin{Bmatrix} 7p_1 + 3p_2 \\ \frac{L}{3} (3p_1 + 2p_2) \\ 3p_1 + 7p_2 \\ -\frac{L}{3} (2p_1 + 3p_2) \end{Bmatrix}. \quad (4.119)$$

Se o carregamento transversal é considerado constante ao longo do elemento, o vetor carga é escrito como

$$\{Q\} = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{L}{6} \\ 1 \\ -\frac{L}{6} \end{Bmatrix}. \quad (4.120)$$

EXEMPLO :

A figura 4.19 mostra uma viga bi-apoiada de comprimento  $l = 20\text{cm}$ , área de seção transversal  $A = 2\text{cm}^2$ , com o módulo de elasticidade  $E = 2,0 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$  e carregamento transversal  $p = 100\text{kgf/cm}$ .

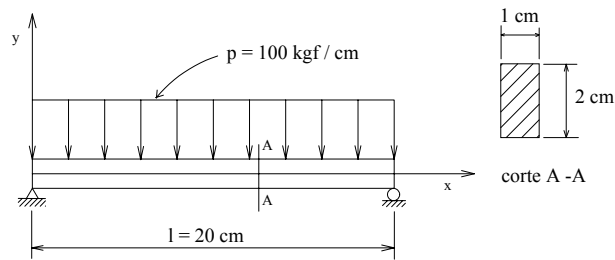


Figura 4.19: Viga bi-apoiada.

Este problema será resolvido usando o método dos elementos finitos e as etapas de superposição e cálculo de deslocamentos e tensões serão ilustradas através dele.

Considere que a viga é dividida em dois elementos, cada um deles com  $L = 10\text{cm}$ , como mostra a figura 4.20.

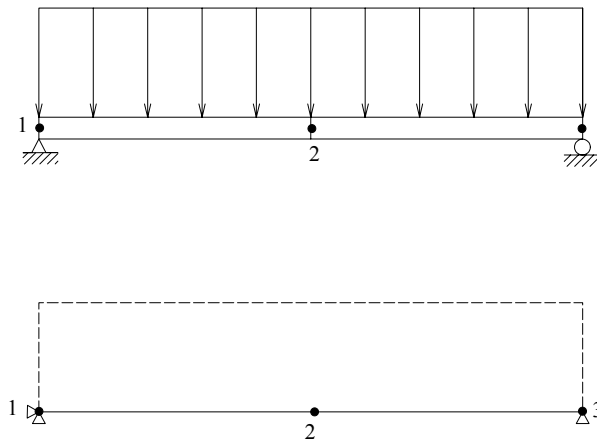


Figura 4.20: Viga apoiada - modelo discretizado.

A equação para cada elemento finito  $[K]\{q\} = \{Q\}$  pode ser escrita como

$$\frac{16 \times 10^3}{3} \begin{bmatrix} 3 & 15 & -3 & 15 \\ 15 & 100 & -15 & 50 \\ -3 & -15 & 3 & -15 \\ 15 & 50 & -15 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1000}{6} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

onde foi usado  $I_z = 2/3 \text{ cm}^4$ .

Considerando-se que a estrutura apresenta três nós, o processo de superposição leva à equação de elementos finitos para a estrutura global.

$$32 \begin{bmatrix} 3 & 15 & -3 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 100 & -15 & 50 & 0 & 0 \\ -3 & -15 & 6 & 0 & -3 & 15 \\ 15 & 50 & 0 & 200 & -15 & 50 \\ 0 & 0 & -3 & -15 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 15 & 50 & -15 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \\ u_{t3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

A viga é bi-apoiada; portanto, as condições de contorno são  $u_{t1} = u_{t3} = 0$ , as quais introduzidas no sistema acima, levam a

$$32 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -15 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 6 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 50 & 0 & 200 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 50 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \\ u_{t3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix}.$$

Este sistema pode ser assim reescrito

$$32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 \\ -15 & 6 & 0 & 15 \\ 50 & 0 & 200 & 50 \\ 0 & 15 & 50 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix}.$$

Aplicando o processo de eliminação de Gauss, vem:

$$\begin{array}{l} 32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 & 5 \\ 0 & 3,75 & 7,5 & 15 & 6,75 \\ 0 & 7,5 & 175 & 50 & -2,5 \\ 0 & 15 & 50 & 100 & -5 \end{bmatrix} \quad 32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1,8 \\ 0 & 0 & 160 & 20 & 16 \\ 0 & 0 & 20 & 40 & -32 \end{bmatrix} \\ \text{passo 1} \qquad \qquad \qquad \text{passo 2} \\ 32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0,125 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 37,5 & -30 \end{bmatrix} \quad 32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0,125 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,8 \end{bmatrix} \\ \text{passo 3} \qquad \qquad \qquad \text{passo 4} \end{array}$$

Portanto, chega-se ao seguinte sistema:

$$32 \begin{bmatrix} 100 & -15 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 1,8 \\ -0,1 \\ -0,8 \end{Bmatrix}$$

Aplicando-se a retrosubstituição, vem:

$$\theta_3 = -0,025 \text{ rad}$$

$$32 (\theta_2 + 0,125 \theta_3) = -0,1 \rightarrow \theta_2 = 0,0 \quad \theta_2 = 0$$

$$32 (u_{t2} + 0 + 4 \theta_3) = 1,8 \rightarrow u_{t2} = 0,15625 \text{ cm}$$

$$32 (100 \theta_1 - 15 u_{t2} + 0 + 0) = 5 \rightarrow \theta_1 = 0,025 \text{ rad}.$$



Portanto

$$\begin{pmatrix} u_{t1} \\ \theta_1 \\ u_{t2} \\ \theta_2 \\ u_{t3} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,025 \text{ rad} \\ 0,15625 \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \\ -0,025 \text{ rad} \end{pmatrix}.$$

Calculando os valores correspondentes pela solução analítica

$$u_t(x) = \frac{px}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

e

$$\theta(x) = \frac{p}{24EI} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$$

tem-se

$$\begin{aligned} u_{t1} &= 0 \quad ; \quad u_{t3} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_2 = 0 \\ \theta_1 &= 0,025rad \rightarrow \text{diferença } 0 \\ u_{t2} &= 0,15625cm \rightarrow \text{diferença } 0 \\ \theta_3 &= -0,025rad \rightarrow \text{diferença } 0. \end{aligned}$$

## 5. ELEMENTOS DE ELASTICIDADE PLANA

Neste capítulo são apresentados os fundamentos para a formulação de elementos de elasticidade plana, considerando os estados de tensão plana e deformação plana.

### 5.1. Estado de Tensões Planas

A figura 5.1 mostra uma viga e uma placa fina, sujeitas a carregamentos aplicados no plano que contém a estrutura, isto é, no plano  $x - y$ . A espessura de ambos os corpos é pequena comparada com as outras dimensões.

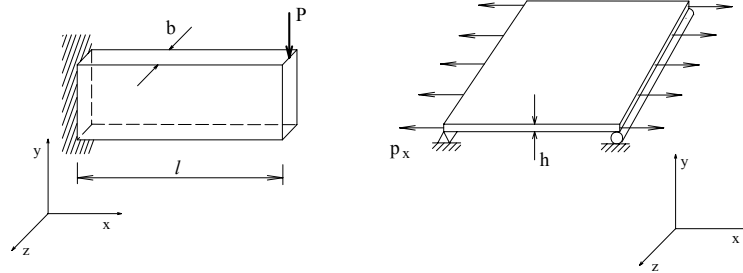


Figura 5.1: Estruturas estudadas com a aproximação do estado plano de tensões.

Estas condições permitem o uso da aproximação segundo a qual não ocorre variação das tensões na direção  $z$ , podendo-se desprezar as tensões  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  em presença das outras tensões. Então:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (5.1)$$

e somente  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yy}$  não são nulas. Este estado é chamado estado plano de tensões e as tensões não-nulas são representadas por

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.2)$$

sendo funções de  $x$  e  $y$  somente. As componentes de deformações correspondentes são:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.3)$$

e considerar-se-ão apenas as componentes  $u_x$  e  $u_y$  dos deslocamentos, nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. A deformação na direção  $z$  depende das deformações nas direções  $x$  e  $y$  e pode ser calculada por

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}).$$

Como o material é linear, elástico e isotrópico, as equações reduzem-se a

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy}\end{aligned}\tag{5.4}$$

ou, em notação matricial,

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\},\tag{5.5}$$

onde  $[C]$  é a matriz constitutiva

$$[C] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.\tag{5.6}$$

A hipótese do estado plano de tensões é justificável apenas como uma primeira aproximação para problemas de placas finas carregadas apenas em seu plano. O engenheiro deve estar ciente da possibilidade de ocorrerem deformações fora do plano, seja por descentramento da carga em relação à espessura ou por flambagem de placa.

## 5.2. Estado de Deformações Planas

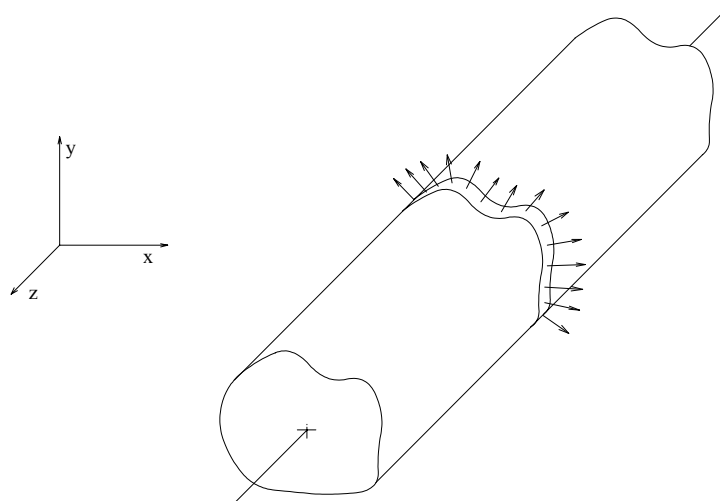


Figura 5.2: Aproximação usando deformações planas.

Em casos em que a espessura da estrutura é grande comparada com as dimensões nas direções  $x$  e  $y$ , como mostra a figura 5.2, e onde os carregamentos apenas no plano transversal da estrutura, pode-se assumir que o deslocamento  $u_z$  na direção  $z$  é desprezível e que os deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  são funções de  $x$  e  $y$ , somente. Neste caso:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0\tag{5.7}$$

e as tensões são agrupadas, similarmente ao estado de tensões planas, como:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.8)$$

sendo que  $\sigma_{zz}$  depende das outras componentes de tensão, sendo dada por

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Em vista de 5.8 as deformações são:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

e a equação constitutiva é dada por:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \quad (5.10a)$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (5.10b)$$

Como pode ser observado, os problemas de tensões planas e deformações planas, embora fisicamente bastante diversos, têm estrutura similar. Na prática pode-se obter as equações de deformações planas das equações de tensões planas pela substituição de  $E$  por  $\frac{E}{(1-\nu)}$  e de  $(1+\nu)$  por  $\frac{1}{(1-\nu)}$ .

A hipótese do estado plano tem pouco interesse prático, embora alguns poucos casos possam justificar seu uso como aproximação.

### 5.3. Triângulo de Deformações Constantes

Nesta seção é estudado o elemento plano mais simples possível. Considere um triângulo retirado de uma estrutura sob o estado plano de tensões, como uma placa, por exemplo.

Na figura 5.3,  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$  são os deslocamentos nodais, que podem ser representados por

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \quad (5.11)$$

Necessita-se agora relacionar este vetor deslocamentos nodais  $\{q\}$  com os vetores deformação  $\{\varepsilon\}$ , vetor tensão  $\{\sigma\}$  e, eventualmente, com as forças nodais correspondentes para poder-se escrever a matriz de rigidez deste elemento. Para tanto, necessita-se da relação entre forças nodais e tensões, a qual é encontrada usando apenas argumentos de equilíbrio.

Inicialmente, assume-se que as deformações ao longo do elemento são constantes (donde o nome do elemento):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a \\ \varepsilon_{yy} &= b \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = c. \end{aligned} \quad (5.12)$$

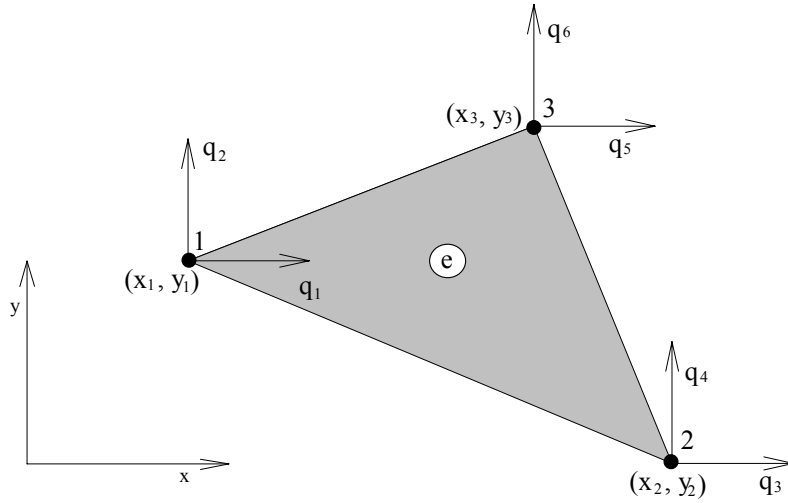


Figura 5.3: Elemento triangular de 3 nós.

Considera-se o triângulo inscrito numa placa retangular de material uniforme, sob a ação de tensão constante em uma direção, que pode ser  $y$ , como mostra a figura 5.4.

A figura 5.5 mostra o diagrama explodido da figura 5.4, onde o triângulo apresenta carregamentos concentrados nos pontos médios dos lados. Este possível tipo de carregamento manteria o triângulo em equilíbrio. Uma metodologia muito melhor seria considerar cada um destes carregamentos concentrados em duas partes e colocá-las em cada nó próximo.

Pode-se então constatar que, por exemplo,

$$Q_4 = \sigma_{yy} (x_1 - x_3) \frac{h}{2}$$

Os outros valores para  $Q_1, \dots, Q_6$  podem se achados para este carregamento  $\sigma_{yy}$ .

O mesmo procedimento pode ser adotado para as tensões  $\sigma_{xx}$ , e  $\sigma_{xy}$  obtendo-se os respectivos  $Q_1, \dots, Q_6$ . Os resultados da análise total podem ser colocados na forma matricial

$$\{P\} = [\xi] \{\sigma\} \quad (5.13)$$

onde a matriz  $[\xi]$  representa o uso das relações de equilíbrio.

O próximo passo é encontrar a relação entre os deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  ao longo do elemento e os deslocamentos nodais  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ . Primeiramente, integra-se as relações de deformações-deslocamentos 2.1, ou seja,

$$u_x(x, y) = \int \varepsilon_{xx} dx \quad (5.14)$$

$$= ax + f(y) \quad (5.15)$$

$$u_y(x, y) = \int \varepsilon_{yy} dy \quad (5.16)$$

$$= by + g(x) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = c \quad (5.18)$$

$$f'(y) + g'(x) = c \quad (5.19)$$

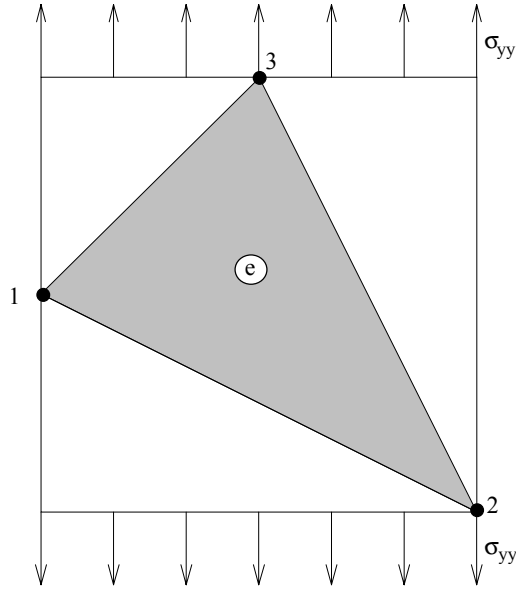


Figura 5.4: Triângulo inscrito numa placa.

donde se vê que as derivadas de  $f(y)$  e  $g(x)$  são constantes. Escolhendo arbitrariamente  $f'(y) = A$ , então  $g'(x) = c - A$ . Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y & 1 & 0 \\ 0 & y & x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ A \\ B \\ C \end{Bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\alpha\}. \quad (5.21)$$

Isto parece não ajudar em muito, desde que apenas um novo vetor de coeficientes constantes foi definido (três dos quais são deformações constantes e as constantes de integração são movimentos de corpo rígido). Mas, é muito fácil relacionar estas constantes aos deslocamentos nodais, pois

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_x(x_1, y_1) = ax_1 + Ay_1 + B \\ u_{y1} &= u_y(x_1, y_1) = by_1 + (c - A)x_1 + G \\ &\vdots \\ u_{y6} &= u_y(x_3, y_3) = by_3 + (c - A)x_3 + C \end{aligned} \quad (5.22)$$

e em forma matricial

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (5.23)$$

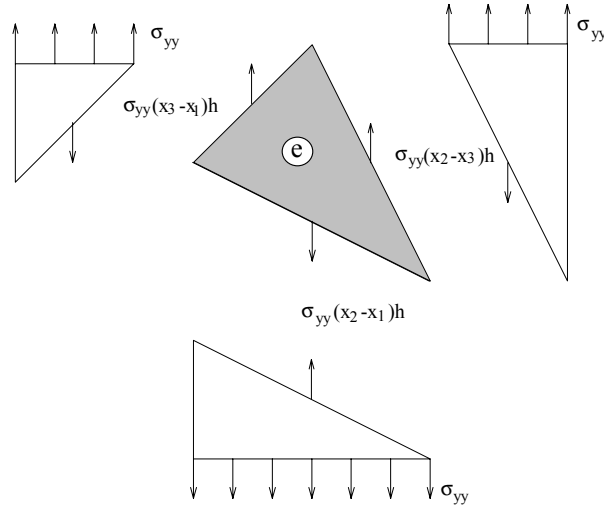


Figura 5.5: Visão explodida.

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{u\}. \quad (5.24)$$

Colocando todos estes resultados em uma mesma expressão, isto é:

$$\begin{aligned} \{P\} &= [\xi] \{\sigma\} \\ &= [\xi] [C] \{\varepsilon\} \\ &= [\xi] [C] [B] \{q\} \\ &= [\xi] [C] [B] [\Phi] \{\alpha\} \\ &= [\xi] [C] [B] [\Phi] [A]^{-1} \{u\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

obtém-se a relação

$$\{P\} = [K^e] \{q\} \quad (5.26)$$

onde  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento triangular de deformações constantes dada por

$$[K^e] = [\xi] [C] [B] [\Phi] [A]^{-1}. \quad (5.27)$$

A obtenção da matriz de rigidez foi feita usando-se o método direto, ou de equilíbrio, que funciona a contento aqui, mas que se tornaria muito difícil para elementos mais complicados. Devem ser usados, nestes casos, os métodos energéticos.

### 5.3.1. Superposição de Elementos Triangulares

Uma viga engastada, carregada com uma carga  $F$ , é discretizada usando-se elementos triangulares de 3 nós, como mostra a figura 5.7.

Para cada elemento 1, 2 e 3 tem-se a equação

$$\{Q\} = [K^e] \{q\}$$

sendo a matriz de rigidez  $[K^e]$  uma matriz 6x6. Para obter-se a matriz de rigidez da estrutura “somam-se” as matrizes de rigidez de cada elemento, isto é, superpõe-se estas matrizes, obtendo-se a matriz global

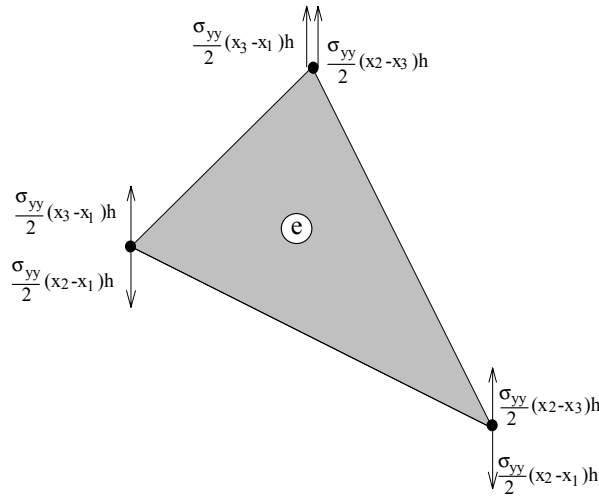


Figura 5.6: Carregamentos nodais.

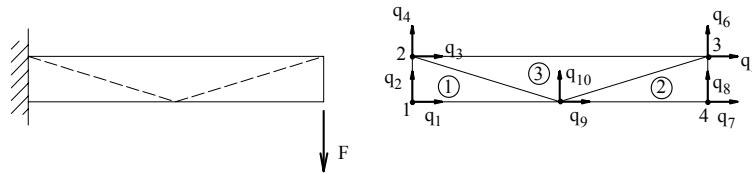


Figura 5.7: Viga discretizada.

na forma:

$$[K^G] = [K^1] + [K^2] + [K^3] \quad (5.28)$$

$$[K^G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3 & 3 & & & 1+3 & 1+3 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3 & 3 & & & 1+3 & 1+3 \\ & & 3 & 3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 3+2 & 3+2 \\ & & 3 & 3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 3+2 & 3+2 \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 1+2+3 & 1+2+3 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 1+2+3 & 1+2+3 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Nota: Para o triângulo de 3 nós da Figura 4.5, se for usado um sistema de coordenadas local onde  $x_1 = 0$  e  $y_1 = y_2 = 0$ , chega-se à matriz de rigidez obtida por Martin, Turner, Clough & Topp (1956) (ver páginas 21 e 22 deste famoso artigo).

## 5.4. Elemento quadrilátero Isoparamétrico

Considere a estrutura da figura 5.8, discretizada usando elementos quadriláteros. O problema é plano e a terceira dimensão ( $z$ ) é incluída especificando-se espessura unitária para o caso do estado plano de



deformações, ou espessura  $h$  para o caso do estado plano de tensões.

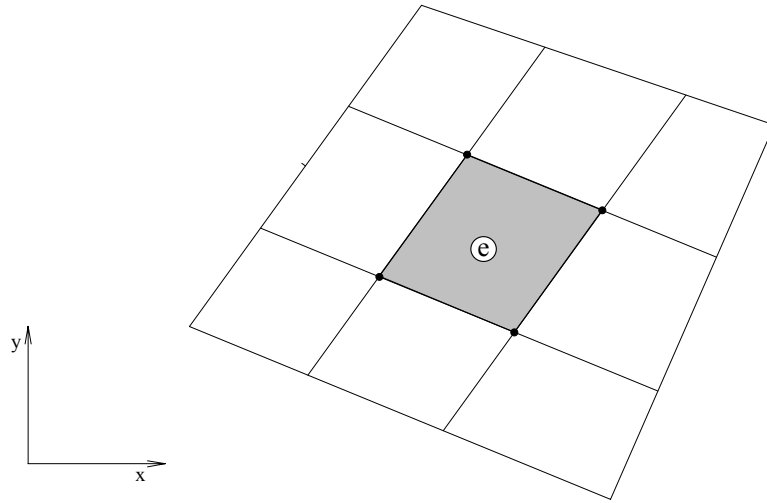


Figura 5.8: Estrutura plana.

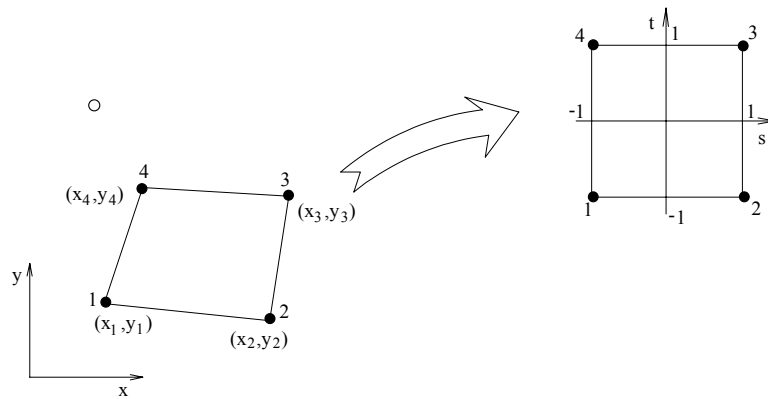


Figura 5.9: Elemento quadrilátero.

Considerando-se o elemento  $e$ , na figura 5.9, pode-se observar que existe uma relação entre os nós do elemento quadrilátero e os nós de elemento-mestre, o que ficará claro em instantes.

As variáveis neste problema são os deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ , os quais serão aproximados por relações bilineares

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ u_y(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned} \quad (5.30)$$

ou, em forma matricial,

$$\{u\} = [\phi] \{\alpha\} \quad (5.31)$$

onde

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$\{\alpha\}^T = \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \} \quad (5.33)$$

e  $[\Phi]$  é a matriz de coordenadas, similar à matriz  $[\phi]$  para elemento triangular, mas agora 2x8. Note que o termo  $xy$  caracteriza bilinearidade, mas a relação ainda é linear em uma dada direção.

Calculando-se  $u_x(x, y)$  e  $u_y(x, y)$  nos nós fornece

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i y_i, \quad i = 1, 4 \\ u_{yi} &= \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i y_i \end{aligned} \quad (5.34)$$

ou, em forma matricial,

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (5.35)$$

onde

$$\{q\}^T = \{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad u_{y4} \} \quad (5.36)$$

é o vetor dos deslocamentos nodais e  $[A]$  é a matriz quadrada (8x8) das coordenadas nodais. Pode-se também escrever

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} \quad (5.37)$$

que substituída em 5.31 fornece os deslocamentos  $u_x(x, y)$  e  $u_y(x, y)$  em qualquer ponto do elemento em termos dos deslocamentos nodais, isto é:

$$\{u\} = [\Phi] [A]^{-1} \{q\} = [N] \{q\}. \quad (5.38)$$

A matriz  $[N] = [\Phi] [A]^{-1}$  é uma matriz (2x8) e é chamada de matriz das funções de interpolação, sendo composta por funções  $N_i$ ,  $i = 1, 4$  definidas, em termos das coordenadas  $s$  e  $t$  do elemento-mestre, como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 - t) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 + t) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 + t). \end{aligned} \quad (5.39)$$

As coordenadas  $s$  e  $t$  são adimensionais e a figura 5.10 mostra qual a forma de cada uma destas funções.

A geometria, isto é, as coordenadas  $x$  e  $y$  de qualquer ponto do elemento podem ser expressas em termos das mesmas funções de interpolação  $N_i$ ,  $i = 1, 4$ :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned} \quad (5.40)$$

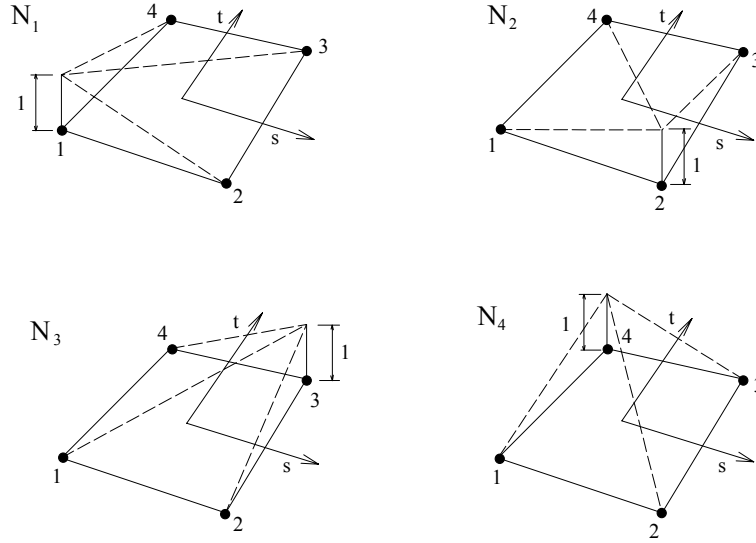


Figura 5.10: Distribuição das funções de interpolação  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ .

ou, em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (5.41)$$

Esta metodologia, em que a geometria, isto é, as coordenadas  $x$  e  $y$ , e as variáveis, isto é, os deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  são ambos aproximados pelas mesmas funções de interpolação, é chamada de conceito isoparamétrico. O elemento finito assim formulado é denominado elemento isoparamétrico. Quando a geometria do elemento é aproximada por polinômios de grau menor do que os polinômios que aproximam as variáveis, ele recebe o nome de elemento subparamétrico. Quando a geometria elemento é aproximada usando-se polinômios de grau superior aos graus dos polinômios usados na aproximação das variáveis, tem-se o elemento superparamétrico. A equação 5.41 junto com a equação 5.38 caracteriza o elemento isoparamétrico aqui usado.

Considere agora as equações deformações-deslocamentos 2.1 na sua versão para o estado plano de tensões. Então:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (5.42)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \quad (5.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad (5.44)$$

Como as funções de interpolação são escritas em termos de  $s$  e  $t$ , usa-se o seguinte resultado matemático

baseado no uso da regra da cadeia para diferenciação, no sentido de obter-se  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial s} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.45)$$

que pode ser representada, na forma matricial, por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [J] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

onde a matriz  $[J]$  é chamada de matriz Jacobiana. A equação 5.46 representa um conjunto de equações simultâneas onde  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$  são as incógnitas. Resolvendo 5.46 usando a Regra de Cramer resulta em

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right\} = \frac{1}{|J|} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana e é chamado de jacobiano, sendo dado por

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (5.48)$$

Os termos da equação 5.48 podem ser calculados usando expressões para  $x$  e  $y$  (equação 5.41) e  $N_i$  (equação 5.39). Por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{4} (1-s)(1-t)x_1 + \frac{1}{4} (1+s)(1-t)x_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (1+s)(1+t)x_3 + \frac{1}{4} (1-s)(1+t)x_4 \right] \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= -\frac{1}{4} (1-t)x_1 + \frac{1}{4} (1-t)x_2 + \frac{1}{4} (1+t)x_3 - \frac{1}{4} (1+t)x_4\end{aligned}\quad (5.49)$$

e assim também podem ser calculados os outros termos. Já

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = -\frac{1}{4} (1-t) \quad (5.50)$$

é mais facilmente calculada, como também o são os outros termos. Então,  $|J|$  é calculado como:

$$\begin{aligned}|J| &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \frac{\partial N_j}{\partial t} y_j \right) - \left( \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \frac{\partial N_j}{\partial s} y_j \right) \right] \\ |J| &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ x_i \left( \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) y_j \right]\end{aligned}\quad (5.51)$$

e fazendo  $i$  variar de 1 a 4 e  $j$  de 1 a 4 para cada  $i$ , obtém-se  $|J|$  em notação matricial como:

$$|J| = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1-t & -s+t & -1+s \\ -1+t & 0 & 1+s & -s-t \\ s-t & -1-s & 0 & 1+t \\ 1-s & s+t & -1-t & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right\}. \quad (5.52)$$

Multiplicando-se as matrizes em 5.52 resulta-se:

$$\begin{aligned}
 |J| &= \frac{1}{8} \{ (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) + \\
 &+ s [(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2) - (y_3 - y_4)] + \\
 &+ t [(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \}.
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

O uso da equação 5.47 permite o cálculo de  $\frac{\partial s}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial t}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial y}$  e  $\frac{\partial t}{\partial y}$  nas equações 5.42 a 5.44 como:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{|J|} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \right) \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{|J|} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \right). \tag{5.57}$$

Da equação 5.38

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_x}{\partial s} &= \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \\
 \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

e substituindo-se as equações 5.58 e 5.54 a 5.57 na equação 5.42 resulta em:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{|J|} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ u_{xi} \left( \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) \right]. \tag{5.59}$$

Adotando-se o mesmo procedimento para as equações 5.43 e 5.44, e considerando 5.59, pode-se escrever na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \end{bmatrix} \{q\} \tag{5.60}$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \tag{5.61}$$

onde  $\{q\}$  é definido em 5.35 e  $[B]$  é uma matriz cujos elementos têm a forma:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{8|J|} (y_{24} - y_{34}s - y_{23}t) \\
B_{12} &= \frac{1}{8|J|} (-y_{13} - y_{34}s - y_{14}t) \\
B_{13} &= \frac{1}{8|J|} (-y_{24} + y_{12}s - y_{14}t) \\
B_{14} &= \frac{1}{8|J|} (y_{13} - y_{12}s + y_{23}t) \\
B_{21} &= \frac{1}{8|J|} (-x_{24} - x_{34}s - x_{23}t) \\
B_{22} &= \frac{1}{8|J|} (x_{13} - x_{34}s - x_{14}t) \\
B_{23} &= \frac{1}{8|J|} (-x_{24} + x_{12}s - x_{14}t) \\
B_{24} &= \frac{1}{8|J|} (x_{13} - x_{12}s + x_{23}t)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

onde  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $y_{ij} = y_i - y_j$ .

#### 5.4.1. Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento Isoparamétrico

Para obter a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento, será utilizado o Princípio da Mínima Energia Potencial Total. A energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz}) d\Omega - \\
&\quad - \int_{\Omega} (\rho f_x u_x + \rho f_y u_y + \rho f_z u_z) d\Omega - \int_{\Gamma} (t_x u_x + t_y u_y + t_z u_z) d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.63}$$

que, considerando as aproximações impostas pela consideração do estado plano de tensões, e usando a notação matricial, pode ser escrita como:

$$\Pi = \frac{h}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dS - \frac{h}{2} \int_S \{u\}^T \{X\} dS - h \int_l \{u\}^T \{T\} dl \tag{5.64}$$

onde  $\{X\}$  é o vetor das componentes das forças de corpo, dada por:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \rho f_x \\ \rho f_y \end{Bmatrix} \tag{5.65}$$

$\{T\}$  é o vetor das componentes das trações na fronteira, nas direções  $x$  e  $y$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \tag{5.66}$$

$h$  é a espessura do elemento e  $S$  é a área do elemento.

Substituindo as equações (4.43) e (4.66) na equação (4.69) resulta em

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{h}{2} \{q\}^T \int_S [B]^T [C] [B] dS \{q\} - h \{q\}^T \int_S [N]^T \{X\} dS \\
&\quad - h \{q\}^T \int_l [N]^T \{T\} dl.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Como a energia potencial total está expressa em termos dos deslocamentos nodais  $\{q\}$ , toma-se derivadas parciais de  $\Pi$  em relação às componentes de  $\{q\}$ , isto é,  $u_{x1}, u_{y1}, \dots$ , e iguala-se cada uma destas derivadas a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x2}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x3}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x4}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y2}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y3}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y4}} &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = 0. \quad (5.68)$$

Faz-se assim a minimização da energia potencial total, usando o Princípio da Mínima Energia Potencial Total. A equação 5.68 representa oito equações de equilíbrio para o elemento, que podem ser escritas como:

$$[K^e] \{q\} = \{P\} \quad (5.69)$$

onde  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$[K^e] = h \int_S [B]^T [C] [B] dS \quad (5.70)$$

e  $\{P\}$  é o vetor de carga do elemento, dado por:

$$\{P\} = \{P_1\} + \{P_2\} = h \int_S [N]^T \{X\} dS + h \int_l [N]^T \{T\} dl. \quad (5.71)$$

#### 5.4.2. Cálculo da Matriz de Rigidez e do Vetor de Carga do Elemento

Os coeficientes da matriz  $[K^e]$  são funções das coordenadas  $s$  e  $t$ . Para calculá-los é mais conveniente usar integração numérica, como segue:

$$[K^e] \cong h \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [B(s_i, t_i)]^T [C] [(s_i, t_i)] |J(s_i, t_i)| W_i W_j \quad (5.72)$$

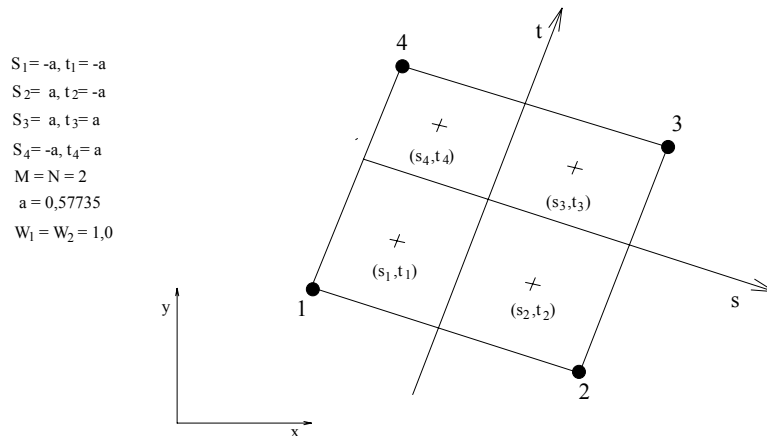


Figura 5.11: Integração numérica: esquema 2x2 pontos.

onde  $(s_i, t_i)$  denotam as coordenadas do ponto de integração  $t$ , e  $W_i$  denota o peso relativo do ponto de integração  $i$  na soma. Para elementos quadriláteros de 4 nós, normalmente usa-se o esquema 2x2 (ou 4 pontos) de integração (veja figura 5.11).

$\vdots$   
 A primeira parte do vetor de carga, ou seja,  $\{P_1\}$ , pode ser calculada por

$$\{P_1\} \cong h \sum_{i=1}^N [N(s_i, t_i)]^T W_i \quad (5.73)$$

onde, se a força de corpo  $\rho f_y$  [força/volume] for uniforme e  $\rho f_x = 0$ , tem-se o vetor  $\{P_1\}$  como:

$$\{P_1\} = h \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}_{(s_i, t_i)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_y \end{Bmatrix} |J(s_i, t_i)| W_i \quad (5.74)$$

onde  $(s_i, t_i)$  denota que a matriz é calculada em pontos  $(s_i, t_i)$ . Por exemplo, a quinta componente de  $\{P_1\}$  é:

$$P_{1(5)} \cong h \sum_{i=1}^N N_1(s_i, t_i) |J(s_i, t_i)| W_i \rho f_y \quad (5.75)$$

dando a força nodal, na direção  $y$ , no nó 1.

A segunda parte do vetor de carga, ou seja,  $\{P_2\}$ , aparece devido à trações aplicadas na superfície da estrutura; mais precisamente, na fronteira do elemento. Muitas vezes, esta parcela pode ser calculada usando-se integração fechada, ou seja, a integração numérica é desnecessária. Por exemplo, considere  $t_{x1}$  e  $t_{y1}$  como trações aplicadas no lado 1-2 do elemento da Figura 5.12. Então:



$$\{P_2\} = h \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{y1} \end{Bmatrix} dS \quad (5.76)$$

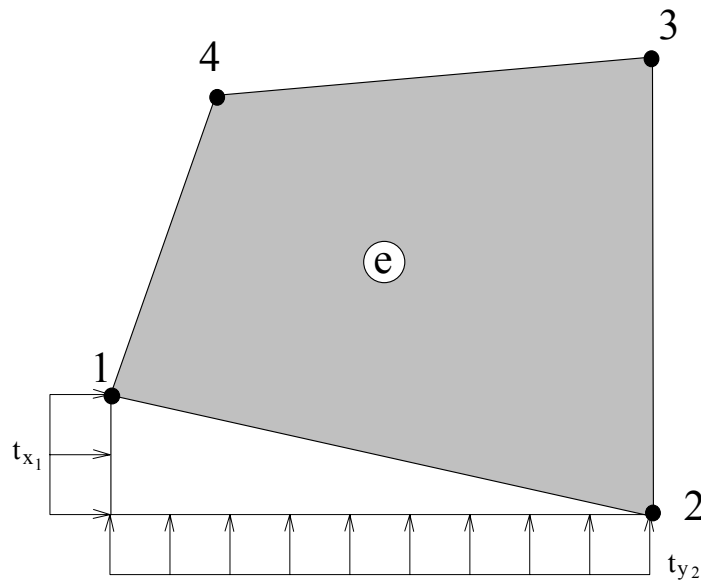


Figura 5.12: Trações no lado do elemento.

como, ao longo do lado 1-2,  $s = -1$ , e  $t = -1$ ,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} (1 - s) \\ N_2 &= \frac{1}{2} (1 + s) \\ N_3 &= N_4 = 0 \end{aligned}$$

o que torna a equação (4.80) em

$$\{P_2\} = \frac{h l_1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-s}{2} & 0 \\ \frac{1+s}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-s}{2} \\ 0 & \frac{1+s}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{y1} \end{Bmatrix} dS \quad (5.77)$$

onde  $s = \frac{2S}{l_1}$ ,  $dS = \frac{l_1}{2} ds = |J| ds$  e  $l_1$  é o lado 1-2. Após integrar,

$$\{P_2\} = \frac{h l_1}{2} \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{x1} \\ 0 \\ 0 \\ t_{y1} \\ t_{y1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.78)$$

Este resultado implica que o carregamento aplicado é distribuído igualmente entre dois nós que pertencem ao lado 1-2. Isto é uma consequência do fato da função de interpolação ser linear ao longo dos lados do quadrilátero.

## 5.5. Exemplo Comparativo de Algumas Malhas para um Estado Plano de Tensão

Considere a viga abaixo, engastada em uma extremidade e livre na outra, onde são aplicadas cargas conforme mostrado (Figura 5.13). A viga tem 9 unidades de comprimento, 1 de largura e 3 de altura, possuindo um módulo de elasticidade igual a 1 e coeficiente de Poisson igual a 0.

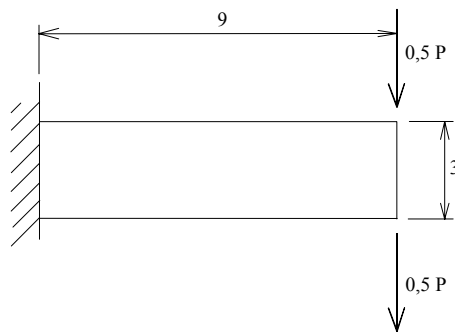


Figura 5.13: Viga engastada numa extremidade e livre na outra ( espessura = 1 unidade).

O problema foi resolvido utilizando-se cinco (05) malhas diferentes com elementos triangulares e quadrangulares. Os elementos utilizados foram:

- CST (Constant Strain Triangle) → Triângulo de deformação constante - onde as deformações são consideradas constantes dentro do elemento
- LST (Linear Strain Triangle) → Triângulo de deformação linear - onde as deformações são consideradas variando linearmente no elemento
- elemento quadrangular, com variação linear de deformações
- elemento quadrangular com expansão de  $u_x$  e  $u_y$  em polinomial de quarta ordem (incluindo rotação no plano  $x - y$ ).

Os resultados obtidos deslocamentos  $u_y$  na direção estão mostrados na figura 5.14 e 5.15, onde são comparados com a solução analítica. Os resultados mostram a superioridade do elemento quadrangular sobre o triangular (simples). Melhores resultados são obtidos com triângulo LST.

Um outro dado importante na escolha do elemento é o tempo de computação. A figura 5.16 abaixo apresenta o tempo de computação para cada tipo de elemento/malha utilizado.

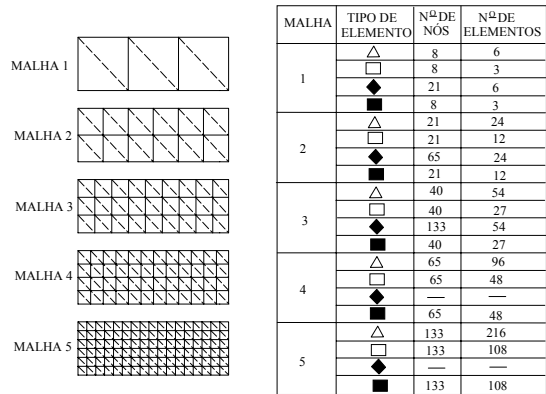


Figura 5.14: Malhas utilizadas

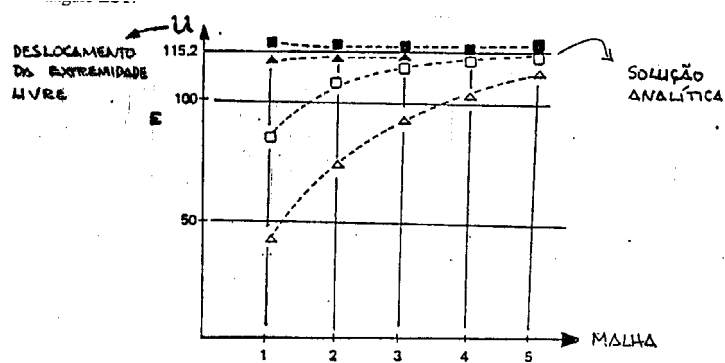


Figura 5.15: Deslocamento da extremidade livre  $x$  malha.

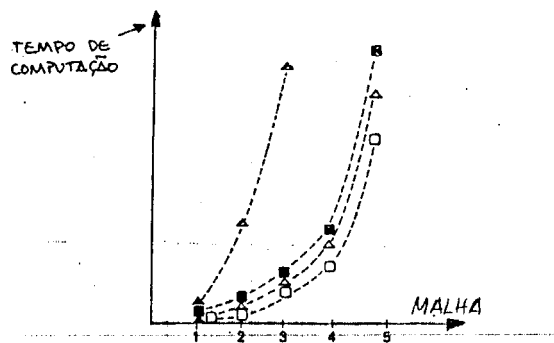


Figura 5.16: Tempo de computação  $x$  malha.

## 6. ELEMENTOS DE FLEXÃO DE PLACAS

Nesta secção é estudado o fenómeno de flexão de placas, considerando-se os deslocamentos transversais e suas derivadas. Os deslocamentos axiais não aparecem na formulação final, uma vez que os mesmos levam a um problema de elasticidade plana, similar ao visto no capítulo anterior, desacoplado do problema de flexão de placas.

### 6.1. Noções da Teoria de Flexão de Placas

Uma placa é uma estrutura caracterizada por uma dimensão muito pequena comparada com as outras duas dimensões, considerando-se um sistema cartesiano de referência. Uma placa é composta de três elementos básicos: superfície de referência, vértices e espessura, mostrados na Figura 6.1.

Considere que o plano  $xy$  seja o que contém a superfície de referência da placa e que a mesma é fina. Para estudar-se placas finas são adotadas as Hipóteses de Kirchhoff, enunciadas a seguir:

- 1) a placa é considerada fina;
- 2) as deflexões da placa são pequenas, comparadas com a sua espessura;
- 3) a tensão normal transversal  $\sigma_{zz}$  é desprezável;
- 4) as normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem normais à superfície de referência deformada e não sofrem variação de comprimento.

A deformação descrita pela hipótese 4) está mostrada na figura 6.2

Considerando a normal passando por um ponto  $(x, y, 0)$  e um ponto sobre esta normal em  $(x, y, z)$ , tem-se no estado deformado que as projeções desta normal nos planos  $xz$  e  $yz$  são feitas pela ação de pequenos ângulos  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . As componentes do deslocamento de um ponto  $(x, y, z)$  são dadas aproximadamente por:

$$u_x(x, y, z) \cong u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \quad (6.1)$$

$$u_y(x, y, z) \cong v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \quad (6.2)$$

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y) \quad (6.3)$$

onde  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  são os deslocamentos axiais e  $w(x, y)$  é o deslocamento transversal de um ponto  $(x, y, 0)$ . As equações (6.1-6.3) representam um campo de deslocamentos aproximado, decorrente da hipótese 4).

Considerando-se as equações de deformações-deslocamentos da teoria da elasticidade para o caso de

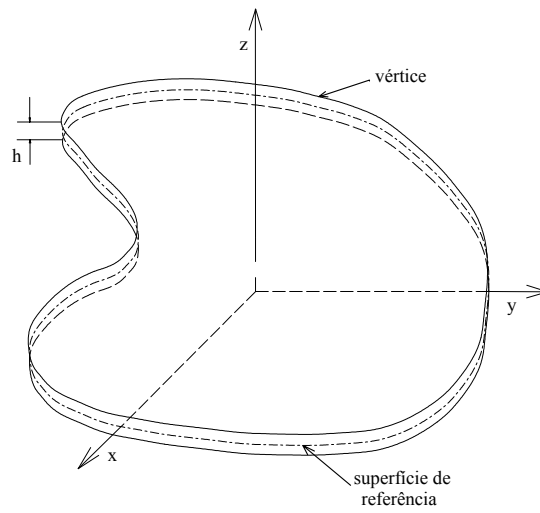


Figura 6.1: Elementos básicos de uma placa

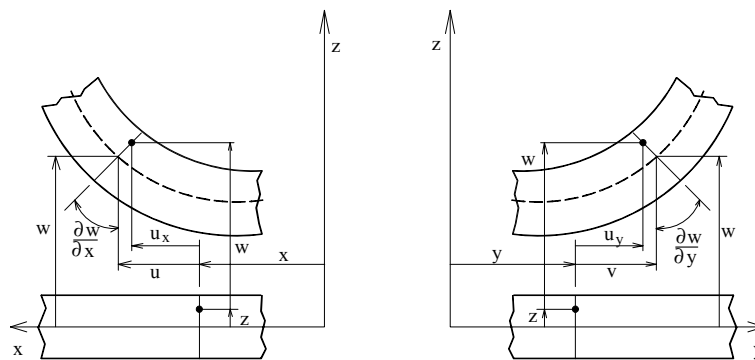


Figura 6.2: Deformação de uma placa de Kirchhoff.

pequenas deformações, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & (6.4) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}
\end{aligned}$$

e inserindo-se nelas as expressões (6.1-6.3) obtém-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

As equações tensões-deformações (ou equações constitutivas) da teoria de elasticidade são dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (6.8)$$

que aparecem aqui representadas usando-se a notação indicial e que aparecem em versão expandida no capítulo 2. Pode-se notar que em vista do fato que  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , obtém-se

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (6.9)$$

e lembrando que a tensão normal transversal  $\sigma_{zz} = 0$  é desprezável, considerando que ela é muito pequena comparada com as outras tensões normais, tem-se um estado de tensões planas, cujas equações tensões-deformações são dadas por

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (6.10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

e inserindo nelas expressões (6.5-6.7) obtém-se:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (6.11)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (6.12)$$

$$\sigma_{xy} = G \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (6.13)$$

As equações (6.5-6.7) para deformações-deslocamentos podem ser colocadas na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

onde o primeiro vetor do lado direito de 6.14 representa a contribuição de membrana na deformação e o segundo vetor representa a contribuição de flexão. Já a equação 6.10 pode ser escrita matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Introduzindo-se o conceito de tensões resultantes, devido ao fato da placa ser fina, usando as definições

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz \quad (6.16)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz \quad (6.17)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (6.18)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz \quad (6.19)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz \quad (6.20)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \quad (6.21)$$

onde (6.16-6.18) representam as tensões resultantes de membrana e (6.19-6.21) os momentos resultantes

relacionados à flexão. Introduzindo nas expressões acima as relações (6.11-6.13) obtém-se:

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.22)$$

$$N_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.23)$$

$$N_{xy} = Gh \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.24)$$

$$M_{xx} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6.25)$$

$$M_{yy} = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6.26)$$

$$M_{xy} = \frac{-Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.27)$$

que podem ser escritas nas formas matriciais

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

Desejando-se estudar placas semi-espessas, o cisalhamento transversal não poderá ser desprezado, ou seja,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  serão diferentes de zero. Neste caso, obviamente, as hipóteses de KIRCHHOFF não se aplicam, mas ainda pode-se considerar que:

- 1) as deflexões da placa são pequenas, comparadas com a espessura da mesma;
- 2) a tensão normal transversal  $\sigma_{zz}$  é desprezável;
- 3) as normais à superfície de referência indeformada da placa não permanecem normais à superfície de referência deformada permanecendo, no entanto, retas, e não sofrem variação de comprimento.

A hipótese 3) é obviamente uma aproximação, que pode ser visualizada na figura 6.3. Na verdade, a normal à superfície de referência, em consequência da ação do cisalhamento, deve deformar-se de uma forma mais complexa conforme apresentado na figura 6.4.

A hipótese 3) foi introduzida por MINDLIN e REISSNER, de maneiras diversas, sendo por isso conhecida a placa que a utiliza como placa de MINDLIN ou placa de MINDLIN-REISSNER. O campo de deslocamentos para a placa de MINDLIN é aproximado por:

$$u_x(x, y, z) \cong u(x, y) - z \theta_x(x, y) \quad (6.30)$$

$$u_y(x, y, z) \cong v(x, y) - z \theta_y(x, y) \quad (6.31)$$

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y) \quad (6.32)$$

onde, novamente,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são os deslocamentos axiais,  $w(x, y)$  é o deslocamento transversal e  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  são ângulos relacionados ao montante que a normal rotacionou.

Considerando as equações de deformações-deslocamentos (6.4) e nela inserindo as relações (6.30 - 6.32)



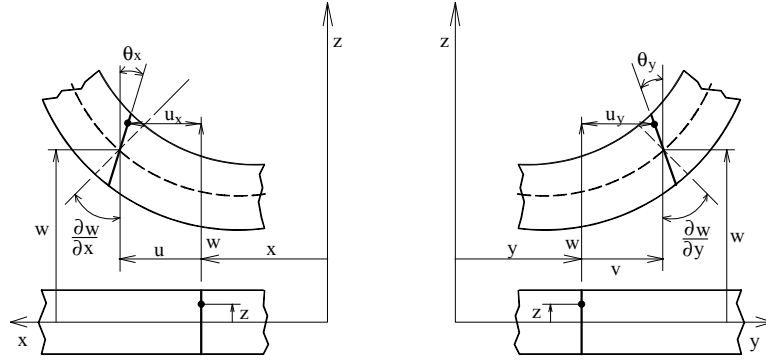


Figura 6.3: Deformação de uma placa de MINDLIN.

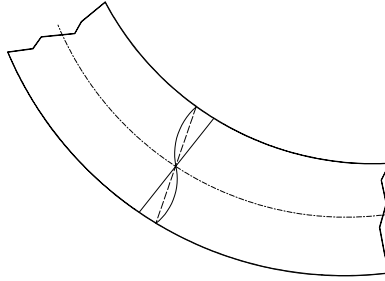


Figura 6.4: Deformação da normal considerando o efeito do cisalhamento.

obtém-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (6.33)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (6.34)$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (6.35)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (6.36)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (6.37)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

que, em termos matriciais, podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

Quando considera-se as equações tensões-deformações, deve-se lembrar que, novamente, a tensão normal transversal  $\sigma_{zz}$  é desprezável. Portanto, as equações constitutivas são

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_{xz} &= G \gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} &= G \gamma_{yz}\end{aligned}\tag{6.40}$$

Nelas inseridas as equações (6.33 - 6.37), obtém-se:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right]\tag{6.41}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right]\tag{6.42}$$

$$\sigma_{xy} = G \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right]\tag{6.43}$$

$$\sigma_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)\tag{6.44}$$

$$\sigma_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)\tag{6.45}$$

que em forma matricial podem ser assim escritas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}\tag{6.46}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}.\tag{6.47}$$

A introdução dos conceitos de tensões resultantes, usando as definições dadas pelas equações (6.16 - 6.21), e, adicionalmente, para esforços cortantes

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz\tag{6.48}$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz\tag{6.49}$$

leva às seguintes expressões;

$$\begin{aligned}N_{xx} &= \frac{E h}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ N_{yy} &= \frac{E h}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ N_{xy} &= G h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$M_{xx} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (6.50)$$

$$M_{yy} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (6.51)$$

$$M_{xy} = -\frac{G h^3}{12} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (6.52)$$

e

$$Q_x = k G h \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (6.53)$$

$$Q_y = k G h \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (6.54)$$

que, na forma matricial, repetem a equação (6.28) e fornecem

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.55)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k G h \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

O aparecimento do fator  $k$  é uma forma de se levar em consideração a real distribuição de tensões cisalhantes transversais. Note que  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , de acordo com as expressões 6.44 e 6.45, são constantes ao longo da espessura, o que não é correto. Para placas com secção transversal retangular, o valor de  $k$  é  $\frac{5}{6}$  de acordo MINDLIN e  $\frac{\pi^2}{12}$  de acordo com REISSNER.

Considerando as equações de equilíbrio de um corpo deformável, que pode ser uma placa,

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad (6.57)$$

e integrando as mesmas na direção da espessura, usando as definições (6.16 - 6.21) e (6.48 - 6.49), obtém-se as equações de equilíbrio em termos das tensões resultantes ou seja,

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0 \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y + m_y = 0 \quad (6.62)$$

Como pode-se notar, as equações (6.7 - 6.8) são desacopladas das equações (6.10 - 6.62) e constituem um problema de tensões planas, que deve ser resolvido separadamente. Isto significa que, em placas, o problema de membrana é desacoplado do problema de flexão, o que possibilita não levá-lo em conta nas equações para o estudo, na flexão de placas, dos deslocamentos axiais  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ .

## 6.2. Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento de Placa de Kirchhoff

Para se obter a matriz de rigidez e o vetor de carga para um elemento quadrilátero de placa de KIRCHHOFF, será utilizado o Princípio da Energia Potencial Total Máxima. A Energia Potencial total é dada

por

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (6.63)$$

que pode ser descrita, para o caso de placas finas por

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}] dz dS - \int_S p w dS \quad (6.64)$$

a qual em termos matriciais é

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz dS - \int_S p w dS \quad (6.65)$$

Inserindo na expressão acima as relações (6.14), isto é,

$$\{\varepsilon\} = -z \{K\} \quad (6.66)$$

onde  $\{K\}$  é o vetor curvatura, e (6.15), isto é,

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (6.67)$$

obtém-se

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \{K\}^T [C] \{K\} z^2 dz dS - \int_S p w dS \quad (6.68)$$

Integrando em z vem

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \{K\}^T [D] \{K\} dS - \int_S p w dS \quad (6.69)$$

onde  $[D]$  é a matriz da expressão 6.29, isto é,

$$\{M\} = [D] \{K\} . \quad (6.70)$$

Necessita-se estabelecer como será a forma de  $w$  e  $\{K\}$  para ter-se  $\Pi_p$  expressa em termos de coordenadas nodais. Desta forma, considera-se que o elemento finito de placa seja quadrilátero, como mostra a Figura 6.5, com três graus de liberdade por nó, isto é,  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$ ,  $\theta_{yi}$ , onde  $\theta_{xi} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i$ ,  $\theta_{yi} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i$ .

O campo de deslocamentos  $w(x, y)$  é aproximado por um polinômio incompleto de quarto grau em  $x$  e  $y$ , com 12 termos (número dos deslocamentos nodais do elemento):

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (6.71)$$

sendo que este polinômio, ao longo de uma reta  $x = constante$  (ou  $y = constante$ ), varia cubicamente. As fronteiras do elemento são compostas por estas retas. Como o polinômio cúbico é completamente definido por quatro constantes, os dois valores de inclinação e deslocamento nos extremos da fronteira definirão os deslocamentos ao longo desta fronteira. Como estes valores são comuns a elementos adjacentes, a

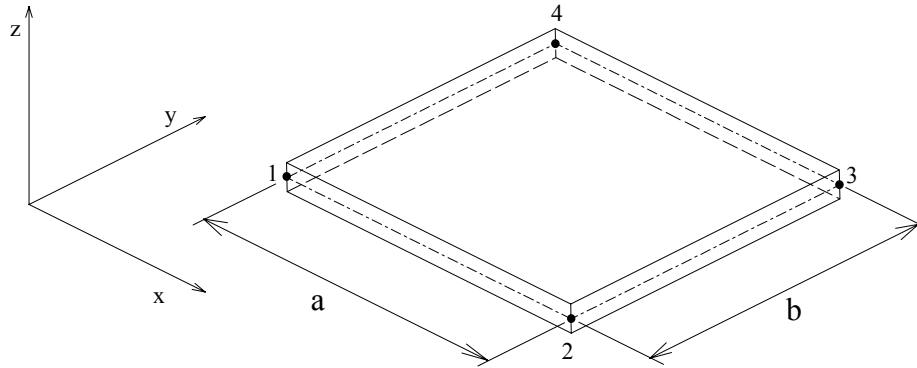


Figura 6.5: Elemento quadrilátero de placa

continuidade de  $w$  está imposta ao longo de qualquer fronteira. O gradiente normal a qualquer fronteira também varia cubicamente. Como ao longo da fronteira apenas dois valores da derivada normal são definidos, o polinômio cúbico não é especificado unicamente e uma descontinuidade da derivada normal deve ocorrer. Isto caracteriza o elemento do tipo “NÃO-CONFORME”.

Os valores das constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  podem ser obtidos escrevendo-se a equação 6.71 e suas derivadas em relação a  $x$  e a  $y$ , isto é.,  $\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x$  e  $\frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y$  para cada nó do elemento quadrilátero, resultando em 12 equações, quais sejam,

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1^2 + \dots + \alpha_{11} x_1^3 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_1^3 & (6.72) \\
 \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_1 &= \alpha_2 + 2\alpha_4 x_1 + \alpha_5 y_1 + \dots + 3\alpha_{11} x_1^2 y_1 + \alpha_{12} y_1^3 \\
 \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_1 &= \alpha_3 + \alpha_5 x_1 + 2\alpha_6 y_1 + \dots + \alpha_{11} x_1^3 + 3\alpha_{12} x_1 y_1^2 \\
 &\vdots \\
 \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_4 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_4 + 2\alpha_6 y_4 + \dots + \alpha_{11} x_4^3 + 3\alpha_{12} x_4 y_4^3
 \end{aligned}$$

que, escrita na forma matricial, fica:

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (6.73)$$

donde

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} . \quad (6.74)$$

Como na equação 6.71 tem-se

$$w = [P] \{\alpha\} \quad (6.75)$$

onde

$$[P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \quad (6.76)$$

pode-se obter

$$\begin{aligned}
 w &= [P][A]^{-1} \{q\} \\
 w &= [N] \{q\}
 \end{aligned} \quad (6.77)$$

onde  $[N]$  é a matriz das funções de interpolação, as quais são dadas na forma genérica por

$$N_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 + \xi^2 + \eta^2), \\ a\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1)^2 \\ b\eta_i(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1) \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

onde  $\xi = \frac{x-x_c}{a}$ ,  $\eta = \frac{y-y_c}{b}$ ,  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$ .

Introduzindo a expressão de  $w$  em 6.71 na expressão de  $\{K\}$  dada por 6.14, obtém-se

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N] \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N] \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N] \end{Bmatrix} \{q\} \quad (6.79)$$

$$q = \begin{Bmatrix} -2\alpha_4 & -6\alpha_7x & 2\alpha_8y & -6\alpha_{11}xy \\ -2\alpha_6 & -2\alpha_9x & -6\alpha_{10}y & -6\alpha_{12}xy \\ 2\alpha_5 & 4\alpha_8x & 4\alpha_9y & 6\alpha_{11}x^2 + 6\alpha_{12}y^2 \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

ou

$$\{K\} = [Q] \{\alpha\} \quad (6.81)$$

e inserindo 6.74 resulta em

$$\{K\} = [Q] [A]^{-1} \{q\} \quad (6.82)$$

$$\{K\} = [B] \{q\}$$

sendo

$$[Q] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{Bmatrix}$$

Retornando à expressão 6.69 tem-se

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \{q\}^T [B]^T [D] [B] \{q\} dS - \int_S \{q\}^T [N]^T p dS.$$

Tomando-se as derivadas parciais de  $\Pi_p$  em relação a cada um dos componentes de  $\{q\}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial w_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_1 \right)} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_1 \right)} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_4 \right)} &= 0 \end{aligned}$$

faz-se a minimização da energia potencial total e obtém-se a equação de elementos finitos para o elemento quadrilátero de placa de KIRCHHOFF, isto é,

$$[K^e] \{q\} = \{Q^e\} \quad (6.83)$$

onde

$$[K^e] = \int_S [B]^T [D] [B] dS \quad (6.84)$$

ou

$$[K^e] = [A]^{-1T} \int_S [Q]^T [D] [Q] dS [A]^{-1}$$

e

$$\{Q^e\} = \int_S [N]^T p dS \quad (6.85)$$

ou

$$\{Q^e\} = [A]^{-1T} \int_S [P]^T p dS$$

### 6.3. Matriz de Rigidez e Vetor Carga do Elemento de Placa de Mindlin

Novamente parte-se da expressão de energia potencial total que, para cascas semi-espessas assume a forma de

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}] dz dS + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}] dz dS - \int_S p w dS, \end{aligned} \quad (6.86)$$

a qual em termos matriciais é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz dS + \\ & \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz dS - \int_S p w dS. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Inserindo na expressão acima as expressões 6.38, isto é,

$$\{\varepsilon\} = -z \{\overline{K}\}$$

onde  $\{\overline{K}\}$  é o vetor curvatura e 6.39, isto é,

$$\{\gamma\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right\}^T$$

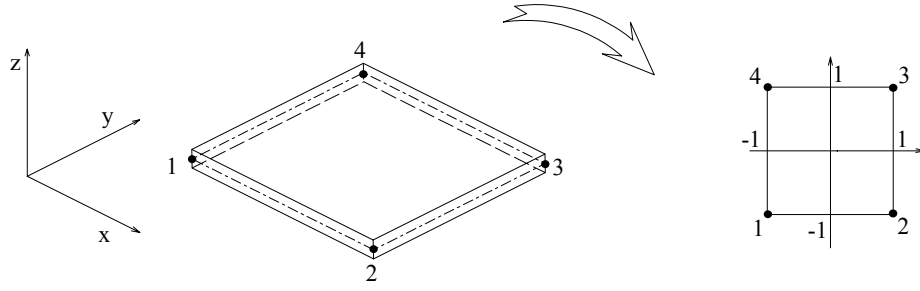


Figura 6.6: Elemento quadrilátero e elemento mestre.

e 6.46, isto é,

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (6.88)$$

e 6.47, isto é,

$$\{\tau\} = [G] \{\gamma\} \quad (6.89)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{K}\}^T [C] \{\bar{K}\} z^2 dz dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \{\gamma\}^T [G] \{\gamma\} dz dS - \int_S p w dS \end{aligned} \quad (6.90)$$

onde, integrando em  $z$ , tem-se

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \{\bar{K}\}^T [D] \{\bar{K}\} dS + \frac{1}{2} \int_S \{\gamma\}^T [kG] \{\gamma\} dS - \int_S p w dS \quad (6.91)$$

onde  $[D]$  é a matriz da expressão 6.4, isto é,

$$\{M\} = [D] \{\bar{K}\} \quad (6.92)$$

e

$$[kG] = k G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

Considerando o elemento de placa quadrilátero com seus graus de liberdade  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  interpolados como

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q} \end{Bmatrix} \quad (6.94)$$

tem-se

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_\theta \end{Bmatrix}$$



$$w = \begin{bmatrix} N_w & \end{bmatrix} \{q_w\}$$

onde

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \end{aligned} \tag{6.95}$$

sendo que as funções de interpolação são as mesmas do capítulo de elasticidade plana, isto é,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 - t) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 + t) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 + t) . \end{aligned}$$

Desta forma, interpolando-se a geometria de forma similar, isto é,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned}$$

pode-se fazer uso do mesmo conteúdo usado em elasticidade plana com o elemento isoparamétrico e escrever

$$\{\bar{K}\} = [B_f] \{q\} \tag{6.96}$$

$$\{\gamma\} = [B_c] \{q\} \tag{6.97}$$

que, introduzidas em 6.91, resultam em

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_S \{q\}^T [B]^T [D] [B] \{q\} dS + \frac{1}{2} \int_S \{q\}^T [B_c]^T [kG] [B_c] \{q\} dS - \int_S \{q\}^T [N]^T p dS \tag{6.98}$$

Derivando-se  $\Pi_p$  em relação a cada componente de  $\{q\}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial w_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \theta_{x1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \theta_{y1}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \theta_{y4}} &= 0 \end{aligned}$$

e ordenando as equações, obtém-se a equação do elemento finito de placa de MINDLIN

$$[K^e] \{q\} = \{Q^e\} \quad (6.99)$$

onde

$$[K^e] = \int_S [B_f]^T [D] [B_f] dS + \int_S [B_c]^T [k G] [B_c] dS \quad (6.100)$$

e

$$\{Q^e\} = \int_S [N]^T p dS .$$

Como os coeficientes de  $[K^e]$  e  $\{Q^e\}$  são funções de  $s$  e  $t$ , utiliza-se a integração numérica conhecida como QUADRATURA DE GAUSS, isto é,

$$[K^e] = [K_f^e] + [K_c^e]$$

$$\begin{aligned} [K_f^e] &= \int_S [B_f]^T [D] [B_f] dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_f]^T [D] [B_f] J ds dt \\ [K_f^e] &\simeq \sum_{IX=1}^N \sum_{IY=1}^N \left( [B_f]^T [D] [B_f] J \right) \Big|_{s=s_{IX}, t=t_{IY}} w_{IX} w_{IY} \end{aligned} \quad (6.101)$$

onde  $N$  = número de pontos de integração em cada direção.

A parte de cisalhamento da matriz de rigidez deve ser sub-integrada, utilizando a TÉCNICA DA SUB-INTEGRAÇÃO SELETIVA, a qual é necessária para evitar o fenômeno de travamento “locking” quando a placa torna-se excessivamente fina. Mesmo para placas mais espessas a técnica da sub-integração seletiva leva a melhores resultados. Então

$$\begin{aligned} [K_c^e] &= \int_S [B_c]^T [k G] [B_c] dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T [k G] [B_c] J ds dt \\ [K_c^e] &\simeq \sum_{IX=1}^{N-1} \sum_{IY=1}^{N-1} \left( [B_c]^T [k G] [B_c] J \right) \Big|_{s=s_{IX}, t=t_{IY}} w_{IX} w_{IY} \end{aligned} \quad (6.102)$$

e

$$\begin{aligned} \{Q^e\} &= \int_S [N]^T p dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T p J ds dt \\ \{Q^e\} &\simeq \sum_{IX=1}^N \sum_{IY=1}^N \left( [N]^T p J \right) \Big|_{s=s_{IX}, t=t_{IY}} w_{IX} w_{IY} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Deve-se, no entanto, salientar que a técnica da sub-integração seletiva pode introduzir modos indesejáveis de deformação, chamados de MODOS ESPÚRIOS, que introduzem em elementos sendo deformados modos de corpo rígido, ou seja, um movimento de corpo rígido provoca o aparecimento de tensões e deformações, o que é incompatível com as equações utilizadas e com o bom senso.