

CÁLCULO

Volume II

Howard Anton • Irl Bivens • Stephen Davis

8ª Edição





A634c

Anton, Howard

Cálculo / Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis ; tradução Claus Ivo Doering. – 8. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2007.

2 v. (680 ; 672 p.) : il. ; 28 cm

Conteúdo: v. 2. Modelagem matemática com equações diferenciais. Séries infinitas. Geometria analítica no cálculo. Espaço tridimensional; Vetores. Funções vetoriais. Derivadas parciais. Integrais múltiplas. Tópicos do cálculo vetorial.

ISBN 978-85-60031-63-4 (v. 1) – 978-85-60031-80-1 (v. 2)

I. Matemática – Cálculo. I. Título.

CDU 51-3



CÁLCULO

8ª Edição

Volume II

HOWARD ANTON

■ Drexel University

IRL BIVENS

■ Davidson College

STEPHEN DAVIS

■ Davidson College

Tradução:

Claus Ivo Doering

Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Reimpressão



2007

Obra originalmente publicada sob o título
Calculus: Early Transcendentals Single and Multivariable, 8th Edition

ISBN 0-471-47244-1

Copyright © 2005, Anton Textbooks, Inc. *All Rights Reserved.*
This translation published under license.

Capa: *Mário Röhnelt*, arte sobre capa original

Preparação de originais: *Renato A. Merker*

Supervisão editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Laser House*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S.A.
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Santana
90040-340 Porto Alegre RS
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte,
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação,
fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO
Av. Angélica, 1.091 - Higienópolis
01227-100 São Paulo SP
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

SOBRE HOWARD ANTON

Howard Anton é Bacharel em Matemática pela Lehigh University, Mestre em Matemática pela University of Illinois e Doutor em Matemática pela Polytechnic University of Brooklyn. No início da década de 1960 trabalhou na Burroughs Corporation e na Avco Corporation em Cabo Canaveral, na Flórida, onde esteve envolvido com o programa espacial tripulado. Em 1968 entrou para o Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então é professor adjunto da Drexel e dedica a maior parte de seu tempo a escrever livros didáticos e a atividades junto a associações matemáticas. Foi presidente da seção do leste do estado da Pensilvânia e do estado de Delaware da Mathematical Association of America (MAA), foi membro do conselho diretor daquela organização e orientou a criação das subdivisões estudantis da MAA. Publicou vários trabalhos de pesquisa em Análise Funcional, Teoria da Aproximação e Topologia, bem como artigos pedagógicos. É especialmente conhecido por seus livros didáticos em Matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Existem, atualmente, mais de uma centena de versões de seus livros, inclusive traduções para o espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebraico e alemão.

SOBRE IRL BIVENS

Irl C. Bivens, agraciado com a Medalha George Polya e o Prêmio Merten M. Hasse de Texto Didático de Matemática, é Bacharel em Matemática pelo Pfeiffer College e Doutor em Matemática pela University of North Carolina, em Chapel Hill. Desde 1982 leciona no Davidson College, onde atualmente ocupa a posição de professor de Matemática. Em um ano acadêmico típico, leciona Cálculo, Topologia e Geometria. Também é apreciador de história da Matemática e seu seminário anual de História da Matemática é um dos mais concorridos entre os formandos de Matemática de Davidson. Publicou vários artigos sobre Matemática do Ensino Superior, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Geometria Diferencial. Atualmente é membro do comitê editorial da série de livros de problemas matemáticos da MAA e consultor do *Mathematical Reviews*.

SOBRE STEPHEN DAVIS

Stephen L. Davis é Bacharel em Matemática pelo Lindenwood College e Doutor em Matemática pela Rutgers University. Tendo lecionado na Rutgers University e na Ohio State University, chegou ao Davidson College em 1981, onde atualmente é professor de Matemática. Leciona regularmente disciplinas de Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata e Computação. No ano letivo de 1995-1996 foi professor associado visitante no Swarthmore College. Publicou vários artigos sobre o ensino e a avaliação do Cálculo, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Teoria de Grupos Finitos. Ocupou vários postos, inclusive de presidente e tesoureiro, na seção sudeste da Mathematical Association of America (MAA). Atualmente é professor consultor do Serviço de Avaliação Educacional de Cálculo Avançado, membro da diretoria da Associação da Carolina do Norte de Professores de Matemática Avançada e ativamente envolvido no treinamento, no Clube de Matemática de Charlotte, de estudantes matematicamente talentosos do Ensino Médio. Foi diretor estadual da Carolina do Norte da MAA.

Para
Minha esposa, Pat
Meus filhos, Brian, David e Lauren

Em memória de
Minha mãe, Shirley
Meu pai, Benjamin
Albert Herr, estimado colega
Stephen Girard (1750-1831), filantropo

—*H.A.*

Para
Meu filho, Robert

—*I.B.*

Para
Minha esposa, Elisabeth
Meus filhos, Laura, Anne e James

—*S.D.*

PREFÁCIO

SOBRE ESTA EDIÇÃO

O principal foco desta nova edição foi *aumentar a compreensão estudantil* por meio de uma revisão cuidadosa da exposição do texto; a criação de novos tipos de problemas, em particular os Exercícios de Compreensão e os exercícios de Enfocando Conceitos; e a revisão de muitos exemplos, acrescentando mais passos e reformulando-os para maior clareza.

Recursos Computacionais Nesta edição fornecemos muitos exemplos e exercícios para os professores que queiram utilizar calculadoras gráficas, sistemas de computação simbólica ou outros programas. Contudo, esses exemplos e exercícios são implementados de tal maneira que é possível utilizar o texto em disciplinas em que os recursos computacionais são utilizados amplamente, moderadamente ou até mesmo não utilizados. Para dar um fundamento sólido ao uso desses recursos computacionais, incluímos uma seção denominada *Gráficos de Funções Utilizando Calculadoras e Recursos Computacionais* (Seção 1.2). Novos comentários, denominados *Domínio da Tecnologia*, direcionam os estudantes para aplicações tecnológicas recentes e úteis. Os exercícios que exigem recursos computacionais estão marcados com ícones para facilitar a identificação.

Internet Este texto é suplementado pelo *site*

www.wiley.com/college/anton

Exposição Revisada Cada página, cada explicação e cada exemplo foram criticamente reexaminados e tiveram sua exposição refeita, onde necessário, para levar os estudantes direto ao cerne das questões. Os Apêndices A, B, C e D da edição anterior foram deslocados para a web. Os módulos *Expandindo o Horizonte do Cálculo* agora estão na internet e os estudantes são dirigidos a eles em parágrafos introdutórios aos mesmos, com o endereço na internet ao final dos capítulos apropriados no texto.

NOVIDADES NA OITAVA EDIÇÃO

Exercícios Novos e Atualizados

- Os novos *Exercícios de Compreensão*, no início dos exercícios de cada seção, contêm uma coleção básica de quatro a oito exercícios planejados para tocar em aptidões e conceitos básicos da seção. Os estudantes podem utilizar esses exercícios como uma maneira concisa de testar seu conhecimento de cada seção. As respostas dos Exercícios de Verificação Rápida aparecem ao final de cada seção.
- O novo conjunto *Enfocando Conceitos* em cada grupo de exercícios destaca os exercícios que são mais conceituais.
- Os *Exercícios de Revisão* substituíram os Exercícios Suplementares ao final de cada capítulo. Uma seleção desses exercícios pode ser utilizada para rever conceitos importantes dentro do capítulo ou construir as verificações do mesmo. Além disso, as coleções de exercícios foram conferidas e expandidas para incluir uma maior variedade e uma equivalência mais acentuada entre exercícios pares e ímpares.

Introdução a Funções Exponenciais e Logarítmicas no Início O Capítulo 1 agora contém o material básico relativo a funções inversas, logarítmicas e exponenciais (que na edição anterior estava no Capítulo 4).

Notas Marginais Comentários marginais gerais chamam a atenção para idéias no texto ou fornecem idéias adicionais. Esses comentários gerais e os denominados *Domínio da Tecnologia* substituem os comentários intitulados *Para o Leitor* da edição anterior.

Análise de Funções O material tradicional sobre “esboço de curvas” aparece como parte da Análise de Funções (Seções 5.1-5.3). A Seção 5.3 foi revisada para obter um equilíbrio melhor entre os métodos do Cálculo e o uso de recursos computacionais no gráfico de funções. A seção sobre movimento retilíneo foi transferida para o final do capítulo para facilitar a transição da discussão de gráficos para o tópico de máximos e mínimos de funções. Assim, podemos tratar de aplicações mais cedo nesse capítulo.

Técnicas de Derivação A seção de Técnicas de Derivação (Seção 3.3) é dedicada, agora, às regras básicas: derivada de uma constante e de potências de x , a regra do múltiplo constante e as regras da soma e da diferença. As regras do produto e do quociente foram deslocadas para uma seção própria (Seção 3.4).

OUTRAS CARACTERÍSTICAS

Flexibilidade Esta edição foi feita com uma flexibilidade planejada para servir a um amplo espectro de filosofias do Cálculo, desde a mais tradicional até a mais inovadora. Os recursos computacionais podem ser enfatizados, ou não, e a ordem de muitos tópicos pode ser permutada livremente para acomodar as necessidades específicas do professor.

Revisão de Trigonometria Muitos alunos são atormentados por deficiências em Trigonometria, de modo que incluímos uma revisão de Trigonometria no Apêndice A.

Notas Históricas Nesta edição foram mantidas as notas históricas e as biografias que, desde sua primeira edição, são uma marca deste livro. Todo o material biográfico foi destilado de

referências básicas com o objetivo de capturar as personalidades dos grandes matemáticos e trazê-los com vida aos estudantes.

Exercícios Gradativos Alguns conjuntos de exercícios são gradativos, começando com problemas rotineiros e progredindo para problemas de maior dificuldade.

Rigor O desafio de escrever um bom livro de Cálculo está em obter o equilíbrio correto entre o rigor e a clareza. Nosso objetivo é apresentar uma Matemática rigorosa na maior extensão possível em um tratamento introdutório. Quando a clareza e o rigor colidem, escolhemos a clareza; contudo, acreditamos que é importante o estudante entender a diferença entre uma demonstração precisa e um argumento informal, de modo que tentamos tornar claro quando os argumentos apresentados são informais ou para motivação. A teoria envolvendo argumentos de ϵ - δ aparece em seções separadas, podendo ser estudada ou não, de acordo com a preferência do professor.

Nível Matemático Este texto foi escrito em um nível matemático que permita a preparação do estudante para as mais variadas profissões que requeiram uma sólida formação matemática, incluindo a Engenharia, várias ciências e a Administração.

Computação Gráfica Nesta edição fazemos uso extensivo da moderna computação gráfica para esclarecer conceitos e desenvolver a habilidade do estudante de visualizar objetos matemáticos, particularmente os do espaço tridimensional. Para aqueles que trabalham com recursos computacionais, há vários exercícios que foram projetados especialmente para desenvolver a habilidade de gerar e analisar curvas e superfícies matemáticas.

Aplicabilidade do Cálculo Um dos objetivos primários desta edição é estabelecer a relação do Cálculo com o mundo real e com as experiências próprias do estudante. Esse tema é mantido ao longo de exemplos, exercícios e módulos. As aplicações dadas nos exercícios foram escolhidas para fornecer ao estudante uma idéia da aplicabilidade do Cálculo.

Equações Diferenciais no Início As idéias básicas de equações diferenciais, problemas de valor inicial, campos de direções e curvas integrais são introduzidas simultaneamente com integração e depois revistas com mais detalhes no Capítulo 9.

Opção Paramétrica no Início De acordo com a tendência moderna de discutir as equações paramétricas no início da disciplina, introduzimos as curvas paramétricas na Seção 1.8, para depois rever o assunto no Capítulo 11, onde discutimos os assuntos relacionados ao Cálculo. Os professores que preferirem a tradicional discussão das equações paramétricas mais tarde não encontrarão problema algum em postergar o material da Seção 1.8 até a discussão sobre Geometria Analítica no Capítulo 11.

Princípios do Cálculo de Integrais O tradicional capítulo sobre Técnicas de Integração é denominado “Princípios do Cálculo de Integrais” para refletir uma abordagem mais moderna do material. O capítulo enfatiza métodos gerais e o papel de recursos computacionais no lugar de truques específicos para calcular integrais complicadas ou obscuras.

Apêndice de Equações Polinomiais Como muitos estudantes têm dificuldades em resolver equações polinomiais, incluímos o Apêndice B, em que revisamos o Teorema da Fatoração, o Teorema do Resto e o procedimento para encontrar raízes racionais.

Regra dos Quatro A “regra dos quatro” diz respeito à apresentação dos conceitos dos pontos de vista verbal, algébrico, visual e numérico. De acordo com a filosofia pedagógica atual, sempre que indicado, utilizamos essa abordagem.

SUPLEMENTOS

SUPLEMENTOS PARA O ESTUDANTE*

Student Solutions Manual, Neil Wigley

O Manual de Soluções para o Estudante (em inglês) fornece soluções detalhadas para os exercícios ímpares do livro.

Uma Variável: ISBN 0-471-67205-X

Várias Variáveis: ISBN 0-471-67212-2

Student Study Guide, Brian Camp

O Guia de Estudos para o Estudante (em inglês) contém idéias centrais e sugestões de estudo, bem como amostras de provas para cada seção e capítulo do livro.

Uma Variável: ISBN 0-471-67206-8

Várias Variáveis: ISBN 0-471-67213-0

SUPLEMENTOS PARA O PROFESSOR**

Instructor's Manual, Irl Bivens e Stephen Davis

O Manual do Professor (em inglês) fornece cronogramas e planos de ensino para cada seção do livro. A maioria dos planos de ensino contém uma lista não numerada dos pontos essenciais a serem enfatizados. A discussão de cada seção conclui com uma amostra de trabalho de casa para os alunos.

ISBN 0-471-67202-5

* Disponível somente no mercado norte-americano.

** Os professores interessados em receber material de apoio (em inglês) devem entrar em contato com a Bookman Editora pelo endereço secretariaeditorial@artmed.com.br e encaminhar comprovante de docência.

Instructor's Solutions Manual, Neil Wigley

O Manual de Soluções para o Professor (em inglês) contém soluções detalhadas para todos os exercícios do livro.

Uma Variável: ISBN 0-471-67203-3

Várias Variáveis: ISBN 0-471-72429-7

Test Bank, Henry Smith

O Banco de Testes (em inglês) contém uma variedade de perguntas e respostas para cada seção do livro.

ISBN 0-471-67204-1

PARA O ESTUDANTE E O PROFESSOR

Módulos Horizonte na Internet

Alguns capítulos selecionados terminam com referências a módulos na internet denominados *Expandindo o Horizonte do Cálculo*. Como o nome indica, esses módulos têm o propósito de levar o estudante um passo além do texto tradicional de Cálculo. Eles são opcionais, podem ser usados como projetos para trabalho em grupo ou individual e podem ser usados pelos professores na disciplina. Por exemplo, há módulos que trabalham iteração e sistemas dinâmicos, equações do movimento, aplicação de integração a projeto de estrada de ferro, colisão de cometa com a Terra e modelagem de furacões. Esses módulos podem ser encontrados no *site*

www.bookman.com.br

OUTROS RECURSOS

eGrade Plus é uma ferramenta *on-line* poderosa que disponibiliza, tanto para professores quanto para estudantes, uma coleção integrada de recursos de ensino e aprendizado num *site* fácil de utilizar (em inglês). O eGrade Plus está organizado em torno das atividades essenciais executadas pelo professor e pelo aluno em sala de aula:

Para Professores

- **Prepare e Apresente:** Crie apresentações de aulas utilizando todos os recursos oferecidos pela Wiley, tais como versões *on-line* do livro, apresentações em *PowerPoint* e simulações interativas, tornando mais eficiente seu tempo de preparo de aula. Esses conteúdos podem ser facilmente adaptados, personalizados e completados para atender as demandas de sua disciplina.
- **Crie Trabalhos de Casa:** Automatize a elaboração e a correção de trabalhos de casa e de testes utilizando bancos de testes fornecidos pela Wiley ou escrevendo seu próprio banco. Os trabalhos de casa dos alunos serão automaticamente avaliados e as notas lançadas em sua planilha de notas. eGrade Plus pode estabelecer vínculos entre os problemas passados para casa e as seções *on-line* do livro, disponibilizando um assessoramento contextualizado para os alunos.
- **Registre o Progresso dos Alunos:** Mantenha um registro do progresso de seus alunos através de uma planilha das notas, que lhe permitirá analisar resultados individuais e globais da classe para determinar seu progresso e nível de entendimento.
- **Administre sua Disciplina:** eGrade Plus pode ser facilmente integrado com outros sistemas de administração de classe, planilhas de notas ou outros recursos que possam estar sendo utilizados em sua disciplina, fornecendo flexibilidade para construir sua própria disciplina, com seu próprio estilo.

Para Estudantes

O eGrade Plus da Wiley fornece retorno instantâneo aos trabalhos de casa e um tesouro de material de apoio. Essa ferramenta poderosa vai ajudar seus alunos a desenvolver a compreensão conceitual do material de aula e aumentar sua habilidade de resolver problemas.

- **Study&Practice:** a área “**Estude e Pratique**” (em inglês) está vinculada diretamente ao conteúdo do livro, permitindo aos estudantes revisar o texto enquanto estudam e elaboram os trabalhos de casa. Esse pacote inclui os seguintes:
 - **Soluções de Cálculo utilizando JustAsk! (Marca Registrada)** (em inglês) inclui problemas que se relacionam com material dos capítulos, tutoriais interativos, soluções e respostas detalhadas e orientações para soluções.
 - **Explorações do Cálculo** (em inglês) consiste numa série de aplicativos interativos Java que permitem ao estudante explorar o significado geométrico de muitos conceitos centrais do Cálculo 1.
 - **Revisão de Álgebra e Trigonometria** (em inglês) é uma revisão orientada, com ritmo ditado pelo usuário, de tópicos centrais da Álgebra e Trigonometria que são essenciais ao domínio do Cálculo.
 - **O Manual de Soluções para o Estudante** (em inglês) contém soluções detalhadas para exercícios selecionados do livro.
 - **O Guia de Estudos para o Estudante** (em inglês) oferece sugestões e dicas de estudo, idéias e conceitos centrais e amostras de testes e provas.
 - **Testes On-Line de Cálculo** (em inglês) oferece oportunidades para auto-avaliação de estudantes.
- **Assignment:** a área “**Trabalho de Casa**” (em inglês) mantém num mesmo lugar todos os trabalhos que você quer que seus alunos completem, facilitando-lhes manter-se em dia. Os estudantes terão acesso a uma variedade de ferramentas interativas de resolução de problemas, bem como outros recursos para aumentar sua confiança e entendimento. Além disso, muitos trabalhos de casa contém um *link* para as seções correspondentes do livro multimídia, fornecendo aos estudantes auxílio contextualizado do assunto estudado que os ajuda a vencer os obstáculos na resolução de problemas à medida que aparecerem.
- **Gradebook:** uma **Planilha Pessoal de Notas** (em inglês) permite que cada aluno confira suas notas de trabalhos anteriores a qualquer momento.

Por favor, visite o *site* www.wiley.com/college/anton (em inglês) ou confira uma demonstração *on-line* em www.wiley.com/college/egradeplus. Aqui podem ser encontradas informações adicionais (em inglês) sobre as características e vantagens de eGrade Plus, como solicitar um *test drive* de eGrade Plus para este livro e como adaptá-lo para uso em classe.

The Faculty Resource Network *A Rede de Recursos para o Corpo Docente* (em inglês) é uma rede para o uso de professores, mantida por professores do Ensino Superior dedicados ao efetivo uso de tecnologia em sala de aula. Esse grupo pode ajudá-lo a aplicar técnicas inovadoras em sala de aula, implementar pacotes específicos de aplicativos e adaptar a utilização de recursos às necessidades específicas de cada turma. Solicite mais informações ao seu representante local da Wiley.

AGRADECIMENTOS

Tivemos a sorte de contar com a orientação e o apoio de muita gente talentosa, cujos conhecimento e habilidade enriqueceram este livro de muitas formas. Por sua valiosa ajuda, agradecemos a:

REVISORES E COLABORADORES DA OITAVA EDIÇÃO

Gregory Adams, *Bucknell University*
Bill Allen, *Reedley College–Clovis Center*
Jerry Allison, *Black Hawk College*
Stella Ashford, *Southern University and A&M College*
Christopher Barker, *San Joaquin Delta College*
David Bradley, *University of Maine*
Paul Britt, *Louisiana State University*
Andrew Bulleri, *Howard Community College*
Miriam Castroconde, *Irvine Valley College*
Neena Chopra, *The Pennsylvania State University*
Gaemus Collins, *University of California, San Diego*
Danielle Cross, *Northern Essex Community College*
Stephan DeLong, *Tidewater Community College–Virginia Beach Campus*
Ryness Doherty, *Community College of Denver*
T. J. Duda, *Columbus State Community College*
Peter Embalabala, *Lincoln Land Community College*
Laurene Fausett, *Georgia Southern University*
Richard Hall, *Cochise College*
Noal Harbertson, *California State University, Fresno*

Donald Hartig, *California Polytechnic State University*
Konrad Heuvers, *Michigan Technological University*
John Johnson, *George Fox University*
Grant Karamyan, *University of California, Los Angeles*
Cecilia Knoll, *Florida Institute of Technology*
Carole King Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Richard Lane, *University of Montana*
James Martin, *Wake Technical Community College*
Vania Mascioni, *Ball State University*
Tamra Mason, *Albuquerque TVI Community College*
Roy Mathias, *The College of William & Mary*
John Michaels, *SUNY Brockport*
Darrell Minor, *Columbus State Community College*
Darren Narayan, *Rochester Institute of Technology*
Efton Park, *Texas Christian University*
Joanne Peeples, *El Paso Community College*

Richard Ponticelli, *North Shore Community College*
Holly Puterbaugh, *University of Vermont*
Robert Rock, *Daniel Webster College*
John Saccoman, *Seton Hall University*
Paul Seeburger, *Monroe Community College*
Charlotte Simmons, *University of Central Oklahoma*
Bryan Stewart, *Tarrant County College–Southeast Campus*
Bradley Stoll, *The Harker School*
Eleanor Storey, *Front Range Community College*
Richard Swanson, *Montana State University*
Helene Tyler, *Manhattan College*
Paramanathan Varatharajah, *North Carolina A&T State University*
David Voss, *Western Illinois University*
Jim Voss, *Front Range Community College*
Richard Watkins, *Tidewater Community College*
Jane West, *Trident Technical College*
Janine Wittwer, *Williams College*
Richard Zang, *University of New Hampshire*
Diane Zych, *Erie Community College–North Campus*

REVISORES E COLABORADORES DE EDIÇÕES ANTERIORES

Edith Ainsworth, *University of Alabama*
Loren Argabright, *Drexel University*
David Armacost, *Amherst College*
Dan Arndt, *University of Texas at Dallas*
Ajay Arora, *McMaster University*

Mary Lane Baggett, *University of Mississippi*
John Bailey, *Clark State Community College*
Robert C. Banash, *St. Ambrose University*
William H. Barker, *Bowdoin College*
George R. Barnes, *University of Louisville*

Scott E. Barnett, *Wayne State University*
Larry Bates, *University of Calgary*
John P. Beckwith, *Michigan Technological University*

xiv Agradecimientos

- Joan E. Bell, *Northeastern Oklahoma State University*
Harry N. Bixler, *Baruch College, CUNY*
Kbenesh Blayneh, *Florida A&M University*
Marilyn Blockus, *San Jose State University*
Ray Boersma, *Front Range Community College*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
David Bolen, *Virginia Military Institute*
Daniel Bonar, *Denison University*
George W. Booth, *Brooklyn College*
Phyllis Boutillier, *Michigan Technological University*
Linda Bridge, *Long Beach City College*
Mark Bridger, *Northeastern University*
Judith Broadwin, *Jericho High School*
John Brothers, *Indiana University*
Stephen L. Brown, *Olivet Nazarene University*
Virginia Buchanan, *Hiram College*
Robert C. Bucker, *Western Kentucky University*
Robert Bumcrot, *Hofstra University*
Christopher Butler, *Case Western Reserve University*
Carlos E. Caballero, *Winthrop University*
Cheryl Cantwell, *Seminole Community College*
James Caristi, *Valparaiso University*
Judith Carter, *North Shore Community College*
Stan R. Chadick, *Northwestern State University*
Hongwei Chen, *Christopher Newport University*
Chris Christensen, *Northern Kentucky University*
Robert D. Cismowski, *San Bernardino Valley College*
Patricia Clark, *Rochester Institute of Technology*
Hannah Clavner, *Drexel University*
Ted Clinkenbeard, *Des Moines Area Community College*
David Clydesdale, *Sauk Valley Community College*
David Cohen, *University of California, Los Angeles*
Michael Cohen, *Hofstra University*
Pasquale Condo, *University of Lowell*
Robert Conley, *Precision Visuals*
Mary Ann Connors, *U.S. Military Academy at West Point*
Cecil J. Coone, *State Technical Institute at Memphis*
Norman Cornish, *University of Detroit*
Fielden Cox, *Centennial College*
Terrance Cremeans, *Oakland Community College*
Gary Crown, *Wichita State University*
Lawrence Cusick, *California State University–Fresno*
Michael Dagg, *Numerical Solutions, Inc.*
Art Davis, *San Jose State University*
A. L. Deal, *Virginia Military Institute*
Charles Denlinger, *Millersville University*
William H. Dent, *Maryville College*
Blaise DeSesa, *Allentown College of St. Francis de Sales*
Blaise DeSesa, *Drexel University*
Debbie A. Desrochers, *Napa Valley College*
Dennis DeTurck, *University of Pennsylvania*
Jacqueline Dewar, *Loyola Marymount University*
Preston Dinkins, *Southern University*
Gloria S. Dion, *Educational Testing Service*
Irving Drooyan, *Los Angeles Pierce College*
Tom Drouet, *East Los Angeles College*
Clyde Dubbs, *New Mexico Institute of Mining and Technology*
Della Duncan, *California State University–Fresno*
Ken Dunn, *Dalhousie University*
Sheldon Dyck, *Waterloo Maple Software*
Hugh B. Easler, *College of William and Mary*
Scott Eckert, *Cuyamaca College*
Joseph M. Egar, *Cleveland State University*
Judith Elkins, *Sweet Briar College*
Brett Elliott, *Southeastern Oklahoma State University*
William D. Emerson, *Metropolitan State College*
Garret J. Etgen, *University of Houston*
Benny Evans, *Oklahoma State University*
Philip Farmer, *Diablo Valley College*
Victor Feser, *University of Maryland*
Iris Brann Fetta, *Clemson University*
James H. Fife, *Educational Testing Service*
Sally E. Fischbeck, *Rochester Institute of Technology*
Dorothy M. Fitzgerald, *Golden West College*
Barbara Flajnik, *Virginia Military Institute*
Daniel Flath, *University of South Alabama*
Ernesto Franco, *California State University–Fresno*
Nicholas E. Frangos, *Hofstra University*
Katherine Franklin, *Los Angeles Pierce College*
Marc Frantz, *Indiana University–Purdue University at Indianapolis*
Michael Frantz, *University of La Verne*
Susan L. Friedman, *Bernard M. Baruch College, CUNY*
William R. Fuller, *Purdue University*
Beverly Fusfield
Daniel B. Gallup, *Pasadena City College*
Bradley E. Garner, *Boise State University*
Carrie Garner
Susan Gerstein
Mahmood Ghamasary, *Long Beach City College*
Rob Gilchrist, *U.S. Air Force Academy*
G. S. Gill, *Brigham Young University*
Michael Gilpin, *Michigan Technological University*
Kaplana Godbole, *Michigan Technological Institute*
S. B. Gokhale, *Western Illinois University*
Morton Goldberg, *Broome Community College*
Mardechai Goodman, *Rosary College*
Sid Graham, *Michigan Technological University*
Bob Grant, *Mesa Community College*
Raymond Greenwell, *Hofstra University*
Dixie Griffin, Jr., *Louisiana Tech University*
Gary Grimes, *Mt. Hood Community College*
David Gross, *University of Connecticut*
Jane Grossman, *University of Lowell*
Michael Grossman, *University of Lowell*
Dennis Hadah, *Saddleback Community College*
Diane Hagglund, *Waterloo Maple Software*
Douglas W. Hall, *Michigan State University*
Nancy A. Harrington, *University of Lowell*
Kent Harris, *Western Illinois University*
Karl Havlak, *Angelo State University*
J. Derrick Head, *University of Minnesota–Morris*
Jim Hefferson, *St. Michael College*
Albert Herr, *Drexel University*
Peter Herron, *Suffolk County Community College*
Warland R. Hersey, *North Shore Community College*
Konrad J. Heuvers, *Michigan Technological University*
Dean Hickerson
Robert Higgins, *Quantics Corporation*
Rebecca Hill, *Rochester Institute of Technology*
Tommie Ann Hill-Natter, *Prairie View A&M University*
Holly Hirst, *Appalachian State University*
Edwin Hoefler, *Rochester Institute of Technology*
Louis F. Hoelzle, *Bucks County Community College*
Robert Homolka, *Kansas State University–Salina*
Henry Horton, *University of West Florida*
Joe Howe, *St. Charles County Community College*
Shirley Huffman, *Southwest Missouri State University*
Hugh E. Huntley, *University of Michigan*
Fatenah Issa, *Loyola University of Chicago*
Gary S. Itzkowitz, *Rowan University*
Emmett Johnson, *Grambling State University*
Jerry Johnson, *University of Nevada–Reno*
John M. Johnson, *George Fox College*
Wells R. Johnson, *Bowdoin College*
Kenneth Kalmanson, *Montclair State University*
Herbert Kasube, *Bradley University*
Phil Kavanagh, *Mesa State College*
David Keller, *Kirkwood Community College*
Maureen Kelley, *Northern Essex Community College*
Dan Kemp, *South Dakota State University*
Harvey B. Keynes, *University of Minnesota*
Lynn Kiaer, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Vesna Kilibarda, *Indiana University Northwest*
Cecilia Knoll, *Florida Institute of Technology*
Holly A. Kresch, *Diablo Valley College*
Richard Krikorian, *Westchester Community College*
John Kubicek, *Southwest Missouri State University*
Paul Kumpel, *SUNY, Stony Brook*
Theodore Lai, *Hudson County Community College*
Fat C. Lam, *Gallaudet University*
Leo Lampone, *Quantics Corporation*
James F. Lanahan, *University of Detroit–Mercy*
Bruce Landman, *University of North Carolina at Greensboro*
Jeuel LaTorre, *Clemson University*
Kuen Hung Lee, *Los Angeles Trade–Technology College*
Marshall J. Leitman, *Case Western Reserve University*
Benjamin Levy, *Lexington H.S., Lexington, Mass.*
Darryl A. Linde, *Northeastern Oklahoma State University*
Phil Locke, *University of Maine, Orono*
Leland E. Long, *Muscatine Community College*
John Lucas, *University of Wisconsin–Oshkosh*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Phoebe Lutz, *Delta College*
Nicholas Macri, *Temple University*
Michael Magill, *Purdue University*
Ernest Manfred, *U.S. Coast Guard Academy*
Melvin J. Maron, *University of Louisville*
Mauricio Marroquin, *Los Angeles Valley College*
Thomas W. Mason, *Florida A&M University*
Majid Masso, *Brookdale Community College*
Larry Matthews, *Concordia College*
Thomas McElligott, *University of Lowell*
Phillip McGill, *Illinois Central College*
Judith McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Joseph Meier, *Millersville University*
Robert Meitz, *Arizona State University*

- Laurie Haskell Messina, *University of Oklahoma*
 Aileen Michaels, *Hofstra University*
 Janet S. Milton, *Radford University*
 Robert Mitchell, *Rowan College of New Jersey*
 Marilyn Molloy, *Our Lady of the Lake University*
 Ron Moore, *Ryerson Polytechnical Institute*
 Barbara Moses, *Bowling Green State University*
 Eric Murphy, *U.S. Air Force Academy*
 David Nash, *VP Research, Autofacts, Inc.*
 Doug Nelson, *Central Oregon Community College*
 Lawrence J. Newberry, *Glendale College*
 Kylene Norman, *Clark State Community College*
 Roxie Novak, *Radford University*
 Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
 Stanley Ocken, *City College–CUNY*
 Ralph Okojie, *Elizabeth City State University*
 Ann Ostberg
 Judith Palagallo, *The University of Akron*
 Donald Passman, *University of Wisconsin*
 David Patterson, *West Texas A&M*
 Walter M. Patterson, *Lander University*
 Steven E. Pav, *Alfred University*
 Edward Peifer, *Ulster County Community College*
 Gary L. Peterson, *James Madison University*
 Lefkios Petevis, *Kirkwood Community College*
 Robert Phillips, *University of South Carolina at Aiken*
 Mark A. Pinsky, *Northeastern University*
 Catherine H. Pirri, *Northern Essex Community College*
 Thomas W. Polaski, *Winthrop University*
 Father Bernard Portz, *Creighton University*
 Irwin Pressman, *Carleton University*
 Douglas Quinney, *University of Keele*
 David Randall, *Oakland Community College*
 B. David Redman, Jr., *Delta College*
 Irmgard Redman, *Delta College*
- Richard Remzowski, *Broome Community College*
 Guanshen Ren, *College of Saint Scholastica*
 William H. Richardson, *Wichita State University*
 John Rickert, *Rose-Hulman Institute of Technology*
 David Robbins, *Trinity College*
 Lila F. Roberts, *Georgia Southern University*
 David Rollins, *University of Central Florida*
 Naomi Rose, *Mercer County Community College*
 Sharon Ross, *DeKalb College*
 David Ryeburn, *Simon Fraser University*
 David Sandell, *U.S. Coast Guard Academy*
 Avinash Sathaye, *University of Kentucky*
 Ned W. Schillow, *Lehigh County Community College*
 Dennis Schneider, *Knox College*
 George W. Schultz, *St. Petersburg Junior College*
 Dan Seth, *Morehead State University*
 Richard B. Shad, *Florida Community College–Jacksonville*
 George Shapiro, *Brooklyn College*
 Parashu R. Sharma, *Grambling State University*
 Michael D. Shaw, *Florida Institute of Technology*
 Donald R. Sherbert, *University of Illinois*
 Howard Sherwood, *University of Central Florida*
 Mary Margaret Shoaf-Grubbs, *College of New Rochelle*
 Bhagat Singh, *University of Wisconsin Centers*
 Ann Sitomer, *Portland Community College*
 Martha Sklar, *Los Angeles City College*
 Henry Smith, *Southeastern Louisiana University*
 Jeanne Smith, *Saddleback Community College*
 John L. Smith, *Rancho Santiago Community College*
 Wolfe Snow, *Brooklyn College*
 Ian Spatz, *Brooklyn College*
 Jean Springer, *Mount Royal College*
- Rajalakshmi Sriram, *Okaloosa-Walton Community College*
 Norton Starr, *Amherst College*
 Mark Stevenson, *Oakland Community College*
 Gary S. Stoudt, *University of Indiana of Pennsylvania*
 John A. Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
 P. Narayana Swamy, *Southern Illinois University*
 Richard B. Thompson, *The University of Arizona*
 Skip Thompson, *Radford University*
 Josef S. Torok, *Rochester Institute of Technology*
 William F. Trench, *Trinity University*
 Walter W. Turner, *Western Michigan University*
 Thomas Vanden Eynden, *Thomas More College*
 Paul Vesce, *University of Missouri–Kansas City*
 Richard C. Vile, *Eastern Michigan University*
 David Voss, *Western Illinois University*
 Ronald Wagoner, *California State University–Fresno*
 Shirley Wakin, *University of New Haven*
 James E. Ward, *Bowdoin College*
 James Warner, *Precision Visuals*
 Peter Waterman, *Northern Illinois University*
 Evelyn Weinstock, *Glassboro State College*
 Bruce R. Wenner, *University of Missouri–Kansas City*
 Candice A. Weston, *University of Lowell*
 Bruce F. White, *Lander University*
 Neil Wigley, *University of Windsor*
 Ted Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
 Gary L. Wood, *Azusa Pacific University*
 Yihren Wu, *Hofstra University*
 Richard Yuskaitis, *Precision Visuals*
 Michael Zeidler, *Milwaukee Area Technical College*
 Michael L. Zwilling, *Mount Union College*

As seguintes pessoas leram vários estágios da oitava edição em busca de precisão matemática e pedagógica e/ou ajudaram na tarefa criticamente importante de preparar as respostas dos exercícios:

Elka Block, *Twin Prime Editorial*
 Dean Hickerson, *University of California, Davis*
 Thomas Polaski, *Winthrop University*
 Frank Purcell, *Twin Prime Editorial*
 David Ryeburn, *Simon Fraser University*

SUMÁRIO

Volume I

capítulo um	FUNÇÕES	1
	1.1 Funções	1
	1.2 Gráficos de Funções Utilizando Calculadoras e Recursos Computacionais	16
	1.3 Funções Novas a Partir de Antigas	27
	1.4 Famílias de Funções	40
	1.5 Funções Inversas; Funções Trigonométricas Inversas.....	51
	1.6 Funções Exponenciais e Logarítmicas	65
	1.7 Modelos Matemáticos	76
	1.8 Equações Paramétricas	86
capítulo dois	LIMITES E CONTINUIDADE	101
	2.1 Limites (Uma Abordagem Intuitiva)	101
	2.2 Calculando Limites.....	113
	2.3 Limites no Infinito; Comportamento Final de uma Função	122
	2.4 Limites (Discutidos Mais Rigorosamente)	134
	2.5 Continuidade.....	144
	2.6 Continuidade das Funções Trigonométricas e de Funções Inversas	155

capítulo três	A DERIVADA	165
	3.1 Retas Tangentes, Velocidade e Taxas de Variação Gerais.....	165
	3.2 Função Derivada.....	178
	3.3 Técnicas de Diferenciação.....	190
	3.4 Regras do Produto e do Quociente.....	198
	3.5 Derivadas de Funções Trigonométricas.....	204
	3.6 Regra da Cadeia.....	209
	3.7 Taxas Relacionadas.....	217
	3.8 Aproximação Linear Local; Diferenciais.....	224
capítulo quatro	FUNÇÕES EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS E TRIGONÔMETRICAS INVERSAS	235
	4.1 Derivação Implícita.....	235
	4.2 Derivadas de Funções Logarítmicas.....	243
	4.3 Derivadas de Funções Exponenciais e Trigonométricas Inversas.....	248
	4.4 Regra de L'Hôpital; Formas Indeterminadas.....	256
capítulo cinco	A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES	267
	5.1 Análise de Funções I: Crescimento, Decrescimento e Concavidade.....	267
	5.2 Análise de Funções II: Extremos Relativos; Gráficos de Polinômios.....	279
	5.3 Mais sobre Gráficos de Curvas: Funções Racionais; Curvas com Cúspides e Retas Tangentes Verticais; Usando Recursos Computacionais.....	289
	5.4 Máximos e Mínimos Absolutos.....	301
	5.5 Problemas de Máximos e Mínimos em Aplicações.....	309
	5.6 Método de Newton.....	323
	5.7 Teorema de Rolle; Teorema do Valor Médio.....	329
	5.8 Movimento Retilíneo.....	336
capítulo seis	INTEGRAÇÃO	349
	6.1 Uma Visão Geral do Problema de Área.....	349
	6.2 Integral Indefinida.....	355
	6.3 Integração por Substituição.....	365
	6.4 Definição de Área como um Limite; Notação de Somatório.....	373
	6.5 Integral Definida.....	386
	6.6 Teorema Fundamental do Cálculo.....	396
	6.7 Movimento Retilíneo Revisto Usando Integração.....	410
	6.8 Calculando Integrais Definidas por Substituição.....	419
	6.9 Funções Logarítmicas do Ponto de Vista da Integral.....	425
capítulo sete	APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA GEOMETRIA, NAS CIÊNCIAS E NA ENGENHARIA	442
	7.1 Área entre Duas Curvas.....	442
	7.2 Volumes por Fatiamento; Discos e Arruelas.....	450

7.3	Volumes por Camadas Cilíndricas	459
7.4	Comprimento de uma Curva Plana	465
7.5	Área de uma Superfície de Revolução.....	471
7.6	Valor Médio de uma Função e suas Aplicações	475
7.7	Trabalho.....	481
7.8	Pressão e Força de Fluidos	490
7.9	Funções Hiperbólicas e Cabos Pendentos	496

capítulo oito

PRINCÍPIOS DO CÁLCULO DE INTEGRAIS 510

8.1	Uma Visão Geral dos Métodos de Integração	510
8.2	Integração por Partes.....	513
8.3	Integrais Trigonométricas	522
8.4	Substituições Trigonométricas	530
8.5	Integração de Funções Racionais com Frações Parciais	537
8.6	Uso de Sistemas Algébricos Computacionais e de Tabelas de Integrais	545
8.7	Integração Numérica; Regra de Simpson.....	556
8.8	Integrais Impróprias	569

apêndice a

REVISÃO DE TRIGONOMETRIA A1

apêndice b

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS B1

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES R1






CRÉDITOS DAS FOTOS F1

ÍNDICE I-1

Volume II

capítulo nove	MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	582
	9.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem e Aplicações	582
	9.2 Campos de Direções; Método de Euler	596
	9.3 Modelando com Equações Diferenciais de Primeira Ordem	603
	9.4 Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de Segunda Ordem; a Mola Vibrante	612
capítulo dez	SÉRIES INFINITAS	624
	10.1 Seqüências.....	624
	10.2 Seqüências Monótonas	635
	10.3 Séries Infinitas	643
	10.4 Testes de Convergência.....	652
	10.5 Testes de Comparação, da Razão e da Raiz.....	659
	10.6 Séries Alternadas; Convergência Condicional	666
	10.7 Polinômios de Maclaurin e de Taylor	675
	10.8 Séries de Maclaurin e de Taylor; Séries de Potências	685
	10.9 Convergência de Séries de Taylor.....	694
	10.10 Derivação e Integração de Séries de Potências; Modelando com Séries de Taylor	704
capítulo onze	GEOMETRIA ANALÍTICA NO CÁLCULO	717
	11.1 Coordenadas Polares.....	717
	11.2 Retas Tangentes e Comprimento de Arco para Curvas Paramétricas e Polares.....	731
	11.3 Área em Coordenadas Polares.....	740
	11.4 Seções Cônicas no Cálculo.....	746
	11.5 Rotação de Eixos; Equações de Segunda Ordem	765
	11.6 Seções Cônicas em Coordenadas Polares	771
	■ Expandindo o Horizonte do Cálculo: Colisão com Cometa.....	783
capítulo doze	ESPAÇO TRIDIMENSIONAL; VETORES	786
	12.1 Coordenadas Retangulares no Espaço; Esferas; Superfícies Cilíndricas	786
	12.2 Vetores.....	792
	12.3 Produto Escalar; Projeções	804
	12.4 Produto Vetorial	813
	12.5 Equações Paramétricas de Retas	824
	12.6 Planos no Espaço Tridimensional.....	831
	12.7 Superfícies Quádricas.....	839
	12.8 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	850

capítulo treze	FUNÇÕES VETORIAIS	859
	13.1 Introdução às Funções Vetoriais.....	859
	13.2 Cálculo de Funções Vetoriais.....	865
	13.3 Mudança de Parâmetro; Comprimento de Arco.....	876
	13.4 Vetores Tangente, Normal e Binormal Unitários.....	886
	13.5 Curvatura.....	892
	13.6 Movimento ao Longo de uma Curva.....	901
	13.7 Leis de Kepler do Movimento Planetário.....	914
capítulo quatorze	DERIVADAS PARCIAIS	924
	14.1 Funções de Duas ou Mais Variáveis.....	924
	14.2 Limites e Continuidade.....	936
	14.3 Derivadas Parciais.....	945
	14.4 Diferenciabilidade, Diferenciais e Linearidade Local.....	959
	14.5 Regra da Cadeia.....	968
	14.6 Derivadas Direcionais e Gradientes.....	978
	14.7 Planos Tangentes e Vetores Normais.....	989
	14.8 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis.....	996
	14.9 Multiplicadores de Lagrange.....	1008
capítulo quinze	INTEGRAIS MÚLTIPLAS	1018
	15.1 Integrais Duplas.....	1018
	15.2 Integrais Duplas em Regiões Não-Retangulares.....	1026
	15.3 Integrais Duplas em Coordenadas Polares.....	1035
	15.4 Superfícies Paramétricas; Área de Superfície.....	1043
	15.5 Integrais Triplas.....	1056
	15.6 Centróide, Centro de Gravidade, Teorema de Pappus.....	1065
	15.7 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas.....	1076
	15.8 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas; Jacobianos.....	1087
capítulo dezesseis	TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL	1102
	16.1 Campos Vetoriais.....	1102
	16.2 Integrais de Linha.....	1112
	16.3 Independência do Caminho; Campos Vetoriais Conservativos.....	1129
	16.4 Teorema de Green.....	1139
	16.5 Integrais de Superfície.....	1147
	16.6 Aplicações de Integrais de Superfície; Fluxo.....	1155
	16.7 Teorema da Divergência.....	1164
	16.8 Teorema de Stokes.....	1173
	■ Expandindo o Horizonte do Cálculo: Modelando Furacões.....	1183

apêndice c	PROVAS SELECIONADAS	C1
	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES	R1
	CRÉDITOS DAS FOTOS	F1
	ÍNDICE	I-1
apêndice na internet d	 NÚMEROS REAIS, INTERVALOS E DESIGUALDADES	W1
apêndice na internet e	 VALOR ABSOLUTO	W11
apêndice na internet f	 PLANOS COORDENADOS, RETAS E FUNÇÕES LINEARES	W16
apêndice na internet g	 DISTÂNCIA, CÍRCULOS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS	W32
apêndice na internet h	 DISCRIMINANTE	W41

MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A teoria de equações diferenciais é a disciplina mais importante dentre todas as disciplinas matemáticas.

—Marius Sophus Lie
Matemático

Muitos dos princípios em Ciência e em Engenharia dizem respeito a relações entre quantidades que variam. Como as taxas de variação são representadas matematicamente por derivadas, não é de surpreender que tais princípios estejam frequentemente expressos em termos de equações diferenciais. Introduzimos o conceito de uma equação diferencial na Seção 6.2, mas neste capítulo detalharemos mais. Discutiremos alguns modelos matemáticos importantes que envolvem equações diferenciais, e analisaremos alguns métodos de resolução e de aproximação de soluções de alguns tipos básicos de equações diferenciais. Contudo, seremos somente capazes de tocar levemente este tópico, deixando muitos assuntos importantes em equações diferenciais para cursos completamente dedicados a este assunto.

Foto: A datação por carbono de ossos de bisão chamuscados, encontrados em 1950 no Novo México na proximidade das “pontas de Folsom”, confirmou que caçadores humanos viviam na área entre 9000 e 8000 anos antes da era cristã. A datação por carbono será estudada neste capítulo.

9.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES

Nesta seção, introduziremos terminologia e conceitos básicos que dizem respeito a equações diferenciais. Também discutiremos métodos para resolver certos tipos básicos de equações diferenciais e daremos algumas aplicações de nosso trabalho.

Tabela 9.1.1

EQUAÇÃO DIFERENCIAL	ORDEM
$\frac{dy}{dx} = 3y$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$	2
$\frac{d^3y}{dt^3} - t\frac{dy}{dt} + (t^2 - 1)y = e^t$	3
$y' - y = e^{2x}$	1
$y'' + y' = \cos t$	2

■ TERMINOLOGIA

Na Seção 6.2 vimos que uma *equação diferencial* é uma equação que envolve uma ou mais derivadas de uma função desconhecida. Nesta seção, denotaremos a função desconhecida por $y = y(x)$, a menos que a equação diferencial venha de um problema aplicado envolvendo o tempo, quando a denotaremos por $y = y(t)$. A *ordem* da equação diferencial é a ordem da maior derivada que ela contém. Alguns exemplos estão dados na Tabela 9.1.1. As duas últimas equações da tabela estão expressas na notação “linha”, que não especifica a variável independente de maneira explícita. Em geral somos capazes de dizer a partir da própria equação ou do contexto no qual ela surge se devemos interpretar y' como dy/dx ou como dy/dt .

■ SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma função $y = y(x)$ é uma *solução* de uma equação diferencial num intervalo aberto I se a equação estiver satisfeita identicamente em I quando y e suas derivadas forem substituídas na

equação. Por exemplo, $y = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \tag{1}$$

no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois substituindo y e as suas derivadas no lado esquerdo dessa equação obtemos

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[e^{2x}] - e^{2x} = 2e^{2x} - e^{2x} = e^{2x}$$

para todos os valores reais de x . Porém, esta não é a única solução em I ; por exemplo, a função

$$y = Ce^x + e^{2x} \tag{2}$$

também é uma solução para todo valor real da constante C , pois

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[Ce^x + e^{2x}] - (Ce^x + e^{2x}) = (Ce^x + 2e^{2x}) - (Ce^x + e^{2x}) = e^{2x}$$

Depois de desenvolver algumas técnicas de resolução de equações como a dada em (1), poderemos mostrar que *todas* as soluções de (1) em $(-\infty, +\infty)$ podem ser obtidas substituindo a constante C em (2) por valores. Em um dado intervalo I , uma solução de uma equação diferencial a partir da qual podem ser deduzidas todas as soluções naquele intervalo, pela substituição de constantes arbitrárias por valores, é chamada de **solução geral** da equação em I . Assim, (2) é a solução geral de (1) no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$.

O gráfico de uma solução de uma equação diferencial é chamado de **curva integral** da equação, portanto a solução geral de uma equação diferencial produz uma família de curvas integrais correspondentes a diferentes possíveis escolhas para as constantes arbitrárias. Por exemplo, a Figura 9.1.1 mostra algumas curvas integrais de (1), que foram obtidas atribuindo-se valores para a constante arbitrária de (2).

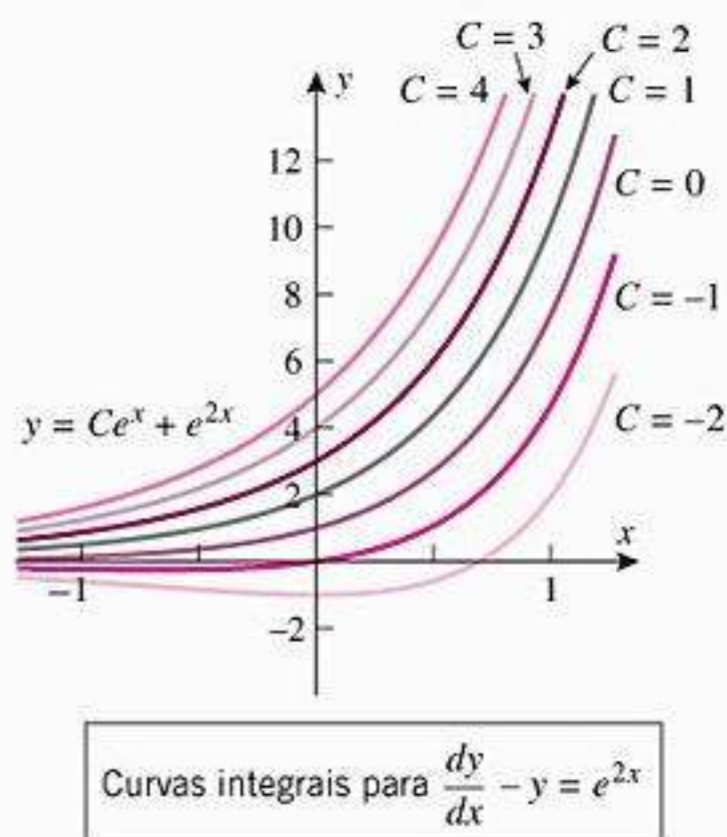


Figura 9.1.1

■ PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Quando um problema aplicado leva a uma equação diferencial, em geral há condições que determinam valores específicos para as constantes arbitrárias. Como regra empírica, necessitamos de n condições para determinar os valores de todas as n constantes arbitrárias na solução geral de uma equação diferencial de ordem n (uma condição para cada constante). Para uma equação de primeira ordem, a única constante arbitrária pode ser determinada especificando-se o valor da função desconhecida $y(x)$ em um ponto arbitrário x_0 , digamos $y(x_0) = y_0$. Isso é chamado de **condição inicial**, e o problema de resolver uma equação de primeira ordem sujeita a uma condição inicial é chamado de **problema de valor inicial de primeira ordem**. Geometricamente, a condição inicial $y(x_0) = y_0$ tem o efeito de isolar da família completa de curvas integrais a curva integral que passa pelo ponto (x_0, y_0) .

A solução geral (2) da equação de primeira ordem (1) tem uma constante arbitrária. Mais geralmente, a solução geral de uma equação diferencial de enésima ordem tem n constantes arbitrárias. Isso é plausível, pois são necessárias n integrações para recuperar uma função a partir de sua enésima derivada.

► **Exemplo 1** A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}, \quad y(0) = 3$$

pode ser obtida pela substituição da condição inicial $x = 0, y = 3$ na solução geral (2) para encontrar C . Obtemos

$$3 = Ce^0 + e^0 = C + 1$$

Assim, $C = 2$, e a solução do problema de valor inicial, obtida substituindo esse valor de C em (2), é

$$y = 2e^x + e^{2x}$$

Geometricamente, esta solução pode ser vista como a curva integral na Figura 9.1.1 que passa pelo ponto $(0, 3)$. ◀

■ EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

As equações de primeira ordem mais simples são as que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = q(x) \quad (3)$$

Tais equações podem ser freqüentemente resolvidas por integração. Por exemplo, se

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \quad (4)$$

então

$$y = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

é a solução geral de (4) no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$. Mais geralmente, uma equação diferencial de primeira ordem é denominada *linear* se puder ser expressa no formato

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (5)$$

A Equação (3) é o caso especial de (5) que resulta quando a função $p(x)$ é identicamente nula. Alguns outros exemplos de equações diferenciais lineares de primeira ordem são

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = e^x,$$

$$p(x) = x^2, q(x) = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + (\sin x)y + x^3 = 0,$$

$$p(x) = \sin x, q(x) = -x^3$$

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 2$$

$$p(x) = 5, q(x) = 2$$

Vamos supor que as funções $p(x)$ e $q(x)$ em (5) sejam contínuas num mesmo intervalo I e tentaremos encontrar soluções gerais que sejam válidas em I . Um método para isso é baseado na observação seguinte: se definirmos $\mu = \mu(x)$ por

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \quad (6)$$

então

$$\frac{d\mu}{dx} = e^{\int p(x) dx} \cdot \frac{d}{dx} \int p(x) dx = \mu p(x)$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx} y = \mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x)y \quad (7)$$

Multiplicando ambos os membros de (5) por μ , obtemos

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x)y = \mu q(x)$$

Combinando com (7), resulta

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x) \quad (8)$$

Esta equação pode ser resolvida em y integrando ambos lados em relação a x e então dividindo tudo por μ para obter

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu q(x) dx \tag{9}$$

que é a solução geral de (5) em I . A função μ em (6) é chamada de *fator de integração* de (5) e esse método de encontrar uma solução geral de (5) é denominado *método dos fatores integrantes*. Embora seja possível simplesmente memorizar a Fórmula (9), é recomendável resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem seguindo os passos utilizados na derivação da fórmula, como segue.

O Método dos Fatores Integrantes

Passo 1 Calcule o fator integrante

$$\mu = e^{\int p(x) dx}$$

Como qualquer μ será suficiente, podemos tomar a constante de integração como sendo zero neste passo.

Passo 2 Multiplique ambos os lados de (5) por μ e expresse o resultado como

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x)$$

Passo 3 Integre ambos os lados da equação obtida no Passo 2 e, então, resolva para y . Assegure-se de incluir uma constante de integração neste passo.

► **Exemplo 2** Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

Solução Comparando a equação dada com (5), vemos que se trata de uma equação linear de primeira ordem com $p(x) = -1$ e $q(x) = e^{2x}$. Esses coeficientes são contínuos no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, de modo que o método dos fatores integrantes produzirá uma solução geral nesse intervalo. O primeiro passo consiste em calcular o fator integrante. Isso dá

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{\int (-1) dx} = e^{-x}$$

Em seguida, multiplicamos ambos lados da equação dada por μ para obter

$$e^{-x} \frac{dy}{dx} - e^{-x} y = e^{-x} e^{2x}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}[e^{-x} y] = e^x$$

Integrando ambos lados dessa equação em relação a x , obtemos

$$e^{-x} y = e^x + C$$

Finalmente, resolvendo em y obtemos a solução geral

$$y = e^{2x} + C e^x \blacktriangleleft$$

Uma equação diferencial da forma

$$P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

Confirme que a solução obtida no Exemplo 2 está de acordo com a obtida substituindo o fator integrante na Fórmula (9).

pode ser resolvida dividindo tudo por $P(x)$ para colocar a equação no formato (5) e então aplicar o método dos fatores integrantes. No entanto, a solução resultante somente será válida nos intervalos em que ambos $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ sejam contínuos.

► **Exemplo 3** Resolva o problema de valor inicial

$$x \frac{dy}{dx} - y = x, \quad y(1) = 2$$

Solução A equação diferencial pode ser reescrita na forma (5) dividindo-se ambos os membros por x . Assim obtemos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1 \tag{10}$$

em que $q(x) = 1$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$ e $p(x) = -1/x$ é contínua em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$. Como devemos ter $p(x)$ e $q(x)$ contínuas num mesmo intervalo e como nossa condição inicial requer uma solução com $x = 1$, vamos encontrar uma solução geral de (1) no intervalo $(0, +\infty)$. Nesse intervalo temos $|x| = x$, de modo que

$$\int p(x) dx = - \int \frac{1}{x} dx = - \ln |x| = - \ln x$$

Tomando a constante de integração igual a 0

Assim, um fator de integração para produzir uma solução no intervalo $(0, +\infty)$ é

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos lados da Equação (10) por esse fator de integração obtemos

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x}y \right] = \frac{1}{x}$$

Assim, no intervalo $(0, +\infty)$,

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

da qual segue que

$$y = x \ln x + Cx \tag{11}$$

A condição inicial $y(1) = 2$ requer que $y = 2$ para $x = 1$. Substituindo esses valores em (11) e resolvendo em C obtemos $C = 2$ (confira), de modo que a solução do problema de valor inicial é

$$y = x \ln x + 2x \blacktriangleleft$$

Não é acidental que o problema de valor inicial no Exemplo 3 tenha uma solução única. Em geral, se x_0 é um ponto qualquer de um intervalo aberto I no qual os coeficientes de (5) sejam contínuos, então para cada número real y_0 existirá sempre uma única solução $y = y(x)$ de (5) em I para a qual valha $y(x_0) = y_0$ [Exercício 58(b)].

■ EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM SEPARÁVEIS

Embora não exista um método geral para resolver equações diferenciais de primeira ordem não-lineares, veremos agora um método de resolução que pode, muitas vezes, ser aplicado a equações de primeira ordem que possam ser expressas da forma

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \tag{12}$$

Tais equações de primeira ordem são denominadas *separáveis*. A terminologia decorre da possibilidade de reescrever essas equações no formato

$$h(y) dy = g(x) dx \tag{13}$$

em que as expressões envolvendo x aparecem de um lado e as envolvendo y do outro lado da equação. O processo de reescrever (12) no formato (13) é denominado *separar as variáveis*.

Para motivar um método de resolução de equações separáveis, suponha que $h(y)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas de suas respectivas variáveis e considere antiderivadas $H(y)$ e $G(x)$ de $h(y)$ e $g(x)$, respectivamente. Em seguida, integre ambos lados de (13), o lado esquerdo em relação a y e o lado direito em relação a x . Então resulta

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx \quad (14)$$

ou, equivalentemente,

$$H(y) = G(x) + C \quad (15)$$

onde C denota uma constante de integração. Afirmamos que uma função diferenciável $y = y(x)$ é uma solução de (12) se, e somente se, y satisfaz a Equação (15) para alguma escolha da constante C .

Suponha que $y = y(x)$ seja uma solução de (12). Então segue da regra da cadeia que

$$\frac{d}{dx}[H(y)] = \frac{dH}{dy} \frac{dy}{dx} = h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) = \frac{dG}{dx} \quad (16)$$

Como as funções $H(y)$ e $G(x)$ têm a mesma derivada em relação a x , elas têm uma diferença constante (Teorema 5.7.3). Desse modo, vemos que y satisfaz (15) para uma escolha apropriada de C . Reciprocamente, se $y = y(x)$ for definida implicitamente pela Equação (15) então a derivação implícita mostra que (16) é válida e portanto $y(x)$ é uma solução de (12) (Exercício 59). Em vista disso, é prática comum dizer que a Equação (15) é a “solução” de (12).

Resumindo, temos o procedimento denominado *separação de variáveis* a seguir para resolver (12).

Separação de Variáveis

Passo 1 Separe as variáveis em (12) reescrevendo a equação da forma diferencial

$$h(y) dy = g(x) dx$$

Passo 2 Integre ambos lados da equação do Passo 1 (o lado esquerdo em relação a y e o lado direito em relação a x):

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$

Passo 3 Se $H(y)$ é uma antiderivada qualquer de $h(y)$ e se $G(x)$ é uma antiderivada qualquer de $g(x)$, então geralmente a equação

$$H(y) = G(x) + C$$

define implicitamente uma família de soluções. Em alguns casos, é possível resolver essa equação implicitamente em y .

► **Exemplo 4** Resolva a equação diferencial

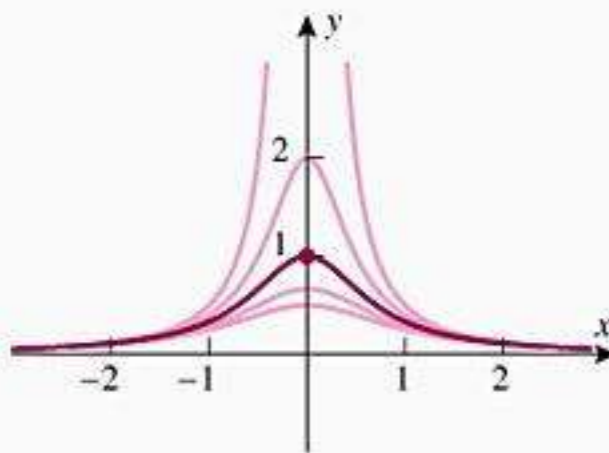
$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

e então resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1$$

Solução Para $y \neq 0$ podemos reescrever essa equação no formato (12) como

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -4x$$



Curvas integrais para $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$

Figura 9.1.2

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{1}{y^2} dy = -4x dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -4x dx$$

ou

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

Resolvendo para y como uma função de x , obtemos

$$y = \frac{1}{2x^2 - C}$$

A condição inicial $y(0) = 1$ requer que $y = 1$ quando $x = 0$. Substituindo esses valores na nossa solução dá $C = -1$ (confira). Assim, uma solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1}{2x^2 + 1}$$

Algumas curvas integrais e a nossa solução do problema de valor inicial estão esboçadas na Figura 9.1.2. ◀

Um aspecto da nossa solução no Exemplo 4 merece um comentário especial. Se a condição inicial tivesse sido $y(0) = 0$ em vez de $y(0) = 1$, o método que utilizamos teria deixado de fornecer uma solução para o problema de valor inicial (Exercício 39). Isso se deve ao fato de que precisamos supor $y \neq 0$ para poder reescrever a equação $dy/dx = -4xy^2$ no formato

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -4x$$

É importante lembrar dessas hipóteses quando uma equação diferencial for manipulada algebricamente.

► **Exemplo 5** Resolva o problema de valor inicial

$$(4y - \cos y) \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 0$$

Solução Podemos reescrever essa equação na forma (12) como

$$(4y - \cos y) \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$(4y - \cos y) dy = 3x^2 dx$$

$$\int (4y - \cos y) dy = \int 3x^2 dx$$

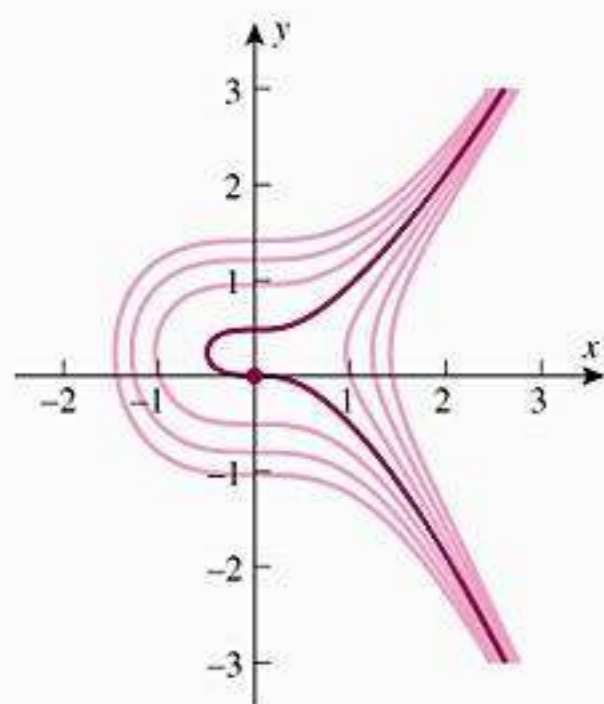
ou

$$2y^2 - \sin y = x^3 + C \quad (17)$$

A Equação (17) define as soluções da equação diferencial implicitamente; ela não pode ser resolvida explicitamente para y como uma função de x .

Para o problema de valor inicial, a condição inicial $y(0) = 0$ requer que $y = 0$ se $x = 0$. Substituindo esses valores em (17) para determinar a constante de integração, obtemos $C = 0$ (verifique). Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$2y^2 - \sin y = x^3 \quad \blacktriangleleft$$



Curvas integrais para $(4y - \cos y) \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$

Figura 9.1.3

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Alguns CAS podem fazer gráficos de equações implícitas. A Figura 9.1.3 mostra os gráficos de (17) para $C = 0, \pm 1, \pm 2$ e ± 3 . Usando um CAS que faça o gráfico de equações implícitas, leia o manual e tente repetir esta figura.

Algumas curvas integrais e a solução do problema de valor inicial do Exemplo 5 estão esboçadas na Figura 9.1.3.

Concluimos esta seção com algumas aplicações de equações diferenciais de primeira ordem.

■ APLICAÇÕES EM GEOMETRIA

► **Exemplo 6** Encontre uma curva no plano xy que passe por $(0, 3)$ e cuja reta tangente em um ponto (x, y) tenha inclinação $2x/y^2$.

Solução Como a inclinação da reta tangente é dy/dx , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \tag{18}$$

e, como a curva passa por $(0, 3)$, temos a condição inicial

$$y(0) = 3 \tag{19}$$

A equação (18) é separável e pode ser escrita como

$$y^2 dy = 2x dx$$

portanto,

$$\int y^2 dy = \int 2x dx \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}y^3 = x^2 + C$$

Tem-se da condição inicial (19) que $y = 3$ se $x = 0$. Substituindo esses valores na última equação, obtemos $C = 9$ (verifique), portanto, a equação da curva desejada é

$$\frac{1}{3}y^3 = x^2 + 9 \quad \text{ou} \quad y = (3x^2 + 27)^{1/3} \blacktriangleleft$$

■ PROBLEMAS DE MISTURA

Em um problema típico de mistura, um tanque está cheio até um nível especificado com uma solução que contém uma quantidade conhecida de uma substância solúvel (digamos sal). A solução completamente misturada é permitida fluir do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida da substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não diferir da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. Esse tipo de problema serve como modelo para muitos outros: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea e migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, por exemplo.

► **Exemplo 7** No instante $t = 0$, um tanque contém 4 libras de sal dissolvido em 100 galões de água. Suponha que água salgada contendo duas libras de sal por galão seja acrescentada ao tanque a uma taxa de 5 galões por minuto e que a solução misturada seja drenada do tanque à mesma taxa (Figura 9.1.4). Encontre a quantidade de sal no tanque após 10 minutos.

Solução Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em libras) após t minutos. É dado que $y(0) = 4$, e queremos encontrar $y(10)$. Começaremos por encontrar uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Para fazer isso, observamos que dy/dt , que é a taxa segundo a qual a quantidade de sal no tanque está variando com o tempo, pode ser expressa como

$$\frac{dy}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída} \tag{20}$$

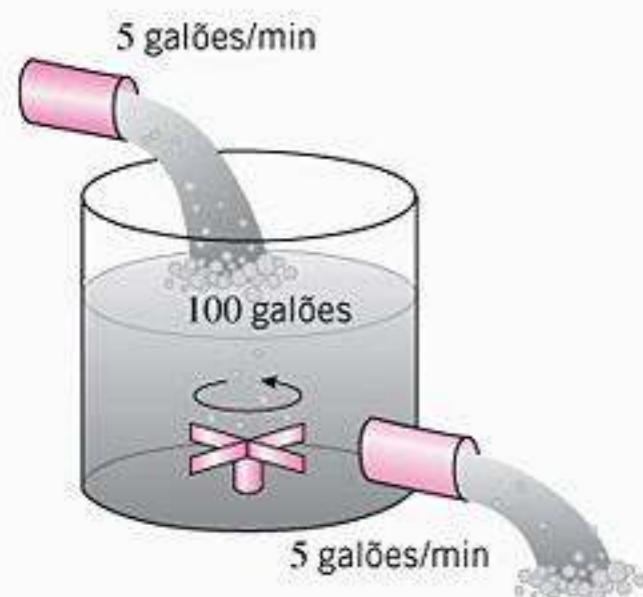


Figura 9.1.4

onde a *taxa de entrada* é aquela segundo a qual o sal entra no tanque e a *taxa de saída* é aquela segundo a qual o sal deixa o tanque. Mas a taxa segundo a qual o sal entra no tanque é

$$\text{taxa de entrada} = (2 \text{ lb/galões}) \cdot (5 \text{ galões/min}) = 10 \text{ lb/min}$$

Uma vez que a água salgada entra e sai do tanque a uma mesma taxa, o volume dela no tanque permanece constante em 100 galões. Assim, decorridos t minutos, o tanque contém $y(t)$ libras de sal por 100 galões de água salgada, e portanto a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque naquele instante é

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{100} \text{ lb/galões} \right) \cdot (5 \text{ galões/min}) = \frac{y(t)}{20} \text{ lb/min}$$

Portanto, (20) pode ser escrito como

$$\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{y}{20} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 10$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem satisfeita por $y(t)$. Como é dado que $y(0) = 4$, a função $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 10, \quad y(0) = 4$$

O fator integrante para essa equação diferencial é

$$\mu = e^{\int (1/20) dt} = e^{t/20}$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação por μ , obteremos

$$\frac{d}{dt}(e^{t/20} y) = 10e^{t/20}$$

$$e^{t/20} y = \int 10e^{t/20} dt = 200e^{t/20} + C$$

$$y(t) = 200 + Ce^{-t/20} \tag{21}$$

A condição inicial afirma que $y = 4$ quando $t = 0$. Substituindo esses valores em (21) e resolvendo para C , resulta que $C = -196$ (verifique), portanto

$$y(t) = 200 - 196e^{-t/20} \tag{22}$$

O gráfico de (22) é mostrado na Figura 9.1.5. No instante $t = 10$, a quantidade de sal no tanque é

$$y(10) = 200 - 196e^{-0.5} \approx 81,1 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

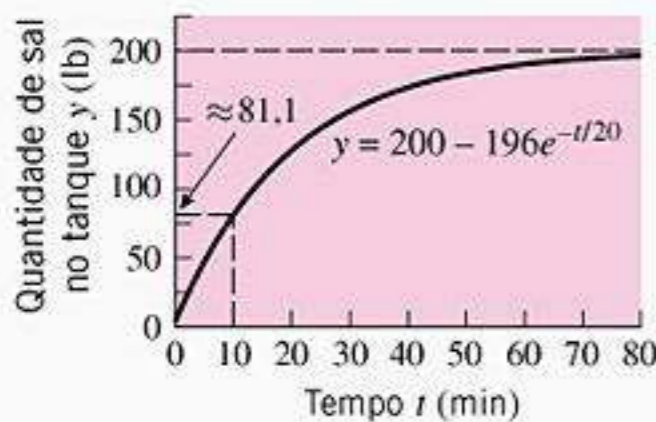


Figura 9.1.5

O gráfico mostrado na Figura 9.1.5 sugere que $y(t) \rightarrow 200$ quando $t \rightarrow +\infty$. Isso significa que num período estendido de tempo a quantidade de sal no tanque tende para 200 libras. Dê um argumento físico informal para explicar por que este resultado é de ser esperado.

■ UM MODELO DE QUEDA LIVRE RETARDADA PELA RESISTÊNCIA DO AR

Na Seção 6.7, consideramos o modelo de queda livre de um objeto movendo-se ao longo de um eixo vertical próximo da superfície da Terra. Supôs-se naquele modelo que não há resistência do ar e, assim, a única força agindo sobre o objeto é a gravidade da Terra. O nosso objetivo aqui é encontrar o modelo que leve em conta a resistência do ar. Com esta finalidade, vamos fazer as seguintes hipóteses:

- O objeto move-se ao longo de um eixo vertical s cuja origem está na superfície da Terra e cujo sentido positivo é para cima (Figura 6.7.6 no Volume 1).
- No instante $t = 0$ a altura do objeto é s_0 e a sua velocidade v_0 .
- As únicas forças sobre o objeto são a força da gravidade da Terra $F_G = -mg$ agindo para baixo e a força F_R da resistência do ar agindo no sentido oposto ao do movimento. A força F_R é chamada de **força de retardamento**.

Necessitaremos também do seguinte resultado da Física:

9.1.1 SEGUNDA LEI DO MOVIMENTO DE NEWTON Se um objeto com massa m estiver sujeito a uma força F , então ele adquire uma aceleração a que satisfaz a equação

$$F = ma \tag{23}$$

No caso do movimento de queda livre retardada pela resistência do ar, a força líquida agindo sobre o objeto é

$$F_G + F_R = -mg + F_R$$

e a aceleração é d^2s/dt^2 , de modo que a segunda lei de Newton implica que

$$-mg + F_R = m \frac{d^2s}{dt^2} \tag{24}$$

A experimentação mostra que a força F_R da resistência do ar depende do formato do objeto e de sua velocidade – quanto maior for a velocidade, maior será a força de retardamento. Há muitos modelos possíveis para resistência do ar, mas um dos mais básicos supõe que a força de retardamento F_R é proporcional à velocidade do objeto, isto é, que

$$F_R = -cv$$

onde c é uma constante positiva que depende do formato do objeto e de propriedades do ar* (O sinal de menos garante que a força de retardamento seja oposta ao sentido do movimento.) Substituindo-se isso em (24) e escrevendo d^2s/dt^2 como dv/dt , obtemos

$$-mg - cv = m \frac{dv}{dt}$$

Dividindo-se por m e rearranjando

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = -g$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem na função desconhecida $v = v(t)$ com $p(t) = c/m$ e $q(t) = -g$ [ver (5)]. Para um objeto específico, o coeficiente c pode ser determinado experimentalmente, portanto podemos supor que m , g e c sejam constantes conhecidas. Assim, a função velocidade $v = v(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = -g, \quad v(0) = v_0 \tag{25}$$

Uma vez encontrada a função velocidade, a função posição $s = s(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \quad s(0) = s_0 \tag{26}$$

No Exercício 47, pedimos ao leitor que resolva (25) e mostre que

$$v(t) = e^{-ct/m} \left(v_0 + \frac{mg}{c} \right) - \frac{mg}{c} \tag{27}$$

Note que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\frac{mg}{c} \tag{28}$$

(verifique). Assim, a velocidade escalar $|v(t)|$ não cresce indefinidamente, como na queda livre; em vez disso, devido à resistência do ar, ela tende a uma velocidade limite finita v_τ dada por

$$v_\tau = \left| -\frac{mg}{c} \right| = \frac{mg}{c} \tag{29}$$

* Outros modelos comuns supõem que $F_R = -cv^2$ ou, mais geralmente, $F_R = -cv^p$ para algum valor de p .

Essa é a *velocidade escalar terminal* do objeto e (28) é chamada de *velocidade terminal*.

A intuição sugere que próximo da velocidade limite, a velocidade $v(t)$ varia muito lentamente; isto é, $dv/dt \approx 0$. Assim, não deve causar surpresa que a velocidade limite possa ser obtida informalmente de (25) fazendo $dv/dt = 0$ na equação diferencial e resolvendo para v . Dessa forma, obtemos

$$v = -\frac{mg}{c}$$

o que está de acordo com (28).

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.1 (Ver página 595 para respostas.)

1. Associe cada equação diferencial com sua família de soluções.

- (a) $x \frac{dy}{dx} = y$ _____ (i) $y = x^2 + C$
- (b) $y'' = 4y$ _____ (ii) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$
- (c) $\frac{dy}{dx} = 2x$ _____ (iii) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
- (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = -4y$ _____ (iv) $y = Cx$

2. Resolva a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

completando os passos a seguir.

Passo 1 Calcule o fator de integração $\mu =$ _____.

Passo 2 Multiplique ambos lados da equação pelo fator de integração e expresse o resultado como

$$\frac{d}{dx}[\text{_____}] = \text{_____}$$

Passo 3 Integre ambos lados da equação obtida no Passo 2 e resolva em $y =$ _____.

3. Se $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ é a solução geral de uma equação diferencial, então a ordem da equação é _____ e a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ é dada por $y =$ _____.

4. Resolva a equação diferencial separável de primeira ordem

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

completando os passos a seguir.

Passo 1 Separe as variáveis escrevendo a equação na forma diferencial _____.

Passo 2 Integre ambos lados da equação do Passo 1: _____.

Passo 3 Se $H(y)$ é uma antiderivada qualquer de $h(y)$, $G(x)$ é uma antiderivada qualquer de $g(x)$ e C é uma constante não especificada, então, conforme sugerido no Passo 2, a equação _____ em geral definirá implicitamente uma família de soluções de $h(y) dy/dx = g(x)$.

5. (a) O gráfico de uma função diferenciável $y = y(x)$ passa pelo ponto $(0, 1)$ e em cada ponto $P(x, y)$ do gráfico a reta tangente é perpendicular à reta que passa por P e pela origem. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(x)$.

(b) Explique por que a equação diferencial da parte (a) é separável. Resolva o problema de valor inicial usando ou a separação de variáveis ou um argumento geométrico.

6. No instante $t = 0$, um tanque contém 30 g de sal dissolvido em 60 litros de água. Suponha que água salgada contendo 5 g de sal por litro de água é acrescentada ao tanque a uma taxa de 3 litros por minuto e que a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa. Elabore um problema de valor inicial que seja satisfeito pela quantidade $y(t)$ de sal no tanque no instante t . Não encontre a solução do problema.

EXERCÍCIOS 9.1  

1. Confirme que $y = 3e^{x^3}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 3x^2 y$, $y(0) = 3$.

2. Confirme que $y = \frac{1}{4}x^4 + 2 \cos x + 1$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = x^3 - 2 \sin x$, $y(0) = 3$.

3-4 Dê a ordem da equação diferencial e confirme que as funções da família dada são soluções.

3. (a) $(1+x)\frac{dy}{dx} = y$; $y = c(1+x)$
 (b) $y'' + y = 0$; $y = c_1 \sin t + c_2 \cos t$
 4. (a) $2\frac{dy}{dx} + y = x - 1$; $y = ce^{-x/2} + x - 3$
 (b) $y'' - y = 0$; $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

5-6 Use diferenciação implícita para confirmar que a equação define soluções implícitas da equação diferencial.

5. $\ln y = xy^2 + C$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2}$
 6. $x^2 + xy^2 = C$; $2x + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$

7-8 As equações lineares de primeira ordem nestes exercícios podem ser reescritas como equações de primeira ordem separáveis. Resolva as equações usando tanto o método dos fatores integrantes quanto o método das variáveis separadas e determine se as soluções obtidas são iguais.

7. (a) $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ (b) $\frac{dy}{dt} - 2y = 0$
 8. (a) $\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$ (b) $\frac{dy}{dt} + y = 0$

9-14 Resolva a equação diferencial pelo método dos fatores integrantes.

9. $\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-3x}$ 10. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
 11. $y' + y = \cos(e^x)$ 12. $2\frac{dy}{dx} + 4y = 1$
 13. $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ 14. $\frac{dy}{dx} + y + \frac{1}{1 - e^x} = 0$

15-24 Resolva a equação diferencial por separação de variáveis. Quando for razoável, expresse a família de soluções como funções explícitas de x .

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 16. $\frac{dy}{dx} = 2(1 + y^2)x$
 17. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+y}\frac{dy}{dx} = -x$ 18. $(1+x^4)\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y}$
 19. $(2 + 2y^2)y' = e^x y$ 20. $y' = -xy$
 21. $e^{-y} \sin x - y' \cos^2 x = 0$ 22. $y' - (1+x)(1+y^2) = 0$
 23. $\frac{dy}{dx} - \frac{y^2 - y}{\sin x} = 0$ 24. $y - \frac{dy}{dx} \sec x = 0$
 25. Em cada parte, determine a solução da equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} + y = x$$

que satisfaça a condição inicial

- (a) $y(1) = 2$ (b) $y(-1) = 2$

26. Em cada parte, determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

que satisfaça a condição inicial

- (a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = \frac{1}{2}$

27-32 Resolva o problema de valor inicial com qualquer método.

27. $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x$, $y(0) = 3$
 28. $\frac{dy}{dt} + y = 2$, $y(0) = 1$
 29. $y' = \frac{3x^2}{2y + \cos y}$, $y(0) = \pi$
 30. $y' - xe^y = 2e^y$, $y(0) = 0$
 31. $\frac{dy}{dt} = \frac{2t + 1}{2y - 2}$, $y(0) = -1$
 32. $y' \cosh x + y \sinh x = \cosh^2 x$, $y(0) = \frac{1}{4}$
 33. (a) Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = y/2x$.
 (b) Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto $(2, 1)$.
 34. (a) Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = -x/y$.
 (b) Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto $(3, 4)$.

35-36 Resolva a equação diferencial e, então, use um recurso computacional para gerar cinco curvas integrais para a equação.

35. $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ 36. $y' + 2y - 3e^t = 0$

37-38 Resolva a equação diferencial e então utilize um recurso gráfico computacional para gerar cinco curvas integrais da equação.

37. $y' = \frac{x^2}{1 - y^2}$ 38. $y' = \frac{y}{1 + y^2}$

39. Suponha que a condição inicial no Exemplo 4 tivesse sido $y(0) = 0$. Mostre que nenhuma das soluções geradas no Exemplo 4 satisfaz essa condição inicial e então resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 0$$

Por que o método do Exemplo 4 deixa de fornecer essa solução particular?

40. Encontre todos os pares ordenados (x_0, y_0) tais que se a condição inicial no Exemplo 4 for trocada por $y(x_0) = y_0$, então a solução do problema de valor inicial resultante estará definida em todos números reais.

41. Encontre uma equação de uma curva que corte o eixo x no ponto 2 e cuja reta tangente em qualquer ponto (x, y) tenha inclinação xe^{-y} .

42. Use um recurso gráfico computacional para gerar uma curva que passe pelo ponto $(1, 1)$ e cuja reta tangente em (x, y) seja perpendicular à reta por (x, y) com inclinação $-2y/(3x^2)$.
43. No instante $t = 0$, um tanque contém 25 g de sal dissolvidas em 50 litros de água. Então água salgada contendo 4 g de sal por litro é acrescentada ao tanque a uma taxa de 2 litros/min e a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa.
- (a) Quanto sal haverá no tanque num instante de tempo arbitrário t ?
- (b) Quanto sal haverá no tanque após 25 minutos?
44. Um tanque contém inicialmente 200 galões de água pura. Num instante $t = 0$, água salgada contendo 5 libras de sal por galão é acrescentada ao tanque a uma taxa de 20 galões por minuto e a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa.
- (a) Quanto sal haverá no tanque num instante de tempo arbitrário t ?
- (b) Quanto sal haverá no tanque após 30 minutos?
45. Um tanque com uma capacidade de 1.000 galões contém, inicialmente, 500 galões de água poluída com 50 libras de poluente. No instante $t = 0$, água pura é acrescentada a uma taxa de 20 galões por minuto e a solução misturada é drenada a uma taxa de 10 galões por minuto. Quanto poluente haverá no tanque quando ele chegar no ponto de transbordar?
46. A água em um lago poluído contém inicialmente 1 libra de sais de mercúrio por 100.000 galões de água. O lago é circular com um diâmetro de 30 metros e uma profundidade uniforme de 3 metros. A água poluída é bombeada do lago a uma taxa de 1.000 galões por hora e substituída por água fresca na mesma taxa. Construa uma tabela que mostre a quantidade de mercúrio no lago (em libras) no final de cada hora, por um período de 12 horas. Discuta qualquer hipótese feita. [Use 264 galões/m³.]
47. (a) Use o método dos fatores integrantes para deduzir a solução (27) do problema de valor inicial (25). [Nota: lembre que $c, m,$ e g são constantes.]
- (b) Mostre que (27) pode ser expressa em termos da velocidade terminal (29) como
- $$v(t) = e^{-gt/v_\tau} (v_0 + v_\tau) - v_\tau$$
- (c) Mostre que se $s(0) = s_0$, então a função posição do objeto pode ser expressa como
- $$s(t) = s_0 - v_\tau t + \frac{v_\tau}{g} (v_0 + v_\tau) (1 - e^{-gt/v_\tau})$$
48. Suponha que um pára-quedista totalmente equipado pesando 240 libras tenha uma velocidade terminal de 120 pés por segundo com o pára-quedas fechado e de 24 pés por segundo com o pára-quedas aberto. Suponha também que esse pára-quedista salte de um avião a uma altura de 10.000 pés, caia durante 25 segundos com o pára-quedas fechado e então caia o trajeto restante com o pára-quedas aberto.
- (a) Supondo que a velocidade inicial do pára-quedista seja zero, use o Exercício 47 para encontrar a velocidade vertical do pára-quedista e sua altura no instante em que abrir o pára-quedas. [Use $g = 32$ pés/s².]
- (b) Use uma calculadora para encontrar uma solução numérica para o tempo total em que o pára-quedista permanece no ar.

49. A figura abaixo é um diagrama esquemático de um circuito elétrico em série RL básico, que contém uma fonte de energia com uma voltagem dependente do tempo de $V(t)$ volts (V), um resistor com uma resistência constante de R ohms (Ω) e um indutor com uma indutância constante de L henrys (H). O leitor que não souber nada sobre circuitos elétricos, não precisa se preocupar; tudo que precisa saber é que a teoria da eletricidade afirma que uma corrente de $I(t)$ amperes (A) flui através do circuito onde $I(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V(t)$$

- (a) Determine $I(t)$ se $R = 10 \Omega, L = 5 \text{ H}, V$ for a constante 20 V e $I(0) = 0 \text{ A}$.
- (b) O que acontece com a corrente em um longo período de tempo?

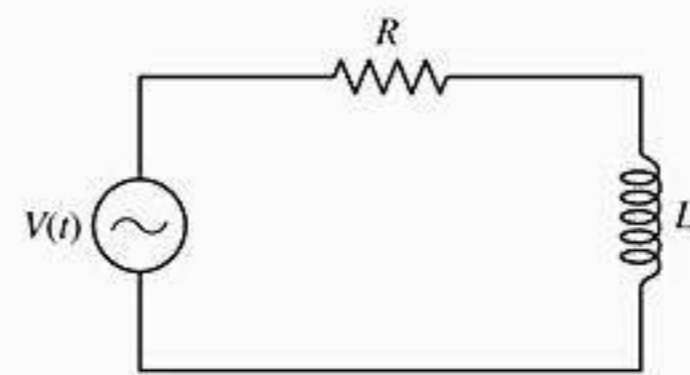


Figura Ex-49

50. Determine $I(t)$ para o circuito elétrico do Exercício 49 se $R = 6 \Omega, L = 3 \text{ H}, V(t) = 3 \text{ sen } t \text{ V}$ e $I(0) = 15 \text{ A}$.
51. Um foguete, disparado verticalmente para cima a partir do repouso no instante $t = 0$, tem uma massa inicial de m_0 (incluindo o combustível). Supondo que o combustível seja consumido a uma taxa constante k , a massa m do foguete, enquanto o combustível estiver sendo queimado, será dada por $m = m_0 - kt$. Pode ser mostrado que se a resistência do ar for desprezada e os gases do combustível forem expelidos a uma velocidade constante c em relação ao foguete, então a velocidade v do foguete irá satisfazer a equação

$$m \frac{dv}{dt} = ck - mg$$

onde g é a aceleração da gravidade.

- (a) Determine $v(t)$, lembrando que a massa m é uma função de t .
- (b) Suponha que o combustível seja responsável por 80% da massa inicial do foguete e que todo o combustível seja consumido em 100 segundos. Determine a velocidade do foguete em metros por segundo no instante em que acabar o combustível. [Tome $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e $c = 2.500 \text{ m/s}$.]
52. Uma bala de massa m é disparada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de v_0 , e torna-se mais lenta pela força de gravidade e uma força de resistência do ar de kv^2 , onde g é a aceleração constante devida à gravidade e k uma constante positiva. Enquanto a bala move-se para cima, a sua velocidade v satisfaz a equação

$$m \frac{dv}{dt} = -(kv^2 + mg)$$

- (a) Mostre que se $x = x(t)$ for a altura da bala acima da boca da arma no instante t , então

$$mv \frac{dv}{dx} = -(kv^2 + mg)$$

- (b) Expresse x em termos de v dado que $x = 0$ quando $v = v_0$.
 (c) Supondo que

$$v_0 = 988 \text{ m/s}, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$m = 3,56 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad k = 7,3 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$$

use o resultado na parte (b) para encontrar a altura atingida pela bala. [Sugestão: determine a velocidade da bala em seu ponto mais alto.]

53-54 Suponha que um tanque contendo um líquido tenha uma abertura para o ar no topo e uma saída na base, através da qual o líquido pode ser drenado. Tem-se da *lei de Torricelli* da Física que se a saída for aberta no instante $t = 0$, então a cada instante a profundidade $h(t)$ do líquido e a área $A(h)$ da superfície do líquido estão relacionadas por

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

onde k é uma constante positiva que depende de fatores como a viscosidade do líquido e a área da seção transversal da saída. Use este resultado nesses exercícios, supondo que h seja dado em pés, $A(h)$ em pés² e t em segundos.

- 53.** Suponha que o tanque cilíndrico na figura abaixo esteja cheio até uma profundidade de 4 pés no instante $t = 0$ e que a constante na lei de Torricelli seja $k = 0,025$.
 (a) Encontre $h(t)$.
 (b) Quantos minutos irá levar para esvaziar completamente o tanque?
- 54.** Siga as orientações do Exercício 53 para o tanque cilíndrico na figura abaixo, supondo que o tanque esteja cheio até uma profundidade de 4 pés em $t = 0$ e que a constante na lei de Torricelli seja $k = 0,025$.

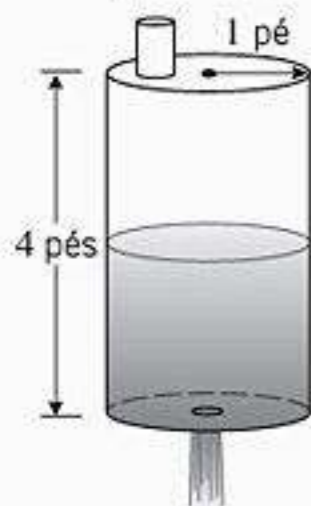


Figura Ex-53

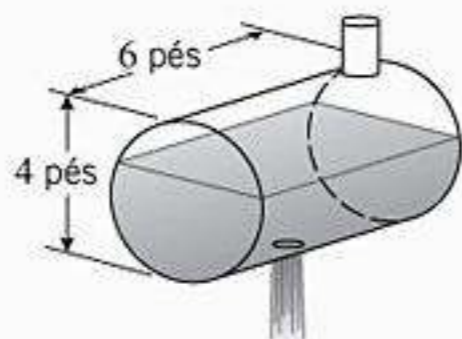


Figura Ex-54

- 55.** Suponha que uma partícula movendo-se ao longo do eixo x encontre uma força resistente que imprime uma aceleração de $a = dv/dt = -\frac{1}{32}v^2$. Dado que $x = 0$ cm e $v = 128$ cm/s em $t = 0$, encontre a velocidade v e a posição x como uma função de t para $t \geq 0$.
- 56.** Suponha que uma partícula movendo-se ao longo do eixo x encontre uma força resistente que imprime uma aceleração de $a = dv/dt = -0,02\sqrt{v}$. Dado que $x = 0$ cm e $v = 9$ cm/s em $t = 0$, determine a velocidade v e a posição x como uma função de t para $t \geq 0$.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 57.** Determine um problema de valor inicial cuja solução seja

$$y = \cos x + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- 58.** (a) Prove que qualquer função $y = y(x)$ definida pela Equação (9) é uma solução de (5) no intervalo I .
 (b) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

em que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são ambas contínuas num intervalo aberto I . Usando a solução geral de uma equação linear de primeira ordem, prove que este problema de valor inicial tem uma solução única em I .

- 59.** Use derivação implícita para provar que qualquer função diferenciável definida implicitamente por (15) é uma solução de (12).

- 60.** (a) Prove que as soluções não precisam ser únicas para problemas de valor inicial não-lineares, encontrando duas soluções para

$$y \frac{dy}{dx} = x, \quad y(0) = 0$$

- (b) Prove que as soluções não precisam existir para problemas de valor inicial não-lineares, mostrando que não existe solução para

$$y \frac{dy}{dx} = -x, \quad y(0) = 0$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.1

- 1.** (a) (iv) (b) (iii) (c) (i) (d) (ii) **2.** Passo 1: $e^{\int p(x) dx}$; Passo 2: $\mu y, \mu q(x)$; Passo 3: $\frac{1}{\mu} \int \mu q(x) dx$ **3.** 2; $e^{2x} + 2xe^{2x}$
- 4.** Passo 1: $h(y) dy = g(x) dx$; Passo 2: $\int h(y) dy = \int g(x) dx$; Passo 3: $H(y) = G(x) + C$ **5.** (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$
- (b) A equação pode ser escrita na forma $y \frac{dy}{dx} = -x$ e tem a solução $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 < x < 1$.
- 6.** $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 15$, $y(0) = 30$.

9.2 CAMPOS DE DIREÇÕES; MÉTODO DE EULER

Nesta seção, reexaminaremos o conceito de campos de direções e discutiremos um método para aproximar numericamente as soluções de equações de primeira ordem. As aproximações numéricas são importantes nos casos em que a equação diferencial não pode ser resolvida exatamente.

■ FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Aqui, estaremos interessados em equações de primeira ordem que são expressas com uma derivada sozinha de um lado da equação. Por exemplo,

$$y' = x^3 \quad \text{e} \quad y' = \text{sen}(xy)$$

A primeira dessas equações envolve somente x no lado direito, logo tem a forma $y' = f(x)$. Porém, a segunda equação envolve x e y no lado direito, logo tem a forma $y' = f(x, y)$, onde o símbolo $f(x, y)$ representa uma função das duas variáveis x e y . Mais adiante no livro estudaremos com maior profundidade funções de duas variáveis, mas por ora basta pensar em $f(x, y)$ como uma fórmula que produz uma única saída quando forem dados como entradas valores de x e y . Por exemplo, se

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

se as entradas forem $x = 2$ e $y = -4$, então a saída é

$$f(2, -4) = 2^2 + 3(-4) = 4 - 12 = -8$$

■ CAMPOS DE DIREÇÕES

Na Seção 6.2, introduzimos o conceito de um campo de direções no contexto das equações diferenciais da forma $y' = f(x)$; os mesmos princípios aplicam-se a equações diferenciais da forma

$$y' = f(x, y)$$

Para ver isso, vamos revisar a idéia básica. Se interpretarmos y' como a inclinação da reta tangente, então a equação diferencial afirma que em cada ponto (x, y) sobre uma curva integral, a inclinação da reta tangente é igual ao valor de f naquele ponto (Figura 9.2.1). Por exemplo, suponha que $f(x, y) = y - x$, caso em que temos a equação diferencial

$$y' = y - x \tag{1}$$

Uma descrição geométrica do conjunto de curvas integrais pode ser obtida escolhendo-se uma malha retangular de pontos no plano xy , calculando-se as inclinações das retas tangentes às curvas integrais nos pontos da malha, e desenhando pequenos segmentos das retas tangentes naqueles pontos. A figura resultante é chamada de **campo de direções** ou um **campo de inclinações** para a equação diferencial porque mostra a “direção” ou a “inclinação” das curvas integrais nos pontos da malha. Quanto mais pontos forem usados na malha, melhor será a descrição das curvas integrais. Por exemplo, a Figura 9.2.2 mostra dois campos de direções para (1) — o primeiro obtido à mão usando uma malha de 49 pontos mostrado na tabela em anexo, e o segundo, que dá uma imagem mais clara das curvas integrais, foi obtido usando uma malha de 625 pontos e um CAS.

Acontece que a Equação (1) pode ser resolvida exatamente, já que pode ser escrita como

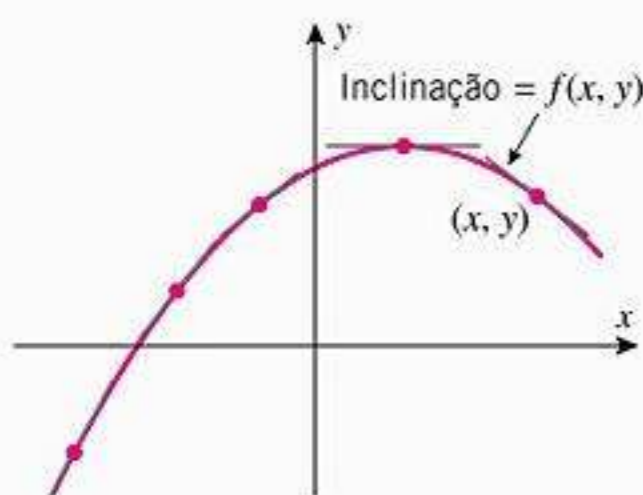
$$y' - y = -x$$

que, por comparação com a Equação (5) da Seção 9.1, é uma equação linear de primeira ordem com $p(x) = -1$ e $q(x) = -x$. Deixamos a cargo do leitor usar o método dos fatores integrantes para mostrar que a solução geral dessa equação é

$$y = x + 1 + Ce^x \tag{2}$$

A Figura 9.2.3 mostra algumas curvas integrais sobrepostas ao campo de direções. Observe, porém, que não é necessário ter a solução geral para construir o campo de direções. Na reali-

Em problemas aplicados envolvendo o tempo, é comum usar t como a variável independente, caso em que estaremos interessados em equações da forma $y' = f(t, y)$, onde $y' = dy/dt$.



Em cada ponto (x, y) de uma curva integral $y' = f(x, y)$, a reta tangente tem inclinação $f(x, y)$.

Figura 9.2.1

VALORES DE $f(x, y) = y - x$

	$y = -3$	$y = -2$	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = -3$	0	1	2	3	4	5	6
$x = -2$	-1	0	1	2	3	4	5
$x = -1$	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = 0$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 1$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$x = 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$x = 3$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

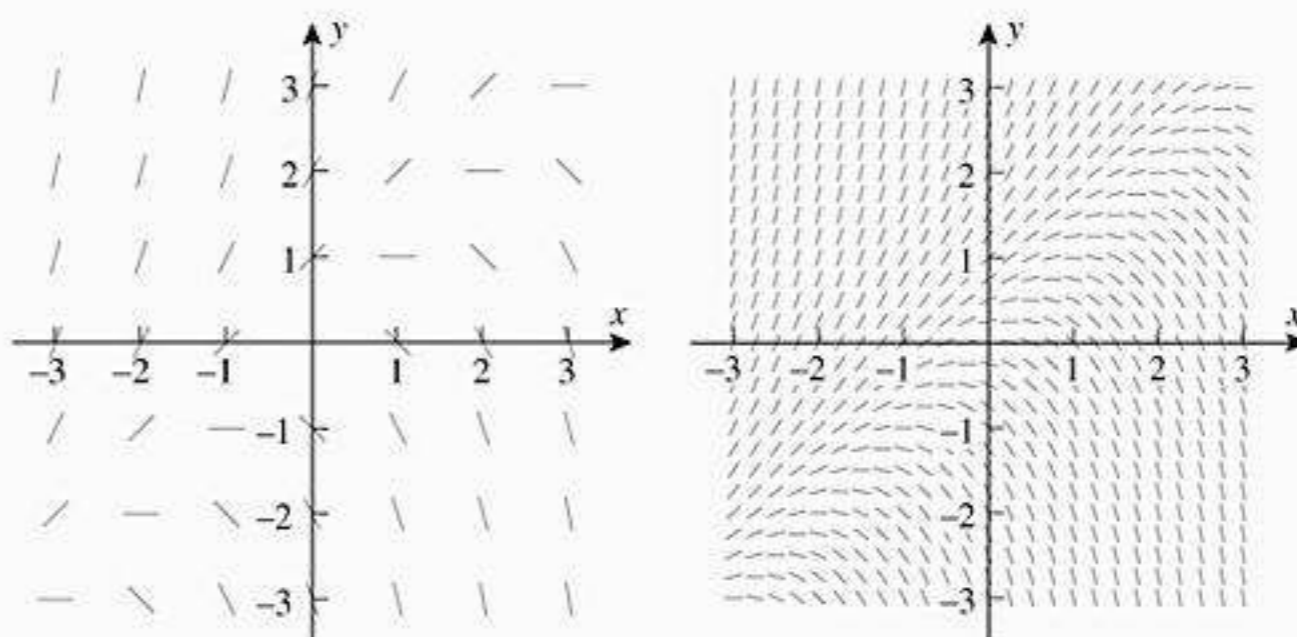


Figura 9.2.2

Confirme que o primeiro campo de direções na Figura 9.2.2 está de acordo com os valores na tabela em anexo.

dade, os campos de direções são importantes principalmente porque podem ser construídos nos casos em que a equação diferencial não pode ser resolvida exatamente.

► **Exemplo 1** No Exemplo 7 da Seção 9.1 consideramos um problema de mistura, no qual a quantidade de sal $y(t)$ em um tanque no instante t foi mostrada satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 10$$

que pode ser reescrita como

$$y' = 10 - \frac{y}{20} \tag{3}$$

Subseqüentemente, encontramos que a solução geral dessa equação é

$$y(t) = 200 + Ce^{-t/20} \tag{4}$$

e, então, encontramos o valor da constante arbitrária C a partir da condição inicial do problema [a quantidade conhecida de sal $y(0)$ no instante $t = 0$]. No entanto, tem-se a partir de (4) que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 200$$

para todos os valores de C , portanto não importando a quantidade de sal presente inicialmente no tanque, a quantidade de sal no tanque vai acabar estabilizando-se em 200 libras. Isso pode ser visto também geometricamente a partir do campo de direções para (3), mostrado na Figura 9.2.4. Esse campo de direções sugere que se a quantidade de sal presente inicialmente no tanque for maior do que 200 libras, então ela irá decrescer regularmente no tempo em direção ao valor limite de 200 libras e se, inicialmente for menor do que 200 libras, então ela irá crescer regularmente em direção ao valor limite de 200 libras. O campo de direções também sugere que se a quantidade presente inicialmente for de exatamente 200 libras, então a quantidade de sal no tanque permanecerá constante nas 200 libras. Isso também pode ser visto de (4), uma vez que $C = 0$ neste caso (verifique). ◀

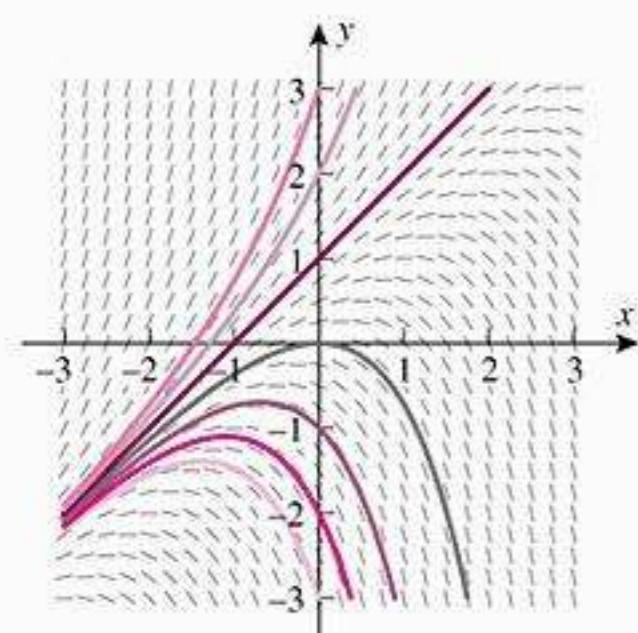


Figura 9.2.3

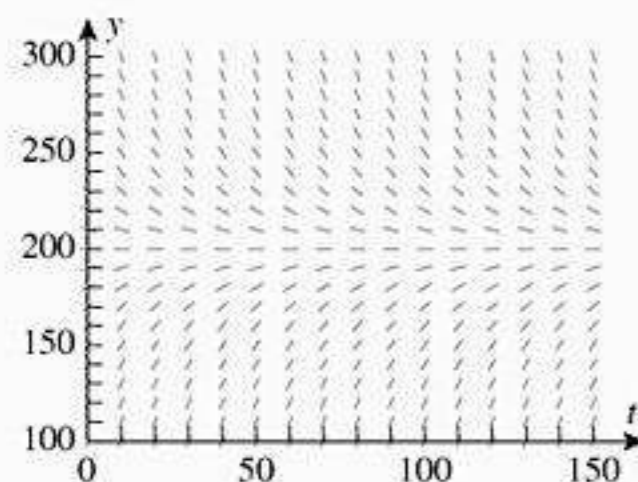


Figura 9.2.4

■ **MÉTODO DE EULER**

Nosso próximo objetivo é desenvolver um método para aproximar a solução de um problema de valor inicial da forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Não vamos tentar aproximar $y(x)$ para todos os valores de x ; em vez disto, vamos escolher um pequeno incremento Δx e focalizar na aproximação dos valores de $y(x)$ numa sucessão de valores de x distantes Δx unidades um do outro, começando em x_0 . Vamos denotar esses valores de x por

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \quad x_4 = x_3 + \Delta x, \dots$$

e denotaremos as aproximações de $y(x)$ nesses pontos por

$$y_1 \approx y(x_1), \quad y_2 \approx y(x_2), \quad y_3 \approx y(x_3), \quad y_4 \approx y(x_4), \dots$$

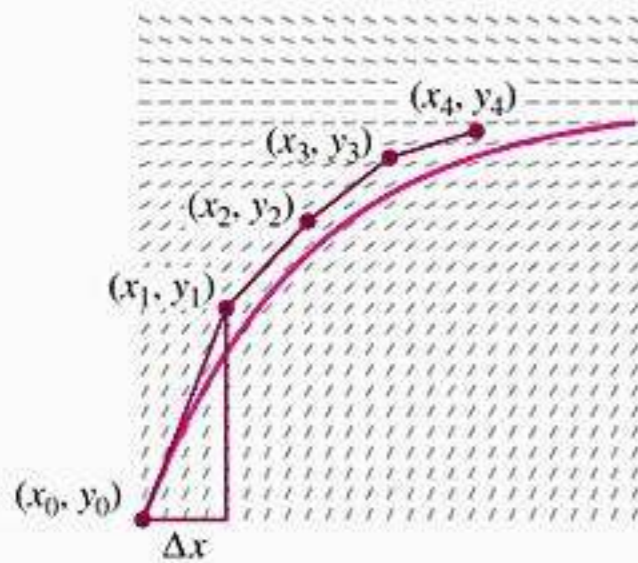


Figura 9.2.5

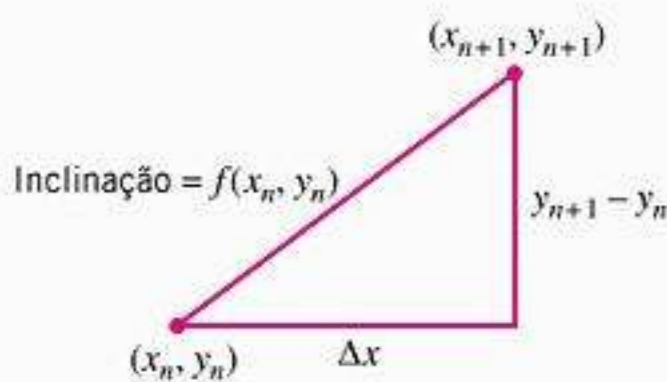


Figura 9.2.6

A técnica que iremos descrever para obter estas aproximações é chamada de **método de Euler**. Embora haja melhores métodos de aproximação disponíveis, muitos deles usam o método de Euler como ponto de partida, de modo que é importante entender os conceitos subjacentes.

A idéia básica do método de Euler é começar no ponto inicial conhecido (x_0, y_0) e traçar um segmento de reta na direção determinada pelo campo de direções até atingir o ponto (x_1, y_1) com coordenada x igual a $x_1 = x_0 + \Delta x$ (Figura 9.2.5). Se Δx for pequeno, então é razoável esperar que este segmento de reta não desviará muito da curva integral $y = y(x)$ e, assim, y_1 deverá aproximar muito bem $y(x_1)$. Para obter as aproximações subseqüentes, repetimos o processo usando o campo de direções como um guia a cada passo. Começando no extremo (x_1, y_1) , traçamos um segmento de reta determinado pelo campo de direções até atingirmos o ponto (x_2, y_2) , com coordenada x igual a $x_2 = x_1 + \Delta x$, e deste ponto traçamos um segmento de reta determinado pelo campo de direções até o ponto (x_3, y_3) , com coordenada x igual a $x_3 = x_2 + \Delta x$, e assim por diante. Conforme indicado na Figura 9.2.5, isso produz uma linha poligonal que tende a seguir de perto a curva integral. Portanto, é razoável esperar que os valores $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ aproximem muito bem $y(x_1), y(x_2), y(x_3), y(x_4), \dots$.

Para explicar como podem ser calculadas as aproximações y_1, y_2, y_3, \dots , vamos focalizar um segmento de reta típico. Conforme indicado na Figura 9.2.6, suponha que tenhamos encontrado o ponto (x_n, y_n) e que queiramos determinar o próximo ponto (x_{n+1}, y_{n+1}) , onde $x_{n+1} = x_n + \Delta x$. Como a inclinação do segmento de reta ligando esses pontos é determinada pelo campo de direções no ponto inicial, a inclinação é $f(x_n, y_n)$, e portanto

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n)$$

a qual podemos reescrever como

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$$

Esta fórmula, que é o ponto central do método de Euler, nos diz como usar cada aproximação para calcular a próxima.

Método de Euler

Para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

procedemos como segue:

Passo 1 Escolha um número Δx diferente de zero para servir como um **incremento** ou **tamanho de passo** ao longo do eixo x , e sejam

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \dots$$

Passo 2 Calcule sucessivamente

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x \\ y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \end{aligned}$$

Os números y_1, y_2, y_3, \dots nessas equações são aproximações de $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$

► **Exemplo 2** Use o método de Euler com o tamanho de passo 0,1 para fazer uma tabela de valores aproximados da solução do problema de valor inicial

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2 \tag{5}$$

no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Solução Neste problema, temos que $f(x, y) = y - x$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$. Além disso, uma vez que o tamanho de passo é 0,1, os valores de x nos quais os valores aproximados serão obtidos são

$$x_1 = 0,1, \quad x_2 = 0,2, \quad x_3 = 0,3, \dots, \quad x_9 = 0,9, \quad x_{10} = 1$$

As três primeiras aproximações são

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = 2 + (2 - 0)(0,1) = 2,2$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x = 2,2 + (2,2 - 0,1)(0,1) = 2,41$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x = 2,41 + (2,41 - 0,2)(0,1) = 2,631$$

Aqui está uma maneira de organizar as 10 aproximações arredondadas para 5 casas decimais:

MÉTODO DE EULER PARA $y' = y - x$, $y(0) = 2$ COM $\Delta x = 0,1$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)\Delta x$	$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$
0	0	2,00000	0,20000	2,20000
1	0,1	2,20000	0,21000	2,41000
2	0,2	2,41000	0,22100	2,63100
3	0,3	2,63100	0,23310	2,86410
4	0,4	2,86410	0,24641	3,11051
5	0,5	3,11051	0,26105	3,37156
6	0,6	3,37156	0,27716	3,64872
7	0,7	3,64872	0,29487	3,94359
8	0,8	3,94359	0,31436	4,25795
9	0,9	4,25795	0,33579	4,59374
10	1,0	4,59374	—	—

Observe que cada entrada na última coluna torna-se a próxima entrada na terceira coluna. ◀

Como procedimento prático, o erro absoluto numa aproximação produzida pelo método de Euler é aproximadamente proporcional ao tamanho de passo; assim, reduzindo o tamanho de passo pela metade reduz-se aproximadamente os erros absolutos e percentual pela metade. Porém, reduzindo-se o tamanho de passo também aumenta a quantidade de computação, aumentando, desse modo, o potencial para mais erros de arredondamento. Deixaremos os detalhes do estudo da questão de erros para cursos de Equações Diferenciais ou de Análise Numérica.

■ **PRECISÃO DO MÉTODO DE EULER**

Tem-se a partir de (5) e da condição inicial $y(0) = 2$ que a solução exata do problema de valor inicial no Exemplo 2 é

$$y = x + 1 + e^x$$

Assim, nesse caso, podemos comparar o valor aproximado de $y(x)$ produzido pelo método de Euler com a aproximação decimal dos valores exatos (Tabela 9.2.1). Na Tabela 9.2.1, o **erro absoluto** é calculado como

$$|\text{valor exato} - \text{aproximação}|$$

e o **erro percentual** como

$$\frac{|\text{valor exato} - \text{aproximação}|}{|\text{valor exato}|} \times 100\%$$

Tabela 9.2.1

x	SOLUÇÃO EXATA	APROXIMAÇÃO DE EULER	ERRO ABSOLUTO	ERRO PERCENTUAL
0	2,00000	2,00000	0,00000	0,00
0,1	2,20517	2,20000	0,00517	0,23
0,2	2,42140	2,41000	0,01140	0,47
0,3	2,64986	2,63100	0,01886	0,71
0,4	2,89182	2,86410	0,02772	0,96
0,5	3,14872	3,11051	0,03821	1,21
0,6	3,42212	3,37156	0,05056	1,48
0,7	3,71375	3,64872	0,06503	1,75
0,8	4,02554	3,94359	0,08195	2,04
0,9	4,35960	4,25795	0,10165	2,33
1,0	4,71828	4,59374	0,12454	2,64

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.2 (Ver página 602 para respostas.)

1. Associe cada equação diferencial com seu campo de direções.

- (a) $y' = y$ _____ (b) $y' = 2xy$ _____
 (c) $y' = e^{-y}$ _____ (d) $y' = 2xy^2$ _____

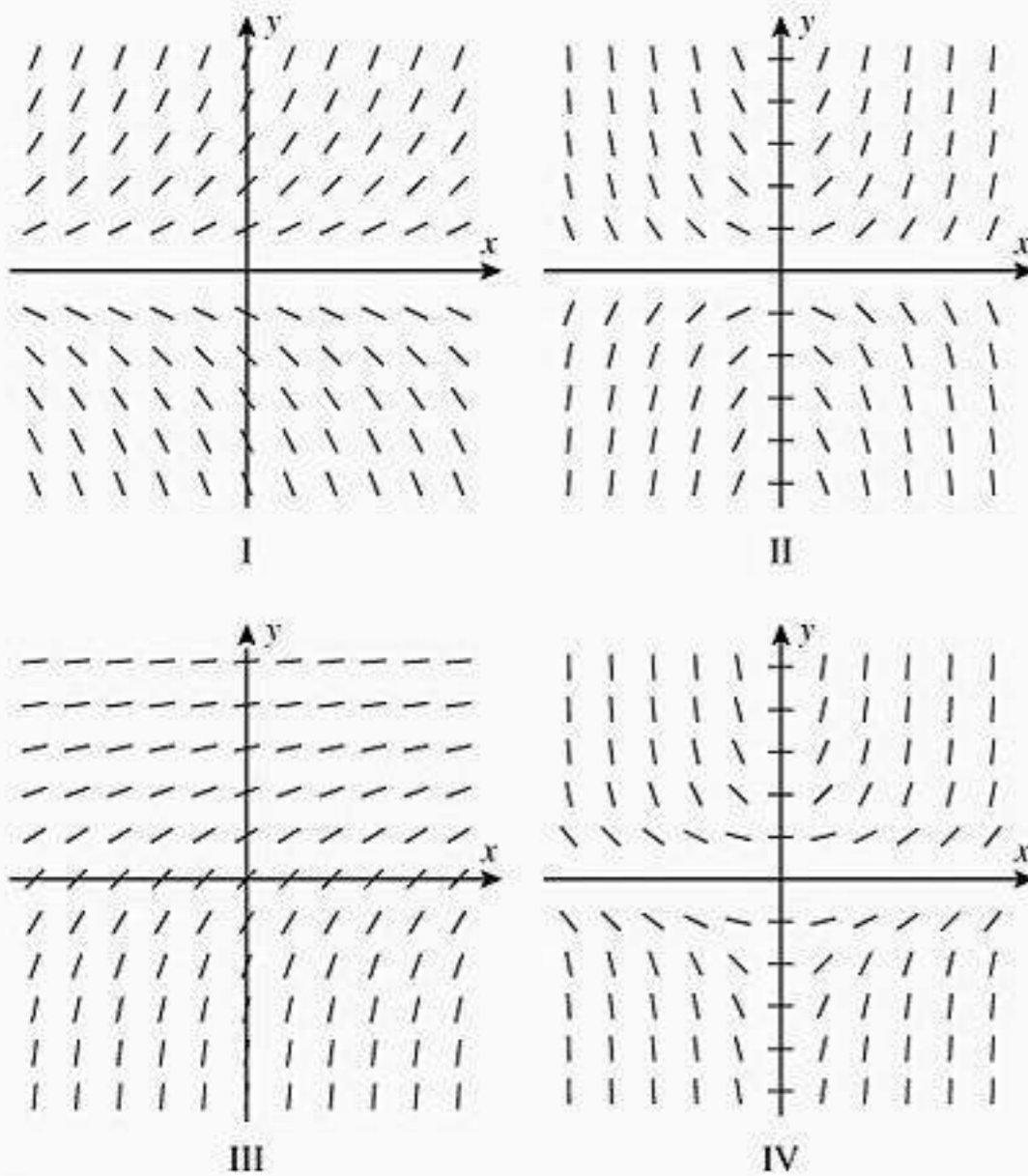


Figura Ex-1

2. Na figura abaixo é dado o campo de direções de $y' = y/x$ nos 16 pontos de malha (x, y) , em que $x = -2, -1, 1, 2$ e $y = -2, -1, 1, 2$. Use esse campo de direções e um raciocínio geométrico para encontrar a curva integral que passa pelo ponto $(1, 2)$.

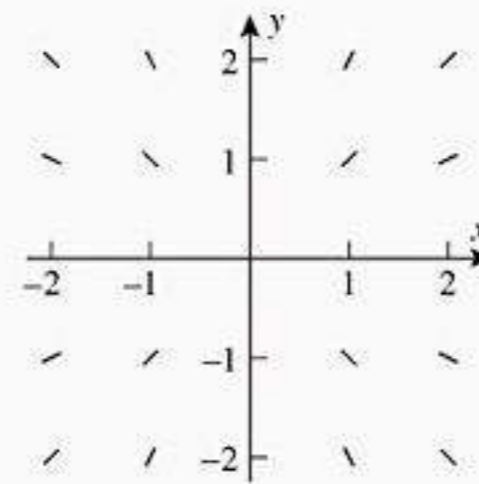


Figura Ex-2

3. Quando utilizamos o método de Euler no problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, obtemos y_{n+1} a partir de y_n , x_n e Δx por meio da fórmula $y_{n+1} =$ _____.
4. Considere o problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
- (a) Use o método de Euler com cinco passos para aproximar $y(1)$.
- (b) Qual é o valor exato de $y(1)$?

EXERCÍCIOS 9.2 Recurso Gráfico CAS

1. Esboce o campo de direções para $y' = xy/4$ nos 25 pontos de malha (x, y) , dados por $x = -2, -1, \dots, 2$ e $y = -2, -1, \dots, 2$.
2. Esboce o campo de direções para $y' + y = 2$ nos 25 pontos de malha (x, y) , dados por $x = 0, 1, \dots, 4$ e $y = 0, 1, \dots, 4$.
3. Um campo de direções para a equação diferencial $y' = 1 - y$ está mostrado na figura em anexo. Em cada parte, esboce o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial.
- (a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 1$ (c) $y(0) = 2$

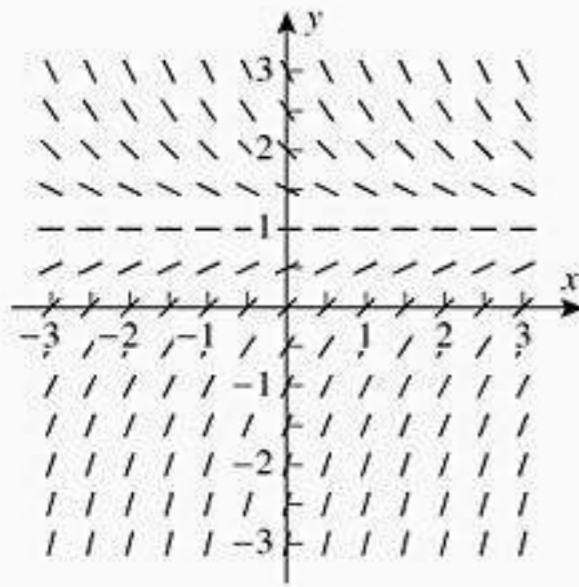


Figura Ex-3

4. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 3 e use um recurso gráfico computacional para confirmar que as curvas integrais dessas soluções estão de acordo com os esboços obtidos a partir do campo de direções.

5. Um campo de direções para a equação diferencial $y' = 2y - x$ está na figura abaixo. Em cada parte, esboce o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial.

- (a) $y(1) = 1$ (b) $y(0) = -1$ (c) $y(-1) = 0$

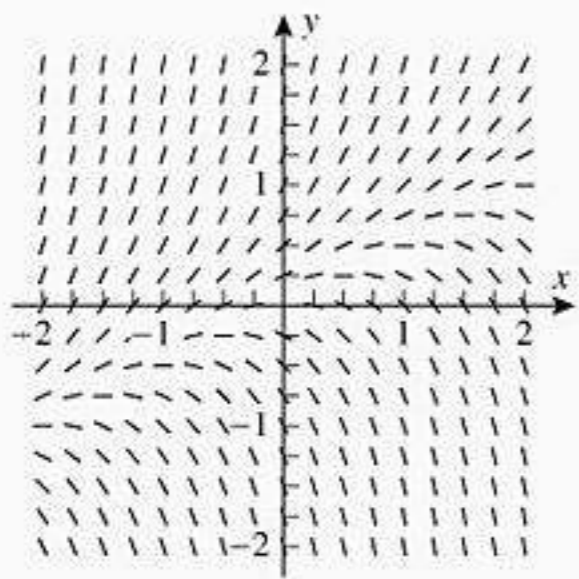


Figura Ex-5

6. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 5 e use um recurso gráfico computacional para confirmar que as curvas integrais dessas soluções estão de acordo com os esboços obtidos a partir do campo de direções.

ENFOCANDO CONCEITOS

7. Use o campo de direções no Exercício 3 para fazer uma conjectura sobre o comportamento das soluções de $y' = 1 - y$ quando $x \rightarrow +\infty$, e confirme sua conjectura examinando a solução geral da equação.
8. Use o campo de direções no Exercício 5 para fazer uma conjectura sobre o efeito de y_0 no comportamento da solução do problema de valor inicial $y' = 2y - x$, $y(0) = y_0$ quando $x \rightarrow +\infty$, e verifique sua conjectura examinando a solução do problema de valor inicial.
9. Em cada parte, associe a equação diferencial com o campo de direções, e explique o seu raciocínio.
 - (a) $y' = 1/x$ (b) $y' = 1/y$ (c) $y' = e^{-x^2}$
 - (d) $y' = y^2 - 1$ (e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$
 - (f) $y' = (\text{sen } x)(\text{sen } y)$

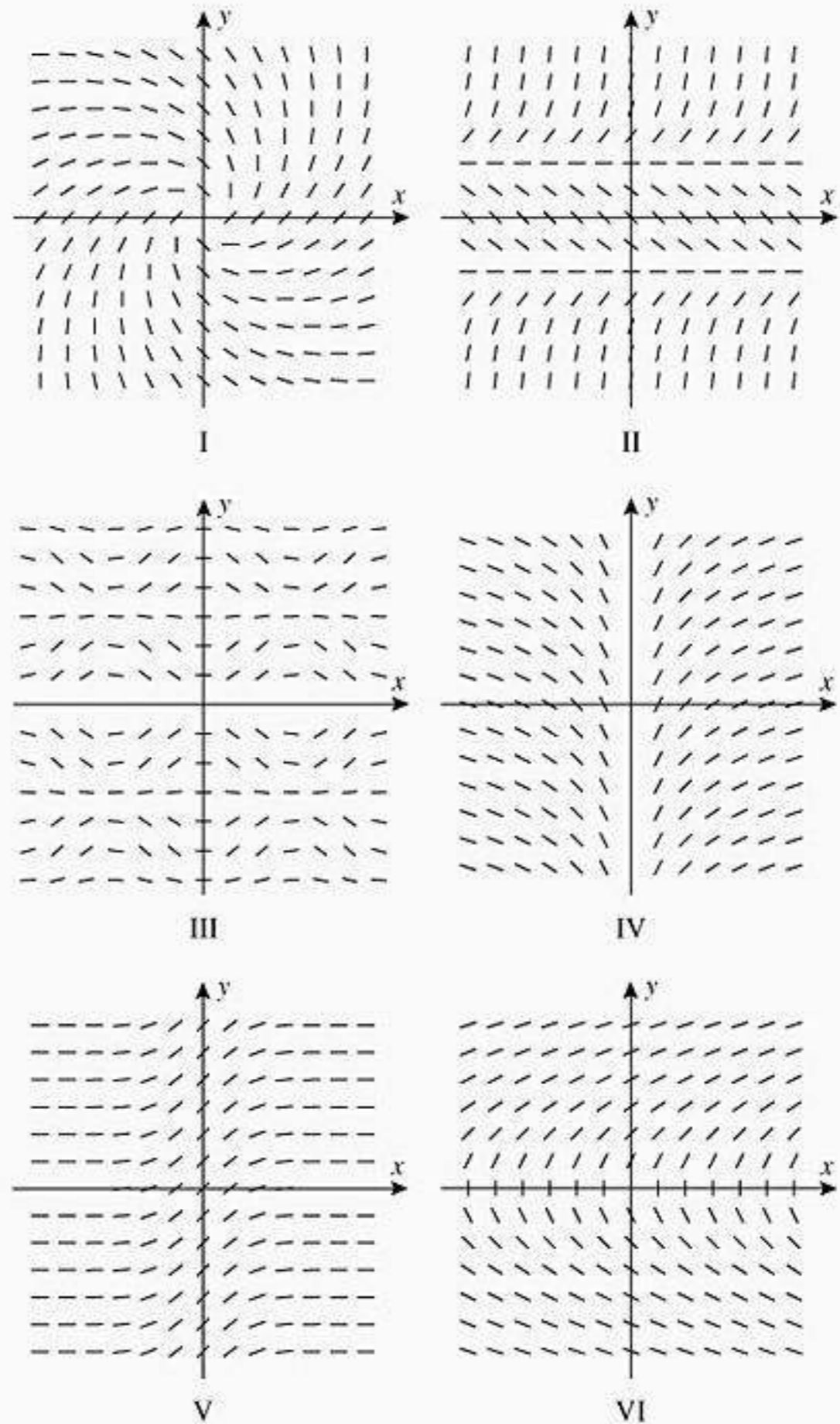


Figura Ex-9

10. Se o leitor dispuser de um CAS ou um recurso gráfico computacional capaz de gerar campos de direções, consulte o manual e verifique as respostas obtidas no Exercício 9 gerando os campos de direções para as equações diferenciais.
11. (a) Use o método de Euler com um tamanho de passo $\Delta x = 0,2$ para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$
 no intervalo $0 \leq x \leq 1$.
 - (b) Resolva exatamente o problema de valor inicial, e calcule o erro e o erro percentual em cada aproximação da parte (a).
 - (c) Esboce a solução exata e a solução aproximada no mesmo sistema de coordenadas.
12. Afirmou-se no final desta seção que, reduzindo o tamanho do passo no método de Euler pela metade reduz-se aproximadamente pela metade, também, o erro em cada aproximação. Confirme que o erro em $y(1)$ fica reduzido aproximadamente à metade se o tamanho de passo usado no Exercício 11 for de $\Delta x = 0,1$.

13-16 Use o método de Euler com tamanho de passo Δx ou Δt para aproximar a solução do problema de valor inicial no intervalo dado. Apresente sua resposta como uma tabela e um gráfico.

- 13. $dy/dx = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 4$, $\Delta x = 0,5$
- 14. $dy/dx = x - y^2$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 2$, $\Delta x = 0,25$
- 15. $dy/dt = \cos y$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 2$, $\Delta t = 0,5$
- 16. $dy/dt = e^{-y}$, $y(0) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, $\Delta t = 0,1$
- 17. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \text{sen } \pi t, \quad y(0) = 0$$

Use o método de Euler com 5 passos para aproximar $y(1)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 18. (a) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y' = e^{-x^2}$, $y(0) = 0$ é

$$y(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- (b) Use o método de Euler com $\Delta x = 0,05$ para aproximar o valor de

$$y(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

e compare a resposta com aquela produzida por um recurso computacional com capacidade de integração numérica.

- 19. A figura abaixo mostra um campo de direções para a equação diferencial $y' = -x/y$.
 - (a) Use o campo de direções para estimar $y(\frac{1}{2})$ para a solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = 1$.
 - (b) Compare a sua estimativa ao valor exato de $y(\frac{1}{2})$.

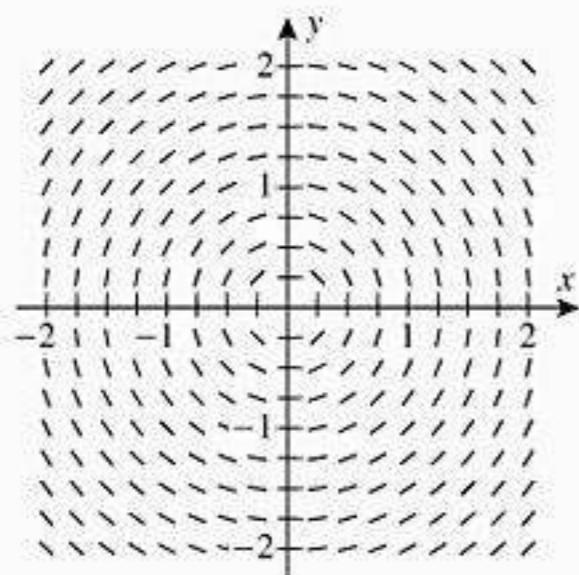


Figura Ex-19

- 20. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{2}, \quad y(0) = 1$$

- (a) Use o método de Euler com tamanho de passo $\Delta x = 0,2; 0,1; 0,05$ para obter três aproximações de $y(1)$.

- (b) Esboce as três aproximações *versus* Δx e faça uma conjectura sobre o valor exato de $y(1)$. Explique o seu raciocínio.
- (c) Verifique a sua conjectura encontrando exatamente $y(1)$.
- 21. Dizemos que um campo de direções da forma $y' = f(y)$ é **autônomo**.
 - (a) Explique por que, para campos de direções autônomos, os segmentos de retas tangentes ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos.
 - (b) A palavra *autônomo* significa “independente”. Em que sentido é independente um campo de direções autônomo?
 - (c) Sejam $G(y)$ uma antiderivada de $1/[f(y)]$ e C uma constante. Explique por que qualquer função derivável definida implicitamente por $G(y) - x = C$ é uma solução da equação $y' = f(y)$.
- 22. (a) Resolva a equação $y' = \sqrt{y}$ e mostre que qualquer solução que não seja constante tem um gráfico que é côncavo para cima em toda parte.
 - (b) Explique como a conclusão da parte (a) poderia ser obtida diretamente a partir da equação $y' = \sqrt{y}$, sem resolvê-la.
- 23. (a) Use derivação implícita para encontrar um campo de direções cuja curva integral que passa pelo ponto $(1, 1)$ seja definida implicitamente pela equação $xy^3 - x^2y = 0$.
 - (b) Prove que se $y(x)$ é uma curva integral qualquer do campo de direções da parte (a), então $x[y(x)]^3 - x^2y(x)$ é uma função constante.
 - (c) Encontre uma equação que defina implicitamente a curva integral que passa pelo ponto $(-1, -1)$ do campo de direções da parte (a).
- 24. (a) Use derivação implícita para encontrar um campo de direções cuja curva integral que passa pelo ponto $(0, 0)$ seja definida implicitamente pela equação $xe^y + ye^x = 0$.
 - (b) Prove que se $y(x)$ é uma curva integral qualquer do campo de direções da parte (a), então $xe^{y(x)} + y(x)e^x$ é uma função constante.
 - (c) Encontre uma equação que defina implicitamente a curva integral que passa pelo ponto $(1, 1)$ do campo de direções da parte (a).
- 25. Explique a conexão entre o método de Euler e a aproximação linear local discutida na Seção 3.8 (ver Volume 1).
- 26. Considere o problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$ e seja y_n a aproximação de $y(1)$ usando o método de Euler com n passos.
 - (a) Faça uma conjectura sobre o valor exato de $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Explique seu raciocínio.
 - (b) Encontre uma fórmula explícita para y_n e use-a para conferir sua conjectura na parte (a).

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.2

- 1. (a) IV (b) III (c) I (d) II
- 2. $y = 2x, x > 0$
- 3. $y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$
- 4. (a) 2,48832 (b) e

9.3 MODELANDO COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Como muitas das leis fundamentais da Física e das Ciências Sociais envolvem taxas de variação, não deveria constituir uma surpresa que tais leis sejam modeladas por equações diferenciais. Nesta seção, discutiremos as idéias gerais de modelagem com equações diferenciais e investigaremos alguns modelos importantes que podem ser aplicados ao crescimento populacional, à datação por carbono, à Medicina e à Ecologia.

■ CRESCIMENTO POPULACIONAL

Um dos modelos mais simples de crescimento populacional está baseado na observação de que quando populações (pessoas, plantas, bactérias e moscas-das-frutas, por exemplo) não estão restritas por limitações ambientais, elas tendem a crescer a uma taxa proporcional ao tamanho da população – quanto maior for a população, mais rapidamente ela cresce.

Para traduzir este princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ denote a população no instante t . A cada momento, a taxa de crescimento populacional em relação ao tempo é dy/dt , portanto a hipótese de que a taxa de crescimento seja proporcional à população é descrita pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que pode ser usualmente determinada experimentalmente. Assim, se a população for conhecida em algum instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para a população $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

■ FARMACOLOGIA

Quando uma droga (digamos, penicilina ou aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sanguínea e, então, é absorvida pelo corpo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga presente nessa corrente tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente – quanto mais droga estiver presente na corrente sanguínea, mais rapidamente ela será absorvida pelo corpo.

Para traduzir este princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante t . A cada instante, a taxa de variação de y em relação a t é dy/dt , portanto, a hipótese de que o decrescimento da taxa seja proporcional à quantidade y na corrente sanguínea traduz-se na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (2)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da droga e pode ser determinada experimentalmente. O sinal negativo é requerido, pois y decresce com o tempo. Assim, se a dosagem inicial da droga for conhecida, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(0) = y_0$$

■ DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA

Suponha que uma doença comece a se espalhar em uma população de L indivíduos. A lógica sugere que, em cada instante, a taxa segundo a qual a doença se espalha irá depender de quantos indivíduos estão afetados e de quantos não estão – à medida que mais indivíduos estiverem afetados, a oportunidade de disseminação da doença tende a crescer, mas ao mesmo tempo há menos indivíduos que não foram afetados, portanto, a disseminação da doença tende a decrescer. Desta forma, existem duas influências conflitantes sobre a taxa segundo a qual a doença se espalha.

Para traduzir isso em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja o número de indivíduos que têm a doença no instante t , logo necessariamente o número de indivíduos que não têm a doença no instante t é $L - y$. Quando o valor de y cresce, o valor de $L - y$ decresce, assim as influências conflitantes dos dois valores sobre a taxa de disseminação dy/dt são levadas em conta pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da natureza da doença e dos padrões de comportamento dos indivíduos e pode ser determinada experimentalmente. Assim, se o número de indivíduos afetados for conhecido em um certo instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y), \quad y(0) = y_0 \quad (3)$$

■ MODELOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

As equações (1) e (2) são exemplos de uma classe geral de modelos chamados *modelos exponenciais*. Em geral, os modelos exponenciais surgem em situações nas quais uma quantidade cresce ou decresce a uma taxa que é proporcional ao montante de quantidade presente. Mais precisamente, vamos fazer a seguinte definição:

9.3.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma quantidade $y = y(t)$ tem um *modelo de crescimento exponencial* se ela crescer a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente, e dizemos que tem um *modelo de decaimento exponencial* se ela decresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente. Assim, para um modelo de crescimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz a uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k > 0) \quad (4)$$

e para um modelo de decaimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (k > 0) \quad (5)$$

A constante k é chamada de *constante de crescimento* ou *constante de decaimento*, conforme apropriado.

As equações (4) e (5) são lineares e de primeira ordem, pois podem ser reescritas como

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

ambas tendo a forma da Equação (5) na Seção 9.1 (mas com t em vez de x como variável independente); na primeira equação, temos que $p(t) = -k$ e $q(t) = 0$ e na segunda $p(t) = k$ e $q(t) = 0$.

Para ilustrar como essas equações podem ser resolvidas, suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial e que conheçamos o tamanho dela em algum instante, digamos $y = y_0$ quando $t = 0$. Desse modo, a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

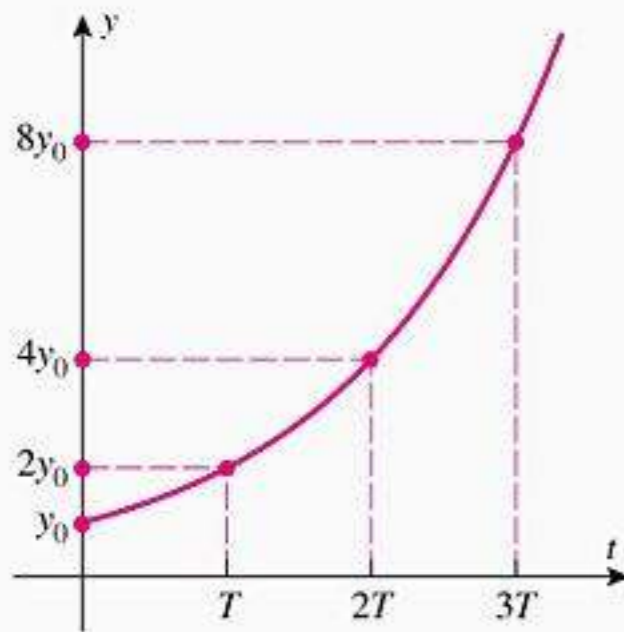
$$\frac{dy}{dt} - ky = 0, \quad y(0) = y_0$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação diferencial pelo fator integrante

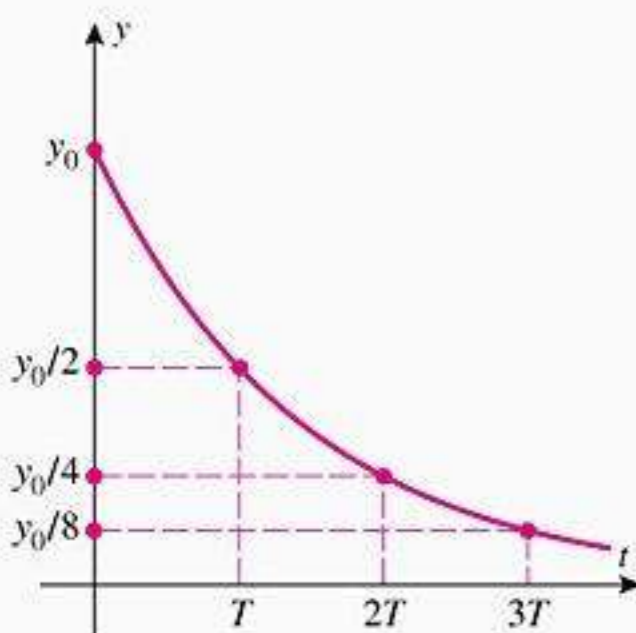
$$\mu = e^{\int (-k) dt} = e^{-kt}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt} y) = 0$$



Modelo de crescimento exponencial com tempo de duplicação T



Modelo de decaimento exponencial com meia-vida T

Figura 9.3.1

e seja T o tempo requerido para y dobrar o seu tamanho. Desta forma, no tempo $t = T$ o valor de y será $2y_0$ e, portanto, de (9)

$$2y_0 = y_0 e^{kT} \quad \text{ou} \quad e^{kT} = 2$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados resulta que $kT = \ln 2$, portanto o tempo de duplicação é

$$T = \frac{1}{k} \ln 2 \tag{10}$$

Deixaremos como exercício mostrar que a Fórmula (10) também dá a meia-vida de um modelo de decaimento exponencial. Observe que esta fórmula não envolve a quantidade inicial y_0 , de modo que em um modelo de crescimento ou de decaimento exponencial, a quantidade y duplica-se (ou reduz-se ao meio) a cada T unidades (Figura 9.3.1).

► **Exemplo 2** Tem-se a partir de (10) que, com uma taxa de crescimento continuada de 1,33% ao ano, o tempo de duplicação para a população mundial será

$$T = \frac{1}{0,0133} \ln 2 \approx 52,116$$

ou aproximadamente 52 anos. Assim, com uma taxa de crescimento anual continuada de 1,33%, a população de 5,9 bilhões em 1998 dobrará para 11,8 bilhões no ano de 2050 e dobrará outra vez para 23,6 bilhões em 2102. ◀

■ **DECAIMENTO RADIOATIVO**

É um fato da Física que os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em um processo chamado *decaimento radioativo*. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de elemento presente, o que implica que a quantidade $y = y(t)$ de elemento radioativo é uma função do tempo com um modelo de decaimento exponencial.

Todo elemento radioativo tem uma meia-vida específica; por exemplo, a meia-vida do carbono-14 radioativo está em torno de 5.730 anos. Assim, a partir de (10), a constante de decaimento para este elemento é

$$k = \frac{1}{T} \ln 2 = \frac{\ln 2}{5.730} \approx 0,000121$$

e isto implica que se houver y_0 unidades de carbono-14 presente no instante $t = 0$, então o número de unidades presentes depois de t anos será de aproximadamente

$$y(t) = y_0 e^{-0,000121t} \tag{11}$$

► **Exemplo 3** Se 100 gramas de carbono-14 radioativo forem armazenados em uma caverna por 1.000 anos, quantos gramas restarão no final desse período?

Solução A partir de (11) com $y_0 = 100$ e $t = 1.000$, obtemos

$$y(1.000) = 100e^{-0,000121(1.000)} = 100e^{-0,121} \approx 88,6$$

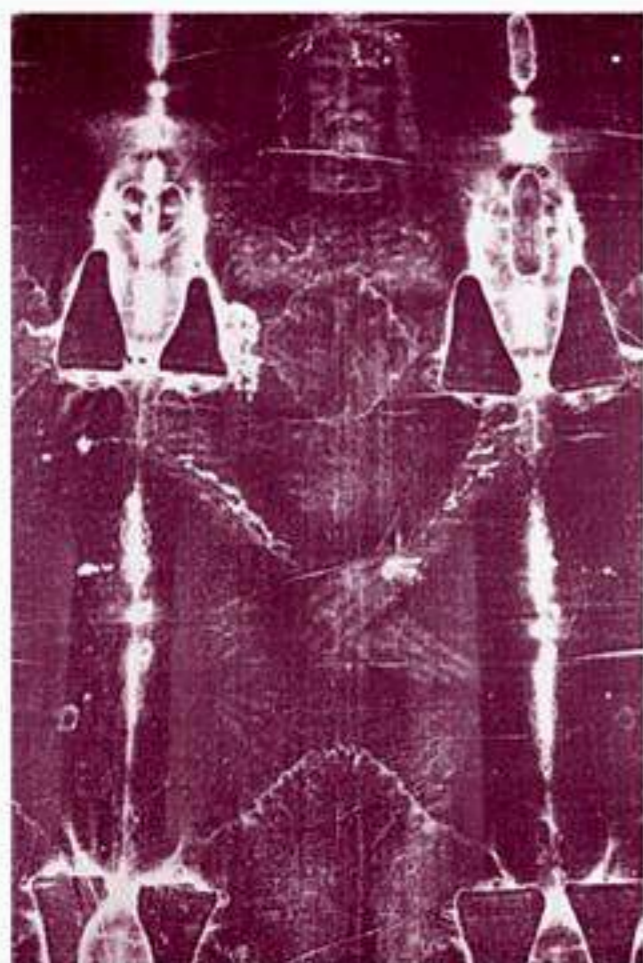
Assim, restarão cerca de 88,6 gramas. ◀

■ **DATAÇÃO POR CARBONO**

Quando o nitrogênio na parte superior da atmosfera da Terra é bombardeado pelos raios cósmicos, produz-se o elemento carbono-14 radioativo. Este carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é ingerido pelas plantas, que por sua vez, são comidas pelos animais. Dessa maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo. Em 1947, o cientista nuclear americano W. F. Libby*

* W. F. Libby, "Radiocarbon Dating", *American Scientist*, vol. 44, 1956, pp. 98-112.

propôs a teoria que a porcentagem de carbono-14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou um animal morre, o carbono-14 no tecido começa a decair. Assim, a idade de um artefato que contenha material animal ou vegetal pode ser estimada determinando qual a porcentagem que resta do seu conteúdo de carbono-14 original. Vários procedimentos chamados *datação por carbono* ou *datação por radiocarbono* foram desenvolvidos para medir esta porcentagem.



O Sudário de Turim

► **Exemplo 4** Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como o Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Este pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu Britânico mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93% do carbono-14 original. Use esta informação para estimar a idade do sudário.

Solução A partir de (11), a fração de carbono-14 original que permanece após t anos é

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{-0,000121t}$$

Tomando-se o logaritmo natural em ambos os membros e resolvendo-se para t , obtemos

$$t = -\frac{1}{0,000121} \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right)$$

Assim, tomando-se $y(t)/y_0$ como sendo 0,93 e 0,92, obtemos

$$t = -\frac{1}{0,000121} \ln(0,93) \approx 600$$

$$t = -\frac{1}{0,000121} \ln(0,92) \approx 689$$

Isso significa que, em 1988, quando o teste foi feito a idade do sudário estava entre 600 e 689 anos, colocando desta forma a sua origem entre 1299 e 1388 dC. Portanto, aceitando-se a validade de datar por carbono-14, o sudário de Turim não pode ser de Jesus de Nazaré. ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.3** (Ver página 611 para respostas.)

- Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial com constante de crescimento $k > 0$.
 - $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Em termos de k , o tempo de duplicação da quantidade y é $\underline{\hspace{2cm}}$.
 - Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de y , então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de decaimento exponencial com constante de decaimento $k > 0$.
 - $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Em termos de k , a meia-vida da quantidade y é $\underline{\hspace{2cm}}$.
 - Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de y , então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que a meia-vida de um elemento radioativo seja de 1 minuto. Se 32 g desse elemento estiverem contidos num recipiente às 13 horas e 00 minuto, então a quantidade presente às 13 horas e 05 minutos será $\underline{\hspace{2cm}}$.
- Uma colônia de moscas-das-frutas cresce exponencialmente a uma taxa de 2% por dia. Se o tamanho inicial da colônia for de 100 dessas moscas, então depois de t dias o tamanho dessa colônia será de $y(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que um quadrado esteja aumentando de tal maneira que a taxa de variação de sua área seja igual, em magnitude, ao seu perímetro. Se $A = A(t)$ for a área do quadrado, então $A(t)$ satisfaz a equação de primeira ordem $dA/dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 9.3  Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. (a) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ cresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja y_0 . Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
 (b) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ decresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja y_0 . Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
2. (a) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = k\sqrt{y}$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de y .
 (b) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = -ky^3$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de y .
3. (a) Suponha que uma partícula se mova ao longo de um eixo s de tal forma que a sua velocidade $v(t)$ seja sempre a metade de $s(t)$. Determine uma equação diferencial cuja solução seja $s(t)$.
 (b) Suponha que um objeto se mova ao longo de um eixo s de tal forma que a sua aceleração $a(t)$ seja sempre o dobro da velocidade. Determine uma equação diferencial cuja solução seja $s(t)$.
4. Suponha que um corpo se mova ao longo de um eixo s através de um meio resistente de tal forma que a velocidade $v = v(t)$ decresça a uma taxa que seja o dobro do quadrado da velocidade.
 (a) Encontre uma equação diferencial cuja solução seja a velocidade $v(t)$.
 (b) Encontre uma equação diferencial cuja solução seja a posição $s(t)$.
5. Suponha que uma população inicial de 10.000 bactérias cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por hora e que $y = y(t)$ é o número de bactérias presentes t horas mais tarde.
 (a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
 (b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
 (c) Quanto tempo leva para a população inicial de bactérias dobrar?
 (d) Quanto tempo leva para a população de bactérias atingir 45.000?
6. Uma célula da bactéria *E.colli* divide-se em duas células a cada 20 minutos quando colocada em cultura de nutrientes. Seja $y = y(t)$ o número de células presentes t minutos após uma única célula ter sido colocada na cultura. Suponha que o crescimento da bactéria seja aproximado por um modelo de crescimento exponencial contínuo.
 (a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
 (b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
 (c) Quantas células estão presentes após 2 horas?
 (d) Quanto tempo leva para o número de células atingir 1.000.000?
7. O rádon-222 é um gás radioativo com uma meia-vida de 3,83 dias. Esse gás é prejudicial à saúde porque tende a ficar preso nos porões das casas e o Ministério da Saúde sugere que se fechem os porões para evitar a entrada do gás. Suponha que $5,0 \times 10^7$ átomos de rádon fiquem presos em um porão no momento em que ele é selado e que $y(t)$ seja o número de átomos presentes t dias mais tarde.
 (a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
 (b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
 (c) Quantos átomos estarão presentes após 30 dias?
 (d) Quanto tempo levará para decair 90% da quantidade original do gás?
8. O polônio-210 é um elemento radioativo com uma meia-vida de 140 dias. Suponha que 10 miligramas do elemento sejam colocados em um recipiente de chumbo e que $y(t)$ seja o número de miligramas presentes t dias mais tarde.
 (a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
 (b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
 (c) Quantos miligramas estarão presentes após 10 semanas?
 (d) Quanto tempo levará para decair 70% da quantidade inicial?
9. Suponha que 100 moscas-das-frutas sejam colocadas em um recipiente de acasalamento que possa suportar, no máximo, 5.000 moscas. Supondo que a população cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por dia, quanto tempo levará para o recipiente atingir a sua capacidade?
10. Suponha que a cidade de Gray Rock tenha tido uma população de 10.000 em 1998 e de 12.000 em 2003. Supondo que o modelo de crescimento é exponencial, em que ano a população atingirá 20.000?
11. Uma cientista deseja determinar a meia-vida de certa substância radioativa. Ela determina que em exatamente 5 dias uma amostra de 10,0 miligramas da substância decai para 3,5 miligramas. Baseado nestes dados, qual será a meia-vida?
12. Suponha que 30% de certa substância radioativa decaia em 5 anos.
 (a) Qual é a meia-vida da substância em anos?
 (b) Suponha que uma certa quantidade desta substância seja estocada em uma caverna. Qual é a porcentagem remanescente após t anos?
13. Em cada parte, determine um modelo de crescimento exponencial $y = y_0 e^{kt}$ que satisfaça as condições dadas.
 (a) $y_0 = 3$; tempo de duplicação $T = 6$.
 (b) $y(0) = 4$; taxa de crescimento 2%.
 (c) $y(1) = 1$; $y(10) = 200$.
 (d) $y(1) = 2$; tempo de duplicação $T = 6$.
14. Em cada parte, determine o modelo de decaimento exponencial $y = y_0 e^{-kt}$ que satisfaça as condições dadas.
 (a) $y_0 = 10$; meia-vida $T = 5$.
 (b) $y(0) = 10$; taxa de decaimento 1,5%.
 (c) $y(1) = 100$; $y(10) = 1$.
 (d) $y(1) = 10$; meia-vida $T = 5$.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 15. (a) Faça uma conjectura sobre o efeito nos gráficos de $y = y_0 e^{kt}$ e $y = y_0 e^{-kt}$ de variar k e manter y_0 fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.
- (b) Faça uma conjectura sobre os efeitos nos gráficos de $y = y_0 e^{kt}$ e $y = y_0 e^{-kt}$ de variar y_0 e manter k fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.
- 16. (a) Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia-vida de um modelo exponencial, de aumentar y_0 e manter k fixo? Justifique a sua resposta.
- (b) Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia-vida de um modelo exponencial, de aumentar k e manter y_0 fixo? Justifique a sua resposta.
- 17. (a) Há um truque, chamado de **Regra dos 70**, que pode ser usado para obter estimativas rápidas do tempo de duplicação e meia-vida de um modelo exponencial. De acordo com esta regra, o tempo de duplicação ou meia-vida é aproximadamente 70 dividido pela porcentagem da taxa percentual de crescimento ou de decaimento. Por exemplo, mostramos no Exemplo 2 que, com uma taxa de crescimento contínua de 1,33% ao ano, a população mundial dobraria a cada 52 anos. Este resultado está de acordo com a Regra dos 70, uma vez que $70/1,33 \approx 52,6$. Explique por que essa regra funciona.
- (b) Use a Regra dos 70 para estimar o tempo de duplicação de uma população que cresce exponencialmente a uma taxa de 1% ao ano.
- (c) Use a Regra dos 70 para estimar a meia-vida de uma população que decresce exponencialmente a uma taxa de 3,5% por hora.
- (d) Use a Regra dos 70 para estimar a taxa de crescimento que seria requerida para uma população crescendo exponencialmente dobrar a cada 10 anos.

- 18. Determine uma fórmula para o tempo de triplicação de um modelo de crescimento exponencial.
- 19. Em 1950, uma equipe de pesquisa escavando próximo de Folsom, Novo México, encontrou ossos de bisão chamuscados junto com algumas pontas de projéteis em forma de folha (chamados de "pontas de Folsom"), que foram manufaturadas por uma tribo de caçadores palio-indígena. Ficou claro pela evidência encontrada que o bisão havia sido cozinhado e comido por quem fez as pontas, de modo que a datação por radiocarbono possibilitou aos pesquisadores determinar quando os caçadores vagaram pela América do Norte. Os testes mostraram que os ossos continham entre 27 e 30% do carbono-14 original. Use esta informação para mostrar que os caçadores viveram aproximadamente entre 9000 e 8000 aC.

- 20. (a) Use um recurso computacional para fazer um gráfico de p_{rem} versus t , onde p_{rem} é a porcentagem de carbono-14 remanescente em um artefato após t anos.
- (b) Use o gráfico para estimar a porcentagem de carbono-14 que deveria estar presente no teste de 1988 do Su-

dário de Turim, para que ele tivesse sido de Jesus. [Ver Exemplo 4.]

- 21. (a) Aceita-se correntemente que a meia-vida do carbono-14 pode variar ± 40 anos de seu valor nominal de 5.730 anos. Esta variação torna possível datar o Sudário de Turim como sendo do tempo de Jesus de Nazaré? [Ver Exemplo 4.]
- (b) Reveja a subseção da Seção 3.8 intitulada Propagação de Erros em Aplicações, e então estime o erro percentual que resulta na idade computada de um artefato a partir de $r\%$ de erro na meia-vida do carbono-14.
- 22. Observou-se experimentalmente que a uma temperatura constante a taxa de variação da pressão atmosférica p em relação à altitude h acima do nível do mar é proporcional à pressão.
 - (a) Supondo que a pressão ao nível do mar seja p_0 , determine um problema de valor inicial cuja solução seja $p(h)$. [Nota: a equação diferencial, neste caso, envolverá uma constante de proporcionalidade.]
 - (b) Ache uma fórmula para $p(h)$ em atmosferas (atm) se a pressão ao nível do mar for de 1 atm e a 5.000 pés acima do nível do mar for de 0,83 atm.
- 23. (a) Mostre que se $b > 1$, então a equação $y = y_0 b^t$ pode ser expressa como $y = y_0 e^{kt}$ para alguma constante positiva k [Nota: isso mostra que se $b > 1$ e se y crescer de acordo com a equação $y = y_0 b^t$, então y tem um modelo de crescimento exponencial.]
- (b) Mostre que se $0 < b < 1$, então a equação $y = y_0 b^t$ pode ser expressa como $y = y_0 e^{-kt}$ para alguma constante positiva k . [Nota: isso mostra que se $0 < b < 1$ e se y decair de acordo com a equação $y = y_0 b^t$, então y tem um modelo de decaimento exponencial.]
- (c) Expresse $y = 4(2^t)$ na forma $y = y_0 e^{kt}$.
- (d) Expresse $y = 4(0,5^t)$ na forma $y = y_0 e^{-kt}$.
- 24. Suponha que uma quantidade y tenha um modelo de crescimento exponencial $y = y_0 e^{kt}$ ou de decaimento exponencial $y = y_0 e^{-kt}$ e que $y = y_1$ em $t = t_1$. Em cada caso, determine uma fórmula para k em termos de y_0, y_1 e t_1 , supondo que $t_1 \neq 0$.
- 25. (a) Mostre que se uma quantidade $y = y(t)$ tiver um modelo exponencial e se $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$, então o tempo de duplicação ou a meia-vida T é

$$T = \left| \frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(y_2/y_1)} \right|$$

- (b) Durante um certo período de 1 hora o número de bactérias em uma colônia cresce 25%. Supondo um modelo de crescimento exponencial, qual é o tempo de duplicação para a colônia?
- 26. Suponha que P dólares tenham sido investidos a uma taxa de juros anuais de $r \times 100\%$. Se os juros acumulados forem creditados na conta ao final do ano, então dizemos que eles são *compostos anualmente*; se forem creditados no final de um período de 6 meses, dizemos que são *compostos semestralmente*, e se forem creditados ao final de cada período de 3 meses, dizemos que são *compostos trimestralmente*. Quanto mais frequentemente os juros forem compostos, melhor é

para o investidor, uma vez que mais juros rendem juros sobre si mesmo.

- (a) Mostre que se os juros forem compostos n vezes ao ano em intervalos igualmente espaçados, então o valor A do investimento após t anos é

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- (b) Pode-se imaginar juros sendo compostos a cada dia, a cada hora, a cada minuto e assim por diante; levado ao limite, pode-se conceber juros compostos a cada instante de tempo; isto é chamado *composição contínua*. Assim, pela parte (a), o valor A de P dólares após t anos, quando investidos a uma taxa anual de $r \times 100\%$, compostos continuamente é

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Use o fato de que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ para provar que $A = Pe^{rt}$.

- (c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que dinheiro investido a juros compostos contínuos cresce continuamente a uma taxa proporcional à quantidade presente.
27. (a) Se \$1.000 forem investidos a 8% ao ano compostos continuamente (Exercício 26), qual será o valor do investimento após 5 anos?
- (b) Se for desejado que um investimento a 8% ao ano composto continuamente deva ter um valor de \$10.000 após 10 anos, quanto deve ser investido agora?
- (c) Quanto tempo leva para que um investimento a 8% ao ano composto continuamente dobre seu valor?
28. Qual é a taxa de juros efetiva de uma taxa de juros anual de $r\%$ composta continuamente?

29-32 A lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa segundo a qual decresce a temperatura de um objeto que está esfriando e a taxa segundo a qual cresce a de um objeto que está esquentando são proporcionais à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do meio ambiente. Use esse resultado nestes exercícios.

29. Um copo de água a uma temperatura de 95°C é colocado numa sala com uma temperatura constante de 21°C .
- (a) Supondo que a lei de resfriamento de Newton se aplique, estabeleça e resolva um problema de valor inicial cuja solução seja a temperatura da água t minutos após ser colocada na sala. [Nota: a equação diferencial irá envolver uma constante de proporcionalidade.]
- (b) Quantos minutos levará para a água atingir uma temperatura de 51°C se ela esfria a 85°C em 1 minuto?
30. Um copo de limonada a uma temperatura de 40°F é colocado em uma sala a uma temperatura constante de 70°F e, 1 hora mais tarde, a sua temperatura é de 52°F . Mostre que t horas após a limonada ter sido colocada na sala, sua temperatura é dada por $T = 70 - 30e^{-0,5t}$.
31. O grande detetive Sherlock Holmes e seu assistente Dr. Watson discutem o assassinato do ator Cornelius McHam. Ele foi fe-

rido à bala na cabeça e o seu ator substituto, Barry Moore, foi encontrado de pé sobre o corpo com a arma assassina na mão. Vamos escutá-los:

Watson: Caso aberto e fechado – Moore é o assassino.

Holmes: Não vá tão depressa, Watson – você está esquecendo a Lei de Resfriamento de Newton!

Watson: O quê?

Holmes: Elementar, meu caro Watson – Moore foi encontrado de pé sobre McHam às 10h06min da noite, quando o legista anotou a temperatura do corpo do morto de $77,9^\circ\text{F}$ e também anotou que a temperatura no termômetro da sala marcava 72°F . Às 11h06min da noite o legista fez uma outra anotação de que a temperatura do corpo era de $75,6^\circ\text{F}$. Uma vez que a temperatura normal do corpo é de $98,6^\circ\text{F}$, e como Moore estava no palco das 6h às 8h da noite, Moore é obviamente inocente.

Watson: O quê?

Holmes: Às vezes, você é tão obtuso, Watson. Peça para qualquer estudante de Cálculo resolver isto para você.

Watson: Hum....

Como é que Holmes sabia que Moore era inocente?

32. Suponha que, no instante $t = 0$, um objeto com uma temperatura de T_0 é colocado em uma sala a uma temperatura constante de T_a . Se $T_0 < T_a$, então a temperatura do objeto irá subir enquanto que se $T_0 > T_a$ ela irá baixar. Supondo que a lei de resfriamento de Newton se aplique, mostre que em ambos os casos a temperatura $T(t)$ no instante t é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

onde k é uma constante positiva.

ENFOCANDO CONCEITOS

33-37 Em modelos populacionais, muitas vezes é importante que o tamanho da população tenda a uma constante positiva L , que denominamos *capacidade de tolerância* do sistema. Um modelo com essa propriedade é fornecido pela equação diferencial logística, dada por

$$\frac{dy}{dt} = k \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad k > 0$$

As soluções da equação logística têm aplicações na modelagem do crescimento populacional, na disseminação de uma doença e na Ecologia. Esses exercícios desenvolvem algumas das propriedades e aplicações da equação logística.

33. (a) Mostre que as funções constantes $y = 0$ e $y = L$ são soluções da equação logística.
- (b) Explique por que o modelo logístico deve ter um comportamento parecido com o do modelo de crescimento exponencial se y for muito pequeno em relação a L .
- (c) Explique por que y cresce se $y < L$ e y decresce se $y > L$.
- (d) Para quais valores de y é máxima a taxa de crescimento de y em relação a t ?

34. Suponha que $y = y(t)$ satisfaça a equação logística com o valor inicial $y_0 = y(0)$ de y .

(a) Use separação de variáveis para deduzir a solução

$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = L$.

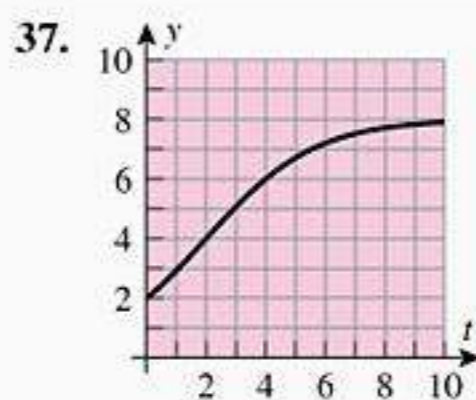
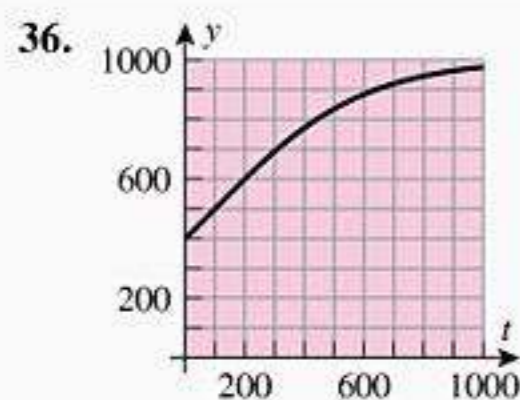
35. O gráfico de uma solução da equação logística é conhecido como uma *curva logística* e, se $y_0 > 0$, ela tem um de quatro formatos gerais, que dependem da relação entre y_0 e L . Em cada parte, suponha que $k = 1$ e use um recurso computacional para esboçar a curva logística que satisfaz as condições dadas.

- (a) $y_0 > L$ (b) $y_0 = L$
 (c) $L/2 \leq y_0 < L$ (d) $0 < y_0 < L/2$

36-37 É mostrado o gráfico de um modelo logístico

$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

Estime y_0 , L e k .



38. Esboce uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 0,98 \left(1 - \frac{y}{5}\right) y, \quad y_0 = 1$$

39. Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{60}{5 + 7e^{-t}}$$

- (a) Qual é a população no instante $t = 0$?
 (b) Qual é a capacidade de tolerância L ?
 (c) Qual é a constante k ?
 (d) Quando a população atinge a metade da capacidade de tolerância?
 (e) Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

40. Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{1.000}{1 + 999e^{-0,9t}}$$

- (a) Qual é a população no instante $t = 0$?
 (b) Qual é a capacidade de tolerância L ?
 (c) Qual é a constante k ?
 (d) Quando a população atinge 75% da capacidade de tolerância?
 (e) Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

41. Suponha que em um alojamento universitário existam 1.000 estudantes. Após as férias, 20 estudantes do alojamento retornam com gripe e, 5 dias mais tarde, 35 estudantes estão gripados.

- (a) Use um modelo logístico para determinar um problema de valor inicial cuja solução seja o número de estudantes que estarão gripados t dias após o retorno das férias. [Nota: a equação diferencial, neste caso, envolverá uma constante de proporcionalidade.]
 (b) Resolva o problema de valor inicial e use o que foi dado para encontrar a constante de proporcionalidade.
 (c) Faça uma tabela que ilustre como se espalha a gripe dia-a-dia por um período de duas semanas.
 (d) Use um recurso computacional para gerar um gráfico que ilustre como se espalha a gripe por um período de duas semanas.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.3

1. (a) ky (b) $\frac{\ln 2}{k}$ (c) $y_0 e^{kt}$ 2. (a) $-ky$ (b) $\frac{\ln 2}{k}$ (c) $y_0 e^{-kt}$ 3. 1 g 4. $100e^{0,02t}$ 5. $4\sqrt{A}$

9.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM; A MOLA VIBRANTE

Nesta seção, mostraremos como resolver uma coleção importante de equações diferenciais de segunda ordem. Como uma aplicação, estudaremos o movimento de uma mola vibrante.

■ EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma *equação diferencial linear de segunda ordem* é uma equação da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \quad (1)$$

ou, com notação alternativa,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Se $r(x)$ for identicamente nula, então (1) reduz a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

que é chamada de equação diferencial linear *homogênea* de segunda ordem.

Para estudar as soluções de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, é útil introduzir alguma terminologia. Dizemos que duas funções f e g são *linearmente dependentes* se uma é um múltiplo constante da outra. Se nenhuma das duas é um múltiplo constante da outra, então dizemos que as funções são *linearmente independentes*. Assim,

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = 3 \sin x$$

são linearmente dependentes, mas

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

são linearmente independentes. O teorema a seguir é central no estudo de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem.

9.4.1 TEOREMA *Considere a equação homogênea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (2)$$

em que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em algum intervalo comum I . Então existem soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (2) em I . Além disso, dado qualquer par de soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (2) em I , temos que

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (3)$$

é uma solução geral de (2) em I . Isso significa que cada solução de (2) em I pode ser obtida a partir de (3) escolhendo valores apropriados das constantes c_1 e c_2 ; reciprocamente, (3) é uma solução de (2) para quaisquer escolhas de c_1 e c_2 .

É melhor deixar uma demonstração completa do Teorema 9.4.1 para uma disciplina de Equações Diferenciais. Parte da argumentação pode ser encontrada no Capítulo 3 do livro *Elementary Differential Equations*, 8th ed., John Wiley & Sons, New York 2004, de W. E. Boyce e R. C. DiPrima.

Vamos nos concentrar em equações lineares homogêneas de segunda ordem do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad (4)$$

em que p e q são constantes. Como as funções constantes $p(x) = p$ e $q(x) = q$ são contínuas em $I = (-\infty, +\infty)$, segue do Teorema 9.4.1 que para obter uma solução geral de (4) é suficiente

encontrar duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em I . A solução geral será, então, dada por $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Começaremos procurando soluções de (4) da forma $y = e^{mx}$. Isso é motivado pelo fato de a primeira e a segunda derivadas dessa função serem múltiplos dela mesmo, o que sugere que possa resultar uma solução de (4) da escolha apropriada de m . Para encontrar esse m , substituímos

$$y = e^{mx}, \quad \frac{dy}{dx} = m e^{mx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx} \tag{5}$$

em (4) para obter

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0 \tag{6}$$

que vale se, e somente se,

$$m^2 + pm + q = 0 \tag{7}$$

pois $e^{mx} \neq 0$ para cada x .

A Equação (7), que é chamada de *equação auxiliar* de (4), pode ser obtida de (4) substituindo $d^2 y/dx^2$ por m^2 , dy/dx , por m ($= m^1$) e y por 1 ($= m^0$). As soluções, m_1 e m_2 , da equação auxiliar podem ser encontradas por fatoração ou pela fórmula quadrática. Essas soluções são

$$m_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad m_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{8}$$

Dependendo de $p^2 - 4q$ ser positivo, nulo ou negativo, essas raízes serão distintas e reais, iguais e reais, ou conjugadas complexas. Consideraremos cada um desses casos separadamente.

■ RAÍZES REAIS DISTINTAS

Se m_1 e m_2 são raízes reais distintas, então (4) tem as duas soluções

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

Nenhuma das funções $e^{m_1 x}$ e $e^{m_2 x}$ é um múltiplo constante da outra (Exercício 29), portanto, nesse caso, a solução geral de (4) é

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{9}$$

► **Exemplo 1** Encontre a solução geral de $y'' - y' - 6y = 0$.

Solução A equação auxiliar é

$$m^2 - m - 6 = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (m + 2)(m - 3) = 0$$

de modo que suas raízes são $m = -2$, $m = 3$. Assim, por (9), a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. ◀

■ RAÍZES REAIS IGUAIS

Se m_1 e m_2 são raízes reais iguais, digamos $m_1 = m_2 (= m)$, então a equação auxiliar fornece somente uma solução de (4):

$$y_1(x) = e^{mx}$$

Mostraremos, agora, que

$$y_2(x) = x e^{mx} \tag{10}$$

Lembre que as soluções complexas de uma equação polinomial e, em particular, de uma equação quadrática, ocorrem como pares conjugados $a + bi$ e $a - bi$, desde que os coeficientes da equação sejam reais.

é uma segunda solução linearmente independente. Para ver isso, observe que $p^2 - 4q = 0$ em (8), já que as raízes são iguais. Assim,

$$m = m_1 = m_2 = -p/2$$

e (10) pode ser escrita como

$$y_2(x) = xe^{(-p/2)x}$$

Derivando, obtemos

$$y_2'(x) = \left(1 - \frac{p}{2}x\right)e^{(-p/2)x} \quad \text{e} \quad y_2''(x) = \left(\frac{p^2}{4}x - p\right)e^{(-p/2)x}$$

de modo que

$$\begin{aligned} y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x) &= \left[\left(\frac{p^2}{4}x - p\right) + p\left(1 - \frac{p}{2}x\right) + qx\right]e^{(-p/2)x} \\ &= \left[-\frac{p^2}{4} + q\right]xe^{(-p/2)x} \end{aligned} \quad (11)$$

Mas $p^2 - 4q = 0$ implica que $(-p^2/4) + q = 0$, portanto (11) simplifica para

$$y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x) = 0$$

o que nos diz que $y_2(x)$ é uma solução de (4). Pode ser mostrado que

$$y_1(x) = e^{mx} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{mx}$$

são linearmente independentes (Exercício 29), portanto, nesse caso, a solução geral de (4) é

$$y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} \quad (12)$$

► **Exemplo 2** Encontre a solução geral de $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Solução A equação auxiliar é

$$m^2 - 8m + 16 = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (m - 4)^2 = 0$$

de modo que $m = 4$ é a única raiz. Assim, por (12), a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} \quad \blacktriangleleft$$

■ RAÍZES COMPLEXAS

Se a equação auxiliar tem raízes complexas $m_1 = a + bi$ e $m_2 = a - bi$, então ambas $y_1(x) = e^{ax} \cos bx$ e $y_2(x) = e^{ax} \sin bx$ são soluções linearmente independentes de (4) e

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \quad (13)$$

é a solução geral. A prova disso será discutida nos exercícios (Exercício 30).

► **Exemplo 3** Encontre a solução geral de $y'' + y' + y = 0$.

Solução A equação auxiliar $m^2 + m + 1 = 0$ tem raízes

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ m_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Assim, por (13), com $a = -1/2$ e $b = \sqrt{3}/2$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \blacktriangleleft$$

■ **PROBLEMAS DE VALORES INICIAIS**

Quando um problema físico leva a uma equação diferencial de segunda ordem, geralmente há duas condições no problema que determinam valores específicos para as duas constantes arbitrárias na solução geral da equação. As condições que especificam o valor da solução $y(x)$ e de sua derivada $y'(x)$ em $x = x_0$ são chamadas **condições iniciais**. Uma equação diferencial de segunda ordem com condições iniciais é chamada de **problema de valores iniciais de segunda ordem**.

► **Exemplo 4** Resolva o problema de valores iniciais

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solução Primeiro precisamos resolver a equação diferencial. A equação auxiliar

$$m^2 - 1 = 0$$

tem raízes $m_1 = 1, m_2 = -1$, portanto, por (9), a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \tag{14}$$

e a derivada dessa solução é

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \tag{15}$$

Substituindo $x = 0$ em (14) e (15) e usando as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$, logo, por (14), a solução do problema de valores iniciais é

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \operatorname{cosh} x \blacktriangleleft$$

Incluimos o resumo a seguir como uma referência rápida para a solução de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

Resumo

EQUAÇÃO: $y'' + py' + qy = 0$	
EQUAÇÃO AUXILIAR: $m^2 + pm + q = 0$	
CASO	SOLUÇÃO GERAL
raízes reais distintas m_1, m_2 da equação auxiliar	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
raízes reais iguais $m_1 = m_2 (= m)$ da equação auxiliar	$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$
raízes complexas $m_1 = a + bi, m_2 = a - bi$ da equação auxiliar	$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx)$

■ VIBRAÇÕES DE MOLAS

Concluimos esta seção com um modelo de Engenharia que leva a uma equação diferencial de segunda ordem do tipo (4).

Conforme mostra a Figura 9.4.1, considere um bloco de massa M suspenso por uma mola vertical e deixado em uma *posição de equilíbrio*. Suponha que o bloco seja, então, colocado em um movimento vibratório vertical puxando-se ou empurrando-se o bloco e soltando-o no instante $t = 0$. Estaremos interessados em encontrar um modelo matemático que descreva o movimento vibratório do bloco no decorrer do tempo.

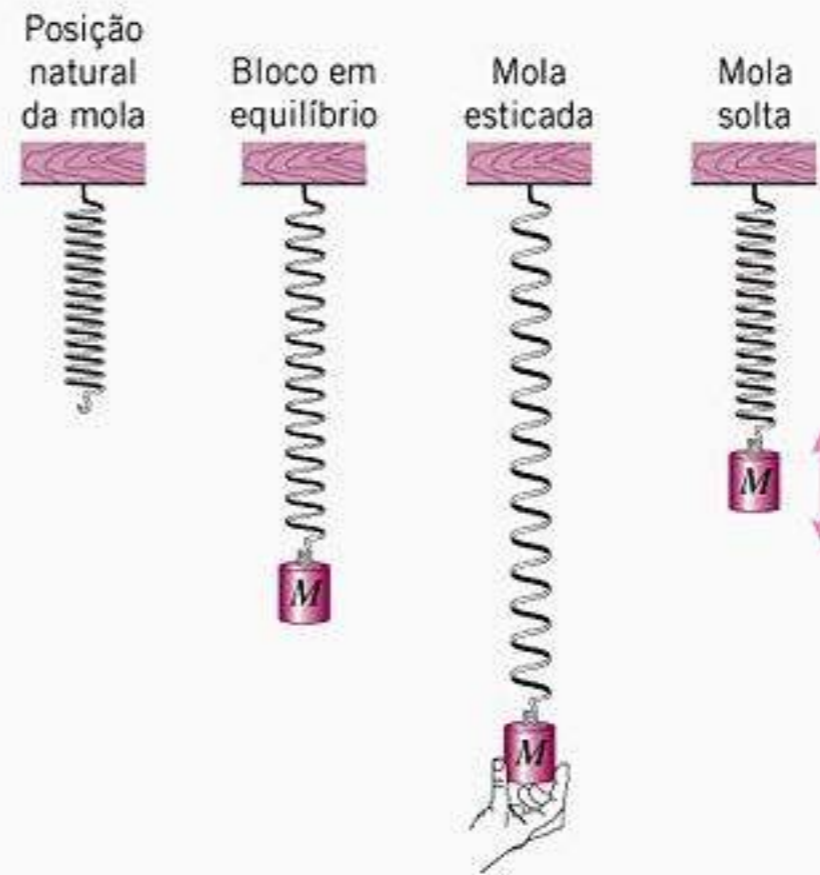


Figura 9.4.1

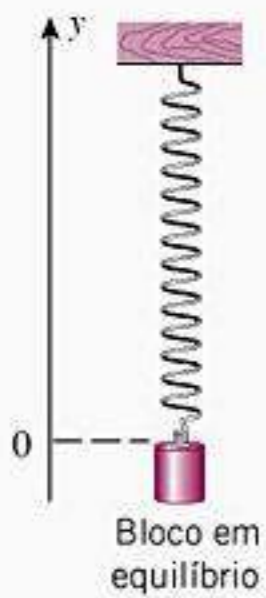


Figura 9.4.2

Para traduzir esse problema em forma matemática, introduzimos um eixo vertical y cujo sentido positivo é para cima e cuja origem está na conexão da mola com o bloco quando o bloco estiver em equilíbrio (Figura 9.4.2). Nossa meta é encontrar a coordenada $y = y(t)$ do topo do bloco como uma função do tempo. Para isso, vamos necessitar da Segunda Lei do Movimento de Newton, que escrevemos como

$$F = Ma$$

em vez de $F = ma$, como na Fórmula (23) da Seção 9.1. Fazemos isso para evitar confusão com a letra “ m ” da equação auxiliar. Também utilizaremos os dois resultados seguintes da Física.

9.4.2 LEI DE HOOKE Se uma mola for esticada (ou comprimida) L unidades além de sua posição natural, então ela puxa (ou empurra) com uma força de magnitude

$$F = kL$$

onde k é uma constante positiva, chamada de *constante da mola*. Esta constante, que é medida em unidades de força por unidade de comprimento, depende de fatores tais como a espessura da mola e a sua composição. A força exercida pela mola é chamada de *força restauradora*.

9.4.3 PESO A força gravitacional exercida pela Terra sobre um objeto é chamada de *peso* do objeto (ou mais precisamente, seu *peso terrestre*). Tem-se a partir da Segunda Lei do Movimento de Newton que um objeto de massa M tem um peso w de magnitude Mg , onde g é a aceleração devida à gravidade. Porém, se o sentido positivo for para cima,

como estamos supondo aqui, então a força da gravidade da Terra está no sentido negativo, de modo que

$$w = -Mg$$

O peso de um objeto é medido em unidades de força.

O movimento do bloco na Figura 9.4.1 irá depender de quanto foi o esticamento ou a compressão inicial e das forças que agem sobre o bloco enquanto ele se mover. Em nosso modelo, iremos supor que existem somente duas dessas forças: seu peso w e a força restauradora F_s da mola. Em particular, iremos ignorar forças como resistência do ar, força de atrito interna da mola, forças devidas ao movimento do suporte da mola e assim por diante. Com essas hipóteses, o modelo é chamado de *modelo harmônico simples* e o movimento do bloco é chamado de *movimento harmônico simples*.

Nossa meta é produzir uma equação diferencial cuja solução dê a função posição $y(t)$ do bloco como uma função do tempo. Faremos isso determinando a força líquida $F(t)$ que age sobre o bloco em um tempo qualquer t e, então, aplicamos a Segunda Lei do Movimento de Newton. Uma vez que as únicas forças agindo sobre o bloco são o seu peso $w = -Mg$ e a força restauradora F_s da mola, e uma vez que a aceleração do bloco no instante t é $y''(t)$, segue da Segunda Lei do Movimento de Newton que

$$F_s(t) - Mg = My''(t) \tag{16}$$

Para expressar $F_s(t)$ em termos de $y(t)$, começaremos por examinar as forças sobre o bloco quando ele está em sua posição de equilíbrio. Nesta posição, a força dirigida para baixo, a do peso, está perfeitamente equilibrada pela força restauradora da mola, para cima, de tal forma que a soma destas duas forças deve ser zero. Assim, supondo que a constante da mola é k e que ela foi esticada a uma distância de L unidades além de seu comprimento natural quando o bloco está em equilíbrio (Figura 9.4.3), então

$$kL - Mg = 0 \tag{17}$$

Agora vamos examinar a força restauradora agindo sobre o bloco quando o ponto de conexão tem coordenada $y(t)$. Nesse ponto, a extremidade da mola foi deslocada de $L - y(t)$ unidades de sua posição natural (Figura 9.4.4), de modo que, pela Lei de Hooke, a força restauradora é

$$F_s(t) = k(L - y(t)) = kL - ky(t)$$

o que, a partir de (17), pode ser reescrito como

$$F_s(t) = Mg - ky(t)$$

Substituindo isso em (16) e cancelando-se os termos Mg , obtém-se

$$-ky(t) = My''(t)$$

que pode ser reescrita como a equação homogênea

$$y''(t) + \left(\frac{k}{M}\right)y(t) = 0 \tag{18}$$

A equação auxiliar para (18) é

$$m^2 + \frac{k}{M} = 0$$

que tem raízes imaginárias $m_1 = \sqrt{k/M}i$, $m_2 = -\sqrt{k/M}i$ (pois k e M são positivos). Segue que a solução geral de (18) é

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) \tag{19}$$

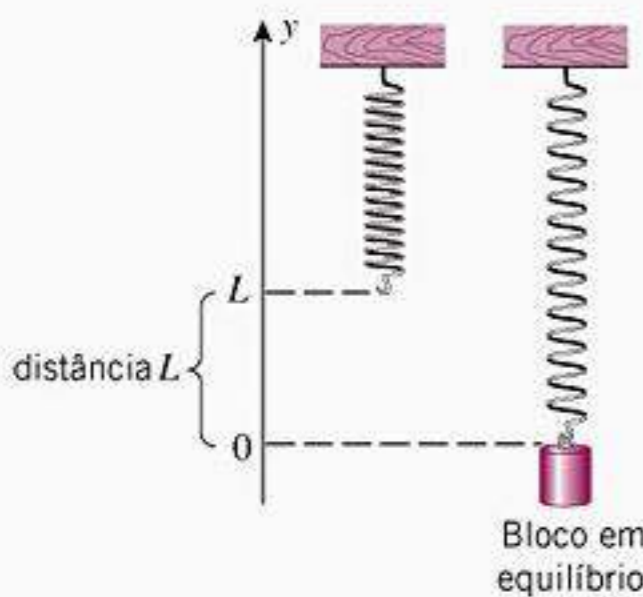


Figura 9.4.3

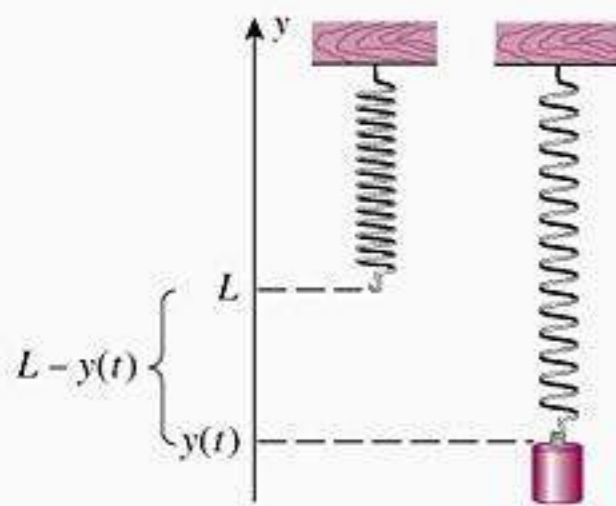


Figura 9.4.4

Confirme que as funções da família (19) são soluções de (18).

Para determinar as constantes c_1 e c_2 em (19), tomaremos como condições iniciais a posição e velocidade no instante $t = 0$. Mais precisamente, pedimos ao leitor mostrar no Exercício 40 que se a posição do bloco no instante $t = 0$ for y_0 e se a velocidade inicial do bloco for zero (ou seja, o bloco foi *solto* do repouso), então

$$y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right) \tag{20}$$

Essa fórmula descreve uma vibração periódica de amplitude $|y_0|$, período T dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M}} = 2\pi\sqrt{M/k} \tag{21}$$

e frequência f dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{k/M}}{2\pi} \tag{22}$$

(Figura 9.4.5).

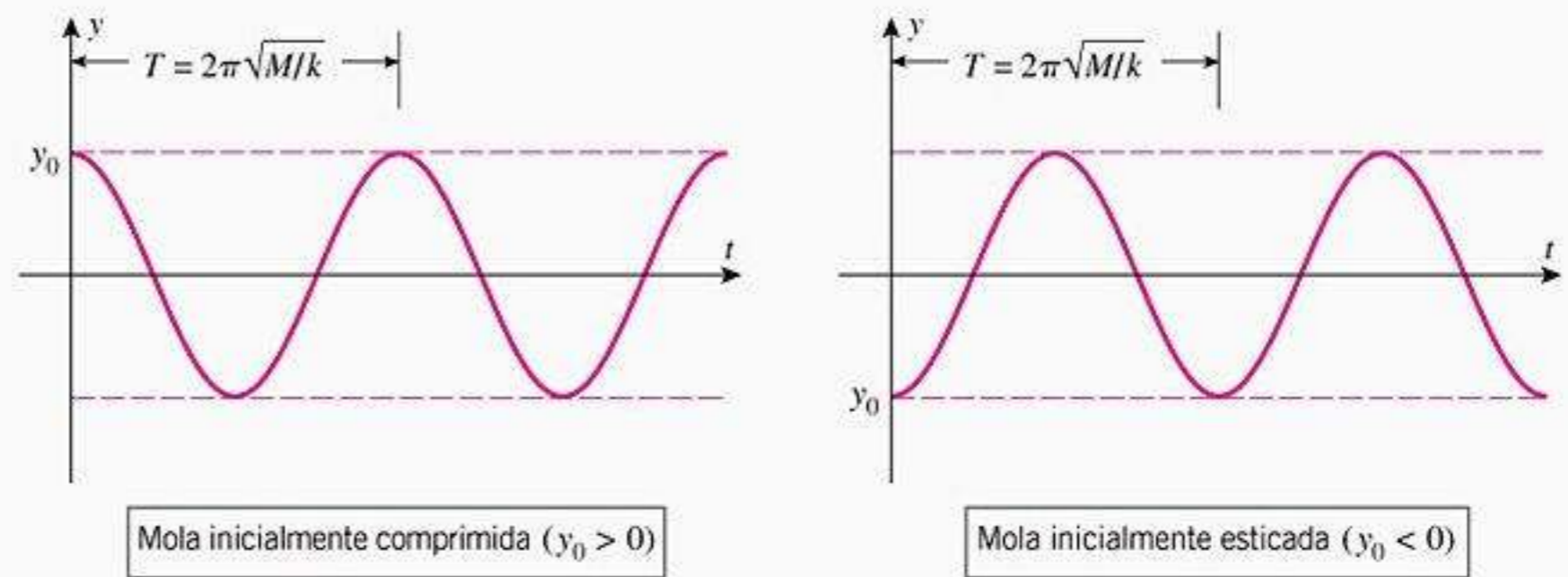


Figura 9.4.5

► **Exemplo 5** Suponha que o bloco na Figura 9.4.2 estique a mola por 0,2 m em equilíbrio. Suponha também que o bloco seja puxado 0,5 m abaixo da posição de equilíbrio e, então, solto no instante $t = 0$.

- (a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.
- (b) Encontre a amplitude, o período e a frequência da vibração.

Solução (a) A fórmula apropriada é de (20). Embora não sejam dadas a massa M do bloco e a constante k da mola, isso não importa, pois podemos usar a condição de equilíbrio (17) para encontrar a razão k/M sem ter os valores de k e de M . Especificamente, nos é dado que no equilíbrio o bloco estica a mola $L = 0,2$ m e sabemos que $g = 9,8$ m/s². Assim, (17) implica que

$$\frac{k}{M} = \frac{g}{L} = \frac{9,8}{0,2} = 49 \text{ s}^{-2} \tag{23}$$

Substituindo isso em (20) resulta que

$$y(t) = y_0 \cos 7t$$

onde y_0 é a coordenada do bloco no instante $t = 0$. Porém, nos é dado que o bloco está inicialmente 0,5m abaixo da posição de equilíbrio, logo $y_0 = -0,5$ e, portanto, a função posição do bloco é $y(t) = -0,5 \cos 7t$.

Solução (b) A amplitude da vibração é

$$\text{amplitude} = |y_0| = |-0,5| = 0,5 \text{ m}$$

e, a partir de (21), (22) e (23), o período e a frequência são

$$\text{período} = T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{2\pi}{7} \text{ s}, \quad \text{frequência} = f = \frac{1}{T} = \frac{7}{2\pi} \text{ Hz} \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.4 (Ver página 622 para respostas.)

- Uma equação diferencial linear de segunda ordem é uma equação do tipo _____. Essa equação é homogênea desde que _____.
- (a) Duas funções são ditas linearmente independentes desde que _____.
(b) Em cada parte, determine se as funções f e g são linearmente independentes.
 - $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin 2x$
 - $f(x) = \sin x \cos x, \quad g(x) = \sin 2x$
 - $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \ln \sqrt{x}$
 - $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{2x}$
 - $f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = 1 - \cos 2x$
- Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogênea de segundo grau (com coeficientes sendo funções contínuas), então a solução geral dessa equação diferencial será $y =$ _____.
- Em cada parte, use a informação dada sobre as raízes da equação auxiliar para encontrar a solução geral da correspondente equação diferencial linear homogênea de segundo grau com coeficientes constantes.
 - A equação auxiliar tem duas raízes reais distintas m_1 e m_2 .
 - A equação auxiliar tem uma única raiz m de multiplicidade 2.
 - A equação auxiliar tem duas raízes complexas distintas $m_1 = a + bi$ e $m_2 = a - bi$.
- A equação diferencial do movimento harmônico simples de uma massa M presa a uma mola de constante de mola k é _____.

EXERCÍCIOS 9.4  Recurso Gráfico  CAS

- Confira que as seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + y' - 2y = 0$ substituindo-as na equação.
 - e^{-2x} e e^x
 - $c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$ (c_1, c_2 constantes)
- Confira que as seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$ substituindo-as na equação.
 - e^{-2x} e $x e^{-2x}$
 - $c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ (c_1, c_2 constantes)

3-16 Encontre a solução geral da equação diferencial.

- | | |
|--|---|
| 3. $y'' + 3y' - 4y = 0$ | 4. $y'' + 5y' + 6y = 0$ |
| 5. $y'' - 2y' + y = 0$ | 6. $y'' - 6y' + 9y = 0$ |
| 7. $y'' + y = 0$ | 8. $y'' + 5y = 0$ |
| 9. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ | 10. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$ |
| 11. $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ | 12. $\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$ |
| 13. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ | 14. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ |
| 15. $8y'' - 2y' - y = 0$ | 16. $9y'' - 6y' + y = 0$ |

17-22 Resolva o problema de valores iniciais.

- $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9$
- $y'' - 6y' - 7y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3$
- $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$
- $y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 4$
- $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0$
- $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$
- Em cada parte, encontre uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes que tenha as funções dadas como soluções.
 - $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = e^{-2x}$ (b) $y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = x e^{4x}$
 - $y_1 = e^{-x} \cos 4x, \quad y_2 = e^{-x} \sin 4x$
- Mostre que se e^x e e^{-x} forem soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então $\cosh x$ e $\sinh x$ também são soluções.
- Encontre todos os valores de k para os quais a equação diferencial $y'' + ky' + ky = 0$ tenha uma solução geral da forma dada.
 - $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$ (b) $y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}$
 - $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$

26. A equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad (x > 0)$$

em que p e q são constantes, é chamada de *equação equidimensional de Euler*. Mostre que a substituição $x = e^z$ transforma essa equação na equação

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (p-1) \frac{dy}{dz} + qy = 0$$

27. Use o resultado do Exercício 26 para encontrar a solução geral de

(a) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (x > 0)$

(b) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad (x > 0)$

ENFOCANDO CONCEITOS

28. Seja $y(x)$ uma solução de $y'' + py' + qy = 0$. Prove: se p e q são constantes positivas, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

29. Prove que as funções seguintes são linearmente independentes.

(a) $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x} \quad (m_1 \neq m_2)$

(b) $y_1 = e^{mx}, y_2 = xe^{mx}$

30. Prove: se a equação auxiliar de

$$y'' + py' + qy = 0$$

tem raízes complexas $a + bi$ e $a - bi$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

[Sugestão: usando substituição, verifique que as curvas $y_1 = e^{ax} \cos bx$ e $y_2 = e^{ax} \sin bx$ são soluções da equação diferencial. Em seguida, prove que y_1 e y_2 são linearmente independentes.]

31. Suponha que a equação auxiliar da equação $y'' + py' + qy = 0$ tenha raízes reais distintas μ e m .

(a) Mostre que a função

$$g_\mu(x) = \frac{e^{\mu x} - e^{mx}}{\mu - m}$$

é uma solução da equação diferencial.

(b) Use a regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{\mu \rightarrow m} g_\mu(x) = xe^{mx}$$

[Observação: o leitor consegue ver como o resultado da parte (b) torna plausível que a função $y(x) = xe^{mx}$ seja uma solução de $y'' + py' + qy = 0$ quando m for uma raiz repetida da equação auxiliar?]

32. Considere o problema de resolver a equação diferencial

$$y'' + \lambda y = 0$$

sujeita às condições $y(0) = 0, y(\pi) = 0$.

(a) Mostre que se $\lambda \leq 0$ então $y = 0$ é a única solução.

(b) Mostre que se $\lambda > 0$ então a solução é

$$y = c \sin \sqrt{\lambda} x$$

onde c é uma constante arbitrária, caso em que

$$\lambda = 1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$$

e, caso contrário, a única solução é $y = 0$.

33-38 Estes exercícios envolvem vibrações do bloco desenhado na Figura 9.4.1. Suponha que o eixo y seja tomado como na Figura 9.4.2 e que se aplique o modelo harmônico simples.

33. Suponha que o bloco tenha uma massa de 2 kg, que a constante da mola seja $k = 0,5$ N/m e que o bloco seja empurrado 0,4 m acima da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

(a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.

(b) Encontre o período e a frequência da vibração.

(c) Esboce o gráfico de $y(t)$.

(d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?

(e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima abaixo da posição de equilíbrio?

34. Suponha que o bloco tenha um peso de 64 libras, que a constante da mola seja $k = 0,25$ lb/pé e que o bloco seja empurrado 1 pé acima da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

(a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.

(b) Encontre o período e a frequência da vibração.

(c) Esboce o gráfico de $y(t)$.

(d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?

(e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima abaixo da posição de equilíbrio?

35. Suponha que o bloco estique a mola 0,05 m quando na posição de equilíbrio e que seja puxado 0,12 m abaixo da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

(a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.

(b) Encontre o período e a frequência da vibração.

(c) Esboce o gráfico de $y(t)$.

(d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?

(e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima acima da posição de equilíbrio?

36. Suponha que o bloco estique a mola 2 pés quando na posição de equilíbrio e que seja puxado 2 pés abaixo da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

(a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.

(b) Encontre o período e a frequência da vibração.

(c) Esboce o gráfico de $y(t)$.

(d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?

(e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima acima da posição de equilíbrio?

37. (a) Para que valores de y podemos esperar que o bloco no Exercício 36 alcance sua velocidade máxima? Confirme a sua resposta para esta questão matematicamente.

(b) Para que valores de y podemos esperar que o bloco alcance sua velocidade mínima? Confirme a sua resposta para esta questão matematicamente.

38. Suponha que um bloco pese w libras e vibre com um período de 3 s quando puxado para baixo da posição de equilíbrio e,

então, solto. Suponha também que se o processo for repetido com um peso adicional de 4 libras, então o período será de 5 s.

- (a) Encontre a constante da mola.
- (b) Encontre w .

39. Conforme mostra a figura abaixo, suponha que um carrinho de brinquedo de massa M esteja fixado a uma parede por uma mola com constante k , e que introduzamos um eixo x horizontal cuja origem esteja no ponto de conexão entre a mola e o carro quando em equilíbrio. Suponha que o carro seja empurrado ou puxado horizontalmente até um ponto x_0 e, então, solto no instante $t = 0$. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja a função posição do carro e explicita qualquer hipótese que for feita.

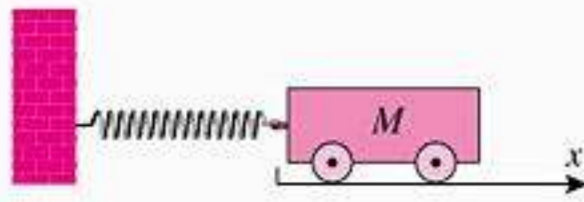


Figura Ex-39

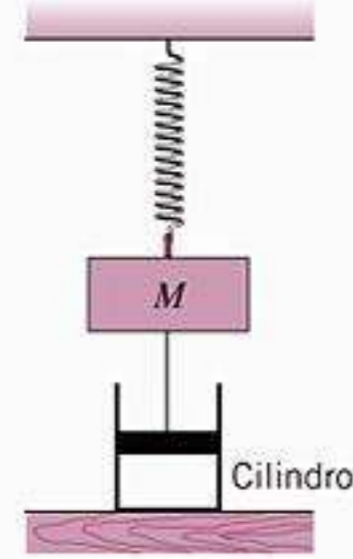
40. Use a posição inicial $y(0) = y_0$ e a velocidade inicial $v(0) = 0$ para encontrar as constantes c_1 e c_2 em (19).
41. Um bloco preso a uma mola vertical é deslocado de sua posição de equilíbrio e, então, solto, causando um movimento vibratório de amplitude $|y_0|$ e período T .
- (a) Mostre que a velocidade do bloco tem magnitude máxima $2\pi|y_0|/T$ e que o máximo ocorre quando o bloco está em sua posição de equilíbrio.
 - (b) Mostre que a aceleração do bloco tem magnitude máxima $4\pi^2|y_0|/T^2$ e que o máximo ocorre quando o bloco está ou no topo ou na base de seu movimento.
42. Suponha que o movimento de um bloco de massa M seja governado pelo modelo harmônico simples (18). Defina a *energia potencial* do bloco no instante t como sendo $\frac{1}{2}k[y(t)]^2$ e a *energia cinética* do bloco no instante t como sendo $\frac{1}{2}M[y'(t)]^2$. Prove que é constante a soma das energias potencial e cinética do bloco.

43-47 A figura no final do enunciado mostra um sistema massa-mola em que um objeto de massa M é suspenso por uma mola e conectado a um pistão que se move num cilindro contendo um líquido viscoso. Se não houver forças externas atuando no sistema, dizemos que o objeto está em *movimento livre* e o movimento do objeto fica completamente determinado pelo deslocamento e velocidade do objeto no instante $t = 0$, a rigidez da mola medida pela constante k da mola e a viscosidade do fluido no cilindro medida por uma *constante de amortecimento* c . Matematicamente, o deslocamento $y = y(t)$ do objeto a partir de seu ponto de equilíbrio é a solução de um problema de valores iniciais da forma

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

onde o coeficiente A é determinado por M e c e o coeficiente B é determinado por M e k . Na nossa derivação da equação (21), consideramos apenas movimentos em que o coeficiente A era zero e nos quais o objeto era largado a partir do repouso, ou seja, em que $v_0 = 0$. Nesses exercícios, consideraremos problemas de valores

iniciais em que ambos o coeficiente A e a velocidade inicial v_0 são não-nulos.



43. (a) Resolva o problema de valores iniciais $y'' + 2,4y' + 1,44y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ e faça o gráfico de $y = y(t)$ no intervalo $[0, 5]$.
- (b) Encontre a distância máxima acima da posição de equilíbrio atingida pelo objeto.
 - (c) O gráfico de $y(t)$ sugere que o objeto não passa pela posição de equilíbrio. Mostre que esse realmente é o caso.
44. (a) Resolva o problema de valores iniciais $y'' + 5y' + 2y = 0$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = -4$ e faça o gráfico de $y = y(t)$ no intervalo $[0, 5]$.
- (b) Encontre a distância máxima abaixo da posição de equilíbrio atingida pelo objeto.
 - (c) O gráfico de $y(t)$ sugere que o objeto passa pela posição de equilíbrio exatamente uma vez. Com que velocidade o objeto passa pela posição de equilíbrio?
45. (a) Resolva o problema de valores iniciais $y'' + y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3,5$ e faça o gráfico de $y = y(t)$ no intervalo $[0, 8]$.
- (b) Encontre a distância máxima abaixo da posição de equilíbrio atingida pelo objeto.
 - (c) Encontre a velocidade com que o objeto passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez.
 - (d) Encontre, sem fazer contas, a aceleração do objeto quando ele passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez. [Sugestão: examine a equação diferencial e use o resultado da parte (c).]
46. (a) Resolva o problema de valores iniciais $y'' + y' + 3y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = v_0$.
- (b) Encontre o maior valor positivo de v_0 para o qual o objeto não sobe mais do que 1 unidade acima da posição de equilíbrio. [Sugestão: use uma estratégia de tentativa e erro. Dê uma estimativa até o centésimo mais próximo.]
 - (c) Faça o gráfico da solução do problema de valores iniciais no intervalo $[0, 8]$, usando o valor de v_0 obtido na parte (b).
47. (a) Resolva o problema de valores iniciais $y'' + 3,5y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = v_0$.
- (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar as soluções para $v_0 = 2$, $v_0 = -1$ e $v_0 = -4$ e faça o gráfico dessas três soluções no intervalo $[0, 4]$ no mesmo sistema de coordenadas.
 - (c) Discuta o efeito da velocidade inicial sobre o movimento do objeto.

48. Se o bloco na Figura 9.4.1 for deslocado y_0 unidades de sua posição de equilíbrio e for solto com uma velocidade inicial de v_0 , em vez de ser solto com uma velocidade inicial de zero, então a sua função posição $y(t)$ dada na Equação (19) deve satisfazer as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$.

(a) Mostre que

$$y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

(b) Suponha que um bloco com uma massa de 1kg estique a mola 0,5m no equilíbrio. Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função posição do bloco se for colocado em movimento puxando a mola para baixo 1m e dando uma velocidade inicial para cima de 0,25 m/s.

(c) Qual é o deslocamento máximo do bloco de sua posição de equilíbrio?

ENFOCANDO CONCEITOS

49. Considere a equação linear homogênea de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

onde $p(x)$ é uma função contínua num intervalo I . Por analogia com os resultados do Teorema 9.4.1, é de se esperar que a solução geral dessa equação seja da forma

$$y = cy_1(x)$$

onde $y_1(x)$ é uma solução da equação no intervalo I e c é uma constante arbitrária. Prove que isso realmente ocorre.

50. Prove o Teorema 9.4.1 no caso especial em que $q(x)$ é identicamente nula.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.4

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x); r(x) = 0$ 2. (a) nenhuma seja um múltiplo constante da outra (b) Somente os pares de (i) e (iv) são linearmente independentes. 3. $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 4. (a) $y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ (b) $y(x) = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$
 (c) $y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$ 5. $y''(t) + \left(\frac{k}{M}\right)y(t) = 0$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO **CAS**

- Vimos que a solução geral de uma equação linear de primeira ordem envolve uma única constante arbitrária e que a solução geral de uma equação linear de segunda ordem envolve duas constantes arbitrárias. Dê uma explicação informal do porquê é de se esperar que o número de constantes arbitrárias seja igual à ordem da equação.
- (a) Enumere os passos do método dos fatores integrantes para resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem.
 (b) O que devemos fazer se precisarmos resolver um problema de valor inicial envolvendo uma equação diferencial linear de primeira ordem cujo fator integrante não possa ser obtido devido à complexidade da integração?
- Classifique as seguintes equações diferenciais de primeira ordem como separáveis, lineares, ambos ou nenhum deles.
 (a) $\frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$ (b) $\frac{dy}{dx} + xy = x$
 (c) $y\frac{dy}{dx} - x = 1$ (d) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = \sin(xy)$
- Quais das seguintes equações diferenciais são separáveis?
 (a) $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$
 (c) $\frac{dy}{dx} = f(x) + g(y)$ (d) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{f(x)g(y)}$

5. Determine se os métodos dos fatores integrantes e a separação de variáveis produzem a mesma solução para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 4xy = x$$

6-10 Resolva a equação diferencial pelo método dos fatores integrantes ou então por separação de variáveis.

- $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$
- $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)x^2$
- $\frac{dy}{dx} + y - \frac{1}{1 + e^x} = 0$
- $(1 + y^2)y' = e^x y$
- $3 \operatorname{tg} y - \frac{dy}{dx} \sec x = 0$

11-16 Resolva o problema de valor inicial.

- $y' - xy = x, y(0) = 3$
- $y' = 1 + y^2, y(0) = 1$
- $y' \cosh x + y \sinh x = \cosh^2 x, y(0) = 2$
- $xy' + 2y = 4x^2, y(1) = 2$
- $y' = \frac{y^5}{x(1 + y^4)}, y(1) = 1$
- $y' = 4y^2 \sec^2 2x, y(\pi/8) = 1$

C 17. (a) Resolva o problema de valor inicial

$$y' - y = x \operatorname{sen} 3x, \quad y(0) = 1$$

pelo método dos fatores integrantes, usando um CAS para efetuar as integrações difíceis.

- (b) Use um CAS para resolver diretamente o problema de valor inicial e confirme que a sua resposta está de acordo com aquela obtida na parte (a).
- (c) Faça o gráfico da solução.

18. (a) Esboce a curva integral de $2yy' = 1$ que passa pelo ponto $(0, 1)$ e a curva integral que passa pelo ponto $(0, -1)$.

(b) Esboce a curva integral de $y' = -2xy^2$ que passa pelo ponto $(0, 1)$

19. Um tanque contém 1.000 galões de água fresca. No instante $t = 0$, água salgada contendo 5 gramas de sal por galão é despejada no tanque a uma taxa de 10 galões por minuto e a mistura é drenada do tanque à mesma taxa. Após 15 minutos, o processo é interrompido e água fresca é despejada no tanque à uma taxa de 5 galões por minuto e a solução é drenada do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque no instante $t = 30$ min.

20. Suponha que uma sala contendo 1.200 pés³ de ar esteja livre de monóxido de carbono. No instante $t = 0$, fumaça de cigarro contendo 4% de monóxido de carbono é introduzida a uma taxa de 0,1 pés³/min e a mistura bem circulada é ventilada para fora da sala à mesma taxa.

- (a) Encontre uma fórmula para a porcentagem de monóxido de carbono na sala no instante t .
- (b) A exposição continuada ao ar contendo 0,012% de monóxido de carbono é considerada perigosa. Quanto tempo levará para atingir esse nível?

Fonte: Baseado num problema de William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, 8th Ed., John Wiley & Sons, New York, 2004.

21. Esboce o campo de direções para $y' = xy/8$ nos 25 pontos de malha (x, y) , dados por $x = 0, 1, \dots, 4$ e $y = 0, 1, \dots, 4$.

22. Resolva a equação diferencial $y' = xy/8$ e encontre uma família de curvas integrais para o campo de direções do Exercício 21.

23-24 Use o método de Euler com o tamanho de passo Δx dado para aproximar a solução do problema de valor inicial no intervalo dado. Apresente a resposta em forma de tabela e também como gráfico.

23. $dy/dx = \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 4$, $\Delta x = 0,5$

24. $dy/dx = \operatorname{sen} y$, $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 2$, $\Delta x = 0,5$

25. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \cos 2\pi t, \quad y(0) = 1$$

Use o método de Euler com cinco passos para aproximar $y(1)$.

26. (a) Use o método de Euler com tamanho de passo $\Delta t = 0,1$ para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = 1 + 5t - y, \quad y(1) = 5$$

no intervalo $[1, 2]$.

(b) Determine o erro percentual nos valores computados.

27. Em cada parte, determine um modelo de crescimento exponencial $y = y_0 e^{kt}$ que satisfaça as condições dadas.

- (a) $y_0 = 2$; tempo de duplicação $T = 5$.
- (b) $y(0) = 5$; taxa de crescimento 1,5%.
- (c) $y(1) = 1$; $y(10) = 100$.
- (d) $y(1) = 1$; tempo de duplicação $T = 5$.

28. Suponha que uma população inicial de 5.000 bactérias cresça exponencialmente a uma taxa de 1% por hora e que $y(t)$ denote o número de bactérias presentes depois de t horas.

- (a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
- (b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
- (c) Qual é o tempo de duplicação dessa população?
- (d) Quanto tempo leva para essa população de bactérias atingir os 30.000?

29. Um tecido encontrado numa pirâmide egípcia contém 78,5% de seu carbono-14 original. Estime a idade do tecido.

30. O comprimento e a largura de um retângulo estão crescendo a uma mesma taxa constante. Prove que isso implica que a taxa de variação da área do retângulo é proporcional ao perímetro do retângulo.

31. Encontre a solução geral de cada equação diferencial.

- (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- (b) $4y'' - 4y' + y = 0$
- (c) $y'' + y' + 2y = 0$

32. Resolva o problema de valores iniciais.

- (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$
- (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
- (c) $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

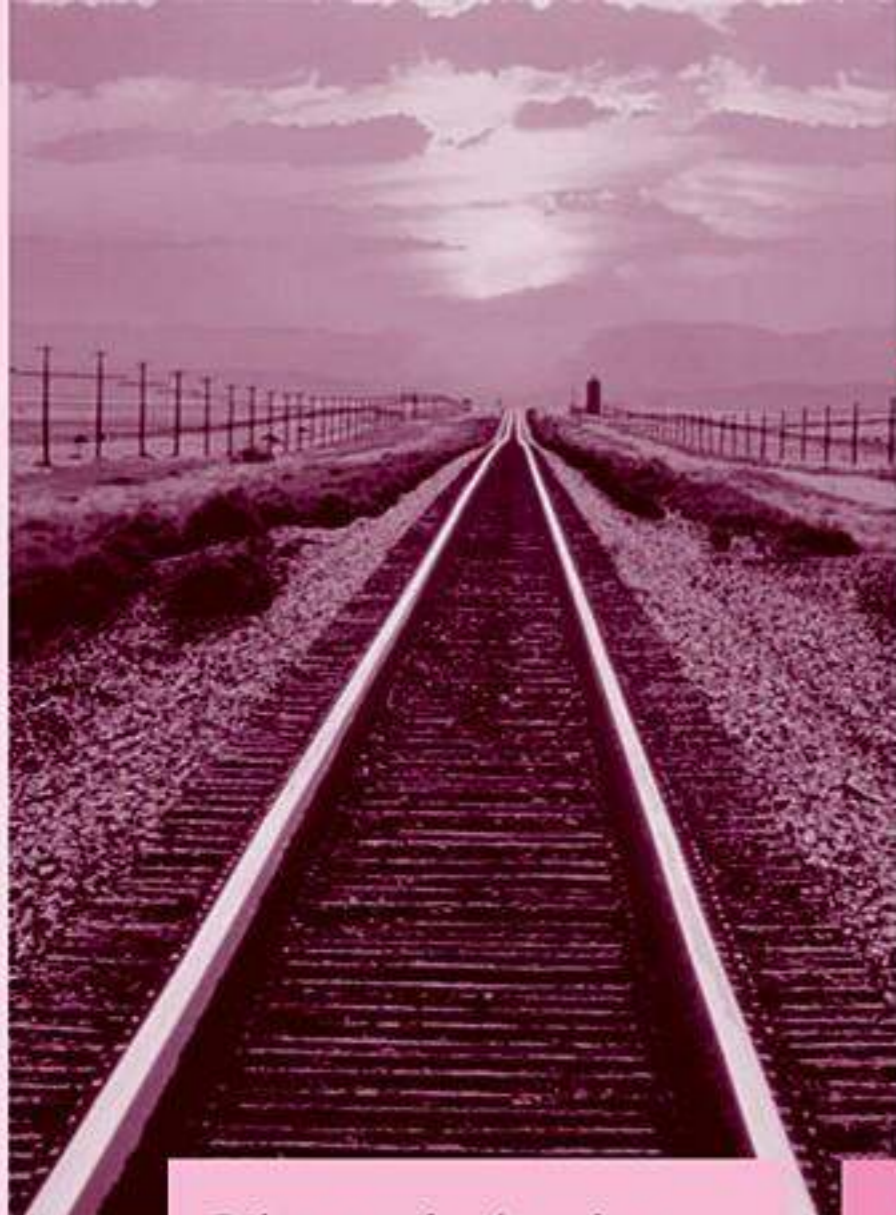
33-34 Estes exercícios envolvem vibrações do bloco desenhado na Figura 9.4.1. Suponha que o eixo y seja tomado como na Figura 9.4.2 e que se aplique o modelo harmônico simples.

33. Suponha que o bloco tenha uma massa de 1 kg, que a constante da mola seja de 0,25 N/m e que o bloco seja empurrado 0,3 m acima da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

- (a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.
- (b) Encontre o período e a frequência da vibração.
- (c) Esboce o gráfico de $y(t)$.
- (d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?
- (e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima abaixo da posição de equilíbrio?

34. Suponha que o bloco estique a mola 0,5 pés quando na posição de equilíbrio e que seja puxado 1,5 pés abaixo da sua posição de equilíbrio e solto no instante $t = 0$.

- (a) Encontre a função posição $y(t)$ do bloco.
- (b) Encontre o período e a frequência da vibração.
- (c) Esboce o gráfico de $y(t)$.
- (d) Em que instante o bloco passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio?
- (e) Em que instante o bloco atinge pela primeira vez sua distância máxima acima da posição de equilíbrio?



Pulgas grandes têm pulgas pequenas nas suas costas, e pulgas pequenas têm pulgas menores ainda, e assim por diante. E as pulgas grandes, elas mesmas, por sua vez, estão nas costas de pulgas maiores, enquanto essas também estão nas de pulgas maiores ainda, e maiores ainda, e assim por diante.

—Augustus De Morgan
Matemático

Neste capítulo, consideraremos séries infinitas, que são somas que envolvem um número infinito de termos. As séries infinitas desempenham um papel fundamental, tanto na Matemática quanto na Ciência: elas são usadas, por exemplo, para aproximar funções trigonométricas e logarítmicas, para resolver equações diferenciais, para calcular integrais difíceis, para criar novas funções e para construir modelos matemáticos de leis físicas. Como é impossível efetuar diretamente a soma de um número infinito de termos, um objetivo será definir exatamente o que entendemos por soma de uma série infinita. Porém, diferentemente das somas finitas, nem todas séries infinitas têm realmente uma soma, portanto precisamos desenvolver ferramentas que determinem quais séries infinitas têm soma e quais não têm. Uma vez desenvolvidas as idéias básicas, aplicaremos o nosso trabalho; mostraremos como as séries infinitas são utilizadas para calcular quantidades como $\ln 2$, e , $\sin 3^\circ$ e π , como elas são usadas para criar funções e, finalmente, como são usadas para modelar leis físicas.

Foto: A perspectiva cria a ilusão de que a seqüência de postes telefônicos continua indefinidamente mas converge em direção a um único ponto infinitamente distante.

10.1 SEQÜÊNCIAS

Na linguagem do dia a dia, o termo *seqüência* significa uma sucessão de coisas em uma ordem determinada: ordem cronológica, de tamanho, ou lógica, por exemplo. Em Matemática, o termo *seqüência* é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função. Nesta seção, desenvolveremos algumas das idéias básicas referentes a seqüências de números.

■ DEFINIÇÃO DE SEQÜÊNCIA

Informalmente, uma *seqüência infinita*, ou, mais simplesmente, uma *seqüência*, é uma sucessão sem fim de números, chamados *termos*. Entende-se que os termos têm uma ordem definida, isto é, há um primeiro termo a_1 , um segundo termo a_2 , um terceiro termo a_3 , um quarto termo a_4 e assim por diante. Tipicamente, uma seqüência é escrita como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

onde os pontos são usados para indicar que a seqüência continua indefinidamente. Alguns exemplos específicos são

$$\begin{array}{ll} 1, 2, 3, 4, \dots, & 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \\ 2, 4, 6, 8, \dots, & 1, -1, 1, -1, \dots \end{array}$$

Cada uma dessas seqüências tem um padrão definido, o que torna fácil gerar termos adicionais se admitirmos que esses termos seguem o mesmo padrão que os termos apresentados. No entanto, tais padrões podem ser ilusórios, portanto é melhor ter uma regra ou fórmula para gerar os termos. Uma maneira de fazer isso é procurar uma função que relacione cada termo da seqüência ao número de sua posição. Por exemplo, na seqüência

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

cada termo é o dobro do número da sua posição; isto é, o n ésimo termo da seqüência é dado pela fórmula $2n$. Denotamos isso escrevendo a seqüência como

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

Dizemos que a função $f(n) = 2n$ é o *termo geral* desta seqüência. Agora, se quisermos saber um termo específico dela, precisamos somente substituir seu número de posição na fórmula do termo geral. Por exemplo, o 37-ésimo termo da seqüência é $2 \cdot 37 = 74$.

► **Exemplo 1** Em cada parte, determine o termo geral da seqüência.

- (a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
 (c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$ (d) $1, 3, 5, 7, \dots$

Tabela 10.1.1

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	...	n	...
TERMO	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$...	$\frac{n}{n+1}$...

Solução (a) Na Tabela 10.1.1, os quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seu número de posição, donde vemos que o numerador é igual ao número de posição e o denominador é o número de posição mais 1. Isso sugere que o n ésimo termo tem o numerador n e o denominador $n + 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Tabela 10.1.2

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	...	n	...
TERMO	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$...	$\frac{1}{2^n}$...

Solução (b) Na Tabela 10.1.2, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram expressos como potências de 2 e colocados abaixo do seu número de posição, donde vemos que o expoente no denominador é igual ao número de posição. Isso sugere que o denominador do n ésimo termo é 2^n , conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Solução (c) Esta seqüência é idêntica àquela da parte (a), exceto pelos sinais alternados. Assim, o n ésimo termo da seqüência pode ser obtido multiplicando-se o n ésimo termo da parte (a) por $(-1)^{n+1}$. Este fator produz corretamente os sinais alternados, uma vez que seus valores sucessivos, começando com $n = 1$, são $1, -1, 1, -1, \dots$. Assim, a seqüência pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots$$

Tabela 10.1.3

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	...	n	...
TERMO	1	3	5	7	...	$2n - 1$...

Solução (d) Na Tabela 10.1.3, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seus números de posição, donde vemos que cada termo é 1 a menos do que o dobro do seu número de posição. Isso sugere que o n ésimo termo da seqüência é $2n - 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots \blacktriangleleft$$

Quando o termo geral de uma seqüência

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \tag{1}$$

for conhecido, não há necessidade de escrever os termos iniciais, e é comum escrever somente o termo geral envolvido por chaves. Assim, (1) pode ser escrito como

$$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$$

Por exemplo, a seguir estão as quatro seqüências do Exemplo 1 expressas em notação com chaves.

Considere a seqüência cujo termo geral é

$$f(n) = \frac{1}{3}(3 - 5n + 6n^2 - n^3)$$

Calcule os três primeiros termos e faça uma conjectura sobre o quarto termo. Verifique a sua conjectura calculando o quarto termo. Qual é a mensagem que isso transmite?

SEQÜÊNCIA	NOTAÇÃO COM CHAVES
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$	$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots$	$\left\{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$	$\{2n-1\}_{n=1}^{+\infty}$

A letra n em (1) é chamada de **índice** da seqüência. Não é essencial usar n como índice; qualquer letra que não estiver reservada para outros propósitos pode ser usada. Por exemplo, podemos considerar o termo genérico da seqüência a_1, a_2, a_3, \dots como sendo o k -ésimo termo e, neste caso, denotaremos essa seqüência como $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Além disso, não é essencial começar o índice em 1; às vezes, é mais conveniente começar em 0 (ou algum outro inteiro). Por exemplo, considere a seqüência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

Uma forma de escrevê-la é

$$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Entretanto, o termo geral será mais simples se tomarmos como termo inicial o 0-ésimo termo, e neste caso podemos escrever a seqüência como

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{+\infty}$$

Começamos esta seção descrevendo uma seqüência como uma sucessão sem fim de números. Embora isso transmita a idéia geral, não é uma definição matematicamente satisfatória, pois depende do termo “sucessão”, que é um termo não-definido. Para motivar uma definição precisa, considere a seqüência

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

Se denotarmos o termo geral por $f(n) = 2n$, então podemos escrever essa seqüência como

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

que é uma “lista” dos valores da função

$$f(n) = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Isso sugere a seguinte definição.

10.1.1 DEFINIÇÃO Uma **seqüência** é uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros. Especificamente, consideramos a expressão $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ como sendo uma notação alternativa para a função $f(n) = a_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Quando o valor inicial do índice de uma seqüência não for relevante para a discussão, é comum usar uma notação como $\{a_n\}$ em que não há referência ao valor inicial de n . Podemos distinguir entre seqüências diferentes usando letras diferentes para os seus termos gerais; assim, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ denotam três seqüências diferentes.

■ GRÁFICOS DAS SEQÜÊNCIAS

Uma vez que seqüências são funções, faz sentido falar sobre o gráfico delas. Por exemplo, o gráfico da seqüência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ é o gráfico da equação

$$y = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como o lado direito desta equação está definido somente para valores inteiros positivos de n , o gráfico consiste de uma sucessão de pontos isolados (Figura 10.1.1.a). Isto é distinto do gráfico de

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

que é uma curva contínua (Figura 10.1.1b).

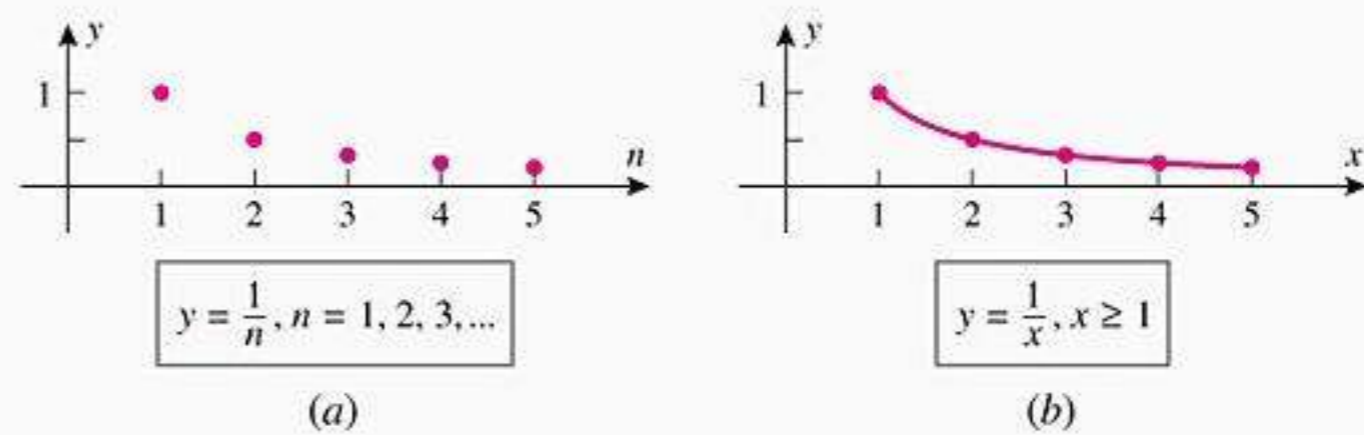


Figura 10.1.1

■ LIMITE DE UMA SEQÜÊNCIA

Uma vez que seqüências são funções, podemos indagar sobre os seus limites. Porém, como a seqüência $\{a_n\}$ está somente definida para valores inteiros de n , o único limite que faz sentido é o de a_n quando $n \rightarrow +\infty$. Na Figura 10.1.2 mostramos os gráficos de quatro seqüências, cada uma comportando-se diferentemente quando $n \rightarrow +\infty$:

- Os termos na seqüência $\{n + 1\}$ crescem sem cota.
- Os termos na seqüência $\{(-1)^{n+1}\}$ oscilam entre -1 e 1 .
- Os termos na seqüência $\{n/(n + 1)\}$ crescem em direção a um “valor limite” de 1 .
- Os termos na seqüência $\{1 + (-\frac{1}{2})^n\}$ também tendem a um “valor limite” de 1 , mas o fazem de forma oscilatória.

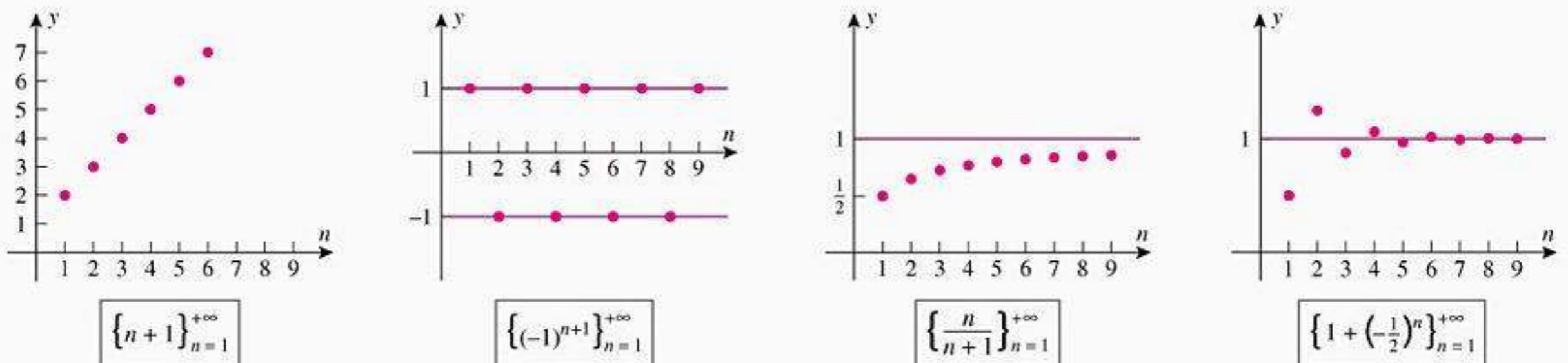


Figura 10.1.2

De modo informal, o limite de uma seqüência $\{a_n\}$ pretende descrever como a_n comporta-se quando $n \rightarrow +\infty$. Para sermos mais específicos, diremos que *uma seqüência $\{a_n\}$ tende a um limite L se os termos da seqüência tornarem-se, finalmente, arbitrariamente*

próximos de L . Geometricamente, isso significa que para qualquer número ϵ positivo há um ponto na seqüência após o qual todos os termos estão entre as retas $y = L - \epsilon$ e $y = L + \epsilon$ (Figura 10.1.3).

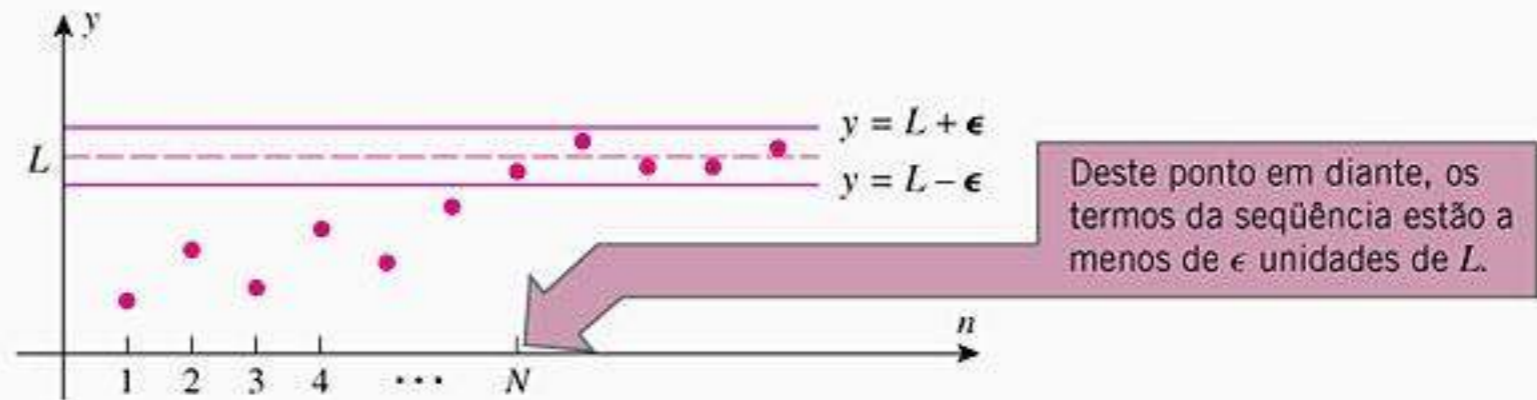


Figura 10.1.3

A definição a seguir torna essas idéias mais precisas.

Como poderíamos definir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty?$$

10.1.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma seqüência $\{a_n\}$ **converge** para o **limite** L se dado qualquer $\epsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N , tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq N$. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Dizemos que uma seqüência **diverge** quando não convergir para algum limite finito.

► **Exemplo 2** As duas primeiras seqüências na Figura 10.1.2 divergem enquanto que as duas restantes convergem para 1, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 \quad \blacktriangleleft$$

O teorema a seguir, que daremos sem prova, mostra que as propriedades usuais de limites aplicam-se a seqüências. O teorema garante, ainda, que as técnicas algébricas usadas no cálculo de limites da forma $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ também podem ser usadas para limites da forma $\lim_{n \rightarrow +\infty}$.

10.1.3 TEOREMA Suponha que as seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ converjam respectivamente para L_1 e L_2 e que c seja uma constante. Então,

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = cL_1$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 + L_2$
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 - L_2$
- (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 L_2$
- (f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{se } L_2 \neq 0)$

Propriedades adicionais de limites decorrem das propriedades no Teorema 10.1.3. Por exemplo, use a parte (e) para mostrar que se $a_n \rightarrow L$ e se m for um inteiro positivo, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^m = L^m$$

► **Exemplo 3** Em cada parte, determine se a seqüência converge ou diverge. Se convergir, encontre o limite.

- (a) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ (b) $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 (c) $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ (d) $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$

Solução (a) Dividindo por n o numerador e o denominador, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 1/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + 1/n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n} \\ &= \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, a seqüência converge para $\frac{1}{2}$.

Solução (b) Essa seqüência é a mesma que a da parte (a), exceto pelo fator $(-1)^{n+1}$, que oscila entre $+1$ e -1 . Assim, os termos nessa seqüência oscilam entre valores positivos e negativos, sendo que os termos com número de posição ímpar são idênticos aos da parte (a) e os termos com número de posição par são os negativos dos da parte (a). Uma vez que a seqüência na parte (a) tem um limite de $\frac{1}{2}$ tem-se que os termos de posição ímpar nesta seqüência tendem a $\frac{1}{2}$, enquanto que os termos de posição par tendem a $-\frac{1}{2}$. Logo, esta seqüência não tem limite – ela diverge.

Solução (c) Uma vez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$, o produto $(-1)^{n+1}(1/n)$ oscila entre valores positivos e negativos, sendo que os termos de posição ímpar tendem a zero através de valores positivos e os termos de posição par tendem a zero através de valores negativos. Desse modo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que a seqüência converge para zero.

Solução (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 2n) = -\infty$, portanto a seqüência $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$ diverge. ◀

Se o termo geral de uma seqüência for $f(n)$, e se substituirmos n por x , onde x pode variar sobre todo o intervalo $[1, +\infty)$, então os valores de $f(n)$ podem ser vistos como “valores amostrais” de $f(x)$ tomados nos inteiros positivos. Assim,

se $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow +\infty$, então $f(n) \rightarrow L$ quando $n \rightarrow +\infty$

(Figura 10.1.4a). Porém, a recíproca não é verdadeira; isto é, não se pode inferir que $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow +\infty$, a partir do fato de que $f(n) \rightarrow L$ quando $n \rightarrow +\infty$ (Figura 10.1.4b).

► **Exemplo 4** Em cada parte, determine se a seqüência converge e, caso positivo, encontre seu limite.

- (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ (b) $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$

Solução Substituindo n por x na primeira seqüência obtemos a função potência $(1/2)^x$ e substituindo n por x na segunda seqüência, obtemos a função potência 2^x . Lembre, ago-

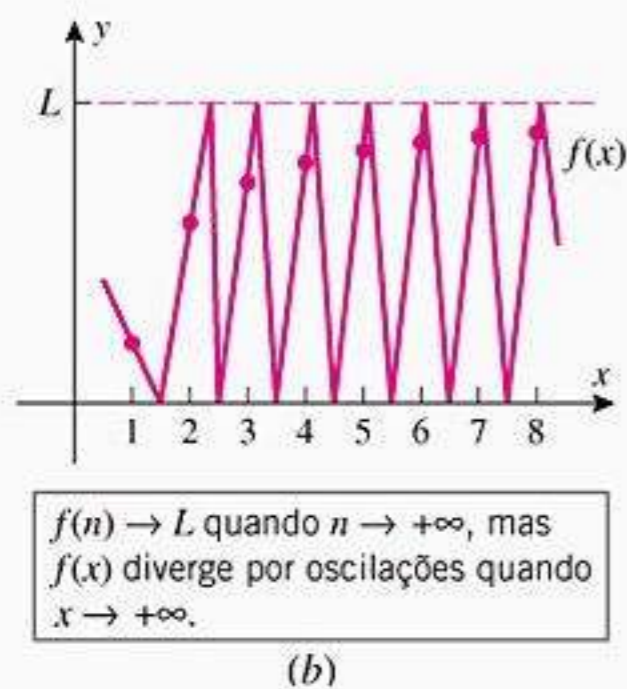
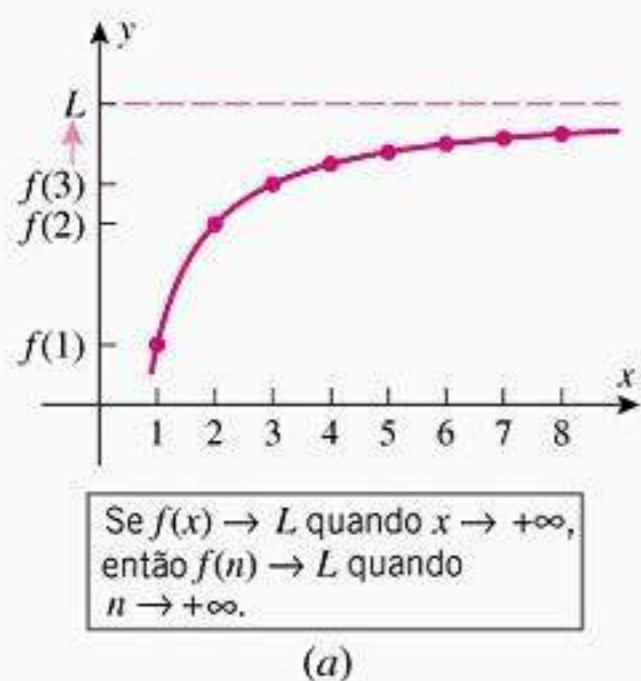


Figura 10.1.4

ra, que se $0 < b < 1$, então $b^x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e, se $b > 1$, então $b^x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ (Figura 1.6.1 do Volume 1). Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 5** Encontre o limite da seqüência $\left\{ \frac{n}{e^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$.

Solução A expressão n/e^n é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ quando $n \rightarrow +\infty$, logo pensamos na regra de L'Hôpital. No entanto, não podemos aplicar diretamente esta regra a n/e^n , pois as funções n e e^n estão definidas somente nos inteiros positivos, e portanto não são funções diferenciáveis. Para contornar este problema, vamos substituir n por x e aplicar a regra de L'Hôpital à função x/e^x . Assim obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

de onde concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 6** Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Solução

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(1/n)\ln n} = e^0 = 1$$

Pela regra de L'Hôpital aplicada a $(1/x) \ln x$ ◀

Às vezes, os termos de posição par e ímpar comportam-se de forma suficientemente diferente, de tal forma que é desejável investigar separadamente a sua convergência. O teorema a seguir, cuja prova será omitida, é útil neste caso.

10.1.4 TEOREMA Uma seqüência converge para um limite L se, e somente se, as seqüências dos termos de posição par e dos termos de posição ímpar convergem ambas para L .

► **Exemplo 7** A seqüência

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \dots$$

converge para zero, uma vez que as seqüências dos termos de posição par e ímpar convergem ambas para zero, e a seqüência

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$$

diverge, uma vez que a seqüência dos termos ímpares converge para 1 e a dos pares para 0. ◀

■ **TEOREMA DO CONFRONTO PARA SEQÜÊNCIA**

O teorema a seguir, que daremos sem prova, é uma adaptação do Teorema do Confronto (2.6.3 no Volume 1) para seqüências. Este teorema será útil para encontrar limites de seqüências, que não podem ser obtidos diretamente.

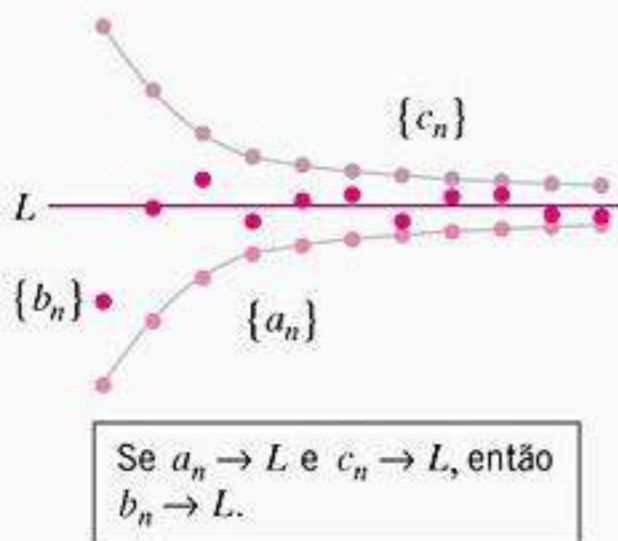


Figura 10.1.5

10.1.5 TEOREMA (Teorema do Confronto para Seqüências) Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ seqüências tais que

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad (\text{para todos os valores de } n \text{ acima de algum índice } N)$$

Se as seqüências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ tiverem um limite comum L quando $n \rightarrow +\infty$ então $\{b_n\}$ também terá o limite L quando $n \rightarrow +\infty$.

Lembre-se que se n for um inteiro positivo, então $n!$ (lê-se “ n fatorial”) é o produto dos n primeiros inteiros positivos. Além disso, é conveniente definir $0! = 1$.

Tabela 10.1.4

n	$\frac{n!}{n^n}$
1	1,0000000000
2	0,5000000000
3	0,2222222222
4	0,0937500000
5	0,0384000000
6	0,0154320988
7	0,0061198990
8	0,0024032593
9	0,0009366567
10	0,0003628800
11	0,0001399059
12	0,0000537232

► **Exemplo 8** Use uma evidência numérica para fazer uma conjectura sobre o limite da seqüência

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

e, então, confirme que ela está correta.

Solução A Tabela 10.1.4 obtida com um recurso computacional sugere que o limite da seqüência possa ser zero. Para confirmar isso precisamos examinar o limite de

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Embora isso seja uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ , a regra de L'Hôpital não ajuda, pois não temos definição de $x!$ para valores não-inteiros de x . No entanto, vamos escrever alguns termos e o termo geral da seqüência:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}, \dots, \quad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n}, \dots$$

Podemos reescrever o termo geral como

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

de onde fica evidente que

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

Entretanto, as duas expressões de fora têm o limite 0 quando $n \rightarrow +\infty$; assim, o Teorema do Confronto para Seqüências implica que $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, o que confirma a nossa conjectura. ◀

O teorema a seguir é freqüentemente útil para encontrar o limite de uma seqüência com termos positivos e negativos – ele afirma que se a seqüência $\{|a_n|\}$ que é obtida tomando-se o valor absoluto de cada termo de uma seqüência $\{a_n\}$ converge para 0, então $\{a_n\}$ também converge para 0.

10.1.6 TEOREMA Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dependendo do sinal de a_n , ou $a_n = |a_n|$ ou $a_n = -|a_n|$. Assim, em todos os casos temos

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Porém, o limite dos dois termos externos é 0 e, portanto, o limite de a_n é 0 pelo Teorema do Confronto para Seqüências. ■

► **Exemplo 9** Considere a seqüência

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots$$

Se tomarmos o valor absoluto de cada termo, obtemos a seqüência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

que, conforme mostrado no Exemplo 4, converge para 0. Assim, a partir do Teorema 10.1.6, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{2^n} \right] = 0 \blacktriangleleft$$

■ **SEQÜÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE**

Algumas seqüências não surgem de uma fórmula para o termo geral, mas em vez disso de uma fórmula ou conjunto de fórmulas que especificam como gerar cada termo da seqüência a partir dos termos que o precedem; dizemos que tais seqüências são definidas *recursivamente*, e chamamos as fórmulas que as definem de *fórmulas de recursão*. Um bom exemplo disso é a regra mecânica para aproximar raízes quadradas. No Exercício 21 da Seção 5.6 (ver Volume 1), pedimos ao leitor mostrar que

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \tag{2}$$

descreve a seqüência produzida pelo Método de Newton para aproximar \sqrt{a} como um zero da função $f(x) = x^2 - a$. A Tabela 10.1.5 mostra os cinco primeiros termos na aplicação da regra mecânica para aproximar $\sqrt{2}$.

Tabela 10.1.5

n	$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$	APROXIMAÇÃO DECIMAL
	$x_1 = 1$ (Valor inicial)	1,000000000000
1	$x_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{1} \right] = \frac{3}{2}$	1,500000000000
2	$x_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right] = \frac{17}{12}$	1,416666666667
3	$x_4 = \frac{1}{2} \left[\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right] = \frac{577}{408}$	1,41421568627
4	$x_5 = \frac{1}{2} \left[\frac{577}{408} + \frac{2}{577/408} \right] = \frac{665.857}{470.832}$	1,41421356237
5	$x_6 = \frac{1}{2} \left[\frac{665.857}{470.832} + \frac{2}{665.857/470.832} \right] = \frac{886.731.088.897}{627.013.566.048}$	1,41421356237

Sairíamos muito do contexto se examinássemos a convergência de seqüências definidas recursivamente, porém concluiremos esta seção com uma técnica útil que pode, algumas vezes, ser usada para calcular os limites de tais seqüências.

► **Exemplo 10** Supondo que a seqüência na Tabela 10.1.5 convirja, mostre que o limite é $\sqrt{2}$.

Solução Supondo que $x_n \rightarrow L$, querem determinar L . Como $n + 1 \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, é também verdade que $x_{n+1} \rightarrow L$ quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, se tomarmos o limite da expressão

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

quando $n \rightarrow +\infty$, obteremos

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L} \right)$$

que pode ser reescrita como $L^2 = 2$. A solução negativa desta equação é impossível pois $x_n > 0$ para todo n , logo $L = \sqrt{2}$. ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.1** (Ver página 635 para respostas.)

- Considere a seqüência 4, 6, 8, 10, 12,....
 - Se $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ denota essa seqüência, então $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ e $a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$. O termo geral é $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Se $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ denota essa seqüência, então $b_0 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ e $b_8 = \underline{\hspace{2cm}}$. O termo geral é $b_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
- O que significa dizer que uma seqüência $\{a_n\}$ converge?
- Considere as seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, onde

$$a_n = \frac{n(2n+1)}{n^2} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{5}$$

Determine quais das seguintes seqüências convergem e quais divergem. Se uma seqüência converge, indique seu limite.

 - $\{a_n\}$
 - $\{b_n\}$
 - $\{3a_n - 1\}$
 - $\{b_n^2\}$
 - $\{a_n + b_n\}$
 - $\{1/a_n\}$
 - $\{a_n/b_n\}$
- Seja f a função $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e defina as seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ por $a_n = f(2n)$ e $b_n = f(2n+1)$.
 - Existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
 - $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - $\{a_n\}$ converge?
 - $b_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - $\{b_n\}$ converge?
 - A seqüência $\{f(n)\}$ converge?
- Suponha que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sejam seqüências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para cada $n \geq 10$ e que ambas $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convirjam para 12. Então o Teorema para Seqüências implica que $\{b_n\}$ converge para .

EXERCÍCIOS 10.1  

- Em cada parte, encontre a fórmula para o termo geral da seqüência, começando com $n = 1$.
 - $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
 - $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$
 - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$
 - $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}, \frac{9}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{16}{\sqrt[5]{\pi}}, \dots$
 - Em cada parte, encontre duas fórmulas para o termo geral da seqüência, uma começando com $n = 1$ e a outra com $n = 0$.
 - $1, -r, r^2, -r^3, \dots$
 - $r, -r^2, r^3, -r^4, \dots$
 - Escreva os quatro primeiros termos da seqüência $\{1 + (-1)^n\}$, começando com $n = 0$.
 - Escreva os quatro primeiros termos da seqüência $\{\cos n\pi\}$, começando com $n = 0$.
 - Use os resultados nas partes (a) e (b) para expressar o termo geral da seqüência 4, 0, 4, 0, ... de duas formas diferentes, começando com $n = 0$.
 - Em cada parte, encontre a fórmula para o termo geral usando fatoriais e começando com $n = 1$.
 - $1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8, \dots$
 - $1, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7, \dots$
- 5-22** Escreva os cinco primeiros termos da seqüência, determine se ela converge e, se isso acontecer, encontre o limite.
- $\left\{ \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\{2\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \ln \left(\frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

13. $\left\{ (-1)^n \frac{2n^3}{n^3 + 1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 14. $\left\{ \frac{n}{2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 15. $\left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 16. $\left\{ \frac{\pi^n}{4^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 17. $\left\{ \cos \frac{3}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 18. $\left\{ \cos \frac{\pi n}{2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 19. $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$ 20. $\{\sqrt{n^2 + 3n} - n\}_{n=1}^{+\infty}$
 21. $\left\{ \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 22. $\left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{+\infty}$

23-30 Enc ntre term gera a e uência, c meçan c m $n=1$, etermine e a e uência c n erge e, e i ac ntecer, enc ntre imite

23. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$ 24. $0, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{4^2}, \dots$
 25. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$ 26. $-1, 2, -3, 4, -5, \dots$
 27. $\left(1 - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right), \dots$
 28. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots$
 29. $(\sqrt{2} - \sqrt{3}), (\sqrt{3} - \sqrt{4}), (\sqrt{4} - \sqrt{5}), \dots$
 30. $\frac{1}{3^5}, -\frac{1}{3^6}, \frac{1}{3^7}, -\frac{1}{3^8}, \dots$

ENFOCANDO CONCEITOS

31. Dê i e em e e uência cu term e te am en tre -10 e 10 e ue nã c n ir am e gráfíc e a e uência ara e icar ua r rie a e
 32. a Su nha ue f ati açã $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ É í e ue a e uência $\{f(1/n)\}$ c n ir a E i ue
 b Enc ntre uma unçã f ta ue $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nã e i ta ma a e uência $\{f(1/n)\}$ c n ir a
 33. a meçan c m $n=1$, e cre a ei rimeir ter m a e uência $\{a_n\}$, n e

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- b meçan c m $n=1$, e c n i eran e e ara a mente term are e ím are, enc ntre uma ór mu a ara term gera a e uência

$$1, \frac{1}{2^2}, 3, \frac{1}{2^4}, 5, \frac{1}{2^6}, \dots$$

- c meçan c m $n=1$, e c n i eran e e ara a mente term are e ím are, enc ntre uma ór mu a ara term gera a e uência

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots$$

Determine e a e uência na arte a, b, c c n ergem Em ca afirmati, enc ntre imite

34. Para uai a re iti e b a e uência $b, 0, b^2, 0, b^3, 0, b^4, \dots$ c n erge u tifi ue ua re ta

- C** 35. a e e i ência numérica ara azer uma c n ectura bre imite a e uência $\{\sqrt[n]{n^3}\}_{n=2}^{+\infty}$
 b e um S ara c nfirmar a ua c n ectura
C 36. a e e i ência numérica ara azer uma c n ectura bre imite a e uência $\{\sqrt[3]{3^n + n^3}\}_{n=2}^{+\infty}$
 b e um S ra c nfirmar ua c n ectura

37. Su n ue a e uência a a e a Fórmu a 2 e ta eçã c n ir a, ue mét E em 10 ara m trar ue imi te e a e uência é \sqrt{a}

38. n i ere a e uência

$$a_1 = \sqrt{6}$$

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}$$

$$a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$$

$$a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$$

⋮

- a Enc ntre uma ór mu a e recur ã ara a_{n+1}
 b Su n ue a e uência c n ir a, ue mét E em 10 ara enc ntrar imite

39. n i ere a e uência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, n e

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

- a Enc ntre a_1, a_2, a_3 e a_4
 b e e i ência numérica ara azer uma c n ectura bre imite a e uência
 c nfirmar ua c n ectura e re an a_n em rma echa a e ca cu an imite

40. Siga a me ma rientaçõe E ercici 39 c m

$$a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}$$

41-42 e e i ência numérica ara azer uma c n ectura bre imite a e uência, e entã ue e rema n r nt ara Se uência e rema 10.15 ara c nfirmar e ua c n ectura e tá c rreta

41. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$

42. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2n} \right)^n$

43. a m e tu ante ente ia entra c m númer 0,5 em uma ca cu a ra e ca cu a re eti amente ua ra númer n i r man e $a_0 = 0,5$, enc ntre uma ór mu a ara term gera a e uência $\{a_n\}$ e númer ue a a recem n i r

- b) Dê um argumento razoável para mostrar que a sequência converge para o limite a_n .
- c) Conclua a convergência da sequência para o limite a_n .
- Para cada n , a sequência a_0 e a sequência a_n convergem para o mesmo limite.

44. Se a

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0,5 \\ 2x - 1, & 0,5 \leq x < 1 \end{cases}$$

e a sequência $f(0,2), f(f(0,2)), f(f(f(0,2))), \dots$ converge para um valor L .

45. a) Use um recurso tecnológico para gerar o gráfico da função $y = 2^x + 3^{1/x}$ e, então, use-o para obter a convergência do limite da sequência

$$\{(2^n + 3^n)^{1/n}\}_{n=1}^{+\infty}$$

b) Conclua a convergência da sequência para o limite

46. Considere a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ cujo n -ésimo termo é

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)}$$

onde $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ln 2$. Interreta a_n com a máquina de Riemann e uma integral definida.

47. Se a sequência a_n é a média aritmética de $f(x) = 1/x$ no intervalo $[1, n]$. Determine a sequência $\{a_n\}$ e verifique se converge para o limite

48. A sequência cujos termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ é chamada de **seqüência de Fibonacci** em homenagem ao matemático italiano "Fibonacci". Ela é a sequência de Fibonacci. Ela é a sequência de Fibonacci. Ela é a sequência de Fibonacci.

a) Determine a sequência $\{a_n\}$ e conclua que $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, mostre que

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{se } n \geq 1$$

- b) Dê um argumento razoável para mostrar que a sequência $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge para algum limite L , então a sequência $\{a_{n+2}/a_{n+1}\}$ também converge para o mesmo limite L .
- c) Suponha que a sequência $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge para o mesmo limite L . Então $L = (1 + \sqrt{5})/2$.

49. Se aceitarmos a definição de limite da sequência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para o limite $L = 0$, então, de acordo com a Definição 10.1.2, para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que $|a_n - L| = |(1/n) - 0| < \epsilon$ quando $n \geq N$. Em cada arte, escolha $\epsilon = 0,5$, $\epsilon = 0,1$ e $\epsilon = 0,001$.

50. Se aceitarmos a definição de limite da sequência

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

converge para o limite $L = 1$, então, de acordo com a Definição 10.1.2, para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$|a_n - L| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon$$

quando $n \geq N$. Em cada arte, escolha $\epsilon = 0,25$, $\epsilon = 0,1$ e $\epsilon = 0,001$.

51. Use a Definição 10.1.2 para mostrar que

a) a sequência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para 0

b) a sequência $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para 1

52. Escolha $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n$, onde r é um número real. [Sugestão: considere os casos $|r| < 1$, $|r| > 1$, $r = 1$ e $r = -1$]

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.1

1. a) 4, 10, 1, $2n+2$; b) 4, 12, 20, $2n+4$; 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe; 3. a) converge para 2; b) converge para 5; c) converge para $\frac{1}{25}$; e) converge para $\frac{1}{2}$; g) converge para 0; 4. a) não; b) $-1, 1, -1, 1$; c) não; 0, 0, 0, 0; e) converge para 0; não; 5. n inteiro ≥ 12 .

10.2 SEQÜÊNCIAS MONÓTONAS

Há muitas situações nas quais é importante saber se uma seqüência converge, sendo, todavia, irrelevante para o problema o valor do limite. Nesta seção, vamos estudar várias técnicas que podem ser usadas para determinar se uma seqüência converge.

TERMINOLOGIA

meçam com a goma terminologia

Observe que uma seqüência crescente não precisa ser estritamente crescente e que uma seqüência decrescente não precisa ser estritamente decrescente.

10.2.1 DEFINIÇÃO Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é denominada

estritamente crescente e $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

crescente e $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

estritamente decrescente e $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

decrescente e $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

Uma seqüência que é crescente ou decrescente é denominada **monótona** e uma seqüência que é estritamente crescente ou estritamente decrescente é denominada **estritamente monótona**.

Figura 10.2.1 Ilustração da definição 10.2.1, com gráficos correspondentes na Figura 10.2.1

Tabela 10.2.1

SEQÜÊNCIA	DESCRIÇÃO
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$	Estritamente crescente
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$	Estritamente decrescente
$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$	Crescente, mas não estritamente crescente
$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$	Decrescente, mas não estritamente decrescente
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$	Nem crescente, nem decrescente

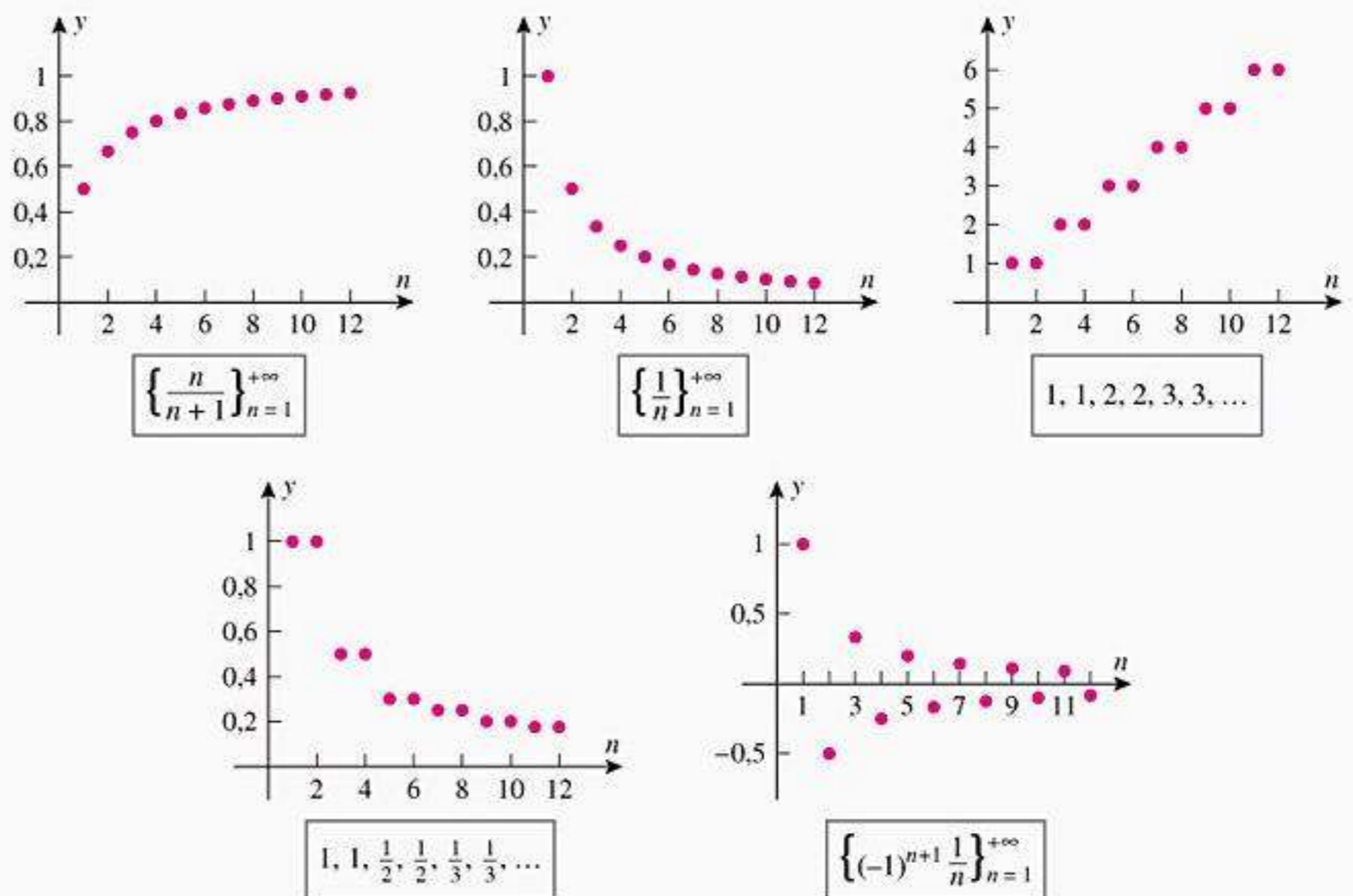


Figura 10.2.1

Pode uma seqüência ser tanto crescente quanto decrescente? Explique.

Primeira e a segunda e terceira a partir de 10 2 1 ã e tritamente m nót na a terceira e a quarta e üência ã m nót na ma ã e tritamente m nót na e a quinta e üência ã e tritamente m nót na nem m nót na

■ **TESTE DE MONOTONICIDADE**

Frequentemente é difícil *adivinhar* e uma seqüência é m nót na e tritamente m nót na e cre en a gun e eu rimeir term ntu , ara term certeza ue n a ite e tá c rret , e em rnece um argument matemátic reci abe a 10 2 2 rnece ua maneira e azer i , uma ba ea a na i erença e i term u ce i e a utr na razã e term uce i e e ú tim ca e tá im ícit ue term ã iti De em m trar ue a c n ição e ecifica a a em ara todos are e term uce i

Tabela 10.2.2

DIFERENÇA ENTRE TERMOS SUCESSIVOS	RAZÃO DE TERMOS SUCESSIVOS	CLASSIFICAÇÃO
$a_{n+1} - a_n > 0$	$a_{n+1}/a_n > 1$	Estritamente crescente
$a_{n+1} - a_n < 0$	$a_{n+1}/a_n < 1$	Estritamente decrescente
$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$a_{n+1}/a_n \geq 1$	Crescente
$a_{n+1} - a_n \leq 0$	$a_{n+1}/a_n \leq 1$	Decrescente

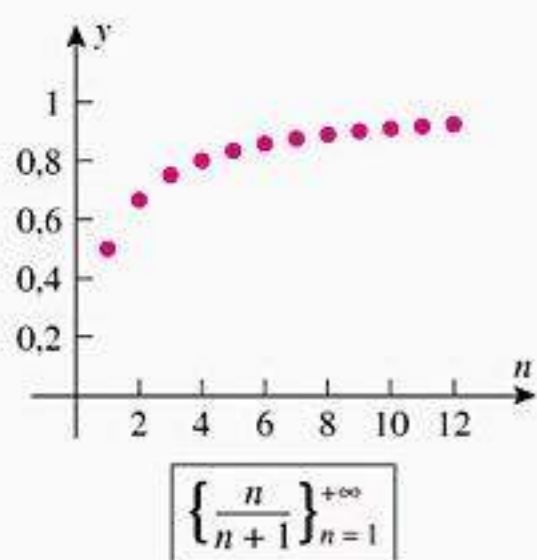


Figura 10.2.2

► **Exemplo 1** e i erença e term uce i ara m trar ue

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Figura 10 2 2 é uma e üência e tritamente cre cente

Solução a rã term iniciali ugere ue a e üência é e tritamente cre cente Para r ar i , e a

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

P em bter a_{n+1} ub tituin n r $n+1$ na ó rmu a Segue ue

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

im, ara $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

ue r a ue a e üência é e tritamente cre cente ◀

► **Exemplo 2** tre ue a e üência n E em 1 é e tritamente cre cente u an razõe e term uce i

Solução n rme i m tra na uçã E em 1

$$a_n = \frac{n}{n+1} \text{ e } a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

im,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}$$

... m... numerar em 1 e... e... em... m... r, tem... e... $a_{n+1}/a_n > 1$ para $n \geq 1$
 r... a... ue... e... üência é... e... tritamente cre... cente ◀

... e... em... a... eguir... i... u... tra... uma... terceira... técnica... para... determinar... e... uma... e... üência é... e... tritamente m... nót... na

► **Exemplo 3** E em 1 e 2, r... am... ue... a... e... üência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

é... e... tritamente cre... cente... c... n... i... eran... a... i... erença... e... a... razão... e... term... uce... i... ternati... a... mente, em... r... ce... er... a... eguinte... r... ma... Se... a

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

e... m... ue... ené... im... term... a... e... üência é $a_n = f(n)$ unça f é cre... cente... para $x \geq 1$, i

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

im,

$$a_n = f(n) < f(n+1) = a_{n+1}$$

ue... r... a... ue... a... e... üência... a... a... é... e... tritamente cre... cente ◀

Em... gera... ,... e... $f(n) = a_n$ r... ené... im... term... e... uma... e... üência, e... e... f r... i... erenciá... e... para $x \geq 1$, entã... re... u... ta... na... abe... a... 10.2.3... em... er... u... a... ara... in... e... tigar... a... m... n... t... nici... a... e... a... e... üência

Tabela 10.2.3

DERIVADA DE f PARA $x \geq 1$	CONCLUSÃO PARA A SEQUÊNCIA COM $a_n = f(n)$
$f'(x) > 0$	Estritamente crescente
$f'(x) < 0$	Estritamente decrescente
$f'(x) \geq 0$	Crescente
$f'(x) \leq 0$	Decrescente

■ PROPRIEDADES VÁLIDAS A PARTIR DE UM CERTO TERMO

À... eze... ,... uma... e... üência... c... m... rta... e... erraticamente... a... rincí... i... e... e... i... e... e... tabi... iza... em... um... cert... a... rã... P... re... em... ,... a... e... uência

$$9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots \quad 2$$

é... e... tritamente cre... cente... a... artir... uint... term... ,... ma... c... m... um... t... nã... e... er... ca... ifica... a... c... m... e... tritamente cre... cente, e... i... a... c... m... rtament... errátic... eu... uatr... rimeir... term... Para... e... cre... er... tai... e... üência... ,... am... intr... uzir... a... eguinte... termin... g... ia

10.2.2 DEFINIÇÃO Se a é cartar um número finit e term c meç e uma e üência r r uzi a uma e üência c m uma certa r rie a e, entã izem ue a e üência rigina tem e a r rie a e *a partir de um certo termo*

P... re... em... ,... emb... ra... nã... am... izer... ue... a... e... üência... 2... e... a... e... tritamente cre... cente, em... afirmar... ue... e... a... é... e... tritamente cre... cente... a... artir... e... um... cert... term

► **Exemplo 4** tre ue a e üência $\left\{ \frac{10^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ é e tritamente ecre cente a artir e um cert term

Solução em

$$a_n = \frac{10^n}{n!} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

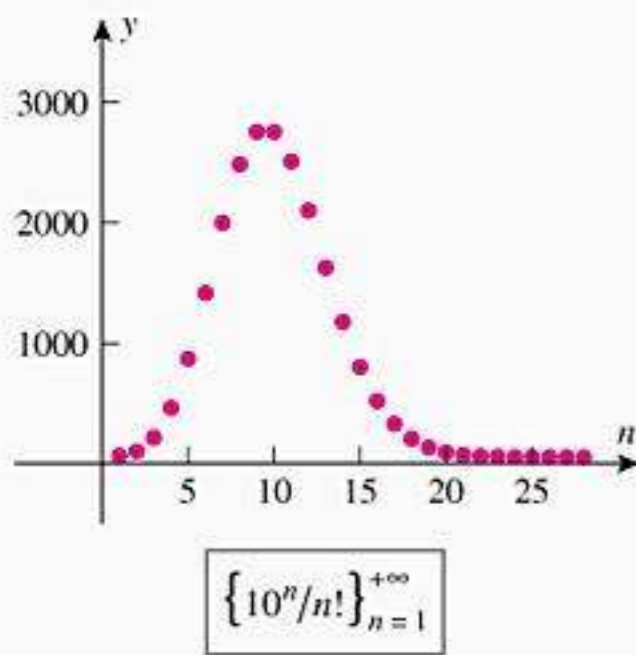


Figura 10.2.3

portanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}/(n+1)!}{10^n/n!} = \frac{10^{n+1}n!}{10^n(n+1)!} = 10 \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{10}{n+1} \quad (3)$$

A partir de (3), $a_{n+1}/a_n < 1$ para todo $n \geq 10$, logo a seqüência é estritamente decrescente a partir de um certo termo, como é confirmado pelo gráfico na Figura 10.2.3. ◀

■ **UMA VISÃO INTUITIVA DA CONVERGÊNCIA**

De um modo informal, a convergência ou a divergência de uma seqüência não depende do comportamento de seus termos iniciais, mas sim de como os termos se comportam a partir de um certo termo. Por exemplo, a seqüência

$$3, -9, -13, 17, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

a partir de um certo termo comporta-se como a seqüência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

e logo tem um limite igual a 0.

■ **CONVERGÊNCIA DE SEQÜÊNCIAS MONÓTONAS**

Os dois teoremas a seguir, cujas provas serão discutidas no final desta seção, mostram que uma seqüência monótona ou converge ou torna-se infinita, não podendo ocorrer divergência por oscilação.

10.2.3 TEOREMA Se uma seqüência $\{a_n\}$ for crescente a partir de um certo termo, então há duas possibilidades:

- (a) Existe uma constante M , chamada de **cota superior** para a seqüência, tal que $a_n \leq M$ para todo n a partir de um certo termo e, nesse caso, a seqüência converge para um limite L satisfazendo $L \leq M$.
- (b) Não existe cota superior e, nesse caso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

10.2.4 TEOREMA Se uma seqüência $\{a_n\}$ for decrescente a partir de um certo termo, então existem duas possibilidades:

- (a) Existe uma constante M , chamada de **cota inferior** para a seqüência, tal que $a_n \geq M$ para todo n a partir de um certo termo e, nesse caso, a seqüência converge para um limite L satisfazendo $L \geq M$.
- (b) Não existe cota inferior e, nesse caso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Os Teoremas 10.2.3 e 10.2.4 são exemplos de *teoremas de existência*; eles nos dizem se um limite existe mas não dão um método para encontrá-lo.

► **Exemplo 5** Mostre que a seqüência $\left\{ \frac{10^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ converge e encontre o limite.

Solução Mostramos no Exemplo 4 que a seqüência é estritamente decrescente a partir de um certo termo. Uma vez que todos os termos da seqüência são positivos, ela está limitada abaixo por $M = 0$, e, portanto, o Teorema 10.2.4 garante que ela converge para um limite não-negativo L . Porém, o limite não é diretamente evidente da fórmula $10^n/n!$ do n -ésimo termo, logo precisamos de uma certa engenhosidade para obtê-lo.

Lembre-se que na Fórmula (3) do Exemplo 4 vimos que termos sucessivos na seqüência dada estão relacionados pela fórmula de recursão

$$a_{n+1} = \frac{10}{n+1} a_n \quad (4)$$

onde $a_n = 10^n/n!$. Vamos tomar o limite quando $n \rightarrow +\infty$ em ambos os lados de (4) e usar o fato de que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Obtemos

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{n+1} a_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \cdot L = 0$$

e, portanto,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n}{n!} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Nos exercícios, mostraremos que a técnica ilustrada no último exemplo pode ser adaptada para obter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (5)$$

para todo valor real de x (Exercício 27). Esse resultado será útil posteriormente.

■ AXIOMA DA COMPLETUDE

Neste livro, aceitamos sem prova as propriedades usuais dos números reais e, de fato, nem mesmo tentamos definir o termo *número real*. Embora isso seja suficiente para muitos propósitos, constatou-se, no final do século XIX, que o estudo de limites e funções no Cálculo requer uma formulação axiomática precisa dos números reais, análoga ao desenvolvimento axiomático da Geometria Euclidiana. Embora sem tentar seguir esse desenvolvimento, necessitaremos da discussão de um dos axiomas sobre números reais a fim de provar os Teoremas 10.2.3 e 10.2.4. Vamos, primeiro, introduzir alguma terminologia.

Se S for um conjunto não-vazio de números reais, então dizemos que u é uma *cota superior* para S se u for maior do que ou igual a todo número de S e dizemos que l é uma *cota inferior* para S se l for menor do que ou igual a todo número de S . Por exemplo, se S for o conjunto dos números no intervalo $(1, 3)$, então $u = 4$, 10 e 100 são cotas superiores para S e $l = -10$, 0 e $\frac{1}{2}$ são cotas inferiores para S . Observe também que $u = 3$ é a menor de todas as cotas superiores e $l = 1$ é a maior de todas as inferiores. A existência de uma menor cota superior e de uma maior cota inferior de S não é acidental; é uma consequência do axioma seguinte.

10.2.5 AXIOMA (Axioma da Completude) *Se um conjunto não-vazio S de números reais tiver uma cota superior, então ele terá uma cota superior mínima (chamada de **supremo**) e se um conjunto não-vazio S de números reais tiver uma cota inferior, então ele tem uma cota inferior máxima (chamado de **ínfimo**).*

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 10.2.3

(a) Demonstraremos o resultado para seqüências crescentes e deixamos a cargo do leitor adaptar o argumento para seqüências que são crescentes a partir de um certo termo. Suponha que exista um número M tal que $a_n \leq M$ para $n = 1, 2, \dots$. Então M é uma cota superior para o conjunto de termos da seqüência. Pelo axioma da completude, existe um supremo para os termos; vamos chamá-lo de L . Seja agora ϵ um número positivo. Uma vez que L é o supremo para os termos, $L - \epsilon$ não é uma cota superior para os termos, o que significa que existe pelo menos um termo a_N tal que

$$a_N > L - \epsilon$$

Além disso, como $\{a_n\}$ é uma seqüência crescente, devemos ter

$$a_n \geq a_N > L - \epsilon \tag{6}$$

quando $n \geq N$. Mas, a_n não pode exceder L , uma vez que L é uma cota superior para os termos. Esta observação junto com (6) nos diz que $L \geq a_n > L - \epsilon$ para $n \geq N$, logo todos os termos do N -ésimo em diante estão a menos de ϵ unidades de L . Isso é exatamente a exigência para ter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Finalmente, $L \leq M$, pois M é uma cota superior para os termos enquanto que L é o supremo. Isso demonstra a parte (a).

(b) Se não existir um número M tal que $a_n \leq M$ para $n = 1, 2, \dots$, então não importando quão grande M seja escolhido haverá um termo a_N tal que

$$a_N > M$$

e, uma vez que a seqüência é crescente,

$$a_n \geq a_N > M$$

quando $n \geq N$. Assim, os termos da seqüência tornam-se arbitrariamente grandes à medida que n cresce. Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \blacksquare$$

A demonstração do Teorema 10.2.4 será omitida, uma vez que é similar à do Teorema 10.2.3.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.2 (Ver página 642 para respostas.)

1. Classifique cada seqüência como (C) crescente, (D) decrescente, ou (N) nem crescente nem decrescente.

- | | | | |
|-------|-------------------------------------|-------|---------------------------------|
| _____ | $\{2n\}$ | _____ | $\{2^{-n}\}$ |
| _____ | $\left\{\frac{5-n}{n^2}\right\}$ | _____ | $\left\{\frac{-1}{n^2}\right\}$ |
| _____ | $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ | | |

2. Classifique cada seqüência como (M) monótona, (E) estritamente monótona ou (N) não monótona.

- | | | | |
|-------|-------------------|-------|-------------------|
| _____ | $\{n + (-1)^n\}$ | _____ | $\{2n + (-1)^n\}$ |
| _____ | $\{3n + (-1)^n\}$ | | |

3. Como

$$\frac{n/[2(n+1)]}{(n-1)/(2n)} = \frac{n^2}{n^2-1} > \text{_____}$$

a seqüência $\{(n-1)/(2n)\}$ é estritamente _____.

4. Como

$$\frac{d}{dx}[(x-8)^2] > 0 \text{ para } x > \text{_____}$$

a seqüência $\{(n-8)^2\}$ é _____ crescente _____.

EXERCÍCIOS 10.2

1-6 Use $a_{n+1} - a_n$ para mostrar que a seqüência $\{a_n\}$ dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 2. $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 3. $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ |
| 4. $\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 5. $\{n - 2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ | 6. $\{n - n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ |

7-12 Use a_{n+1}/a_n para mostrar que a seqüência $\{a_n\}$ dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

- | | | |
|---|---|--|
| 7. $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 8. $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 9. $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$ |
| 10. $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 11. $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ | 12. $\left\{\frac{5^n}{2^{(n^2)}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ |

13-18 Use diferenciação para mostrar que a seqüência dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

13. $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 14. $\left\{ 3 - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 15. $\left\{ \frac{1}{n + \ln n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 16. $\{ne^{-2n}\}_{n=1}^{+\infty}$
 17. $\left\{ \frac{\ln(n+2)}{n+2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 18. $\{\text{arc tg } n\}_{n=1}^{+\infty}$

19-24 Mostre que a seqüência dada é, a partir de um certo termo, estritamente crescente ou estritamente decrescente.

19. $\{2n^2 - 7n\}_{n=1}^{+\infty}$ 20. $\{n^3 - 4n^2\}_{n=1}^{+\infty}$
 21. $\left\{ \frac{n}{n^2 + 10} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 22. $\left\{ n + \frac{17}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 23. $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 24. $\{n^5 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

ENFOCANDO CONCEITOS

25. (a) Suponha que $\{a_n\}$ seja uma seqüência monótona tal que $1 \leq a_n \leq 2$ para cada n . A seqüência deve necessariamente convergir? Caso afirmativo, o que pode ser dito sobre o limite?
 (b) Suponha que $\{a_n\}$ seja uma seqüência monótona tal que $a_n \leq 2$ para cada n . A seqüência deve necessariamente convergir? Caso afirmativo, o que pode ser dito sobre o limite?
26. Dê um exemplo de uma seqüência monótona que não é estritamente monótona a partir de um certo termo. O que deve ser verdade sobre uma tal seqüência?
27. A meta deste exercício é provar a Fórmula (5) desta seção. O caso $x = 0$ é óbvio, portanto vamos focalizar no caso $x \neq 0$.
 (a) Seja $a_n = |x|^n / n!$. Mostre que
- $$a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1} a_n$$
- (b) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ é estritamente decrescente a partir de um certo termo.
 (c) Mostre que a seqüência $\{a_n\}$ converge.
 (d) Use os resultados das partes (a) e (c) para mostrar que $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

- (e) Obtenha a Fórmula (5) a partir do resultado da parte (d).
28. Seja $\{a_n\}$ a seqüência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$.
 (a) Dê os três primeiros termos da seqüência.
 (b) Mostre que $a_n < 2$ para $n \geq 1$.
 (c) Mostre que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n)$ para $n \geq 1$.
 (d) Use os resultados nas partes (b) e (c) para mostrar que $\{a_n\}$ é uma seqüência estritamente crescente. [Sugestão: Se x e y forem números reais positivos tais que $x^2 - y^2 > 0$, então segue por fatoração, que $x - y > 0$.]
 (e) Mostre que $\{a_n\}$ converge e encontre o seu limite L .
29. Seja $\{a_n\}$ a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}[a_n + (3/a_n)]$ para $n \geq 1$.
 (a) Mostre que $a_n \geq \sqrt{3}$ para $n \geq 2$. [Sugestão: Qual é o valor mínimo de $\frac{1}{2}[x + (3/x)]$ para $x > 0$?]
 (b) Mostre que $\{a_n\}$ é decrescente a partir de um certo termo [Sugestão: Examine $a_{n+1} - a_n$ ou a_{n+1}/a_n e use o resultado da parte (a).]
 (c) Mostre que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite L .
30. (a) Compare as áreas apropriadas na figura abaixo para deduzir a seguinte desigualdade para $n \geq 2$:

$$\int_1^n \ln x \, dx < \ln n! < \int_1^{n+1} \ln x \, dx$$

(b) use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}, \quad n > 1$$

(c) Use o Teorema do Confronto para Seqüências (Teorema 10.1.5) e o resultado da parte (b) para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

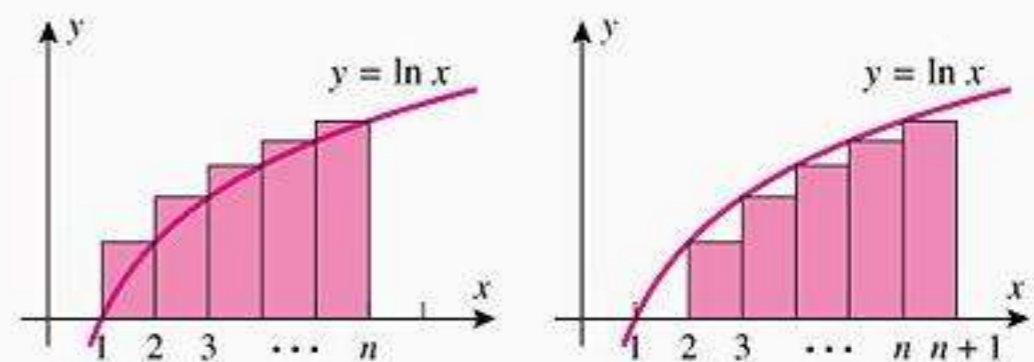


Figura Ex-30

31. Use a desigualdade à esquerda no Exercício 30 (b) para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.2

1. C; D; N; C; N 2. N; M; E 3. 1; crescente 4. 8; estritamente; a partir de um certo ponto.

10.3 SÉRIES INFINITAS

O propósito desta seção é discutir somas com um número infinito de termos. O exemplo mais conhecido de tais somas ocorre na representação decimal de números reais. Por exemplo, quando escrevemos $\frac{1}{3}$ na forma decimal $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, queremos dizer

$$\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

o que sugere que a representação decimal de $\frac{1}{3}$ pode ser encarada como uma soma infinita de números reais.

SOMAS DE SÉRIES INFINITAS

Nosso primeiro objetivo é definir o que entendemos pela “soma” de um número infinito de números reais. Começamos por alguma terminologia.

10.3.1 DEFINIÇÃO Uma *série infinita* é uma expressão que pode ser escrita na forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Os números u_1, u_2, u_3, \dots são chamados *termos* da série.

Como é impossível somar diretamente um número infinito de números, as somas de séries infinitas são definidas e calculadas por um processo indireto de limite. Para motivar a idéia básica, considere a decimal

$$0,3333\dots \tag{1}$$

Isso pode ser visto como a série infinita

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

ou, de forma equivalente

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots \tag{2}$$

Como (1) é a expansão decimal de $\frac{1}{3}$, qualquer definição razoável para a soma de uma série infinita deve fornecer $\frac{1}{3}$ para a soma em (2). Para obter uma tal definição, considere a seguinte seqüência de somas (finitas):

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{10} = 0,3 \\ s_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0,33 \\ s_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0,333 \\ s_4 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = 0,3333 \\ &\vdots \end{aligned}$$

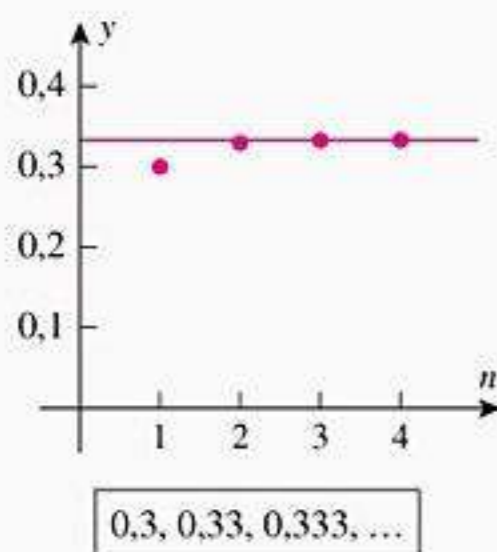


Figura 10.3.1

A seqüência de números $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ (Figura 10.3.1) pode ser vista como uma sucessão de aproximações da “soma” da série infinita, que queremos que seja $\frac{1}{3}$. À medida que avançamos na seqüência, cada vez mais termos da série infinita são usados e a aproximação fica cada vez melhor, sugerindo que a soma desejada de $\frac{1}{3}$ deva ser o *limite* desta seqüência de aproximações.

Para ver que é isso o que ocorre, devemos calcular o limite do termo geral da sequência de aproximações, isto é, de

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} \quad (3)$$

O problema de calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} \right)$$

é complicado pelo fato de que o último termo e o número de termos na soma varia com n . É melhor reescrever tais limites em uma forma fechada na qual o número de termos não varie, se possível. (Ver a discussão sobre formas fechadas e formas abertas que segue o Exemplo 3 na Seção 6.4 do Volume 1). Para isso, multiplicamos ambos os lados de (3) por $\frac{1}{10}$ para obter

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}} \quad (4)$$

e então subtraímos (4) de (3) para obter

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

$$s_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

Como $1/10^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3}$$

o que denotamos escrevendo

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

Motivados pelo exemplo precedente, estamos agora prontos para definir o conceito geral de “soma” de uma série infinita

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Vamos começar por alguma terminologia: seja s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

O número s_n é chamado *enésima soma parcial* da série e a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é chamada *seqüência das somas parciais*.

Quando n cresce, a soma parcial $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ inclui mais e mais termos da série. Assim, se s_n tende a um limite quando $n \rightarrow +\infty$, é razoável que este limite seja a soma de todos os termos da série. Isso sugere a seguinte definição.

ADVERTÊNCIA

Na linguagem do dia a dia, as palavras "seqüência" e "série" são consideradas sinônimas. Contudo, em Matemática, há uma diferença entre esses dois termos: uma seqüência é uma *sucessão* e uma série é uma *soma*. É essencial que você tenha em mente esta distinção.

10.3.2 DEFINIÇÃO Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais da série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Se a seqüência $\{s_n\}$ convergir para um limite S , então dizemos que a série *converge* para S e que S é a *soma* da série. Denotamos isso escrevendo

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Se a seqüência das somas parciais divergir, dizemos que a série *diverge*. Uma série divergente não tem soma.

► **Exemplo 1** Determine se a série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

converge ou diverge. Se convergir, encontre a soma.

Solução É tentador concluir que a soma da série é zero argumentando que os termos positivos e negativos se cancelam uns aos outros. Entretanto, isso *não é correto*; o problema é que as operações algébricas que são válidas para somas finitas não podem ser usadas nas séries infinitas. Posteriormente, discutiremos condições sobre operações algébricas comuns que podem ser aplicadas a séries infinitas, porém para este exemplo usaremos diretamente a Definição 10.3.2. As somas parciais são

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, a seqüência das somas parciais é

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

(Figura 10.3.2). Como essa seqüência é divergente, a série dada diverge e, conseqüentemente, não há soma. ◀

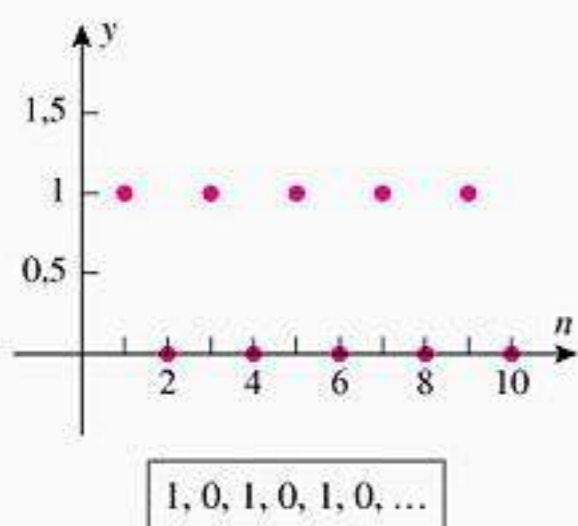


Figura 10.3.2

■ **SÉRIES GEOMÉTRICAS**

Em muitas séries importantes, cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente por alguma constante fixada. Assim, se o termo inicial da série é a e cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente por r , então a série tem a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

Tais séries são chamadas de *séries geométricas* e o número r é chamado de *razão* da série. Aqui estão alguns exemplos:

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots$	$a = 1, r = 2$
$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^k} + \dots$	$a = \frac{3}{10}, r = \frac{1}{10}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k} + \dots$	$a = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2}$
$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$	$a = 1, r = 1$
$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots$	$a = 1, r = -1$
$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$	$a = 1, r = x$

O seguinte teorema é o resultado fundamental na convergência das séries geométricas.

Algumas vezes, será desejável começar o índice do somatório de uma série infinita em $k = 0$, em vez de $k = 1$, caso em que consideraríamos u_0 como o zero-ésimo termo e $s_0 = u_0$ como o zero-ésimo termo da soma parcial. Pode-se provar que mudando o valor inicial do índice do somatório de uma série não tem efeito na convergência, na divergência ou na soma da série infinita. No caso (5), o termo geral teria sido mais complicado se tivéssemos iniciado o índice em $k = 1$. Qual teria sido esse termo geral?

10.3.3 TEOREMA *Uma série geométrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^k + \dots \quad (a \neq 0)$$

converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Se a série convergir, então a soma da série é

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

DEMONSTRAÇÃO Tratemos primeiro do caso $|r| = 1$. Se $r = 1$, então a série é

$$a + a + a + a + \dots$$

portanto a n -ésima soma parcial é $s_n = (n + 1)a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)a = \pm\infty$ (o sinal dependendo de a ser positivo ou negativo). Isso prova a divergência. Se $r = -1$, a série é

$$a - a + a - a + \dots$$

logo, a seqüência das somas parciais é

$$a, 0, a, 0, a, 0, \dots$$

que diverge.

Agora consideremos o caso $|r| \neq 1$. A n -ésima soma parcial da série é

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n \tag{6}$$

Multiplicando ambos os lados de (6) por r , obtemos

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} \tag{7}$$

e subtraindo (7) de (6) obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1}$$

ou

$$(1 - r)s_n = a - ar^{n+1} \tag{8}$$

Uma vez que estamos considerando $r \neq 1$, isso pode ser reescrito como

$$s_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} (1 - r^{n+1}) \tag{9}$$

Se $|r| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$ (por quê?), de modo que $\{s_n\}$ converge. A partir de (9)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

Se $|r| > 1$, então ou $r > 1$ ou $r < -1$. No caso $r > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = +\infty$, e no caso $r < -1$, r^{n+1} oscila entre valores positivos e negativos de magnitude crescente, portanto $\{s_n\}$ diverge em ambos casos. ■

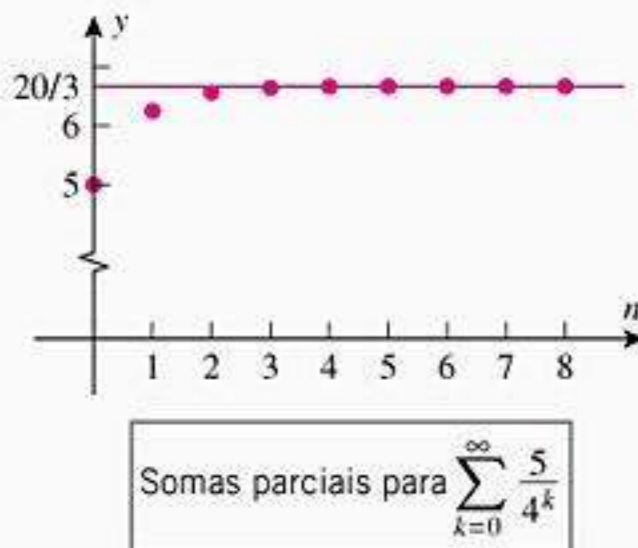


Figura 10.3.3

► **Exemplo 2** A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \cdots + \frac{5}{4^k} + \cdots$$

é uma série geométrica com $a = 5$ e $r = \frac{1}{4}$. Como $|r| = \frac{1}{4} < 1$, a série converge e a soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

(Figura 10.3.3). ◀

► **Exemplo 3** Encontre o número racional representado pela dízima periódica

$$0,784784784\dots$$

Solução Podemos escrever

$$0,784784784\dots = 0,784 + 0,000784 + 0,000000784 + \cdots$$

portanto a dízima dada é a soma de uma série geométrica com $a = 0,784$ e $r = 0,001$. Assim,

$$0,784784784\dots = \frac{a}{1-r} = \frac{0,784}{1-0,001} = \frac{0,784}{0,999} = \frac{784}{999} \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Em cada parte, determine se a série converge e, neste caso, encontre sua soma.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k} \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Solução (a) Essa é uma série geométrica numa forma disfarçada, uma vez que podemos escrevê-la como

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$$

Como $r = \frac{9}{5} > 1$, a série diverge.

Solução (b) A forma expandida da série é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

A série é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$, logo converge se $|x| < 1$ e, caso contrário, diverge. Quando a série converge, sua soma é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os sistemas algébricos de computação têm comandos para obter a soma de séries convergentes. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular as somas nos Exemplos 2 e 3. Também verifique o que acontece quando tentamos calcular a soma no Exemplo 4(a).

■ SÉRIES TELESCÓPICAS

► **Exemplo 5** Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

converge ou diverge. Se convergir, encontre sua soma.

Solução A n ésima soma parcial da série é

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Para calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, reescreveremos s_n numa forma fechada. Isso pode ser alcançado usando o método das frações parciais para obter (verifique)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

a partir do que obtemos a soma

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned} \tag{10}$$

logo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \blacktriangleleft$$

■ SÉRIE HARMÔNICA

Uma das mais importantes de todas as séries divergentes é a *série harmônica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

que surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical. Não é imediatamente evidente que esta série diverge. Entretanto, a divergência se tornará aparente quando examinarmos as somas parciais em detalhe. Como os termos na série são todos positivos, as somas parciais

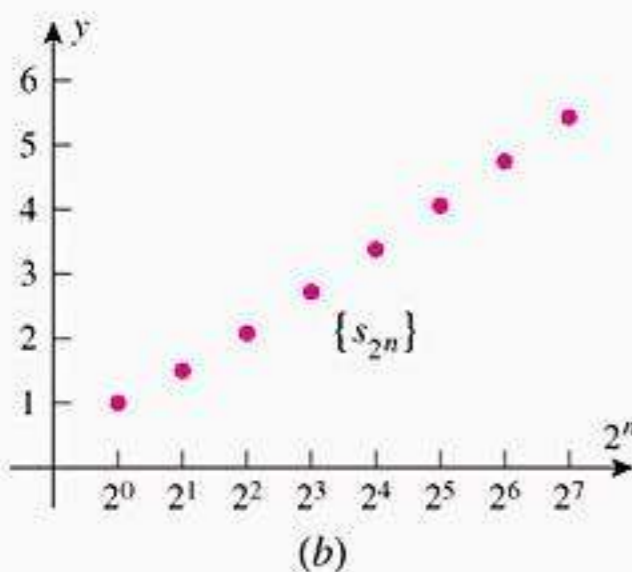
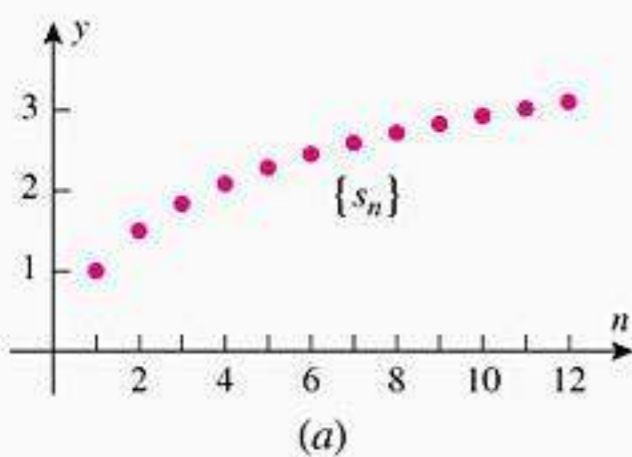
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots$$

formam uma seqüência estritamente crescente

$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_n < \dots$$

(Figura 10.3.4a). Assim, pelo Teorema 10.2.3, podemos provar a divergência demonstrando que não há nenhuma constante M que seja maior do que ou igual a *cada* soma parcial. Para isso, consideraremos algumas somas parciais selecionadas, a saber, $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$. Note

A soma em (10) é um exemplo de uma *soma telescópica*. O nome vem do fato de que na simplificação da soma uma parcela de cada expressão entre parênteses cancela uma parcela na próxima expressão entre parênteses, até que a soma toda colapse como um telescópio retrátil, restando apenas duas parcelas.

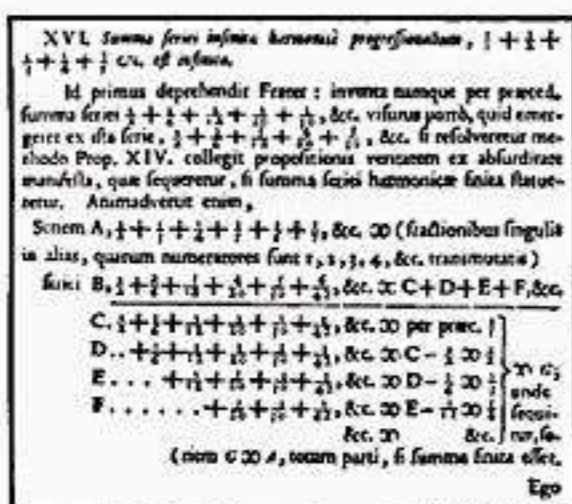


Somas parciais da série harmônica.

Figura 10.3.4

que os índices são potências sucessivas de 2, de modo que essas são as somas parciais da forma s_{2^n} (Figura 10.3.4b). Essas somas parciais satisfazem as desigualdades

$$\begin{aligned}
 s_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \\
 s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = s_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \\
 s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = s_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2} \\
 s_{16} &= s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\
 &> s_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = s_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2} \\
 &\vdots \\
 s_{2^n} &> \frac{n+1}{2}
 \end{aligned}$$



Esta é uma prova da divergência da série harmônica, como aparece num apêndice da publicação póstuma de Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, que apareceu em 1713.

Se M for uma constante qualquer, podemos encontrar um inteiro positivo n tal que $(n+1)/2 > M$. No entanto, para esse n

$$s_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$

de modo que nenhuma constante M é maior do que ou igual a cada soma parcial da série harmônica. Isso prova a divergência.

Essa prova de divergência, que antedata a descoberta do Cálculo, é devida ao bispo e professor francês Nicole Oresme (1323-1382). Essa série acabou atraindo o interesse de Johann e Jakob Bernoulli (ver p. 93 do Volume 1) e levou-os a começar a pensar sobre o conceito geral de convergência, que era uma idéia nova para a época.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.3 (Ver página 652 para respostas.)

1. Em Matemática, os termos “seqüência” e “série” não têm o mesmo significado: uma _____ é uma sucessão, enquanto que uma _____ é uma soma.

2. Considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Se $\{s_n\}$ é a seqüência das somas parciais dessa série, então

$$s_1 = \text{_____}, s_2 = \text{_____}, s_3 = \text{_____},$$

$$s_4 = \text{_____} \text{ e } s_5 = \text{_____}.$$

3. O que significa dizer que uma série $\sum u_k$ converge?

4. Uma série geométrica é uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{_____}$$

Essa série converge para _____ se _____. Essa série diverge se _____.

5. A série harmônica é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{_____}$$

A série harmônica converge ou diverge?

EXERCÍCIOS 10.3 CAS

1-2 Em cada parte, encontre os valores exatos das quatro primeiras somas parciais, encontre a forma fechada para a enésima soma parcial e determine se a série converge calculando o limite da enésima soma parcial. Se a série convergir, obtenha sua soma.

1. (a) $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2}{5^{k-1}} + \dots$

(b) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \dots + \frac{2^{k-1}}{4} + \dots$

(c) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots$

2. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$

3-14 Determine se a série converge e, se convergir, encontre sua soma.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{7}{6^{k-1}}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2}$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$

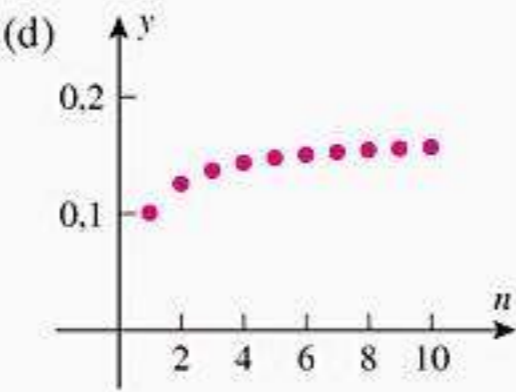
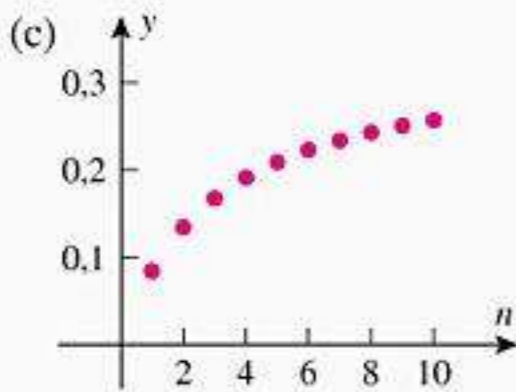
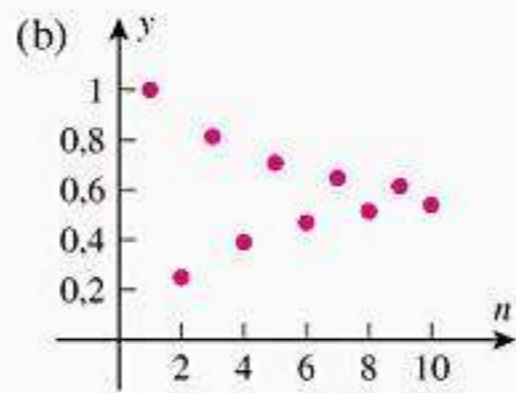
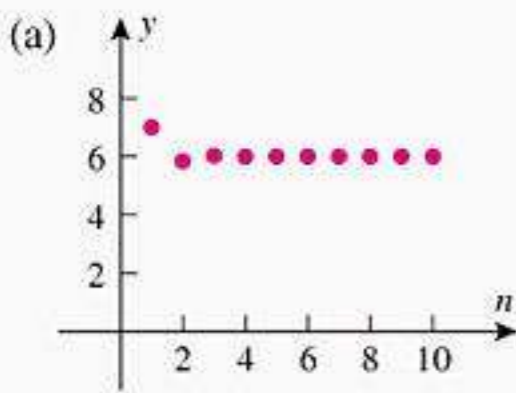
11. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-2}$

12. $\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

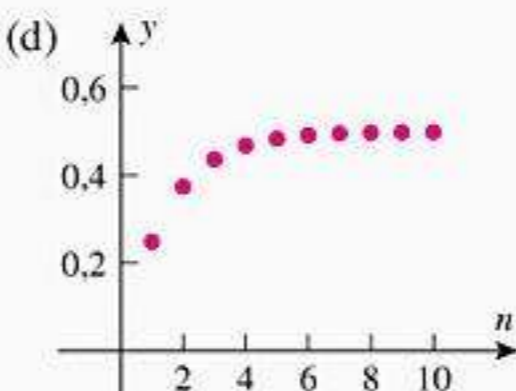
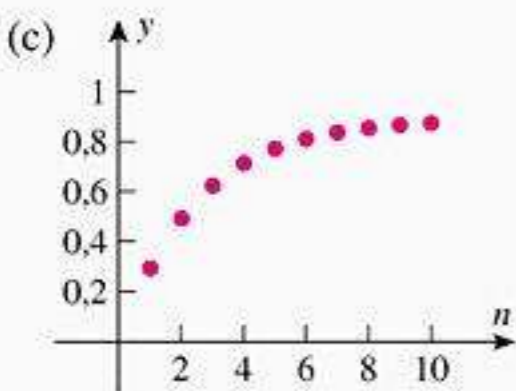
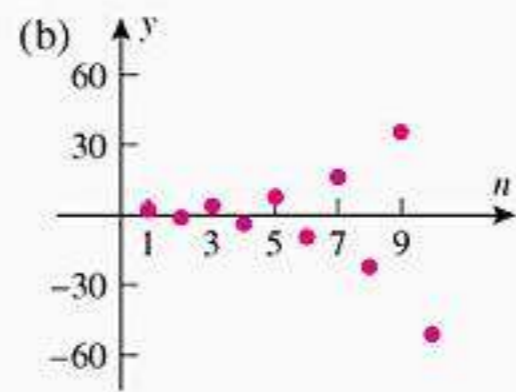
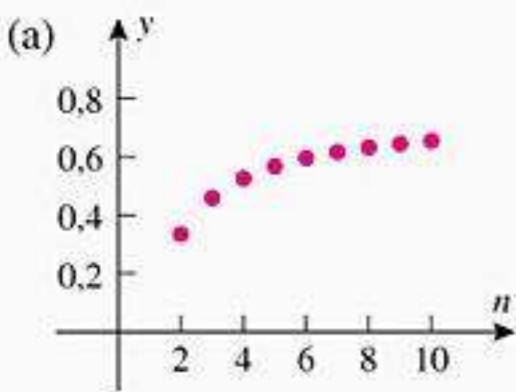
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{3k} 7^{1-k}$

15. Associe uma série de um dos Exercícios 3, 5, 7 ou 9 com o gráfico da seqüência de suas somas parciais.



16. Associe uma série de um dos Exercícios 4, 6, 8 ou 10 com o gráfico da seqüência de suas somas parciais.



17-20 Expresse a dízima periódica como uma fração.

17. 0,4444 ...

18. 0,9999 ...

19. 5,373737 ...

20. 0,451141414 ...

21. Lembre que *decimal exata* é uma decimal cujos dígitos são todos 0 a partir de algum ponto em diante (0,5 = 0,500..., por exemplo). Mostre que uma decimal da forma $0, a_1 a_2 \dots a_n 9999 \dots$, onde $a_n \neq 9$, pode ser expressa como uma decimal exata.

ENFOCANDO CONCEITOS

22. O grande matemático suíço Leonhard Euler (biografia na p. 3 do Volume 1) chegou, algumas vezes, a conclusões erradas em seu pioneiro trabalho sobre séries infinitas. Por exemplo, Euler deduziu que.

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

e

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

substituindo $x = -1$ e $x = 2$ na fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Qual é o problema com esse raciocínio?

23. Uma bola é largada de uma altura de 10 m. Cada vez que bate no chão, ela repica verticalmente até uma altura que é $\frac{3}{4}$ da altura precedente. Encontre a distância total que a bola percorre, supondo que repique indeterminadamente.

24. A figura abaixo mostra uma “escadaria infinita” construída de cubos. Encontre o volume total da escadaria, dado que o maior dos cubos tem um lado de comprimento 1 e que cada cubo sucessivo tem um lado de comprimento igual à metade do lado do cubo precedente.

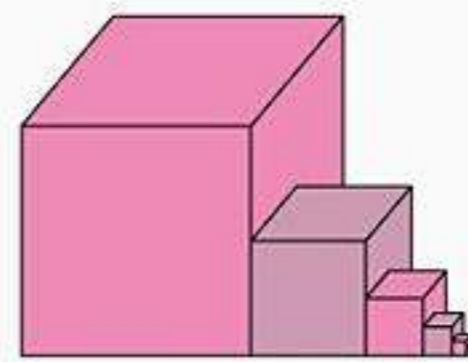


Figura Ex-24

25. Em cada parte, encontre a forma fechada para a n -ésima soma parcial de série e determine se a série converge. Se convergir, encontre sua soma.

(a) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{k}{k+1} + \dots$

(b) $\ln \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{16}\right) + \dots$

$$+ \ln \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \dots$$

26. Use séries geométricas para mostrar que

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ se $-1 < x < 1$

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.3

1. seqüência; série 2. $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; 1 - \frac{1}{2^n}$ 3. A seqüência das somas parciais converge.
 4. ar^k ($a \neq 0$); $\frac{a}{1-r}$; $|r| < 1$; $|r| \geq 1$ 5. $\frac{1}{k}$; diverge

10.4 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Na última seção, mostramos como encontrar a soma de uma série encontrando uma forma fechada para a n -ésima soma parcial e tomando seu limite. Entretanto, é relativamente raro que possamos encontrar uma forma fechada para a n -ésima soma parcial de uma série, de modo que são necessários métodos alternativos para encontrar a soma de uma série. Uma possibilidade é provar que a série converge e, então, aproximar a soma por uma soma parcial com suficientes termos para atingir o grau de precisão desejado. Nesta seção, desenvolveremos vários testes que podem ser usados para determinar se uma dada série converge ou diverge.

■ TESTE DA DIVERGÊNCIA

No enunciado de resultados gerais sobre a convergência e a divergência de séries, é conveniente usar a notação $\sum u_k$ como modelo genérico de uma série, evitando, desse modo, o problema de discutir se a soma começa em $k = 0$ ou em $k = 1$, ou ainda em algum outro valor. Na verdade, veremos logo que o valor do índice inicial é irrelevante para a questão da convergência. O k -ésimo termo de uma série infinita $\sum u_k$ é chamado **termo geral** da série. O teorema seguinte estabelece uma relação entre o limite do termo geral e as propriedades de convergência de uma série.

10.4.1 TEOREMA (Teste da Divergência)

- (a) Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$, então a série $\sum u_k$ diverge.
 (b) Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, então a série $\sum u_k$ pode convergir ou divergir.

DEMONSTRAÇÃO (a) Para demonstrar esse resultado, é suficiente mostrar que se a série convergir, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ (por quê?). Vamos demonstrar a parte (a) dessa maneira alternativa.

Suponhamos que a série convirja. O termo geral u_k pode ser escrito como

$$u_k = s_k - s_{k-1} \quad (1)$$

onde s_k é a soma dos termos até u_k e s_{k-1} é a soma dos termos até u_{k-1} . Se S denotar a soma da série, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = S$ e, uma vez que $(k-1) \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$, temos também $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k-1} = S$. Assim, a partir de (1)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (s_k - s_{k-1}) = S - S = 0$$

DEMONSTRAÇÃO (b) Para demonstrar esse resultado, é suficiente produzir tanto uma série convergente quanto uma divergente para as quais $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. Ambas as seguintes séries têm essa propriedade:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

A primeira é uma série geométrica convergente e a segunda é a série harmônica divergente. ■

ADVERTÊNCIA

A recíproca do Teorema 10.4.2 é falsa. Mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$$

não prova que $\sum u_k$ convirja, pois essa propriedade pode valer tanto para séries divergentes quanto para convergentes. Isso está exemplificado na prova da parte (b) do Teorema 10.4.1.

A forma alternativa da parte (a) dada na prova precedente é suficientemente importante para ser destacada para referência futura.

10.4.2 TEOREMA Se a série $\sum u_k$ converge, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

► **Exemplo 1** A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{k}{k+1} + \dots$$

diverge, visto que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+1/k} = 1 \neq 0 \blacktriangleleft$$

■ **PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS SÉRIES INFINITAS**

Para não estender demais o texto, omitimos a prova do resultado a seguir.

10.4.3 TEOREMA

(a) Se $\sum u_k$ e $\sum v_k$ são séries convergentes, então $\sum(u_k + v_k)$ e $\sum(u_k - v_k)$ são séries convergentes e as somas dessas séries estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k \end{aligned}$$

(b) Se a é uma constante não-nula, então as séries $\sum u_k$ e $\sum au_k$ ambas convergem ou ambas divergem. No caso de convergência, as somas estão relacionadas por

$$\sum_{k=1}^{\infty} au_k = a \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

(c) A convergência ou a divergência não é afetada pela retirada de um número finito de termos de uma série; em particular, para qualquer número inteiro positivo K , as séries

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ \sum_{k=K}^{\infty} u_k &= u_K + u_{K+1} + u_{K+2} + \dots \end{aligned}$$

ambas convergem ou ambas divergem.

ADVERTÊNCIA

Entenda bem o item (c) do Teorema 10.4.3. Embora a convergência não seja afetada quando um número finito de termos é deletado no começo de uma série convergente, a soma da série é alterada pela remoção desses termos.

► **Exemplo 2** Obtenha a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$$

Solução A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

é uma série geométrica convergente ($a = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{4}$) e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$$

também é uma série geométrica convergente ($a = 2$, $r = \frac{1}{5}$). Assim, pelos Teoremas 10.4.3(a) e 10.3.3, a série dada converge e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{3}{2} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 3** Determine se as seguintes séries convergem ou divergem.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{5}{k} + \dots \quad (b) \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots$$

Solução A primeira série é uma constante vezes a série harmônica divergente e portanto diverge pela parte (b) do Teorema 10.4.3. A segunda série é o resultado de omitir os primeiros termos da série harmônica divergente e portanto diverge pela parte (c) do Teorema 10.4.3. ◀

■ TESTE DA INTEGRAL

A relação entre as expressões

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

é que o integrando da integral imprópria resulta quando o índice k do termo geral da série é substituído por x , e os limites do somatório da série são substituídos pelos limites de integração correspondentes. O seguinte teorema mostra que há uma relação entre a convergência da série e a integral.

10.4.4 TEOREMA (Teste da Integral) Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos. Se f é uma função que é decrescente e contínua no intervalo $[a, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ para cada $k \geq a$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

ambas convergem ou ambas divergem.

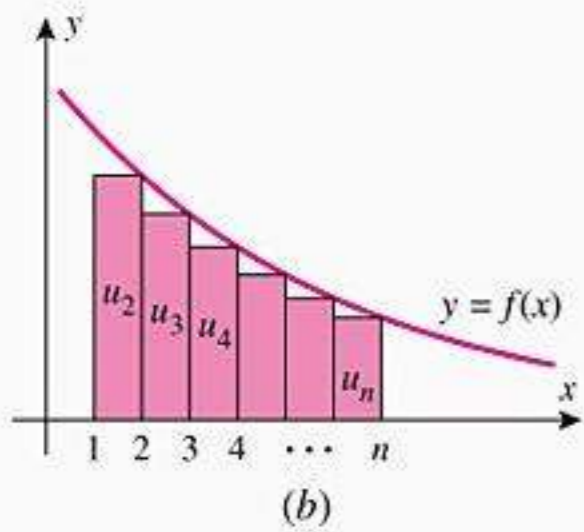
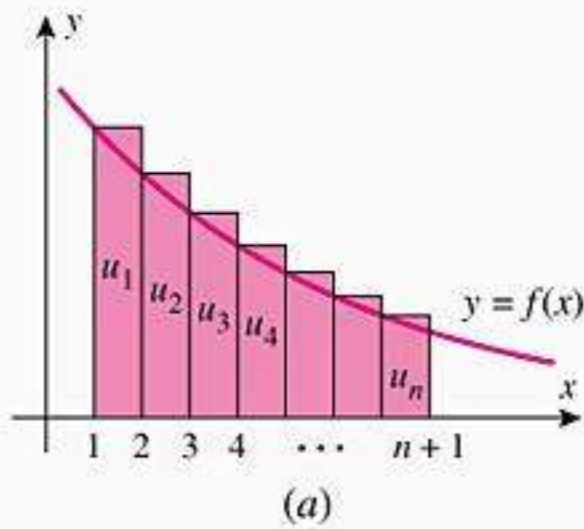


Figura 10.4.1

A prova do teste da integral é adiada para o final desta seção. Contudo, o argumento central da prova é capturado na Figura 10.4.1: se a integral divergir, então a série também diverge (Figura 10.4.1a) e se a integral convergir, então a série também converge (Figura 10.4.1b).

► **Exemplo 4** Use o teste da integral para determinar se as seguintes séries convergem ou divergem.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Solução (a) Já sabemos que esta é a série harmônica divergente, assim o teste da integral providenciará somente uma outra maneira simples de estabelecer a divergência. Se substituirmos k por x no termo geral $1/k$, obtemos a função $f(x) = 1/x$, que é decrescente e contínua para $x \geq 1$ (como exigido para aplicar o teste da integral com $a = 1$). Como

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1] = +\infty$$

a integral diverge e, conseqüentemente, a série também.

Solução (b) Se substituirmos k por x no termo geral $1/k^2$, obtemos a função $f(x) = 1/x^2$, que é decrescente e contínua para $x \geq 1$. Como

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] = 1$$

a integral converge e, conseqüentemente, a série converge pelo teste da integral com $a = 1$. ◀

ADVERTÊNCIA

Na parte (b) do Exemplo 4, não concluíamos erroneamente que a soma da série é 1, porque o valor da integral correspondente é 1. Podemos ver que isso não ocorre pois a soma só dos dois primeiros termos já excede 1. Adiante veremos que a soma da série é exatamente $\pi^2/6$.

■ **SÉRIES p**

As séries no Exemplo 4 são casos especiais de uma classe de séries chamadas *séries p* ou *séries hiper-harmônicas*. Uma série p é uma série infinita da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

onde $p > 0$. Exemplos de séries p são

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \quad \boxed{p = 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots \quad \boxed{p = 2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots \quad \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

O seguinte teorema nos mostra quando uma série p converge.

10.4.5 TEOREMA (Convergência de séries p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

DEMONSTRAÇÃO Para estabelecer este resultado quando $p \neq 1$, usaremos o teste da integral.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$$

Se $p > 1$, então $1 - p < 0$, portanto $b^{1-p} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow +\infty$. Assim, a integral converge [o valor é $-1/(1-p)$] e, conseqüentemente, a série também converge. Para $0 < p < 1$, tem-se que $1 - p > 0$, portanto $b^{1-p} \rightarrow +\infty$ quando $b \rightarrow +\infty$, logo a integral e a série divergem. O caso $p = 1$ é a série harmônica, que já mostramos que é divergente. ■

► **Exemplo 5**

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \dots$$

diverge uma vez que é uma série p com $p = \frac{1}{3} < 1$. ◀

■ **PROVA DO TESTE DA INTEGRAL**

Antes de podermos provar o teste da integral, necessitamos de um resultado básico sobre a convergência de séries com termos não-negativos. Se $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$ é uma tal série, então sua seqüência de somas parciais é crescente, isto é,

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$$

Assim, pelo Teorema 10.2.3, a seqüência das somas parciais converge para um limite S se e somente se tiver alguma cota superior M , caso em que $S \leq M$. Se não houver cota superior, então a seqüência das somas parciais diverge. Como a convergência da seqüência das somas parciais corresponde à convergência da série, temos o teorema seguinte.

10.4.6 TEOREMA Se $\sum u_k$ é uma série com termos não-negativos, e se existir uma constante M tal que

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq M$$

para todo n , então a série converge e a soma S satisfaz $S \leq M$. Se não existir nenhum tal M , então a série diverge.

Em palavras, esse teorema implica que *uma série com termos não-negativos converge se e somente se a seqüência de suas somas parciais for limitada superiormente*.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 10.4.4 Precisaremos apenas mostrar que a série converge quando a integral converge e que a série diverge quando a integral diverge. Por simplicidade, limitaremos a prova ao caso $a = 1$. Suponha que $f(x)$ satisfaça as hipóteses do teorema para $x \geq 1$. Como

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$$

os valores de $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ podem ser interpretados como as áreas dos retângulos mostrados na Figura 10.4.2.

As seguintes desigualdades resultam da comparação das áreas sob a curva $y = f(x)$ com as áreas dos retângulos na Figura 10.4.2 para $n > 1$:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < u_1 + u_2 + \dots + u_n = s_n \quad \text{Figura 10.4.2a}$$

$$s_n - u_1 = u_2 + u_3 + \dots + u_n < \int_1^n f(x) dx \quad \text{Figura 10.4.2b}$$

Essas desigualdades podem ser combinadas como

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < s_n < u_1 + \int_1^n f(x) dx \quad (2)$$

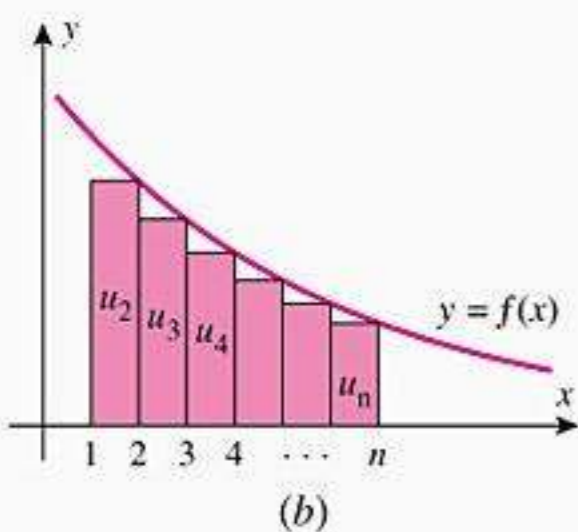
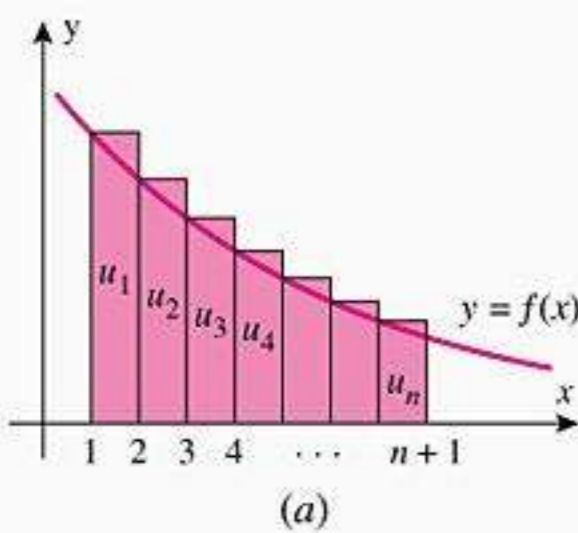


Figura 10.4.2

Se a integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergir para um valor finito L , então a partir da desigualdade do lado direito em (2), obtemos

$$s_n < u_1 + \int_1^n f(x) dx < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx = u_1 + L$$

Assim, cada soma parcial é menor do que a constante finita $u_1 + L$, e a série converge pelo Teorema 10.4.6. Por outro lado, se a integral $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ divergir, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = +\infty$$

e portanto, pelo lado esquerdo da desigualdade em (2), decorre $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. Isso implica que a série também diverge. ■

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.4 (Ver página 659 para respostas.)

1. O teste da divergência afirma que se $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k \neq 0$, então a série $\sum u_k$ diverge.

2. Sabendo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{5}$$

segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6^{k-1}} = \text{_____}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{6^k} \right) = \text{_____}$$

3. Como $\int_1^{+\infty} (1/\sqrt{x}) dx = +\infty$, o teste _____ aplicado à série $\sum_{k=1}^{\infty}$ _____ mostra que essa série _____.

4. Uma série p é uma série da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{_____}$$

Essa série converge se _____. Essa série diverge se _____.

EXERCÍCIOS 10.4  

1. Use o Teorema 10.4.3 para encontrar a soma da série.

(a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \dots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$

2. Use o Teorema 10.4.3 para encontrar a soma da série.

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2-1} - \frac{7}{10^{k-1}}\right]$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[7^{-k} 3^{k+1} - \frac{2^{k+1}}{5^k}\right]$

3-4 Para cada série p dada, identifique p e determine se a série converge.

3. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$

4. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\pi}$

5-6 Aplique o teste da divergência e escreva a conclusão obtida sobre a série.

5. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k + 3}{2k^2 + 1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

6. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 3}$

7-8 Confirme ser aplicável o teste da integral e use-o para determinar se a série converge.

7. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k+2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+9k^2}$

8. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2k)^{3/2}}$

9-24 Determine se a série converge.

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+6}$ 10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{5k}$ 11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+5}}$
 12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{e}}$ 13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}}$ 14. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$
 15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(k+1)}$ 16. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$ 17. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}$
 18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+3}$ 19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$ 20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$
 21. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$ 22. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$
 23. $\sum_{k=5}^{\infty} 7k^{-1.01}$ 24. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 k$

25-26 Use o teste da integral para investigar a relação entre o valor de p e a convergência da série.

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ 26. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^p}$

ENFOCANDO CONCEITOS

27. Suponha que a série $\sum u_k$ convirja e a série $\sum v_k$ divirja. Mostre que as séries $\sum(u_k + v_k)$ e $\sum(u_k - v_k)$ ambas divergem. [Sugestão: suponha que $\sum(u_k + v_k)$ convirja e use o Teorema 10.4.3 para obter uma contradição.]
 28. Obtenha exemplos para mostrar que se as séries $\sum u_k$ e $\sum v_k$ ambas divergem, então as séries $\sum(u_k + v_k)$ e $\sum(u_k - v_k)$ podem convergir ou divergir.

29-30 Use os resultados dos Exercícios 27 e 28, se necessário, para determinar se as séries convergem ou divergem.

29. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{k} \right]$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{k^{3/2}} \right]$
 30. (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k(\ln k)^2} - \frac{1}{k^2} \right]$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left[ke^{-k^2} + \frac{1}{k \ln k} \right]$

31. Use um CAS para confirmar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

e, então, use esses resultados em cada parte para encontrar a soma das séries.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2-1}{k^4}$ (b) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^4}$

32-37 O Exercício 32 irá mostrar como uma soma parcial pode ser usada para obter cotas superiores e inferiores da soma da série, quando as hipóteses do teste da integral estão satisfeitas. Este resultado será necessário nos Exercícios 33-37.

32. (a) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série convergente de termos positivos e seja $f(x)$ uma função que é decrescente e contínua em $[n, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ para $k \geq n$. Use um argumento envolvendo área e a figura abaixo para mostrar que

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k < \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

- (b) Mostre que se S for a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e s_n for a n ésima soma parcial, então

$$s_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < S < s_n + \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

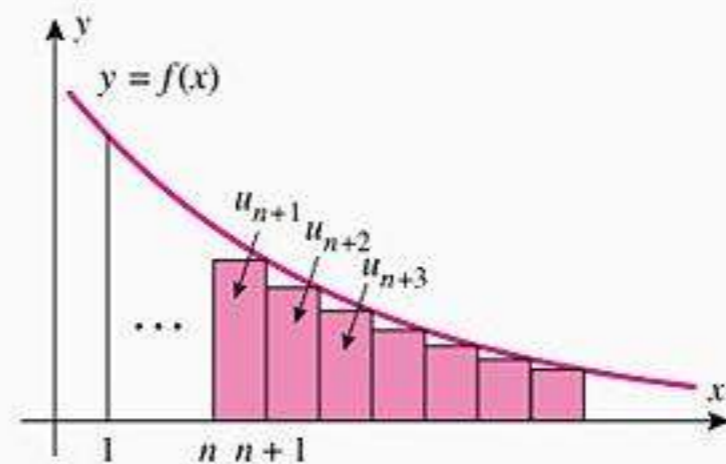
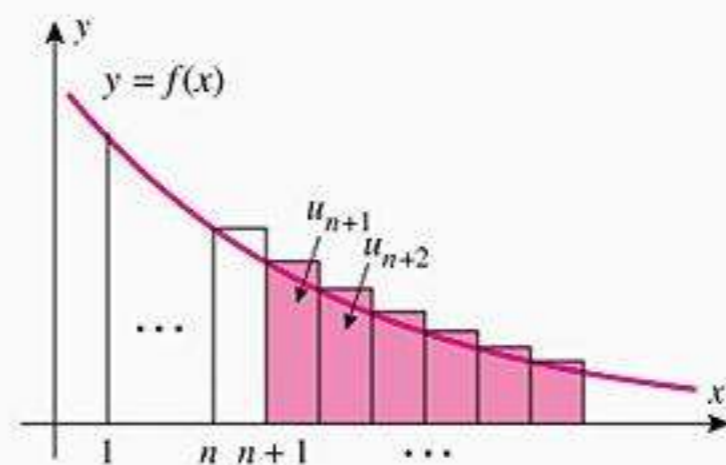


Figura Ex-32

33. (a) Afirmou-se no Exercício 31 que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Mostre que se s_n for a n ésima soma parcial dessa série, então

$$s_n + \frac{1}{n+1} < \frac{\pi^2}{6} < s_n + \frac{1}{n}$$

- (b) Calcule exatamente s_3 e então use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\frac{29}{18} < \frac{\pi^2}{6} < \frac{61}{36}$$

- (c) Use um recurso computacional para confirmar que as desigualdades da parte (b) estão corretas.
 (d) Obtenha cotas superiores e inferiores para o erro que resulta se a soma da série for aproximada pela décima soma parcial.

34. Em cada parte, obtenha cotas superiores e inferiores do erro que resulta se a soma da série for aproximada pela décima soma parcial.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

35. Nosso objetivo neste problema é aproximar a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$ com duas casas decimais de precisão.

(a) Mostre que se S for a soma da série e s_n for a n ésima soma parcial, então

$$s_n + \frac{1}{2(n+1)^2} < S < s_n + \frac{1}{2n^2}$$

(b) Para duas casas decimais de precisão, o erro deve ser menor do que 0,005 (ver Tabela 2.5.1 da pág 150 do Volume 1). Podemos obter isto encontrando um intervalo de comprimento 0,01 (ou menor) que contenha S e aproximar S pelo ponto médio daquele intervalo. Encontre o menor valor de n tal que o intervalo contendo S da parte (a) tenha um comprimento de 0,01 ou menos.

(c) Aproxime S com duas casas decimais de precisão.

36. (a) Use o método do Exercício 35 para aproximar a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4$ com duas casas decimais de precisão.

(b) Foi afirmado no Exercício 31 que a soma desta série é $\pi^4/90$. Use um recurso computacional para confirmar que a resposta dada da parte (a) tem precisão de duas casas decimais.

37. Mostramos na Seção 10.3 que a série harmônica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge. Nosso objetivo neste problema é demonstrar que,

embora a soma parcial desta série tenda $+\infty$, ela o faz muito lentamente.

(a) Use a desigualdade (2) para mostrar que para $n \geq 2$

$$\ln(n+1) < s_n < 1 + \ln n$$

(b) Use a desigualdade da parte (a) para encontrar cotas superiores e inferiores para a soma do primeiro milhão de termos da série.

(c) Mostre que a soma do primeiro bilhão de termos da série é menor do que 22.

(d) Obtenha um valor de n tal que a soma dos n primeiros termos seja maior do que 100.

38. Investigue a relação entre o valor de a e a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln a}$.

39. Use um recurso gráfico computacional para confirmar que o teste da integral é aplicável à série $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$ e, então, determine se a série converge.

40. (a) Mostre que as hipóteses do teste da integral estão satisfeitas pela série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^3 + 1)$.

(b) Use um CAS e o teste da integral para confirmar que a série converge.

(c) Construa uma tabela de somas parciais para $n = 10, 20, 30, \dots, 100$, mostrando pelo menos seis casas decimais.

(d) Baseado em sua tabela, faça uma conjectura sobre a soma da série com uma precisão de três casas decimais.

(e) Use a parte (b) do Exercício 32 para verificar a sua conjectura.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.4

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ 2. $\frac{42}{5}; \frac{3}{10}$ 3. da integral; $\frac{1}{\sqrt{k}}$; diverge 4. $\frac{1}{k^p}; p > 1; 0 < p \leq 1$

10.5 TESTES DE COMPARAÇÃO, DA RAZÃO E DA RAIZ

Nesta seção, desenvolveremos mais alguns testes básicos de convergência para séries com termos não-negativos. Posteriormente, vamos usar alguns destes testes para estudar a convergência de séries de Taylor.

TESTE DA COMPARAÇÃO

Vamos começar com um teste que é útil por si mesmo e também serve na construção de outros testes de convergência importantes. A idéia subjacente a este teste é usar o conhecimento da convergência ou da divergência de uma série para deduzir a convergência ou a divergência de uma outra série.

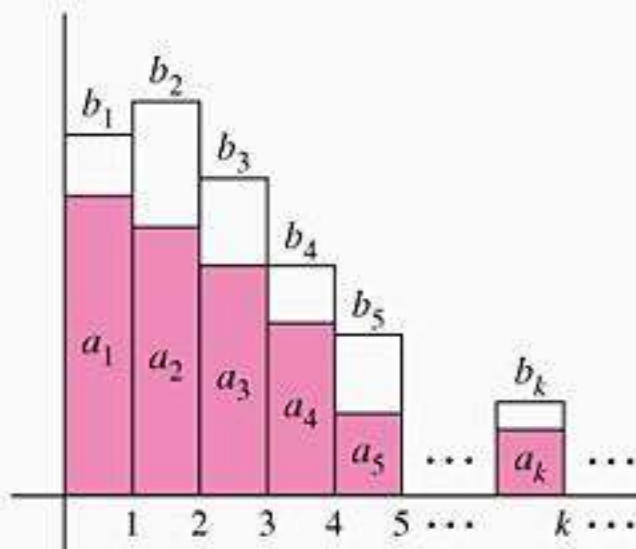
Não é essencial no Teorema 10.5.1 que a condição $a_k \leq b_k$ seja válida para todo k , conforme enunciado; a conclusão do teorema permanece verdadeira mesmo que a condição somente seja válida a partir de um certo termo.

10.5.1 TEOREMA (Teste da Comparação) Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não-negativos e suponha que

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, \dots, a_k \leq b_k, \dots$$

(a) Se a “série maior” $\sum b_k$ convergir, então a “série menor” $\sum a_k$ também convergirá.

(b) Se a “série menor” $\sum a_k$ divergir, então a “série maior” $\sum b_k$ também divergirá.



Para cada retângulo, b_k é toda a área e a_k é a área da parte azul.

Figura 10.5.1

Vamos deixar a prova desse teorema para os exercícios; porém, é fácil visualizar por que o teorema é verdadeiro interpretando-se os termos das séries como áreas de retângulos (Figura 10.5.1). O teste da comparação afirma que se a área total $\sum b_k$ for finita, então a área total $\sum a_k$ também deverá ser finita; e se a área total $\sum a_k$ for infinita, então a área total $\sum b_k$ também deverá ser infinita.

■ USANDO O TESTE DA COMPARAÇÃO

Há dois passos necessários para usar o teste da comparação na determinação da convergência de uma série $\sum u_k$ com termos positivos:

- Faça uma conjectura sobre a convergência ou divergência da série $\sum u_k$.
- Encontre uma série que prove estar correta a conjectura. Se a conjectura foi divergência, precisamos encontrar uma série divergente cujos termos sejam “menores” do que os termos correspondentes de $\sum u_k$ e se a conjectura foi convergência, precisamos encontrar uma série convergente cujos termos sejam “maiores” do que os termos correspondentes de $\sum u_k$.

Na maioria dos casos, a série $\sum u_k$ em consideração terá seu termo geral u_k dado em forma de uma fração. Para ajudar no processo de conjecturar no primeiro passo, formulamos dois princípios baseados na forma do denominador de u_k . Esses princípios, às vezes, *sugerem* se uma série é, provavelmente, convergente ou divergente. Vamos chamá-los de “princípios informais”, pois eles não pretendem ser teoremas formais. De fato, não iremos garantir que eles funcionem *sempre*. No entanto, funcionam o suficiente para serem úteis.

10.5.2 PRINCÍPIO INFORMAL *Termos constantes no denominador de u_k podem geralmente ser eliminados sem afetar a convergência ou a divergência da série.*

10.5.3 PRINCÍPIO INFORMAL *Se um polinômio em k aparecer como um fator no numerador ou denominador de u_k , todos os termos do polinômio exceto o termo dominante, podem geralmente ser descartados, sem afetar a convergência ou a divergência da série.*

► **Exemplo 1** Use o teste da comparação para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$

Solução (a) De acordo com o Princípio 10.5.2, deve ser possível eliminar a constante no denominador sem afetar a convergência ou a divergência. Assim, a série dada, provavelmente, comporta-se como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{1}$$

que é uma série p ($p = \frac{1}{2}$) divergente. Desse modo, vamos conjecturar que a série dada diverge e tentar provar isso encontrando uma série divergente que seja “menor” do que a série dada. Entretanto, a própria série (1) dá conta do recado, pois

$$\frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

Assim, provamos que a série dada diverge.

Solução (b) De acordo com o Princípio 10.5.3, deve ser possível eliminar todos os termos do polinômio, exceto o dominante, sem afetar a convergência ou a divergência. Assim, a série dada, provavelmente, comporta-se como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (2)$$

que converge, uma vez que é uma constante vezes uma série p convergente ($p = 2$). Desse modo, vamos conjecturar que a série dada converge e tentar provar isso encontrando uma série convergente que seja “maior” do que a série dada. Entretanto, a própria série (2) dá conta do recado, pois

$$\frac{1}{2k^2 + k} < \frac{1}{2k^2} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Assim, provamos que a série dada converge. ◀

■ TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

No último exemplo, os Princípios 10.5.2 e 10.5.3 forneceram a conjectura sobre a convergência e a divergência, bem como as séries necessárias à aplicação do teste da comparação. Infelizmente, encontrar a série exigida para comparação não é sempre tão direto, de modo que vamos considerar uma alternativa ao teste da comparação que é usualmente mais fácil de ser aplicada. A prova está dada no Apêndice C.

10.5.4 TEOREMA (Teste da Comparação no Limite) Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e suponha que

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Se ρ for finito e $\rho > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Os casos em que $\rho = 0$ ou $\rho = +\infty$ estão discutidos nos exercícios (Exercício 54).

► **Exemplo 2** Use o teste da comparação no limite para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + 1} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}$$

Solução (a) Como no Exemplo 1, o Princípio 10.5.2 sugere que a série, provavelmente, se comporte como a série p divergente (1). Para provar que a série dada diverge, vamos aplicar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + 1} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Obtemos

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1$$

Como ρ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 10.5.4 que a série dada diverge.

Solução (b) Como no Exemplo 1, o Princípio 10.5.3 sugere que a série, provavelmente, se comporte como a série convergente (2). Para provar que a série dada converge, vamos aplicar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{2k^2 + k} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{2k^2}$$

Obtemos

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k^2}{2k^2 + k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{k}} = 1$$

Como ρ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 10.5.4 que a série dada converge, o que está de acordo com a conclusão obtida no Exemplo 1 usando o teste da comparação.

Solução (c) A partir do Princípio 10.5.3, é provável que a série se comporte como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4} \quad (3)$$

que converge, tendo em vista que é uma constante vezes uma série p convergente. Assim, é provável que a série dada convirja. Para provar isso, vamos aplicar o teste da comparação no limite à série (3) e à série dada. Obtemos

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}}{\frac{3}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k^7 - 2k^6 + 4k^4}{3k^7 - 3k^3 + 6} = 1$$

Como ρ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 10.5.4 que a série dada converge, pois (3) converge. ◀

■ TESTE DA RAZÃO

Os testes da comparação e da comparação no limite dependem de fazer, primeiro, uma conjectura sobre a convergência e, depois, de encontrar uma série apropriada para a comparação; ambas podem ser tarefas difíceis, caso os Princípios 10.5.2 e 10.5.3 não possam ser aplicados. Em tais casos, o próximo teste pode frequentemente ser usado, uma vez que funciona exclusivamente com os termos da série dada – ele não requer uma conjectura inicial sobre convergência nem a descoberta de uma série de comparação. A sua prova está dada no Apêndice C.

10.5.5 TEOREMA (Teste da Razão) Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

- (a) Se $\rho < 1$, a série converge.
 (b) Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série diverge.
 (c) Se $\rho = 1$, a série pode convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.

► **Exemplo 3** Use o teste da razão para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \quad (d) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k} \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Solução (a) A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

Solução (b) A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

Solução (c) A série diverge, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1$$

Ver Fórmula (7) na Seção 2.3 do Volume I

Solução (d) A série diverge, pois

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[2(k+1)]!}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{(2k)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k+2)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow +\infty} (2k+2)(2k+1) = +\infty \end{aligned}$$

Solução (e) O teste da razão não ajuda, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(k+1)-1} \cdot \frac{2k-1}{1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = 1$$

No entanto, o teste da integral prova que a série diverge, pois

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{2} \ln(2x-1) \right|_1^b = +\infty$$

Ambos os testes de comparação e de comparação no limite também teriam funcionado aqui (verifique). ◀

■ TESTE DA RAIZ

Nos casos em que for difícil ou inconveniente encontrar o limite requerido pelo teste da razão, o próximo teste é, às vezes, útil. Como a sua prova é análoga àquela do teste da razão, iremos omiti-la.

10.5.6 TEOREMA (Teste da Raiz) Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k}$$

- (a) Se $\rho < 1$, a série converge.
- (b) Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série diverge.
- (c) Se $\rho = 1$, a série pode convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.

► **Exemplo 4** Use o teste da raiz para determinar se as séries convergem ou divergem.

$$(a) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k-5}{2k+1}\right)^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k}$$

Solução (a) A série diverge, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k-5}{2k+1} = 2 > 1$$

Solução (b) A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0 < 1 \blacktriangleleft$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.5** (Ver página 655 para respostas.)

1-4 Na primeira lacuna, escolha entre *converge* ou *diverge*.

1. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 1}{2k^{8/3} - 1}$$

_____ por comparação com a série p dada por $\sum_{k=1}^{\infty}$ _____

2. Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^3/3^{k+1}}{k^3/3^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} k^3/3^k$ _____ pelo teste _____.

3. Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)!/3^{k+1}}{k!/3^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{3} = +\infty$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} k!/3^k$ _____ pelo teste _____.

4. Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^{k/2}}\right)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^{1/2}} = 0$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{k/2}$ _____ pelo teste _____.

EXERCÍCIOS 10.5 [C] CAS

1-2 Faça uma conjectura sobre a convergência ou a divergência da série e confirme-a usando o teste da comparação.

1. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2 - k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - \frac{1}{4}}$

2. (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$

3. Em cada parte, use o teste da comparação para mostrar que a série converge.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 5}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 k}{k!}$

4. Em cada parte, use o teste da comparação para mostrar que a série diverge.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{3/2} - \frac{1}{2}}$

5-10 Use o teste da comparação no limite para determinar se a série converge.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 2k + 6}{8k^7 + k - 8}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k + 6}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k + 1}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2 - 3k}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$

11-16 Use o teste da razão para determinar se a série converge. Se o teste for inconclusivo, diga isso.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$

17-20 Use o teste da raiz para determinar se a série converge. Se o teste for inconclusivo, diga isso.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{100}\right)^k$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-k})^k$

21-44 Use qualquer método para determinar se a série converge.

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!10^k}{3^k}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{50}e^{-k}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2+3^k k}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{5^k}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+|\cos k|}{k^3}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

37. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)!}{4!k!4^k}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+2^{-k}}$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} \ln k}{k^3+1}$

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{arc tg } k}{k^2}$

42. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k+k}{k!+3}$

43. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+2)!}$

45-46 Encontre o termo geral da série e use o teste da razão para mostrar que a série converge.

45. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$

46. $1 + \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \dots$

47-48 Use um CAS para investigar a convergência da série.

C 47. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{3^k}$

C 48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\pi(k+1)]^k}{k^{k+1}}$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 49. (a) Faça uma conjectura sobre a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}(\pi/k)$ considerando a aproximação linear local de $\text{sen } x$ em $x=0$.
 (b) Tente confirmar sua conjectura usando o teste da comparação dos limites.
- 50. (a) Veremos adiante que o polinômio $1 - x^2/2$ é a “aproximação quadrática local” de $\cos x$ em $x=0$. Faça uma conjectura sobre a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

- considerando essa aproximação.
- (b) Tente confirmar a sua conjectura usando o teste da comparação no limite.

- 51. Mostre que $\ln x < \sqrt{x}$ se $x > 0$, e use este resultado para investigar a convergência de
 - (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$
 - (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2}$
- 52. Com quais valores positivos de α a série $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^k/k^\alpha)$ converge?
- 53. Use o Teorema 10.4.6 para provar o teste da comparação (Teorema 10.5.1).
- 54. Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos. Prove:
 - (a) Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k/b_k) = 0$ e $\sum b_k$ converge, então $\sum a_k$ converge.
 - (b) Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k/b_k) = +\infty$ e $\sum b_k$ diverge, então $\sum a_k$ diverge.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.5

1. diverge; $1/k^{2/3}$ 2. converge; da razão 3. diverge; da razão 4. converge; da raiz

10.6 SÉRIES ALTERNADAS; CONVERGÊNCIA CONDICIONAL

Até agora focalizamos exclusivamente séries de termos não-negativos. Nesta seção, discutiremos séries que contêm termos tanto positivos quanto negativos.

■ SÉRIES ALTERNADAS

As séries cujos termos se alternam entre positivo e negativo são chamadas de *séries alternadas* e são de importância especial. Alguns exemplos são

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Em geral, uma série alternada tem uma das seguintes formas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots \tag{2}$$

onde todos os a_k são positivos, em ambos casos.

O teorema a seguir é um resultado-chave sobre a convergência de séries alternadas.

10.6.1 TEOREMA (Teste da Série Alternada) Uma série alternada da forma (1) ou da forma (2) converge se as duas condições a seguir estiverem satisfeitas:

- (a) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq \dots$
- (b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

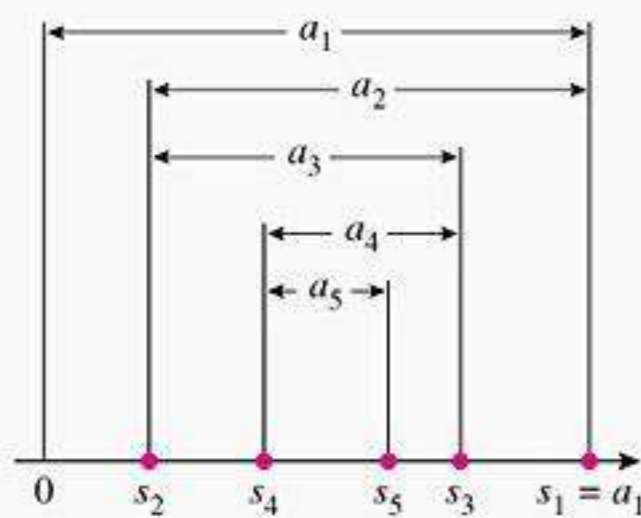


Figura 10.6.1

DEMONSTRAÇÃO Vamos considerar somente séries alternadas da forma (1). A idéia da prova é mostrar que se as condições (a) e (b) forem verificadas, então as seqüências das somas parciais de índice par e ímpar convergem para um limite comum S . Decorre, então, do Teorema 10.1.4 que a seqüência das somas parciais converge para S .

A Figura 10.6.1 mostra como sucessivas somas parciais satisfazendo as condições (a) e (b) aparecem quando plotadas sobre um eixo horizontal. As somas parciais de índice par

$$s_2, s_4, s_6, s_8, \dots, s_{2n}, \dots$$

formam uma seqüência crescente limitada superiormente por a_1 , e as somas parciais de índice ímpar

$$s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}, \dots$$

formam uma seqüência decrescente limitada inferiormente por 0. Assim, pelos Teoremas 10.2.3 e 10.2.4, as somas parciais de índice par convergem para algum limite S_E e as somas parciais de índice ímpar convergem para algum limite S_O . Para completar a prova, precisamos mostrar que $S_E = S_O$. Mas o $(2n)$ -ésimo termo da série é $-a_{2n}$, logo $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$, o que pode ser escrito como

$$s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$$

Porém, $2n \rightarrow +\infty$ e $2n - 1 \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, portanto

$$S_O = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} + a_{2n}) = S_E + 0 = S_E$$

o que completa a demonstração. ■

Não é essencial que a condição (a) do Teorema 10.6.1 seja válida para todos os termos; uma série alternada irá convergir se a condição (b) for verdadeira e a condição (a) for verdadeira a partir de um certo termo.

► **Exemplo 1** Use o teste da série alternada para mostrar a convergência das séries seguintes.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+3}{k(k+1)}$$

A série na parte (a) do Exemplo 1 é chamada *série harmônica alternada*. Observe que esta série converge, enquanto que a série harmônica diverge.

Solução (a) As duas condições do teste da série alternada estão satisfeitas, pois

$$a_k = \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} = a_{k+1} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Solução (b) As duas condições do teste da série alternada estão satisfeitas, pois

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+4}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k(k+1)}{k+3} = \frac{k^2+4k}{k^2+5k+6} = \frac{k^2+4k}{(k^2+4k)+(k+6)} < 1$$

logo

$$a_k > a_{k+1}$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+3}{k(k+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{k} + \frac{3}{k^2}}{1 + \frac{1}{k}} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ **APROXIMANDO A SOMA DE SÉRIES ALTERNADAS**

O teorema a seguir trata do erro que resulta quando a soma de uma série alternada for aproximada por uma soma parcial.

10.6.2 TEOREMA Se uma série alternada satisfaz as hipóteses do teste da série alternada, e se S for a soma da série, então:

(a) S está entre duas somas parciais sucessivas; isto é,

$$s_n \leq S \leq s_{n+1} \quad \text{ou} \quad s_{n+1} \leq S \leq s_n \tag{3}$$

dependendo de qual soma parcial for maior.

(b) Se S for aproximada por s_n , então o erro absoluto $|S - s_n|$ satisfaz

$$|S - s_n| \leq a_{n+1} \tag{4}$$

Além disso, o sinal do erro $S - s_n$ é igual ao do coeficiente de a_{n+1} .

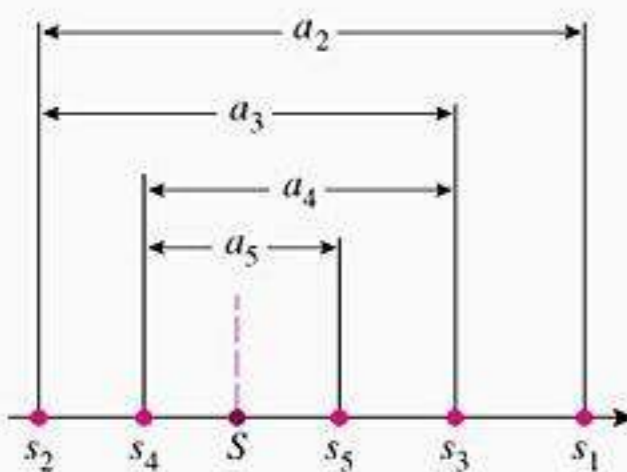


Figura 10.6.2

DEMONSTRAÇÃO Vamos provar o teorema para séries da forma (1). De acordo com a Figura 10.6.2 e lembrando da nossa observação na prova do Teorema 10.6.1 de que as somas parciais de índice ímpar formam uma seqüência decrescente, convergente para S , e as somas parciais de índice par formam uma seqüência crescente, convergente para S , vemos que as somas parciais sucessivas oscilam de um lado para outro de S em passos cada vez menores, sendo que as somas parciais de índice ímpar são maiores do que S e as de índice par, menores do que S . Assim, dependendo de n ser par ou ímpar, temos

$$s_n \leq S \leq s_{n+1} \quad \text{ou} \quad s_{n+1} \leq S \leq s_n$$

o que prova (3). Além disso, em qualquer caso, temos

$$|S - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| \tag{5}$$

Mas $s_{n+1} - s_n = \pm a_{n+1}$ (o sinal depende de n ser par ou ímpar). Desse modo tem-se, a partir de (5) que $|S - s_n| < a_{n+1}$, o que prova (4). Finalmente, como as somas parciais de índice ímpar são maiores do que S e as de índice par são menores, tem-se que $S - s_n$ tem o mesmo sinal que o coeficiente de a_{n+1} (verifique). ■

Em palavras, a desigualdade (4) garante que para uma série que satisfaz as hipóteses do teste da série alternada, a magnitude do erro que resulta ao aproximar S por s_n é menor do que o primeiro termo *não incluído* na soma parcial. Observe também que, se $a_1 > a_2 > \dots > a_k > \dots$, então a desigualdade (4) pode ser reforçada para $|S - s_n| < a_{n+1}$.

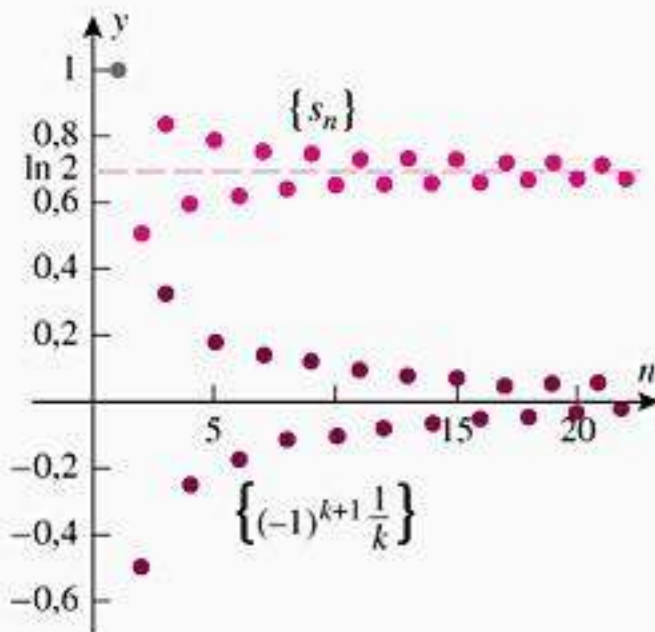


Gráfico da seqüência dos termos e das enésimas somas parciais da série harmônica alterada.

Figura 10.6.3

Exemplo 2 Vamos mostrar, mais adiante neste capítulo, que a soma da série harmônica alternada é:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \dots$$

Isso está ilustrado na Figura 10.6.3.

- (a) Aceitando isso como verdadeiro, encontre uma cota superior da magnitude do erro que resulta se $\ln 2$ for aproximado pela soma dos oito primeiros termos da série.
- (b) Encontre uma soma parcial que aproxime $\ln 2$ com uma casa decimal de precisão (até o décimo mais próximo).

Solução (a) Tem-se a partir da versão reforçada de (4) que

$$|\ln 2 - s_8| < a_9 = \frac{1}{9} < 0,12 \tag{6}$$

Como verificação, vamos calcular exatamente s_8 . Obtemos

$$s_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{533}{840}$$

Assim, com a ajuda de uma calculadora

$$|\ln 2 - s_8| = \left| \ln 2 - \frac{533}{840} \right| \approx 0,059$$

Isso mostra que o erro está bem abaixo da estimativa fornecida pela cota superior (6).

Solução (b) Para uma precisão de uma casa decimal, precisamos escolher um valor de n tal que $|\ln 2 - s_n| \leq 0,05$. Porém, tem-se a partir da versão reforçada de (4) que

$$|\ln 2 - s_n| < a_{n+1}$$

logo basta escolher n tal que $a_{n+1} \leq 0,05$.

Uma maneira de encontrar n é usar um recurso computacional para obter valores numéricos para a_1, a_2, a_3, \dots até encontrar o primeiro valor que seja menor do que ou igual a 0,05. Se você fizer isso irá encontrar que ele é $a_{20} = 0,05$; isso nos mostra que a soma parcial s_{19} fornecerá a precisão desejada. Uma outra maneira para encontrar n é resolver a desigualdade

$$\frac{1}{n+1} \leq 0,05$$

algebricamente. Podemos fazer isso tomando os recíprocos, revertendo o sentido da desigualdade e, então, simplificando para obter $n \geq 19$. Assim, s_{19} irá fornecer a precisão desejada, o que está de acordo com o resultado anterior.

Com a ajuda de um recurso computacional, o valor de s_{19} é aproximadamente $s_{19} \approx 0,7$ e o valor de $\ln 2$ obtido diretamente é $\ln 2 \approx 0,69$, que coincide com s_{19} quando arredondado para uma casa decimal. ◀

Conforme ilustra o Exemplo 2, a série harmônica alternada não fornece uma maneira eficiente de aproximar $\ln 2$, uma vez que é necessário fazer muitas contas para obter uma precisão razoável. Posteriormente, desenvolveremos maneiras melhores para aproximar logaritmos.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

A série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \dots$$

não se ajusta a nenhuma das categorias estudadas até aqui – há uma mistura de sinais, mas não é alternada. Desenvolveremos alguns testes de convergência que podem ser aplicados a tais séries.

10.6.3 DEFINIÇÃO Dizemos que uma série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$$

converge absolutamente se a série de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_k| + \dots$$

convergir e dizemos que *diverge absolutamente* se a série de valores absolutos divergir.

► **Exemplo 3** Determine se as seguintes séries convergem absolutamente.

(a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \dots$ (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

Solução (a) A série de valores absolutos é a série geométrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

assim a dada série converge absolutamente.

Solução (b) A série de valores absolutos é a série harmônica divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

assim a dada série diverge absolutamente. ◀

É importante distinguir entre a noção de convergência e a de convergência absoluta. Por exemplo, a série da parte (b) do Exemplo 3 converge, uma vez que é a série harmônica alternada; no entanto, demonstramos que ela não converge absolutamente. Contudo, o teorema a seguir mostra que *se uma série converge absolutamente, então ela converge*.

10.6.4 TEOREMA Se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_k| + \dots$$

convergir, então a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$$

também converge.

O Teorema 10.6.4 fornece uma maneira de deduzir a convergência de uma série com termos positivos e negativos, a partir da convergência de uma série de termos não-negativos (a série dos valores absolutos). Isso é importante, pois a maioria dos testes de convergência que apresentamos aplica-se somente a séries de termos não-negativos.

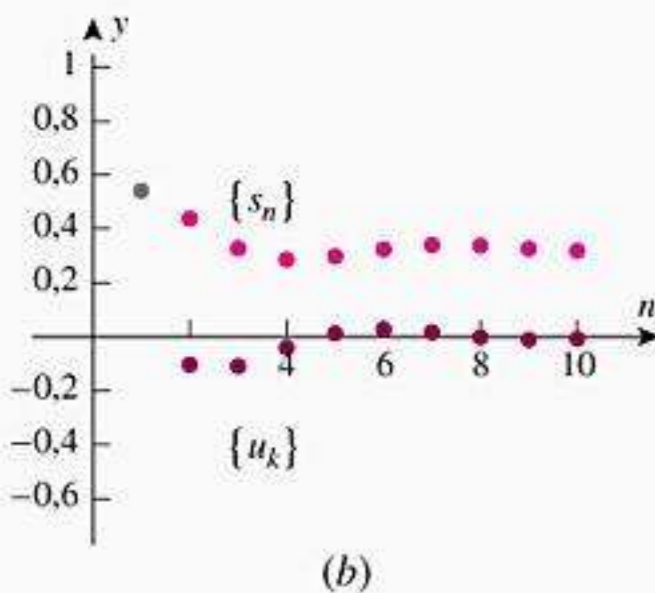
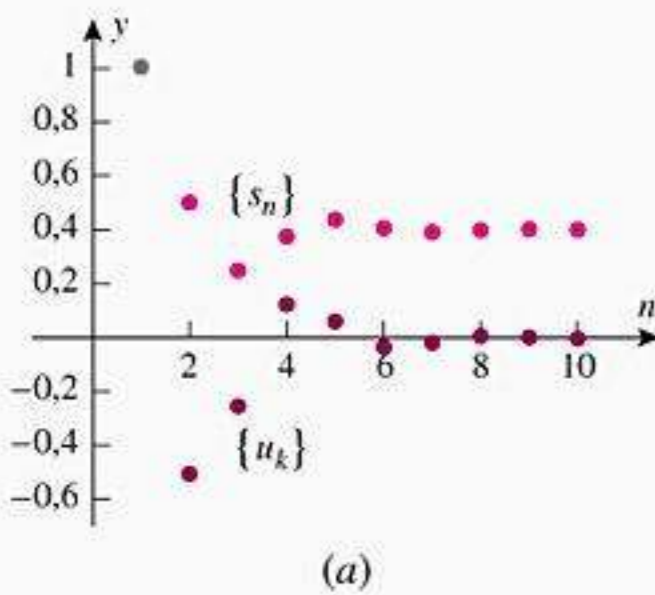
DEMONSTRAÇÃO Vamos escrever a série $\sum u_k$ como

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} [(u_k + |u_k|) - |u_k|] \tag{7}$$

Estamos supondo que $\sum |u_k|$ converge, logo se pudermos mostrar que $\sum (u_k + |u_k|)$ converge, então irá seguir de (7) e do Teorema 10.4.3(a) que $\sum u_k$ converge. Ocorre que o valor de $u_k + |u_k|$ é 0 ou $2|u_k|$, dependendo do sinal de u_k . Assim, em todos os casos, é verdadeiro que

$$0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$$

Mas $\sum 2|u_k|$ converge, uma vez que é uma constante vezes a série convergente $\sum |u_k|$; logo, $\sum (u_k + |u_k|)$ converge pelo teste da comparação. ■



Gráficos das seqüências de termos e das enésimas somas parciais da série do Exemplo 4.

Figura 10.6.4

► **Exemplo 4** Mostre que as séries a seguir convergem.

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \dots$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$

Solução (a) Observe que isso não é uma série alternada, pois os sinais se alternam aos pares após o primeiro termo. Assim, não temos nenhum teste de convergência que possa ser aplicado diretamente. No entanto, mostramos no Exemplo 3(a) que a série converge absolutamente, logo o Teorema 10.6.4 implica que ela converge (Figura 10.6.4a).

Solução (b) Com a ajuda de um recurso computacional, podemos verificar que o sinal dos termos nesta série varia irregularmente. Assim, vamos testar a convergência absoluta. A série dos valores absolutos é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos k}{k^2} \right|$$

Porém,

$$\left| \frac{\cos k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

Mas $\sum 1/k^2$ é uma série p convergente ($p = 2$), de modo que a série dos valores absolutos converge pelo teste da comparação. Dessa forma, a série dada converge absolutamente e, portanto, converge (Figura 10.6.4b). ◀

■ **CONVERGÊNCIA CONDICIONAL**

Embora o Teorema 10.6.4 seja uma ferramenta útil para séries que convergem absolutamente, ele não fornece informação sobre a convergência ou a divergência de uma série que diverge absolutamente. Por exemplo, considere as duas séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \dots \tag{8}$$

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{k} - \dots \tag{9}$$

Ambas estas séries divergem absolutamente, pois em cada caso a série dos valores absolutos é a série harmônica divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

Contudo, a série (8) converge, por ser a série harmônica alternada e a série (9) diverge, pois é uma constante vezes a série harmônica divergente. Como terminologia, dizemos que uma série que converge, mas diverge absolutamente é uma série que *converge condicionalmente* (ou *é condicionalmente convergente*). Assim, (8) é uma série condicionalmente convergente.

■ **TESTE DA RAZÃO PARA A CONVERGÊNCIA ABSOLUTA**

Embora geralmente não possa ser inferida a convergência ou a divergência de uma série a partir de sua divergência absoluta, a variante do teste da razão a seguir nos fornece uma maneira de deduzir a divergência a partir da divergência absoluta em certas situações. Omitiremos a prova.

10.6.5 TEOREMA (Teste da Razão para a Convergência Absoluta) *Seja $\sum u_k$ uma série de termos não-nulos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}$$

- (a) *Se $\rho < 1$, então a série $\sum u_k$ converge absolutamente e, portanto, converge.*
- (b) *Se $\rho > 1$ ou se $\rho = +\infty$, então a série $\sum u_k$ diverge.*
- (c) *Se $\rho = 1$, nenhuma conclusão sobre a convergência ou a convergência absoluta pode ser tirada deste teste.*

► **Exemplo 5** Use o teste da razão para a convergência absoluta para determinar se a série converge.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{3^k}$$

Solução (a) Tomando o valor absoluto do termo geral u_k , obtemos

$$|u_k| = \left| (-1)^k \frac{2^k}{k!} \right| = \frac{2^k}{k!}$$

Assim,

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

o que implica que a série converge absolutamente e, portanto, converge.

Solução (b) Tomando o valor absoluto do termo geral u_k , obtemos

$$|u_k| = \left| (-1)^k \frac{(2k-1)!}{3^k} \right| = \frac{(2k-1)!}{3^k}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[2(k+1)-1]!}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{(2k-1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(2k+1)!}{(2k-1)!} = \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow +\infty} (2k)(2k+1) = +\infty \end{aligned}$$

o que implica que a série diverge. ◀

■ **RESUMO DOS TESTES DE CONVERGÊNCIA**

Concluimos esta seção com um resumo dos testes de convergência que pode ser consultado como referência. A habilidade de escolher um teste adequado é desenvolvida com muita prática. Algumas vezes algum teste pode ser inconclusivo, quando então precisamos tentar outro teste.

Resumo dos Testes de Convergência		
NOME	AFIRMAÇÃO	COMENTÁRIO
Teste da Divergência (10.4.1)	Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$, então $\sum u_k$ diverge.	Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, então $\sum u_k$ pode ou não convergir.
Teste da Integral (10.4.4)	Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos. Se f for uma função decrescente e contínua num intervalo $[a, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ para cada $k \geq a$, então $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ e } \int_a^{+\infty} f(x) dx$ ambas convergem ou ambas divergem.	Este teste aplica-se apenas a séries de termos positivos. Tente este teste quando $f(x)$ for fácil de integrar.
Teste da Comparação (10.5.1)	Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não-negativos e suponha que $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_k \leq b_k, \dots$ Se $\sum b_k$ convergir, então $\sum a_k$ converge e se $\sum a_k$ divergir, então $\sum b_k$ diverge.	Este teste aplica-se apenas a séries de termos não negativos. Tente este teste em último caso; outros testes são freqüentemente mais fáceis de aplicar.
Teste da Comparação no Limite (10.5.4)	Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e seja $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$ Se $0 < \rho < +\infty$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.	Isso é mais fácil de se aplicar do que o teste de comparação, mas ainda requer alguma habilidade na escolha da série $\sum b_k$ para comparação.
Teste da Razão (10.5.5)	Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ (a) A série converge se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$.	Tente este teste quando u_k envolver fatoriais ou potências k -ésimas.
Teste da Raiz (10.5.6)	Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k}$ (a) A série converge se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$.	Tente este teste quando u_k envolver potências k -ésimas
Teste da Série Alternada (10.6.1)	Se $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, então as séries $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$ convergem se as seguintes condições forem satisfeitas: (a) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ (b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$	Este teste aplica-se apenas a séries alternadas.
Teste da Razão para a Convergência Absoluta (10.6.5)	Seja $\sum u_k$ uma série com termos não-nulos e suponha que $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{ u_{k+1} }{ u_k }$ (a) A série converge absolutamente se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$.	A série não necessita ter termos positivos e não precisa ser alternada para usar este teste.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.6 (Ver página 675 para respostas.)

1. O que caracteriza uma série *alternada*?

2. (a) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

converge pelo teste da série alternada pois _____ e _____.

(b) Se

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{e} \quad s_9 = \sum_{k=1}^9 \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

então $|S - s_9| < \underline{\hspace{2cm}}$.

3. Classifique cada seqüência como condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$: _____

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k-1}{9k+15}$: _____

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+2)}$: _____

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}$: _____

4. Sabendo que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^4/4^{k+1}}{k^4/4^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

classifique a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^4/4^k$ como condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

EXERCÍCIOS 10.6  Recurso Gráfico  CAS

1-2 Mostre que a série converge confirmando que satisfaz as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 10.6.1).

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{3^k}$

3-6 Determine se a série alternada converge e justifique sua resposta.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{3k+1}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k}$

6. $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

7-12 Use o teste da razão para a convergência absoluta (Teorema 10.6.5) para determinar se a série converge ou diverge. Se o teste for inconclusivo, diga isso.

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k^2}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5^k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{e^k}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^k}{k!}$

13-30 Classifique a série como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k^2}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k}$

18. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+2}{k(k+3)}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^2}{k^3+1}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k\pi}{2}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k^3}$

23. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}}$

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

27. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2+1)}{k^3+2}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos k\pi}{k^2+1}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{(2k-1)!}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^{2k-1}}{k^2+1}$

31-34 Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Para o valor dado de n , determine uma cota superior no erro absoluto que resulta se a soma da série for aproximada pela n -ésima soma parcial.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; $n = 7$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; $n = 5$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}; n = 99$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1) \ln(k+1)}; n = 3$$

35-38 Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Determine um valor de n para o qual a n -ésima soma parcial garantidamente aproxima a soma da série com a precisão explicitada.

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}; |\text{erro}| < 0,0001$$

36.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}; |\text{erro}| < 0,00001$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}; \text{duas casas decimais}$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1) \ln(k+1)}; \text{uma casa decimal}$$

39-40 Encontre uma cota superior no erro absoluto que resulta se s_{10} for usada para aproximar a soma da série geométrica dada. Calcule s_{10} arredondado em quatro casas decimais e compare esse valor com a soma exata da série.

39.
$$\frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{32} + \dots$$

40.
$$1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$$

41-44 Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Aproxime a soma da série até duas casas decimais de precisão.

41.
$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

42.
$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots$$

43.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

44.
$$\frac{1}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5} - \frac{1}{7^5 + 4 \cdot 7} + \dots$$

ENFOCANDO CONCEITOS

45. A proposta deste exercício é mostrar que a estimativa de erro na parte (b) do Teorema 10.6.2 pode ser demasiadamente conservadora em certos casos.

(a) Use um CAS para confirmar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(b) Use um CAS para mostrar que $|(\pi/4) - s_{25}| < 10^{-2}$.

(c) De acordo com a estimativa de erro na parte (b) do Teorema 10.6.2, qual o valor de n que é requerido para assegurar que $|(\pi/4) - s_n| < 10^{-2}$?

46. Prove que se $\sum a_k$ converge absolutamente, então $\sum a_k^2$ converge.

47. (a) Obtenha exemplos que mostrem que se $\sum a_k$ converge, então $\sum a_k^2$ pode divergir ou convergir.

(b) Obtenha exemplos que mostrem que se $\sum a_k^2$ converge, então $\sum a_k$ pode divergir ou convergir.

48. Mostre que a série p alternada

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k^p} + \dots$$

converge absolutamente se $p > 1$, converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$, e diverge se $p \leq 0$.

49-51 Pode-se provar que qualquer série que for construída a partir de uma série absolutamente convergente rearranjando os termos é absolutamente convergente e tem a mesma soma que a série original. Use este fato junto com as partes (a) e (b) do Teorema 10.4.3 nestes exercícios.

49. Afirmou-se no Exercício 31 da Seção 10.4 que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Use isso para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

50. Use a série para $\pi^2/6$ dada no exercício precedente para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

51. Afirmou-se no Exercício 31 da Seção 10.4 que

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Use isso para mostrar que

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

ENFOCANDO CONCEITOS

52. Pode-se provar que os termos de qualquer série condicionalmente convergente podem ser rearranjados para dar ou uma série divergente ou uma série condicionalmente convergente, cuja soma é qualquer número dado S . Por exemplo, afirmou-se no Exemplo 2 que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Mostre que podemos rearranjar esta série de tal maneira que a soma seja $\frac{1}{2} \ln 2$ reescrevendo-a como

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

[Sugestão: Some os dois primeiros termos em cada par de parênteses.]

53. Considere a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots$$

(a) Mostre que essa série diverge.

(b) Explique por que o teste da série alternada não pode ser aplicado a essa série.

54. (a) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico de

$$f(x) = \frac{4x - 1}{4x^2 - 2x}, \quad x \geq 1$$

(b) Baseado nesse gráfico, podemos dizer que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4k - 1}{4k^2 - 2k}$$

converge? Explique o seu raciocínio.

55. Como ilustrado na figura ao lado, um besouro começa a andar a partir de um ponto A sobre um fio com 180 cm de comprimento. Ele vai até o fim do fio, então pára e anda no sentido oposto ao longo de uma metade do comprimento do fio, pára novamente e anda no sentido oposto ao longo de

um terço do comprimento do fio, pára novamente e anda no sentido oposto por um quarto do comprimento do fio e assim por diante, até que pára pela milésima vez.

(a) Dê cotas superior e inferior da distância entre o besouro e o ponto A quando ele finalmente pára. [Sugestão: como afirmado no Exemplo 2, suponha que a soma da série harmônica alternada seja $\ln 2$.]

(b) Dê cotas superior e inferior da distância total que o besouro percorre até finalmente parar. [Sugestão: use a desigualdade (2) da Seção 10.4.]

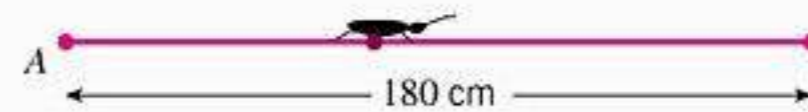


Figura Ex-55

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.6

- Os termos alternam entre positivo e negativo. 2. (a) $1 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{9} \geq \dots \geq \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2} \geq \dots$; $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2} = 0$ (b) $\frac{1}{100}$
- (a) condicionalmente convergente (b) divergente (c) absolutamente convergente (d) condicionalmente convergente
- absolutamente convergente

10.7 POLINÔMIOS DE MACLAURIN E DE TAYLOR

Numa aproximação linear local, é usada a reta tangente ao gráfico de uma função para obter uma aproximação linear da função na vizinhança do ponto de tangência. Nesta seção, consideraremos como poderemos melhorar a eficácia da aproximação linear local usando polinômios de ordem maior como funções aproximantes. Também investigaremos o erro associado com tais aproximações.

■ APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS LOCAIS

Lembre-se da Fórmula (1) da Seção 3.8 do Volume 1, em que vimos que a aproximação linear local de uma função f em um ponto x_0 é

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Nessa fórmula, a função aproximante

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é um polinômio de primeiro grau satisfazendo $p(x_0) = f(x_0)$ e $p'(x_0) = f'(x_0)$ (verifique). Assim, a aproximação linear local de f em x_0 tem a propriedade de que o seu valor e o de sua derivada coincidem com aqueles de f em x_0 .

Se o gráfico de uma função f tiver uma “curvatura” pronunciada em um ponto x_0 , então podemos esperar que a precisão da aproximação linear local de f em x_0 irá decrescer rapidamente à medida que nos afastarmos de x_0 (Figura 10.7.1). Uma maneira de tratar este problema é aproximar a função f em x_0 por um polinômio p de grau 2 com a propriedade de que o valor de p e o de suas duas primeiras derivadas coincidam com os de f em x_0 . Isso garante que os gráficos de f e p não somente têm a mesma reta tangente em x_0 , mas também têm curvaturas na mesma direção em x_0 (ambos côncavos para cima ou côncavos para baixo). Como resultado, podemos esperar que o gráfico de p permaneça próximo ao gráfico de f por um intervalo maior em torno de x_0 do que o gráfico da aproximação linear local. O polinômio p é denominado *aproximação quadrática local de f no ponto $x = x_0$* .

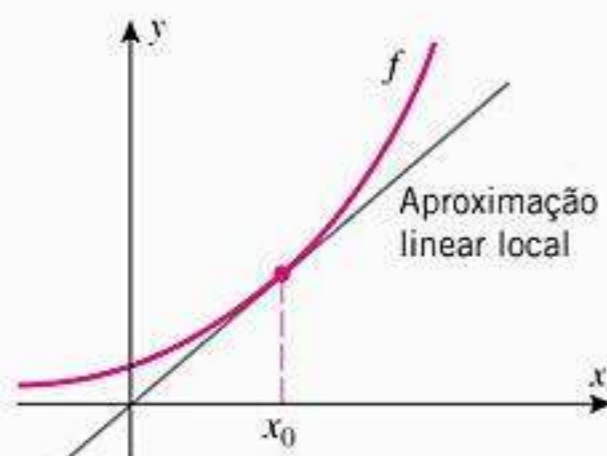


Figura 10.7.1



Colin Maclaurin (1698-1746) Matemático escocês. O pai de Maclaurin, um pastor, morreu quando o menino tinha somente seis meses de idade e sua mãe quando ele estava com nove anos. Ele foi criado, então, por um tio que também era um pastor. Maclaurin ingressou na Universidade de Glasgow como um estudante de Teologia, mas depois de um ano transferiu-se para a Matemática. Com dezessete anos, apesar de sua juventude, recebeu o título de mestre, começando a lecionar no Marischal College em Aberdeen, na Escócia. Ele encontrou Isaac Newton durante uma visita a Londres, em 1719, e daí em diante, tornou-se um discípulo de Newton. Durante esta época, alguns dos métodos analíticos de Newton estavam sendo amargamente criticados por grandes matemáticos, e muitos dos trabalhos importantes de Maclaurin resultaram dos seus esforços em defender geometricamente as idéias de Newton. Um trabalho de Maclaurin, *Um Tratado de Fluxônios* (1742), foi a primeira formulação sistemática dos métodos de Newton. O tratado foi feito tão cuidadosamente que se tornou padrão de rigor matemático em Cálculo até o trabalho de Cauchy, em 1821. Maclaurin foi também um notável experimentalista. Ele desenvolveu inúmeros inventos mecânicos engenhosos, fez importantes observações astronômicas, realizou cálculos atuariais na área de seguros e ajudou a melhorar os mapas das ilhas em torno da Escócia.

Para ilustrar esta idéia, vamos tentar encontrar uma fórmula para a aproximação quadrática local de uma função f em $x = 0$. Esta aproximação tem a forma

$$f(x) \approx c_0 + c_1x + c_2x^2 \tag{2}$$

onde c_0, c_1 e c_2 devem ser escolhidos de tal forma que os valores de

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

e de suas primeiras duas derivadas coincidam com os de f em 0. Assim, queremos

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0) \tag{3}$$

Mas os valores de $p(0), p'(0)$ e $p''(0)$ são os seguintes:

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 & p(0) &= c_0 \\ p'(x) &= c_1 + 2c_2x & p'(0) &= c_1 \\ p''(x) &= 2c_2 & p''(0) &= 2c_2 \end{aligned}$$

Assim, segue de (3) que

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

e substituindo esses valores em (2) resulta a seguinte fórmula para a aproximação quadrática local de f em $x = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \tag{4}$$

Exemplo 1 Encontre as aproximações linear e quadrática locais de e^x em $x = 0$ e faça juntos os gráficos de e^x e das duas aproximações.

Solução Se tomarmos $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = e^x$ e, portanto,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$$

Assim, a partir de (4) a aproximação quadrática local de e^x em $x = 0$ é

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

e a aproximação linear local (que é a parte linear da aproximação quadrática local) é

$$e^x \approx 1 + x$$

O gráfico de e^x e das duas aproximações são mostrados na Figura 10.7.2. Como era de se esperar, a aproximação quadrática local é mais precisa do que a aproximação linear local próximo de $x = 0$.

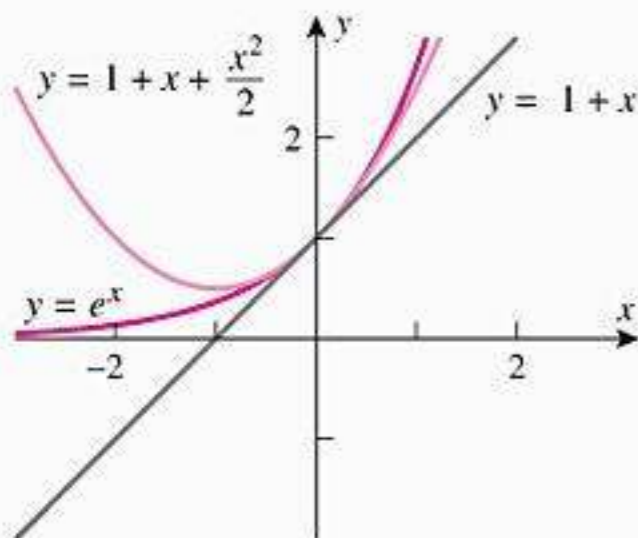


Figura 10.7.2

POLINÔMIOS DE MACLAURIN

É natural indagar se é possível melhorar a precisão de uma aproximação quadrática local usando um polinômio de grau 3. Especificamente, poderíamos procurar por um polinômio de grau 3 com a propriedade de que seu valor e os valores das três primeiras derivadas coincidissem com aqueles de f em um ponto; e se isso fornece um aprimoramento na precisão, por que não seguir adiante com polinômios de graus cada vez maiores? Desse modo, somos levados a considerar o seguinte problema geral.

10.7.1 PROBLEMA Dada uma função f que possa ser diferenciada n vezes em $x = x_0$, encontre um polinômio p de grau n com a propriedade de que o valor de p e os das suas n primeiras derivadas coincidam com aqueles de f em x_0 .

Vamos começar resolvendo o problema no caso em que $x_0 = 0$. Assim, queremos um polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \quad (5)$$

tal que

$$f(0) = p(0), \quad f'(0) = p'(0), \quad f''(0) = p''(0), \dots, \quad f^{(n)}(0) = p^{(n)}(0) \quad (6)$$

Mas

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \\ p'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} \\ p''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} \\ p'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \dots (1)c_n \end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer (6) devemos ter

$$\begin{aligned} f(0) &= p(0) = c_0 \\ f'(0) &= p'(0) = c_1 \\ f''(0) &= p''(0) = 2c_2 = 2!c_2 \\ f'''(0) &= p'''(0) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= p^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2) \dots (1)c_n = n!c_n \end{aligned}$$

o que fornece os seguintes valores para os coeficientes de $p(x)$:

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

O polinômio que resulta substituindo-se estes coeficientes em (5) é chamado de *enésimo polinômio de Maclaurin para f* .



Augustin Louis Cauchy (1789-1857) Matemático francês. A educação de Cauchy foi iniciada por seu pai, um advogado e mestre dos clássicos. Cauchy ingressou na Escola Politécnica em 1805 para estudar Engenharia mas, por motivos de saúde, foi aconselhado a se concentrar em Matemática. Seu principal trabalho matemático iniciou em 1811, com uma série de soluções brilhantes de alguns problemas difíceis que estavam em aberto. Em 1814, ele escreveu um tratado sobre integração que acabou se tornando a base da moderna teoria de variáveis complexas; em 1816, seguiu-se um artigo clássico sobre a propagação de ondas em líquidos que recebeu um prêmio da Academia Francesa e, em 1822, ele escreveu um artigo que se constitui na base da moderna teoria de Elasticidade. As contribuições matemáticas de Cauchy durante os 35 anos seguintes foram brilhantes e impressionantes em quantidade: mais de 700 artigos, que hoje preenchem 26 volumes. O trabalho de Cauchy iniciou a era da moderna Análise Matemática. Ele trouxe para a Matemática padrões de precisão e rigor que sequer eram sonhados por Leibniz e Newton.

A vida de Cauchy foi extremamente envolvida pelos tumultos políticos de sua época. Por ser um decidido partidário dos Bourbons, em 1830 ele abandonou esposa e filhos para seguir o rei Bourbon Carlos X em seu exílio. Por sua lealdade, recebeu do ex-rei o título de barão. Cauchy acabou retornando à França, mas recusou-se a aceitar uma posição universitária até que o governo abrisse mão da exigência de prestar um juramento de lealdade.

É difícil entender claramente sua pessoa. Católico devoto, ele patrocinou trabalho de caridade para mães solteiras, criminosos e de ajuda à Irlanda. No entanto, outros aspectos de sua vida o colocam em luz menos favorável. O matemático norueguês Abel descreveu-o como “demente, infinitamente católico e intolerante”. Alguns autores louvam suas aulas, mas outros dizem que ele murmurava incoerentemente e, de acordo com um relato contemporâneo, uma vez dedicou uma aula inteira à extração da raiz quadrada de dezessete até a décima casa decimal usando um método muito bem conhecido por seus alunos. De qualquer forma, Cauchy é, indiscutivelmente, uma das maiores mentes da história da Ciência.

Verifique que $f(x) \approx p_1(x)$ é a aproximação linear local de f em $x = 0$ e que $f(x) \approx p_2(x)$ é a aproximação quadrática local em $x = 0$. Assim, os polinômios dessas aproximações são casos especiais dos polinômios de Maclaurin de f .

10.7.2 DEFINIÇÃO Se f puder ser diferenciada n vezes em 0 , então definimos o **enésimo polinômio de Maclaurin para f** como sendo

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (7)$$

Este polinômio tem a propriedade de que seu valor e o de suas n primeiras derivadas coincidem com os valores de f e o de suas n primeiras derivadas em $x = 0$.

► **Exemplo 2** Encontre os polinômios de Maclaurin p_0, p_1, p_2, p_3 e p_n para e^x .

Solução Seja $f(x) = e^x$. Assim,

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

e

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Logo,

$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

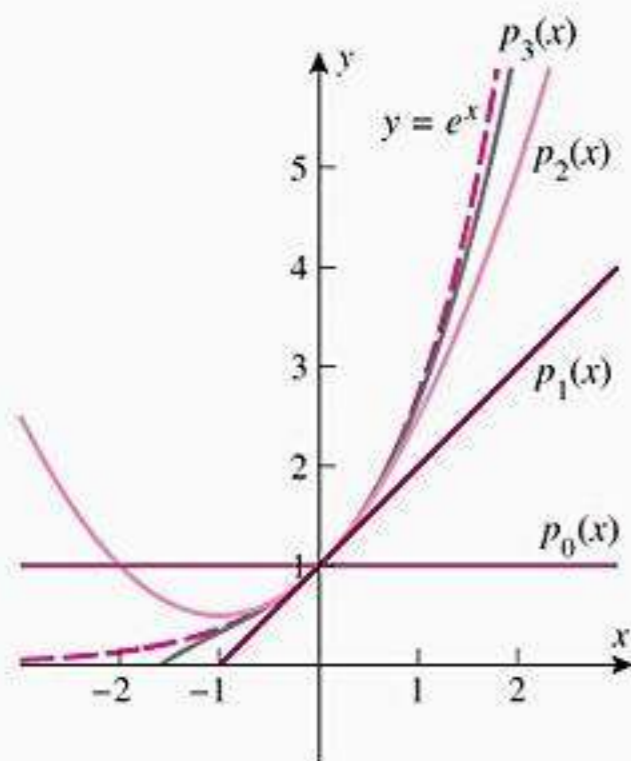


Figura 10.7.3

A Figura 10.7.3 mostra os gráficos de e^x (tracejado em azul) e os de seus quatro primeiros polinômios de Maclaurin. Observe que os gráficos de $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ são praticamente indistinguíveis do gráfico de e^x próximo de $x = 0$, portanto estes polinômios são boas aproximações de e^x para x próximo de 0 . Porém, quanto mais longe x estiver de 0 piores serão estas aproximações. Isto é típico dos polinômios de Maclaurin para uma função $f(x)$; eles fornecem boas aproximações de $f(x)$ próximo de 0 , mas a precisão diminui à medida que x se distancia de 0 . Em geral, quanto maior for o grau do polinômio, maior será o intervalo no qual fornece uma precisão especificada. A questão da precisão será investigada posteriormente.

■ **POLINÔMIOS DE TAYLOR**

Até agora, focalizamos na aproximação de uma função na vizinhança de $x = 0$. Vamos, agora, considerar o caso mais geral de aproximar f nas proximidades de um ponto arbitrário x_0 do domínio. A idéia básica é igual à anterior; queremos encontrar um polinômio de grau n com a propriedade de que seu valor e o de suas n primeiras derivadas coincidam com aqueles de f em x_0 . No entanto, em vez de expressar $p(x)$ em potências de x , é conveniente, para simplificar as contas, expressar o polinômio em potências de $x - x_0$, isto é

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n \quad (8)$$

Verifique que $f(x) \approx p_1(x)$ é a aproximação linear local de f em $x = x_0$ e que $f(x) \approx p_2(x)$ é a aproximação quadrática local em $x = x_0$. Assim, os polinômios dessas aproximações são casos especiais dos polinômios de Taylor de f em $x = x_0$.

Deixaremos como exercício para o leitor imitar os cálculos usados no caso em que $x_0 = 0$ para mostrar que

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Substituindo-se esses valores em (8), obtemos o que é chamado de *enésimo polinômio de Taylor em torno de $x = x_0$ para f* .

10.7.3 DEFINIÇÃO Se f puder ser diferenciada n vezes em x_0 , então definimos o *enésimo polinômio de Taylor para f em torno de $x = x_0$* como sendo

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (9)$$

Os polinômios de Maclaurin são casos especiais dos polinômios de Taylor, com $x_0 = 0$. Assim, todos teoremas sobre polinômios de Taylor também se aplicam a polinômios de Maclaurin.

► **Exemplo 3** Encontre os quatro primeiros polinômios de Taylor para $\ln x$ em torno de $x = 2$.

Solução Seja $f(x) = \ln x$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2 \\ f'(x) &= 1/x & f'(2) &= 1/2 \\ f''(x) &= -1/x^2 & f''(2) &= -1/4 \\ f'''(x) &= 2/x^3 & f'''(2) &= 1/4 \end{aligned}$$

Substituindo-se em (9) com $x_0 = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(2) = \ln 2 \\ p_1(x) &= f(2) + f'(2)(x - 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) \\ p_2(x) &= f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 \\ p_3(x) &= f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x - 2)^3 \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3 \end{aligned}$$



Brook Taylor (1685-1731) Matemático inglês. Taylor nasceu em uma família de posses. Artistas e músicos eram recebidos freqüentemente na casa de Taylor, os quais, sem dúvida, tiveram uma influência duradoura sobre o jovem Brook. Anos mais tarde, ele publicou um trabalho definitivo sobre a teoria matemática da perspectiva e obteve resultados matemáticos importantes sobre as vibrações das cordas. Existe também um trabalho não-publicado, *On Musick*, que faria parte de uma publicação conjunta com Isaac Newton. A vida de Taylor foi marcada por infelicidade, doença e tragédia. Como sua primeira mulher não era rica o suficiente para agradar seu pai, os dois homens discutiram intensamente e se separaram. Subseqüentemente, sua mulher morreu duran-

te o parto. Então, após casar-se de novo, sua segunda mulher também morreu no parto, embora sua filha tenha sobrevivido. O período mais produtivo de Taylor foi de 1714 a 1719, durante o qual escreveu sobre uma variedade de assuntos: magnetismo, ação capilar, termômetros, perspectivas, e Cálculo. Em seus últimos anos dedicou os seus esforços para escrever sobre Religião e Filosofia. De acordo com Taylor, os resultados que levam o seu nome foram motivados por uma conversa em um café sobre os trabalhos de Newton a respeito do movimento planetário e os trabalhos de Halley (do "cometa Halley") sobre raízes de polinômios. Infelizmente, o estilo da escrita de Taylor era tão conciso e difícil de entender que ele nunca recebeu créditos para muitas de suas inovações.

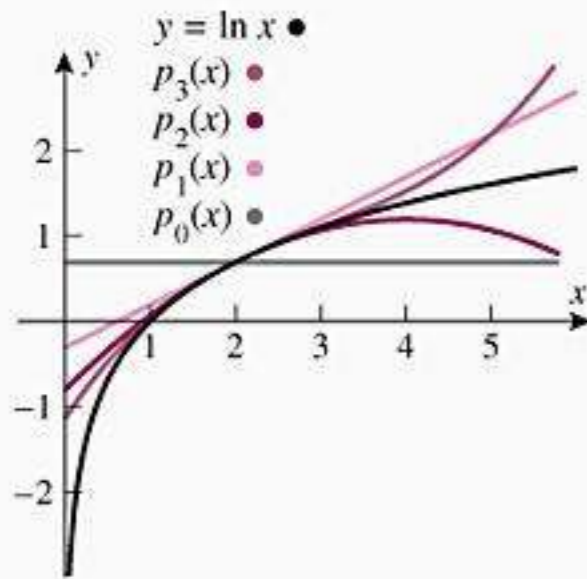


Figura 10.7.4

O gráfico de $\ln x$ (em preto) e dos seus quatro primeiros polinômios de Taylor em torno de $x = 2$ estão na Figura 10.7.4. Conforme era de se esperar, estes polinômios produzem sua melhor aproximação de $\ln x$ na vizinhança de 2. ◀

■ NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO PARA OS POLINÔMIOS DE TAYLOR E MACLAURIN

Muitas vezes, precisaremos expressar a Fórmula (9) em notação sigma. Para fazer isso, usamos a notação $f^{(k)}(x_0)$ para denotar a k -ésima derivada de f em $x = x_0$ e faremos a convenção que $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$. Isso nos permite escrever

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (10)$$

Em particular, podemos escrever o n -ésimo polinômio de Maclaurin de $f(x)$ como

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (11)$$

► **Exemplo 4** Encontre o n -ésimo polinômio de Maclaurin para

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) $\frac{1}{1-x}$

Solução (a) Nos polinômios de Maclaurin para $\sin x$, somente aparecem explicitamente as potências ímpares de x . Para ver isto, seja $f(x) = \sin x$; assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Como $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, o padrão 0, 1, 0, -1 irá repetir-se à medida que calcularmos as sucessivas derivadas em 0. Dessa forma, os sucessivos polinômios de Maclaurin para $\sin x$ são

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0 \\ p_1(x) &= 0 + x \\ p_2(x) &= 0 + x + 0 \\ p_3(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} \\ p_4(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 \\ p_5(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} \\ p_6(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 \\ p_7(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

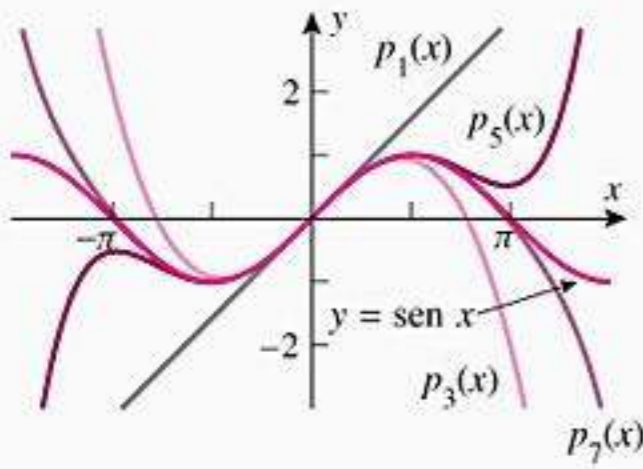


Figura 10.7.5

Por causa dos termos nulos, os polinômios de Maclaurin de ordem par [depois de $p_0(x)$] são iguais aos polinômios de ordem ímpar precedente; isto é,

$$p_{2k+1}(x) = p_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Os gráficos de $\sin x$, $p_1(x)$, $p_3(x)$, $p_5(x)$ e $p_7(x)$ estão mostrados na Figura 10.7.5.

Solução (b) Nos polinômios de Maclaurin para $\cos x$, somente aparecem explicitamente as potências pares de x ; os cálculos são similares àqueles da parte (a). O leitor deve conseguir mostrar que

$$p_0(x) = p_1(x) = 1$$

$$p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$p_4(x) = p_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$p_6(x) = p_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

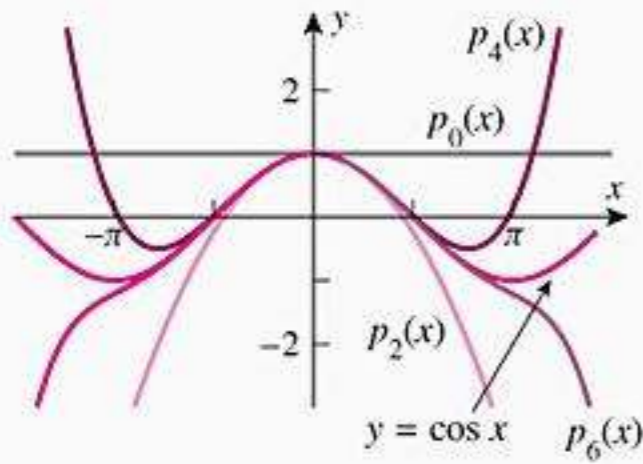


Figura 10.7.6

Em geral, os polinômios de Maclaurin para $\cos x$ são dados por

$$p_{2k}(x) = p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Os gráficos de $\cos x$, $p_0(x)$, $p_2(x)$, $p_4(x)$ e $p_6(x)$ estão mostrados na Figura 10.7.6.

Solução (c) Seja $f(x) = 1/(1-x)$. Os valores de f e de suas k primeiras derivadas em $x = 0$ são como segue:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad f(0) = 1 = 0!$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f'(0) = 1 = 1!$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad f''(0) = 2 = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4} \quad f'''(0) = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(1-x)^5} \quad f^{(4)}(0) = 4!$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad f^{(k)}(0) = k!$$

Substituindo $f^{(k)}(0) = k!$ na Fórmula (11), obtemos o n ésimo polinômio de Maclaurin para $1/(1-x)$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os programas de CAS têm comandos que geram polinômios de Taylor de qualquer grau especificado. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar alguns dos polinômios de Maclaurin e Taylor dos Exemplos 3 e 4.

► **Exemplo 5** Encontre o enésimo polinômio de Taylor para $1/x$ em torno de $x = 1$.

Solução Seja $f(x) = 1/x$. Os cálculos são análogos aos da parte (c) do Exemplo 4. Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2!, \quad f'''(1) = -3!, \\ f^{(4)}(1) = 4!, \dots, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$$

Assim, substituindo $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$ na Fórmula (10) com $x_0 = 1$, obtemos o enésimo polinômio de Taylor para $1/x$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n \blacktriangleleft$$

■ **O ENÉSIMO RESTO**

É conveniente ter uma notação para o erro da aproximação $f(x) \approx p_n(x)$. Assim, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e seu enésimo polinômio de Taylor, ou seja,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{12}$$

Isso também pode ser escrito como

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \tag{13}$$

A função $R_n(x)$ é denominada *enésimo resto* da série de Taylor de f e a Fórmula (13) é chamada de *fórmula de Taylor com resto*.

Obter uma cota para $R_n(x)$ dá uma indicação da precisão da aproximação $p_n(x) \approx f(x)$. O teorema seguinte, que será provado no Apêndice C, fornece uma tal cota.

10.7.4 TEOREMA (Teorema da Estimativa do Resto) Se a função f puder ser derivada $n + 1$ vezes num intervalo I contendo o ponto x_0 , e se M for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ em I , ou seja, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo x em I , então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \tag{14}$$

para todo x em I .

A cota para $|R_n(x)|$ em (14) é chamada de *estimativa do erro de Lagrange*.

► **Exemplo 6** Use um enésimo polinômio de Maclaurin para e^x para aproximar e com cinco casas decimais de precisão.

Solução Inicialmente, observe que a função exponencial e^x tem derivadas de todas as ordens para cada número real x . Pelo Exemplo 2, o enésimo polinômio de Maclaurin para e^x é

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

a partir do que obtemos

$$e = e^1 \approx \sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Assim, nosso problema é determinar quantos termos devemos incluir num polinômio de Maclaurin para e^x para obter cinco casas decimais de precisão; isto é, queremos escolher n tal que o valor absoluto do n -ésimo resto em $x = 1$ satisfaça

$$|R_n(1)| \leq 0,000005$$

Para determinar n aplicaremos o Teorema da Estimativa do Resto com $f(x) = e^x$, $x = 1$, $x_0 = 0$ e I sendo o intervalo $[0, 1]$. Neste caso, temos a partir da Fórmula (14) que

$$|R_n(1)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \tag{15}$$

onde M é uma cota superior do valor de $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para x no intervalo $[0, 1]$. Entretanto, e^x é uma função crescente, assim o valor máximo no intervalo $[0, 1]$ ocorre em $x = 1$; isto é, $e^x \leq e$ neste intervalo. Desse modo, podemos tomar $M = e$ em (15) para obter

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \tag{16}$$

Infelizmente, esta desigualdade não é muito útil, pois envolve e , que é a própria quantidade que estamos tentando aproximar. Entretanto, se aceitarmos que $e < 3$, então podemos substituir (16) com a seguinte desigualdade, que é menos precisa mas mais útil:

$$|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Assim, podemos obter precisão de cinco casas decimais escolhendo n tal que

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0,000005 \quad \text{ou} \quad (n+1)! \geq 600.000$$

Como $9! = 362.880$ e $10! = 3.628.800$, o menor valor de n que satisfaz este critério é $n = 9$. Assim, com cinco casas decimais de precisão

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,71828$$

Como comparação, a representação de e com 12 casas decimais, dada por uma calculadora, é $e \approx 2,71828182846$, a qual coincide com a aproximação acima quando arredondada para cinco casas decimais. ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.7 (Ver página 685 para respostas.)

- Se f pode ser derivada três vezes em 0, então o terceiro polinômio de Maclaurin para f é $p_3(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- O terceiro polinômio de Maclaurin para $f(x) = e^{2x}$ é

$$p_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}x^2 + \underline{\hspace{2cm}}x^3$$
- Se $f(2) = 3$, $f'(2) = -4$ e $f''(2) = 10$, então o segundo polinômio de Taylor para f em torno de $x = 2$ é $p_2(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- O terceiro polinômio de Taylor para $f(x) = x^5$ em torno de $x = -1$ é

$$p_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}(x+1) + \underline{\hspace{2cm}}(x+1)^2 + \underline{\hspace{2cm}}(x+1)^3$$
- (a) Se uma função f tem um n -ésimo polinômio $p_n(x)$ em torno de $x = x_0$, então o n -ésimo resto $R_n(x)$ é definido por $R_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (b) Suponha que uma função f possa ser derivada cinco vezes num intervalo I contendo $x_0 = 2$ e que $|f^{(5)}(x)| \leq 20$ para todo x em I . Então $|R_4(x)| \leq \underline{\hspace{2cm}}$ para cada x em I .

EXERCÍCIOS 10.7

1. Em cada parte, encontre a aproximação quadrática local de f em $x = x_0$ e use-a para encontrar a aproximação linear local de f em $x = x_0$. Use um recurso gráfico para esboçar o gráfico de f e das duas aproximações numa mesma tela.
- (a) $f(x) = e^{-x}$; $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0$
 (c) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = \pi/2$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$
2. Em cada parte, use um CAS para encontrar a aproximação quadrática local de f em $x = x_0$ e use-a para encontrar a aproximação linear local de f em $x = x_0$.
- (a) $f(x) = e^{\text{sen } x}$; $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 9$
 (c) $f(x) = \text{arc sec } x$; $x_0 = 2$
 (d) $f(x) = \text{arc sen } x$; $x_0 = 0$
3. (a) Encontre a aproximação quadrática local de \sqrt{x} em $x_0 = 1$.
 (b) Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar $\sqrt{1,1}$ e compare a sua aproximação com a obtida diretamente por seu recurso computacional. [Ver o Exemplo 1 da Seção 3.8 do Volume 1.]
4. (a) Encontre a aproximação quadrática local de $\cos x$ em $x_0 = 0$.
 (b) Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar $\cos 2^\circ$ e compare a aproximação com a obtida diretamente por seu recurso computacional.
5. Use uma aproximação quadrática local apropriada para aproximar $\text{tg } 61^\circ$ e compare o resultado com o obtido diretamente por seu recurso computacional.
6. Use uma aproximação quadrática local apropriada para aproximar $\sqrt{36,03}$, e compare o resultado com o obtido diretamente por seu recurso computacional.

7-16 Encontre os polinômios de Maclaurin de ordens $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 e então obtenha o enésimo polinômio de Maclaurin para a função em notação de somatório.

- | | | |
|-------------------------|----------------------|------------------------|
| 7. e^{-x} | 8. e^{ax} | 9. $\cos \pi x$ |
| 10. $\text{sen } \pi x$ | 11. $\ln(1+x)$ | 12. $\frac{1}{1+x}$ |
| 13. $\cosh x$ | 14. $\text{senh } x$ | 15. $x \text{ sen } x$ |
| 16. $x e^x$ | | |

17-24 Encontre os polinômios de Taylor de ordens $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 em torno de $x = x_0$ e então encontre o enésimo polinômio de Taylor para a função em notação de somatório.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 17. e^x ; $x_0 = 1$ | 18. e^{-x} ; $x_0 = \ln 2$ |
| 19. $\frac{1}{x}$; $x_0 = -1$ | 20. $\frac{1}{x+2}$; $x_0 = 3$ |
| 21. $\text{sen } \pi x$; $x_0 = \frac{1}{2}$ | 22. $\cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$ |
| 23. $\ln x$; $x_0 = 1$ | 24. $\ln x$; $x_0 = e$ |

25. (a) Encontre o terceiro polinômio de Maclaurin para
- $$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$$
- (b) Encontre o terceiro polinômio de Taylor em torno de $x = 1$ para
- $$f(x) = 1 + 2(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3$$

26. (a) Encontre o enésimo polinômio de Maclaurin para
- $$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$
- (b) Encontre o enésimo polinômio de Taylor em torno de $x = 1$ para
- $$f(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \dots + c_n(x-1)^n$$

27-30 Encontre os quatro primeiros polinômios de Taylor distintos em torno de $x = x_0$ e use um recurso computacional para fazer o gráfico da função dada e dos polinômios de Taylor na mesma tela.

27. $f(x) = e^{-2x}$; $x_0 = 0$ 28. $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = \pi/2$
 29. $f(x) = \cos x$; $x_0 = \pi$ 30. $\ln(x+1)$; $x_0 = 0$

31. Use o método do Exemplo 6 para aproximar \sqrt{e} até quatro casas decimais de precisão, e verifique o seu trabalho comparando a sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora. [Sugestão: Escreva \sqrt{e} como $e^{0,5}$.]
32. Use o método do Exemplo 6 para aproximar $1/e$ até três casas decimais de precisão, e verifique seu trabalho comparando a sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
33. Mostre que o enésimo polinômio de Taylor para $\text{senh } x$ em torno de $x = \ln 4$ é

$$\sum_{k=0}^n \frac{16 - (-1)^k}{8k!} (x - \ln 4)^k$$

34. (a) A figura abaixo mostra um setor de raio r e ângulo central 2α . Supondo que o ângulo α seja pequeno, use a aproximação quadrática local de $\cos \alpha$ em $\alpha = 0$ para mostrar que $x \approx r\alpha^2/2$.
- (b) Supondo que a Terra seja uma esfera com um raio de 4000 milhas, use o resultado da parte (a) para aproximar a distância máxima que um arco de 100 milhas ao longo do Equador pode divergir de sua corda.

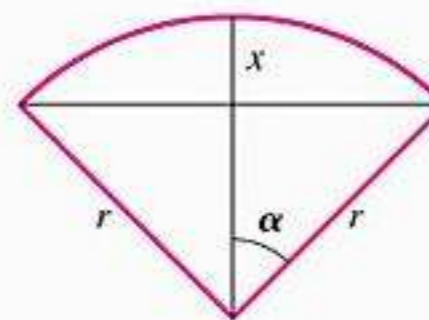
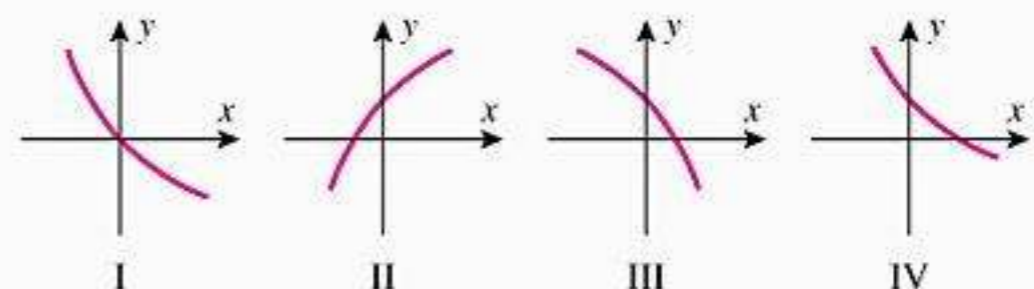


Figura Ex-34

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Quais das funções cujo gráfico está na figura a seguir tem $p(x) = 1 - x + 2x^2$ como o seu polinômio de Maclaurin de segunda ordem? Explique seu raciocínio.



36. Suponha que os valores de uma função f e de suas três primeiras derivadas em $x = 1$ sejam

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = -3, \quad f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 6$$

Obtenha tantos polinômios de Taylor para f quantos puder em torno de $x = 1$.

37. Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ as aproximações linear e quadrática locais de $f(x) = e^{\sin x}$ em $x = 0$.

- (a) Use um recurso computacional para gerar na mesma tela os gráficos de $f(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.
- (b) Construa uma tabela de valores de $f(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ para $x = -1,00; -0,75; -0,50; -0,25; 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$. Arredonde os valores para três casas decimais.
- (c) Gere o gráfico de $|f(x) - p_1(x)|$ e use-o para determinar um intervalo no qual $p_1(x)$ aproxime $f(x)$ com um erro de, no máximo, $\pm 0,01$. [Sugestão: reveja a discussão relativa à Figura 3.8.4 do Volume 1.]
- (d) Gere o gráfico de $|f(x) - p_2(x)|$ e use-o para determinar um intervalo no qual $p_2(x)$ aproxime $f(x)$ com um erro de, no máximo, $\pm 0,01$.

38. (a) Determine um intervalo $[0, b]$ no qual e^x possa ser aproximada por $1 + x + (x^2/2!)$ com até três casas decimais de precisão em todo o intervalo.

(b) Confira sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico de

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) \right|$$

sobre o intervalo obtido.

39-42 Use o Teorema da Estimativa do Resto para encontrar um intervalo contendo $x = 0$ no qual $f(x)$ possa ser aproximada por $p(x)$ com precisão de três casas decimais em cada ponto do intervalo. Confira sua resposta traçando o gráfico de $|f(x) - p(x)|$ sobre o intervalo encontrado.

39. $f(x) = \sin x$; $p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

40. $f(x) = \cos x$; $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

41. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $p(x) = 1 - x^2 + x^4$

42. $f(x) = \ln(1+x)$; $p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.7

1. $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$ 2. 1; 2; 2; $\frac{4}{3}$ 3. $3 - 4(x - 2) + 5(x - 2)^2$ 4. -1; 5; -10; 10
 5. (a) $f(x) - p_n(x)$ (b) $\frac{1}{6}|x - 2|^5$

10.8 SÉRIES DE MACLAURIN E DE TAYLOR; SÉRIES DE POTÊNCIAS

Lembre-se de que na seção anterior definimos o n ésimo polinômio de Taylor $p_n(x)$ em $x = x_0$ para uma função f de tal modo que os valores de suas primeiras n derivadas coincidisse com as de f em x_0 . Desse modo, é razoável antecipar que, para valores de x próximos de x_0 , à medida que n crescer, os valores de $p_n(x)$ sejam aproximações cada vez melhores de $f(x)$ e que, possivelmente, possam convergir a $f(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Nesta seção, exploraremos essa idéia.

SÉRIES DE MACLAURIN E DE TAYLOR

Na Seção 10.7 definimos o n ésimo polinômio de Maclaurin para uma função f como

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e o n ésimo polinômio de Taylor para f em torno de $x = x_0$ como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Não é um passo tão grande estender os conceitos de polinômios de Maclaurin e de Taylor para séries, bastando simplesmente não parar o índice do somatório em n . Assim, temos a definição seguinte.

10.8.1 DEFINIÇÃO Se a função f possuir derivadas de todas as ordens em x_0 , então dizemos que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \cdots \quad (1)$$

é a *série de Taylor para f em torno de $x = x_0$* . No caso especial em que $x_0 = 0$, essa série se torna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \cdots \quad (2)$$

caso em que é chamada *série de Maclaurin para f* .

Observe que os enésimos polinômios de Maclaurin e de Taylor são as enésimas somas parciais das correspondentes séries de Maclaurin e de Taylor.

► **Exemplo 1** Encontre a série de Maclaurin para

$$(a) e^x \quad (b) \sin x \quad (c) \cos x \quad (d) \frac{1}{1-x}$$

Solução (a) No Exemplo 2 da Seção 10.7 vimos que o enésimo polinômio de Maclaurin para e^x é

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Assim, a série de Maclaurin para e^x é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Solução (b) No Exemplo 4(a) da Seção 10.7 vimos que os polinômios de Maclaurin para $\sin x$ são dados por

$$p_{2k+1}(x) = p_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Assim, a série de Maclaurin para $\sin x$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

Solução (c) No Exemplo 4(b) da Seção 10.7 vimos que os polinômios de Maclaurin para $\cos x$ são dados por

$$p_{2k}(x) = p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Assim, a série de Maclaurin para $\cos x$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

Solução (d) No Exemplo 4(c) da Seção 10.7 vimos que o n ésimo polinômio de Maclaurin para $1/(1-x)$ é

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Assim, a série de Maclaurin para $1/(1-x)$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots \blacktriangleleft$$

Exemplo 2 Encontre a série de Taylor para $1/x$ em torno de $x = 1$.

Solução No Exemplo 5 da Seção 10.7 vimos que o n ésimo polinômio de Taylor para $1/x$ em torno de $x = 1$ é

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n$$

Assim, a série de Taylor para $1/x$ em torno de $x = 1$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^k (x-1)^k + \dots \blacktriangleleft$$

■ SÉRIES DE POTÊNCIAS EM x

As séries de Maclaurin e de Taylor diferem das séries que consideramos nas Seções 10.3 até 10.6 pois seus termos, em vez de serem meramente constantes, envolvem, em vez disso, uma variável. Essas séries são exemplos de *séries de potências*, que passamos a definir.

Se c_0, c_1, c_2, \dots são constantes e x é uma variável, então uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots \quad (3)$$

é denominada uma *série de potências em x* . Alguns exemplos são

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^k &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1, essas são as séries de Maclaurin para as funções $1/(1-x)$, e^x e $\cos x$, respectivamente. Na verdade, toda série de Maclaurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$$

é uma série de potências em x .

RAIO E INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Quando numa série de potências $\sum c_k x^k$ a variável x for substituída por um valor numérico, obtemos uma série de números que pode convergir ou não. Isso nos leva ao problema de determinar o conjunto de valores de x nos quais uma dada série de potências converge; esse é o *conjunto de convergência*.

Observe que toda série de potências em x converge em $x = 0$, uma vez que a substituição desse valor em (3) produz a série

$$c_0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

cuja soma é c_0 . Em alguns casos, $x = 0$ pode ser o único ponto no conjunto de convergência em outros, o conjunto de convergência é algum intervalo finito ou infinito contendo $x = 0$. Esse é o conteúdo do teorema seguinte, cuja prova será omitida.

10.8.2 TEOREMA *Para cada série de potências em x , exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (a) *A série converge somente em $x = 0$.*
- (b) *A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todos os valores reais de x .*
- (c) *A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todo x de algum intervalo aberto finito $(-R, R)$ e diverge se $x < -R$ ou $x > R$. Em cada um dos pontos $x = R$ ou $x = -R$, a série pode convergir absolutamente, convergir condicionalmente, ou divergir, dependendo da série considerada.*

Esse teorema afirma que o conjunto de convergência para uma série de potências em x é sempre um intervalo centrado em $x = 0$ (possivelmente, o próprio ponto $x = 0$ ou infinito). Por essa razão, o conjunto de convergência de uma série de potências em x é chamado de *intervalo de convergência*. No caso em que o conjunto de convergência é o único ponto $x = 0$, dizemos que a série tem *raio de convergência 0*, no caso em que o conjunto de convergência é $(-\infty, +\infty)$, dizemos que a série tem *raio de convergência $+\infty$* , e no caso em que o conjunto de convergência estende-se de $-R$ a R , dizemos que a série tem *raio de convergência R* (Figura 10.8.1).

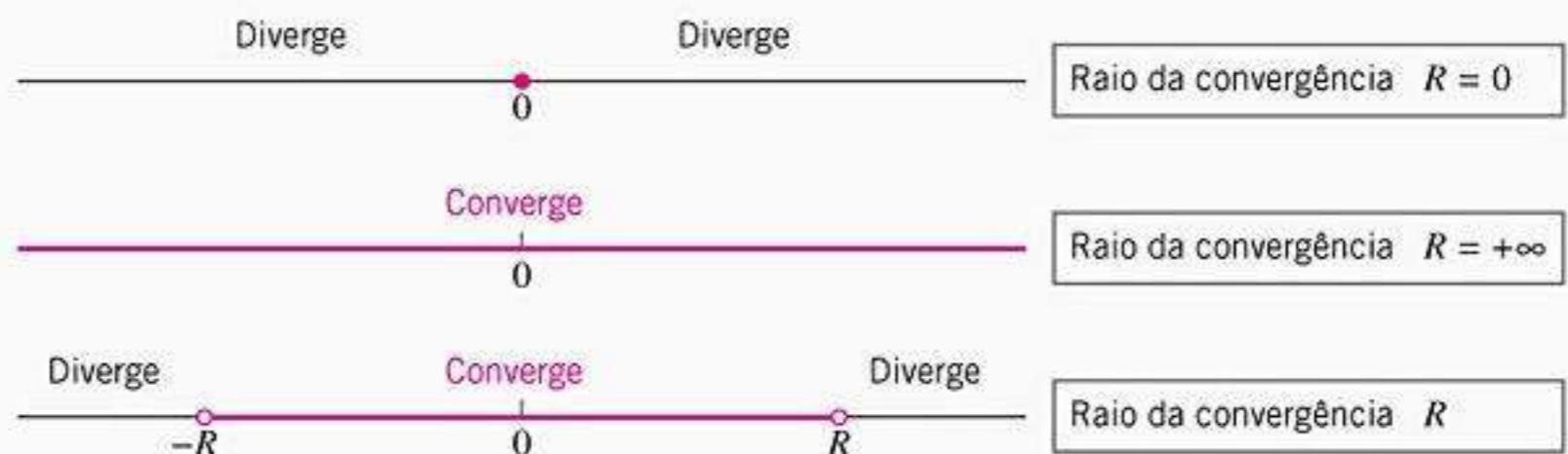


Figura 10.8.1

DETERMINANDO O INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

O procedimento usual para determinar o intervalo de convergência de uma série de potências é aplicar o teste da razão para a convergência absoluta (Teorema 10.6.5). O exemplo seguinte ilustra como isso funciona.

► **Exemplo 3** Determine o intervalo de convergência e o raio de convergência das seguintes séries de potências.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k (k+1)}$

Solução (a) Aplicamos o teste da razão para a convergência absoluta. Temos

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x| = |x|$$

portanto, a série converge absolutamente se $\rho = |x| < 1$ e diverge se $\rho = |x| > 1$. O teste é inconclusivo se $|x| = 1$ (isto é, se $x = 1$ ou $x = -1$), o que significa que devemos investigar a convergência nesses pontos separadamente. Nestes pontos, a série torna-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \quad \boxed{x = 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \boxed{x = -1}$$

ambas as quais divergem; assim, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-1, 1)$ e o raio de convergência é $R = 1$.

Solução (b) Aplicando o teste da razão para a convergência absoluta, obtemos

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = 0$$

Uma vez que $\rho < 1$ para todo x , a série converge absolutamente em todo x . Logo, o intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$ e o raio de convergência é $R = +\infty$.

Solução (c) Se $x \neq 0$, então o teste da razão para a convergência absoluta fornece

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(k+1)!x^{k+1}}{k!x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |(k+1)x| = +\infty$$

Portanto, a série diverge em todos os valores de x diferentes de zero. Assim, o intervalo de convergência é o único ponto $x = 0$ e o raio de convergência é $R = 0$.

Solução (d) Uma vez que $|(-1)^k| = |(-1)^{k+1}| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{3^{k+1}(k+2)} \cdot \frac{3^k(k+1)}{x^k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{|x|}{3} \cdot \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \right] \\ &= \frac{|x|}{3} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + (1/k)}{1 + (2/k)} \right) = \frac{|x|}{3} \end{aligned}$$

O teste da razão para a convergência absoluta implica que a série converge absolutamente se $|x| < 3$ e diverge se $|x| > 3$. O teste da razão deixa de fornecer qualquer informação quando $|x| = 3$, logo os casos $x = -3$ e $x = 3$ precisam ser analisados separadamente. Substituindo $x = -3$ na série dada, resulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-3)^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^k 3^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

que é a série harmônica divergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Substituindo $x = 3$ na série dada resulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

que é a série harmônica alternada condicionalmente convergente. Assim, o intervalo de convergência da série dada é $(-3, 3]$ e o raio de convergência é $R = 3$. ◀

■ SÉRIE DE POTÊNCIAS EM $x - x_0$

Se x_0 é uma constante, e se x for substituído por $x - x_0$ em (3), então a série resultante tem a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_k(x - x_0)^k + \cdots$$

Isso é chamado de *série de potências em $x - x_0$* . Alguns exemplos são

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k+1} = 1 + \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots \quad x_0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x+3)^k}{k!} = 1 - (x+3) + \frac{(x+3)^2}{2!} - \frac{(x+3)^3}{3!} + \cdots \quad x_0 = -3$$

A primeira é uma série de potências em $x - 1$ e a segunda é uma série de potências em $x + 3$. Note que uma série de potências em x é uma série de potências em $x - x_0$, na qual $x_0 = 0$. Mais geralmente, a série de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

é uma série de potências em $x - x_0$.

O resultado principal sobre a convergência de uma série de potências em $x - x_0$ pode ser obtido substituindo x por $x - x_0$ no Teorema 10.8.2. Isso leva ao teorema seguinte.

10.8.3 TEOREMA Para uma série de potências $\sum c_k (x - x_0)^k$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira.

- (a) A série converge somente em $x = x_0$.
- (b) A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todos os valores reais de x .
- (c) A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todo x de algum intervalo aberto finito $(x_0 - R, x_0 + R)$ e diverge se $x < x_0 - R$ ou $x > x_0 + R$. Em cada um dos pontos $x = x_0 - R$ ou $x = x_0 + R$, a série pode convergir absolutamente, convergir condicionalmente, ou divergir, dependendo da série considerada.

Tem-se a partir deste teorema que o conjunto de valores nos quais uma série de potências em $x - x_0$ converge é sempre um intervalo centrado em $x = x_0$, denominado *intervalo de convergência* (Figura 10.8.2). Na parte (a) do Teorema 10.8.3, o intervalo de convergência reduz-se a um único ponto $x = x_0$, caso em que dizemos que a série tem *raio de convergência* $R = 0$; na parte (b), o intervalo de convergência é infinito (toda a reta real), caso em que dizemos que a série tem *raio de convergência* $R = +\infty$; e na parte (c), o intervalo estende-se de $x_0 - R$ a $x_0 + R$, caso em que dizemos que a série tem *raio de convergência* R .

► **Exemplo 4** Determine o intervalo de convergência e o raio de convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2}$$

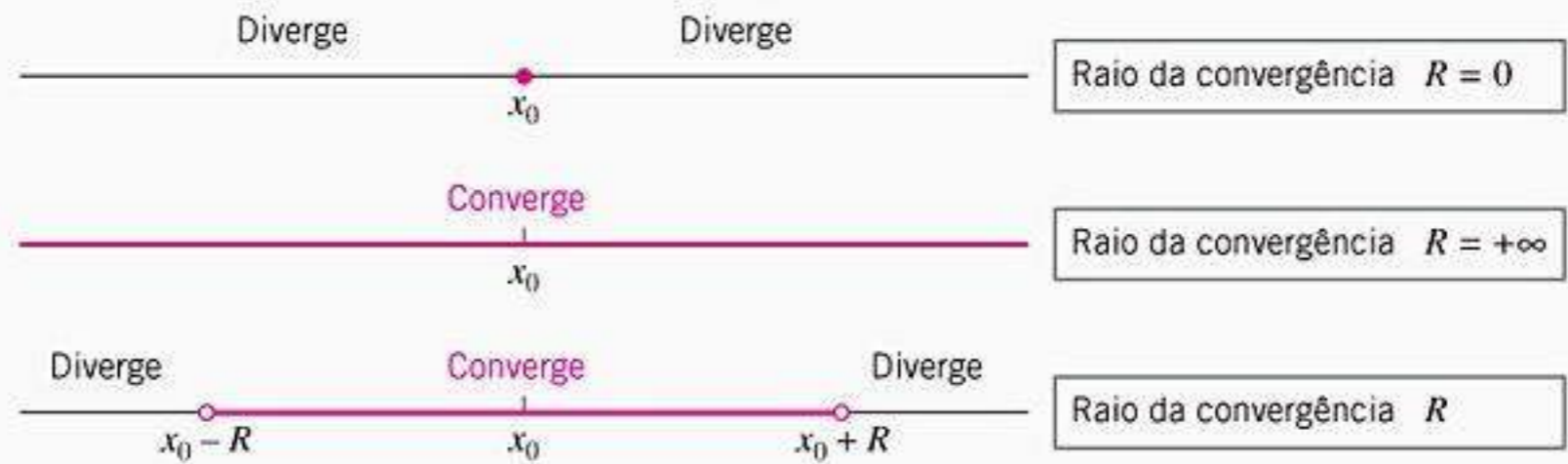


Figura 10.8.2

Solução Aplicando o teste da razão para a convergência absoluta, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-5)^{k+1}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{(x-5)^k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[|x-5| \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right] \\ &= |x-5| \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+(1/k)} \right)^2 = |x-5| \end{aligned}$$

Assim, a série converge absolutamente se $|x-5| < 1$, ou $-1 < x-5 < 1$ ou $4 < x < 6$. A série diverge se $x < 4$ ou $x > 6$.

Para determinar o comportamento da convergência nos pontos extremos $x = 4$ e $x = 6$, substituímos esses valores na série dada. Se $x = 6$, a série torna-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

que é uma série p convergente ($p = 2$). Se $x = 4$, a série torna-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

Uma vez que esta série converge absolutamente, o intervalo de convergência da série dada é $[4, 6]$. O raio de convergência é $R = 1$ (Figura 10.8.3). ◀

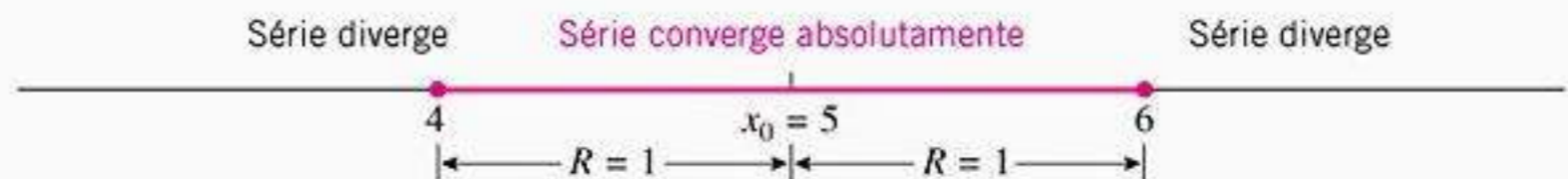


Figura 10.8.3

Será sempre uma perda de tempo testar a convergência nas extremidades do intervalo de convergência usando o teste da razão, uma vez que ρ será sempre 1 nestes pontos se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$$

existir. Explique por que isso é assim.

■ FUNÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Se uma função f for expressa como uma série de potências em algum intervalo, então dizemos que a série de potências **representa** a função f naquele intervalo ou, então, que f está **representada** por uma série de potências naquele intervalo. Por exemplo, vimos no Exemplo 4(b) da Seção 10.3 que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

se $|x| < 1$, de modo que essa série de potências representa a função $1/(1-x)$ no intervalo $-1 < x < 1$.

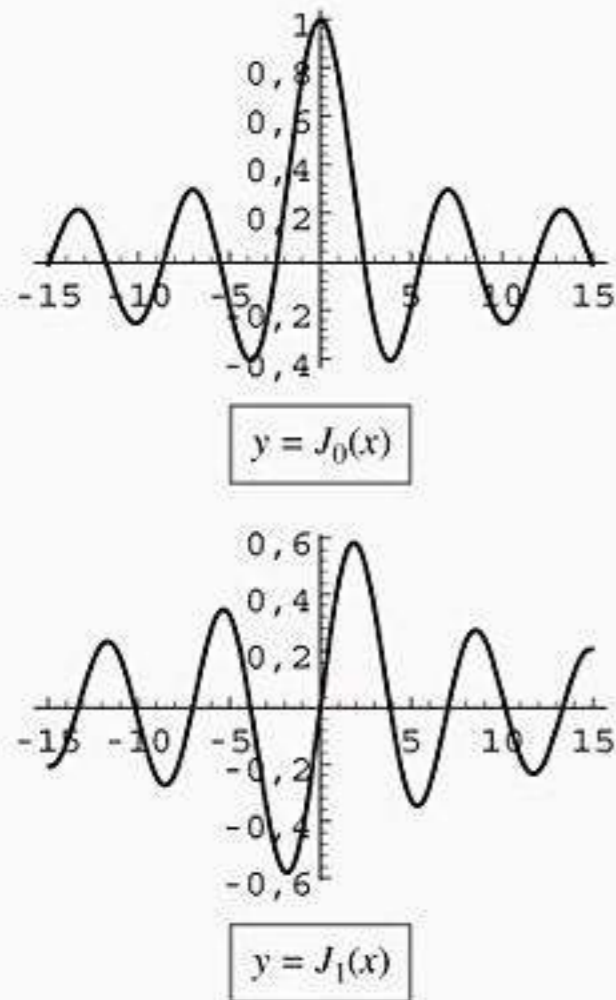


Figura 10.8.4

Algumas vezes, funções novas de fato se originam como séries de potências, e as propriedades das funções são desenvolvidas trabalhando com suas representações em séries de potências. Por exemplo, as funções

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots \quad (4)$$

e

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} (k!) (k+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 (1!) (2!)} + \frac{x^5}{2^5 (2!) (3!)} - \dots \quad (5)$$

que são chamadas **funções de Bessel** em homenagem ao matemático e astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Elas surgem naturalmente no estudo do movimento planetário e em vários problemas que envolvem fluxo de calor.

Para encontrar o domínio dessas funções, precisamos determinar onde convergem as séries de potências que as definem. Por exemplo, no caso de $J_0(x)$, temos

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)} [(k+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2k} (k!)^2}{x^{2k}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1 \end{aligned}$$

de modo que a série converge em todo x ; isto é, o domínio de $J_0(x)$ é $(-\infty, +\infty)$. Deixamos como exercício mostrar que a série de potências de $J_1(x)$ também converge em todo x . Gráficos gerados por computador de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ estão dados na Figura 10.8.4.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitos programas CAS têm as funções de Bessel como parte de seu repertório. Se você tiver um CAS, com funções de Bessel, gere os gráficos mostrados na Figura 10.8.4.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.8 (Ver página 694 para respostas.)

1. Se f tiver derivadas de todas as ordens em x_0 , então a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$ é definida por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

2. Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{k+1} x^{k+1}}{2^k x^k} \right| = 2|x|$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ é _____.

3. Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(3^{k+1} x^{k+1}) / (k+1)!}{(3^k x^k) / k!} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{3x}{k+1} \right| = 0$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} (3^k / k!) x^k$ é _____.

4. (a) Como

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-4)^{k+1} / \sqrt{k+1}}{(x-4)^k / \sqrt{k}} \right| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{\frac{k}{k+1}} (x-4) \right| \\ &= |x-4| \end{aligned}$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\sqrt{k})(x-4)^k$ é _____.

- (b) Se $x = 3$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} (x-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^k$$



Essa série converge ou diverge?

- (c) Se $x = 5$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} (x-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Essa série converge ou diverge?

- (d) O intervalo de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\sqrt{k})(x-4)^k$ é _____.

EXERCÍCIOS 10.8  

1-10 Use a notação de somatório para escrever a série de Maclaurin para a função dada.

1. e^{-x} 2. e^{ax} 3. $\cos \pi x$ 4. $\sin \pi x$
 5. $\ln(1+x)$ 6. $\frac{1}{1+x}$ 7. $\cosh x$
 8. $\sinh x$ 9. $x \sin x$ 10. xe^x

11-18 Use a notação de somatório para escrever a série de Taylor em torno de $x = x_0$ para a função dada.

11. $e^x; x_0 = 1$ 12. $e^{-x}; x_0 = \ln 2$
 13. $\frac{1}{x}; x_0 = -1$ 14. $\frac{1}{x+2}; x_0 = 3$
 15. $\sin \pi x; x_0 = \frac{1}{2}$ 16. $\cos x; x_0 = \frac{\pi}{2}$
 17. $\ln x; x_0 = 1$ 18. $\ln x; x_0 = e$

19-22 Determine o intervalo de convergência da série de potências e encontre uma função conhecida que esteja representada pela série de potências naquele intervalo.

19. $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots$
 20. $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2k} + \dots$
 21. $1 + (x-2) + (x-2)^2 + \dots + (x-2)^k + \dots$
 22. $1 - (x+3) + (x+3)^2 - (x+3)^3 + \dots + (-1)^k (x+3)^k + \dots$
 23. Suponha que a função f esteja representada pela série de potências

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{2^k} + \dots$$

(a) Encontre o domínio de f . (b) Encontre $f(0)$ e $f(1)$.

24. Suponha que a função f esteja representada pela série de potências

$$f(x) = 1 - \frac{x-5}{3} + \frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(x-5)^3}{3^3} + \dots$$

(a) Encontre o domínio de f . (b) Encontre $f(3)$ e $f(6)$.

25-48 Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência.

25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ 26. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$ 27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$
 28. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k} x^k$ 29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2} x^k$ 30. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$
 31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ 32. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$
 33. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ 34. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

35. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 36. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{k^{3/2}}$
 37. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k$ 38. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k(\ln k)^2}$
 39. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2}$ 40. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{2^k}$
 41. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x+1)^k}{k}$ 42. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-4)^k}{(k+1)^2}$
 43. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$ 44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k^3} (x-2)^k$
 45. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{k^2+4}$ 46. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)(x-3)^k}{k}$
 47. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k (x-1)^{2k}}{(2k+1)!}$ 48. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$

49. Use o teste da raiz para determinar o intervalo de convergência de

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$$

50. Determine o domínio da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{(2k-2)!} x^k$$

51. Mostre que a série


$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$$

é a série de Maclaurin para a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \cosh \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

[Sugestão: Use as séries de Maclaurin para $\cos x$ e $\cosh x$ para obter a série para $\cos \sqrt{x}$, onde $x \geq 0$ e $\cosh \sqrt{-x}$, onde $x \leq 0$.]

ENFOCANDO CONCEITOS

 **52.** Se uma função f estiver representada por uma série de potências num intervalo, então os gráficos das somas parciais podem ser usados como aproximações para o gráfico de f .

- (a) Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $1/(1-x)$ junto com o gráfico das quatro primeiras somas parciais da sua série de Maclaurin sobre o intervalo $(-1, 1)$.
 (b) Em termos gerais, onde é que os gráficos das somas parciais são mais precisos?

53. Prove as afirmações:

- (a) Se f é uma função par, então todas as potências ímpares de x na série de Maclaurin de f têm coeficiente 0.
 (b) Se f é uma função ímpar, então todas as potências pares de x na série de Maclaurin de f têm coeficiente 0.

54. Suponha que a série de potência $\sum c_k(x - x_0)^k$ tenha raio de convergência R e que p seja uma constante não-nula. O que podemos dizer sobre o raio de convergência da série de potência $\sum pc_k(x - x_0)^k$? Explique seu raciocínio. [Sugestão: Ver Teorema 10.4.3.]
55. Suponha que a série de potências $\sum c_k(x - x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito R e que a série de potências $\sum d_k(x - x_0)^k$ tenha um raio de convergência $+\infty$. O que podemos dizer sobre o raio de convergência de $\sum(c_k + d_k)(x - x_0)^k$? Explique seu raciocínio.
56. Suponha que a série de potências $\sum c_k(x - x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito R_1 e que a série de potências $\sum d_k(x - x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito R_2 . O que podemos dizer sobre o raio de convergência de $\sum(c_k + d_k)(x - x_0)^k$? Explique seu raciocínio. [Sugestão: o caso $R_1 = R_2$ requer atenção especial.]
57. Mostre que se p for um inteiro positivo, então a série de potências
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pk)!}{(k!)^p} x^k$$
- tem um raio de convergência igual a $1/p^p$.
58. Mostre que se p e q forem inteiros positivos, então a série de potências
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!(k+q)!} x^k$$
- tem um raio de convergência igual a $+\infty$.
59. Mostre que a representação em série de potências da função de Bessel $J_1(x)$ converge em todo x [Fórmula (5)].
60. Se a constante p na série p geral for substituída por uma variável x para $x > 1$, então a função resultante é chamada **função zeta de Riemann** e é denotada por
- $$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$
- (a) Seja s_n a n ésima soma parcial da série para $\zeta(3,7)$. Determine n tal que s_n aproxime $\zeta(3,7)$ até duas casas decimais de precisão, e calcule s_n usando esse valor de n . [Sugestão: Use a desigualdade à direita no Exercício 32(b) da Seção 10.4 com $f(x) = 1/x^{3,7}$.]
- (b) Determine se o seu CAS sabe calcular a função zeta de Riemann diretamente. Se souber, compare o valor produzido pelo CAS com o valor de s_n obtido na parte (a).
61. Prove: Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{1/k} = L$ onde $L \neq 0$, então $1/L$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.
62. Prove: Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ tiver raio de convergência R , então a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}$ tem raio de convergência \sqrt{R} .
63. Prove: Se o intervalo de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ for $(x_0 - R, x_0 + R]$, então a série converge condicionalmente em $x_0 + R$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.8

1. $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $(-\infty, +\infty)$ 4. (a) 1 (b) converge (c) diverge (d) [3, 5]

10.9 CONVERGÊNCIA DE SÉRIES DE TAYLOR

Nesta seção, investigaremos quando uma série de Taylor para uma função converge àquela função em algum intervalo e consideraremos como as séries de Taylor podem ser usadas para aproximar os valores de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

■ O PROBLEMA DA CONVERGÊNCIA DE SÉRIES DE TAYLOR

Lembre-se que o n ésimo polinômio de Taylor para uma função f em torno de $x = x_0$ tem a propriedade de que seu valor e os de suas n primeiras derivadas coincidem com aquelas de f em x_0 . Quando n cresce, cada vez mais derivadas vão coincidindo, portanto é razoável esperar que, para valores de x próximos de x_0 , os valores dos polinômios de Taylor devam convergir para o valor de $f(x)$; isto é,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1)$$

Contudo, o n ésimo polinômio de Taylor para f é a n ésima soma parcial da série de Taylor para f , de modo que (1) é equivalente a afirmar que a série de Taylor para f converge no ponto x , e que a soma é $f(x)$. Assim, somos levados a considerar o problema seguinte.

É importante entender que o Problema 10.9.1 se refere a mais do que simplesmente a convergência da série de Taylor de f ; o problema é saber se a série converge à própria função f . Na verdade, é possível que a série de Taylor de uma função f convirja a valores diferentes de $f(x)$ para certos valores de x (ver Exercício 14).

10.9.1 PROBLEMA Dada uma função f que tem derivadas de todas as ordens em $x = x_0$, determine se há um intervalo aberto contendo x_0 tal que $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor em torno de $x = x_0$ em cada ponto do intervalo; isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2)$$

para todos valores de x do intervalo.

Uma maneira de verificar que (1) vale é mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right] = 0$$

Contudo, a diferença que aparece do lado esquerdo dessa equação é o n ésimo resto da série de Taylor [Fórmula (12) da Seção 10.7]. Assim, temos o resultado seguinte.

10.9.2 TEOREMA A igualdade

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

é verdadeira em um ponto x se e somente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

■ **ESTIMANDO O ENÉSIMO RESTO**

É relativamente raro poder provar diretamente que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Geralmente, isso é provado indiretamente, obtendo cotas apropriadas de $|R_n(x)|$ e aplicando o Teorema do Confronto para Seqüências. Uma dessas cotas superiores úteis é fornecida pelo Teorema da Estimativa do Resto (Teorema 10.7.4). Lembre-se de que esse teorema afirma que se M for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ num intervalo I que contenha x_0 , então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (3)$$

para cada x em I .

O seguinte exemplo ilustra como é aplicado o Teorema da Estimativa do Resto.

► **Exemplo 1** Mostre que a série de Maclaurin para $\cos x$ converge para $\cos x$ em cada x , isto é

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

Solução A partir do Teorema 10.9.2, devemos mostrar que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ para todo x . Para isso, seja $f(x) = \cos x$, de modo que, para todo x temos

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x \quad \text{ou} \quad f^{(n+1)}(x) = \pm \sin x$$

Em todos os casos, temos $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, logo podemos aplicar (3) com $M = 1$ e $x_0 = 0$ para concluir que

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (4)$$

O método usado no Exemplo 1 pode ser facilmente modificado para provar que as séries de Taylor para $\sin x$ e $\cos x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ convergem para $\sin x$ e $\cos x$, respectivamente, em cada x (Exercícios 21 e 22). Para referência, há uma lista de algumas das mais importantes séries de Maclaurin na Tabela 10.9.1, no final desta seção.

Contudo, segue da Fórmula (5) da Seção 10.2 com $n+1$ em lugar do n e $|x|$ em lugar de x que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{5}$$

Usando esse resultado e o Teorema do Confronto para Seqüências (Teorema 10.1.5) decorre de (4) que $|R_n(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$; e portanto que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ (Teorema 10.1.6). Como isto é verdadeiro para todo x , provamos que a série de Maclaurin para $\cos x$ converge para $\cos x$ em cada x . Isso está ilustrado na Figura 10.9.1, onde podemos ver como as sucessivas somas parciais aproximam cada vez mais a curva da função cosseno. ◀

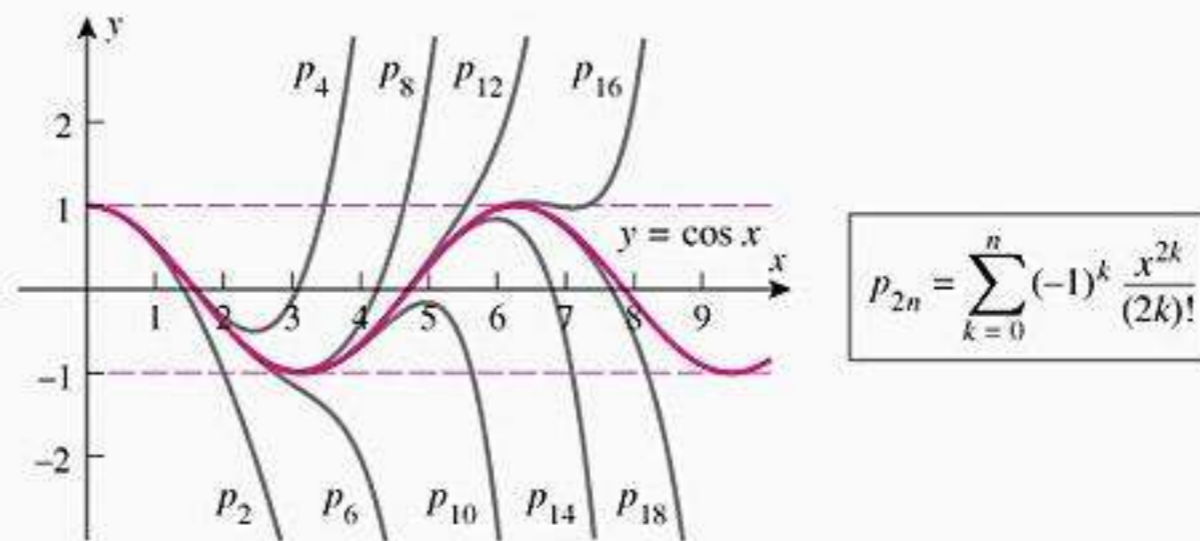


Figura 10.9.1

■ APROXIMANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em geral, para aproximar o valor de uma função f em um ponto x usando uma série de Taylor, há duas questões básicas que devem ser respondidas:

- Em torno de qual ponto x_0 deveria ser expandida a série de Taylor?
- Quantos termos na série deveriam ser usados para alcançar a precisão desejada?

Em resposta à primeira questão, x_0 precisa ser um ponto em que a derivada de f possa ser calculada facilmente, uma vez que esses valores são necessários para os coeficientes da série de Taylor. Além disso, se a função f estiver sendo calculada no ponto x , então x_0 deve ser escolhido tão próximo quanto possível de x , uma vez que as séries de Taylor tendem a convergir mais rapidamente próximas de x_0 . Por exemplo, para aproximar $\sin 3^\circ (= \pi/60$ radianos), seria razoável tomar $x_0 = 0$, pois $\pi/60$ está próximo de 0 e as derivadas de $\sin x$ são fáceis de calcular em 0. Por outro lado, para aproximar $\sin 85^\circ (= 17\pi/36$ radianos), seria mais natural tomar $x_0 = \pi/2$, pois $17\pi/36$ está próximo de $\pi/2$ e as derivadas de $\sin x$ são fáceis de calcular em $\pi/2$.

A resposta da segunda questão colocada acima, o número de termos necessários para obtenção de uma determinada precisão, deve ser determinada caso a caso. O próximo exemplo dá dois métodos para fazer isso.

► **Exemplo 2** Use a série de Maclaurin para $\sin x$ para aproximar $\sin 3^\circ$ com precisão de cinco casas decimais.

Solução Na série de Maclaurin

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{6}$$

se supõe que o ângulo x esteja em radianos (pois as fórmulas de diferenciação de funções trigonométricas são deduzidas com esta hipótese). Como $3^\circ = \pi/60$ radianos, segue de (6) que

$$\sin 3^\circ = \sin \frac{\pi}{60} = \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{(\pi/60)^3}{3!} + \frac{(\pi/60)^5}{5!} - \frac{(\pi/60)^7}{7!} + \dots \quad (7)$$

Precisamos determinar quantos termos são necessários na série para obter-se uma precisão de cinco casas decimais. Vamos considerar duas abordagens possíveis, uma usando o Teorema da Estimativa do Resto (Teorema 10.7.4) e outra usando o fato de que (7) satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada (Teorema 10.6.1).

Método 1 (Teorema da Estimativa do Resto)

Já que queremos obter cinco casas decimais de precisão, nosso objetivo é escolher n de tal modo que o valor absoluto do enésimo resto em $x = \pi/60$ não exceda $0,000005 = 5 \times 10^{-6}$, isto é,

$$\left| R_n \left(\frac{\pi}{60} \right) \right| \leq 0,000005 \quad (8)$$

Porém, se fizermos $f(x) = \sin x$, então $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$ e, em ambos os casos, $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x . Assim, tem-se a partir do Teorema da Estimativa do Resto com $M = 1$, $x_0 = 0$ e $x = \pi/60$ que

$$\left| R_n \left(\frac{\pi}{60} \right) \right| \leq \frac{(\pi/60)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Assim, (8) estará satisfeita se escolhermos n de tal modo que

$$\frac{(\pi/60)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0,000005$$

Com a ajuda de uma calculadora podemos verificar que o menor valor de n que satisfaz este critério é $n = 3$. Assim, para obter a precisão de cinco casas decimais precisamos apenas dos termos até a terceira potência em (7). Resulta então

$$\sin 3^\circ \approx \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{(\pi/60)^3}{3!} \approx 0,05234 \quad (9)$$

(verifique). Para comparar, uma calculadora dá $\sin 3^\circ \approx 0,05233595624$, que coincide com (9) quando arredondado até a quinta casa decimal.

Método 2 (O Teste da Série Alternada)

Deixamos a cargo do leitor conferir que (7) satisfaz as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 10.6.1).

Seja s_n a soma dos termos em (7) até inclusive a enésima potência de $\pi/60$. Como os expoentes na série são inteiros ímpares, o inteiro n deve ser ímpar, e o expoente do primeiro termo não incluído na soma s_n deve ser $n + 2$. Assim, tem-se a partir da parte (b) do Teorema 10.6.2 que

$$|\sin 3^\circ - s_n| < \frac{(\pi/60)^{n+2}}{(n+2)!}$$

Isso significa que para cinco casas decimais de precisão devemos olhar para o primeiro inteiro ímpar positivo tal que

$$\frac{(\pi/60)^{n+2}}{(n+2)!} \leq 0,000005$$

Com a ajuda de uma calculadora, podemos verificar que o menor valor de n que satisfaz este critério é $n = 3$. Isso coincide com o resultado obtido acima usando o Teorema da Estimativa do Resto e, portanto, leva à aproximação (9) como antes. ◀

■ ERRO DE TRUNCAMENTO E DE ARREDONDAMENTO

Há dois tipos de erros que ocorrem quando computamos com séries. O primeiro, chamado de *erro de truncamento*, é o erro que resulta quando uma série é aproximada por uma soma parcial; e o segundo, chamado de *erro de arredondamento*, é o erro que surge em aproximações na computação numérica. Por exemplo, na nossa dedução de (9) tomamos $n = 3$ para manter o erro de truncamento abaixo de 0,000005. Contudo, para calcular a soma parcial tivemos que aproximar π , desse modo introduzindo um erro de arredondamento. Se não tivéssemos tido cuidado na escolha da aproximação, o erro de arredondamento poderia facilmente ter degradado o resultado final.

Os métodos para estimar e controlar o erro de arredondamento são estudados em um ramo da Matemática chamado *Análise Numérica*. Entretanto, como um método empírico, para atingir a n -ésima casa decimal de precisão no resultado final, todo cálculo intermediário deve ter precisão de, no mínimo, $n + 1$ casas decimais. Assim, em (9) são necessárias no mínimo seis casas decimais de precisão em π para alcançar a precisão de cinco casas decimais no resultado numérico final. Como uma questão prática, um bom procedimento operacional é realizar todos os cálculos intermediários com o número máximo de dígitos que sua calculadora conseguir e depois arredondar no final.

■ APROXIMANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

► **Exemplo 3** Mostre que a série de Maclaurin para e^x converge para e^x em cada x , isto é, que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

Solução Seja $f(x) = e^x$, logo

$$f^{(n+1)}(x) = e^x$$

Queremos mostrar que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ para todo x no intervalo $-\infty < x < +\infty$. Entretanto, será útil aqui considerar os casos em que $x \leq 0$ e $x > 0$ separadamente. Se $x \leq 0$, então tomaremos o intervalo I no Teorema de Estimativa do Resto (Teorema 10.7.4) como sendo $[x, 0]$ e, se $x > 0$, então tomaremos como sendo $[0, x]$. Como $f^{(n+1)}(x) = e^x$ é uma função crescente, tem-se que se c está no intervalo $[x, 0]$, então

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq |f^{(n+1)}(0)| = e^0 = 1$$

e se c está no intervalo $[0, x]$, então

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq |f^{(n+1)}(x)| = e^x$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 10.7.4, com $M = 1$ no caso em que $x \leq 0$ e com $M = e^x$ no caso em que $x > 0$. Disso resulta

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{se } x \leq 0$$

$$0 \leq |R_n(x)| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{se } x > 0$$

Assim, em ambos os casos segue de (5) e do Teorema do Confronto para Sequências que $|R_n(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, o que, por sua vez, implica que $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Como isso é verdadeiro para todo x , provamos que a série de Maclaurin para e^x converge para e^x em cada x . ◀

Como a série de Maclaurin para e^x converge a e^x em cada x , podemos usar somas parciais da série de Maclaurin para aproximar potências de e com precisão arbitrária. Lembre-se

de que no Exemplo 6 da Seção 10.7 conseguimos utilizar o Teorema da Estimativa do Resto para determinar que o valor do nono polinômio de Maclaurin de e^x em $x = 1$ dá uma aproximação de e com precisão de cinco casas decimais:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,71828$$

■ **APROXIMANDO LOGARITMOS**

A série de Maclaurin

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1) \quad (10)$$

é o ponto inicial para a aproximação do logaritmo natural. Infelizmente, a utilidade desta série é limitada pela sua convergência lenta e pela restrição $-1 < x \leq 1$. No entanto, se substituirmos x por $-x$ nesta série, obtemos

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (-1 \leq x < 1) \quad (11)$$

e subtraindo (11) de (10), obtemos

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right) \quad (-1 < x < 1) \quad (12)$$

A série (12), obtida primeiro por James Gregory em 1668, pode ser usada para calcular o logaritmo natural de qualquer número positivo y tomando

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

ou, de modo equivalente,

$$x = \frac{y-1}{y+1} \quad (13)$$

e notando que $-1 < x < 1$. Por exemplo, para computar $\ln 2$ tomamos $y = 2$ em (13), do que resulta $x = \frac{1}{3}$. Substituindo este valor em (12) dá

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \dots\right] \quad (14)$$

No Exercício 19 pediremos que o leitor mostre que pode ser obtida uma precisão de cinco casas decimais usando a soma parcial com termos até a décima-terceira potência de $\frac{1}{3}$. Assim, com precisão de cinco casas decimais

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}{13}\right] \approx 0,69315$$

(verifique). Como comparação, uma calculadora dá $\ln 2 \approx 0,69314718056$, que coincide com a aproximação acima quando arredondado para 5 casas decimais.

■ **APROXIMANDO π**

Na próxima seção, mostraremos que

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (15)$$

Tomando $x = 1$, obtemos

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

ou

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right]$$

No Exemplo 2 da Seção 10.6, afirmamos sem provar que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Este resultado pode ser obtido tomando $x = 1$ em (10) mas como já indicamos no texto, esta série converge lentamente demais para ter algum valor prático.



James Gregory (1638-1675) Matemático e astrônomo escocês. Gregory, filho de um pastor, foi famoso em sua época como o inventor do telescópio de reflexão, denominado gregoriano em sua homenagem. Embora ele não seja em geral considerado um grande matemático, muitos dos seus trabalhos foram estudados por Leibniz e Newton e, sem dúvida alguma, influenciaram algumas de suas descobertas. Há um manuscrito descoberto postumamente, que mostra ter Gregory antecipado a série de Taylor bem antes de Taylor.

foi famoso em sua época como o inventor do telescópio de reflexão, denominado gregoriano em sua homenagem. Embora ele não seja em geral considerado um grande matemático, muitos dos seus trabalhos foram estudados por Leibniz e Newton e, sem dúvida alguma, influenciaram algumas de suas descobertas. Há um manuscrito descoberto postumamente, que mostra ter Gregory antecipado a série de Taylor bem antes de Taylor.

Esta série famosa, obtida por Leibniz em 1674, converge tão lentamente que não possui qualquer valor computacional. Um procedimento mais prático para aproximar π usa a identidade

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \tag{16}$$

que foi deduzida no Exercício 61 da Seção 1.5, no Volume 1. Usando essa identidade e a série (15) para aproximar $\arctan \frac{1}{2}$ e $\arctan \frac{1}{3}$, o valor de π pode ser aproximado eficientemente com qualquer grau de precisão.

■ **SÉRIE BINOMIAL**

Se m for um número real, então a série de Maclaurin para $(1+x)^m$ é denominada *série binomial*; é dada por

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

No caso em que m for um inteiro não-negativo, a função $f(x) = (1+x)^m$ é um polinômio de grau m , portanto

$$f^{(m+1)}(0) = f^{(m+2)}(0) = f^{(m+3)}(0) = \dots = 0$$

e a série binomial reduz-se à conhecida expansão binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + x^m$$

que é válida para $-\infty < x < +\infty$.

Pode-se provar, que se m não for um número inteiro não-negativo, então a série binomial converge para $(1+x)^m$ se $|x| < 1$. Assim, para tais valores de x

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots \tag{17}$$

ou em notação sigma,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k \quad \text{se } |x| < 1 \tag{18}$$

Seja $f(x) = (1+x)^m$. Confira que

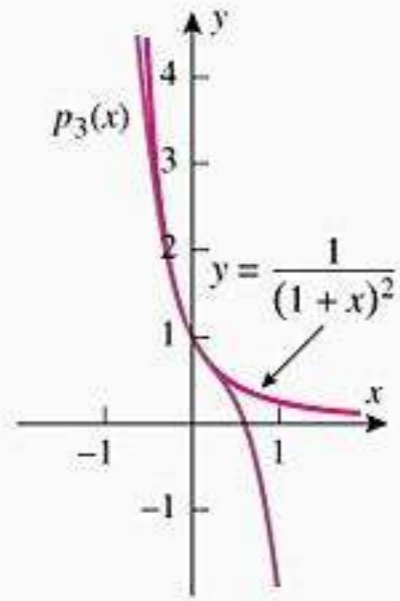
- $f(0) = 1$
- $f'(0) = m$
- $f''(0) = m(m-1)$
- $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$
- \vdots
- $f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1)$

► **Exemplo 4** Determine a série binomial para

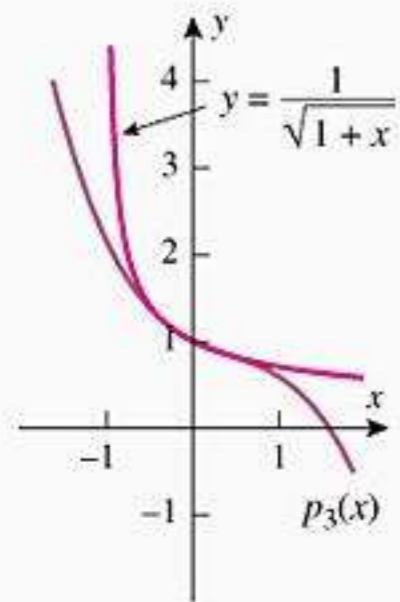
(a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solução (a) Uma vez que o termo geral da série binomial é complicado, o leitor pode considerar útil escrever alguns dos primeiros termos da série, como na Fórmula (17), para ver o padrão do desenvolvimento. Substituindo $m = -2$ nesta fórmula, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= (1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4!}x^4 + \dots \\ &= 1 - 2x + \frac{3!}{2!}x^2 - \frac{4!}{3!}x^3 + \frac{5!}{4!}x^4 - \dots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)x^k \end{aligned}$$



$$p_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$$



$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$$

Figura 10.9.2

Solução (b) Substituindo $m = -\frac{1}{2}$ em (17), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} x^k \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A Figura 10.9.2 mostra os gráficos das funções do Exemplo 4 comparadas com seu polinômio de Maclaurin de terceira ordem.

■ **ALGUMAS SÉRIES DE MACLAURIN IMPORTANTES**

Para referência, a Tabela 10.9.1 lista a série de Maclaurin de algumas funções importantes, junto com uma especificação do intervalo no qual a série de Maclaurin converge para essas funções. Alguns desses resultados são deduzidos nos exercícios e outros na próxima seção, usando algumas técnicas especiais que desenvolveremos.

Tabela 10.9.1

SÉRIE DE MACLAURIN	INTERVALO DE CONVERGÊNCIA
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$	$-1 < x < 1$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{cos } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\text{arc tg } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\text{senh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{cosh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k$	$-1 < x < 1^*$ ($m \neq 0, 1, 2, \dots$)

*O comportamento no extremo depende de m : para $m > 0$, a série converge absolutamente nos extremos; para $m \leq -1$, a série diverge nos extremos; e para $-1 < m < 0$, a série converge condicionalmente em $x = 1$ e diverge em $x = -1$.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.9 (Ver página 704 para respostas.)

1. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

2. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

3. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ para x no intervalo $(-1, 1]$.

4. Se m for um número real que não é um número inteiro não-negativo, então a *série binomial*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k$$

converge para $(1+x)^m$ se $|x| < 1$.


EXERCÍCIOS 10.9  Recurso Gráfico  CAS

- Use ambos métodos dados no Exemplo 2 para aproximar $\sin 4^\circ$ até cinco casas decimais de precisão e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use ambos métodos dados no Exemplo 2 para aproximar $\cos 3^\circ$ até três casas decimais de precisão e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use a série de Maclaurin para $\cos x$ para aproximar $\cos 0,1$ até cinco casas decimais, e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use a série de Maclaurin para $\arctan x$ para aproximar $\arctan 0,1$ até três casas decimais de precisão, e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use uma série de Taylor apropriada para aproximar $\sin 85^\circ$ até quatro casas decimais de precisão, e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use uma série de Taylor para aproximar $\cos(-175^\circ)$ até quatro casas decimais de precisão, e verifique seu trabalho comparando sua resposta com aquela produzida diretamente por uma calculadora.
- Use a série de Maclaurin para $\sinh x$ para aproximar $\sinh 0,5$ até três casas decimais de precisão. Verifique seu trabalho calculando $\sinh 0,5$ com uma calculadora.
- Use a série de Maclaurin para $\cosh x$ para aproximar $\cosh 0,1$ até três casas decimais de precisão. Verifique seu trabalho calculando $\cosh 0,1$ com uma calculadora.
- Use o Teorema da Estimativa do Resto e o método do Exemplo 1 para provar que a série de Taylor para $\sin x$ em torno de $x = \pi/4$ converge para $\sin x$ em cada x .
- Use o Teorema da Estimativa do Resto e o método do Exemplo 3 para provar que a série de Taylor para e^x em torno de $x = 1$ converge para e^x em cada x .
- (a) Use a Fórmula (12) do texto para determinar uma série que convirja para $\ln 1,25$.
(b) Aproxime $\ln 1,25$ usando os dois primeiros termos da série. Arredonde sua resposta até três casas decimais, e compare o resultado com aquele produzido diretamente por uma calculadora.
- (a) Use a Fórmula (12) para determinar uma série que convirja para $\ln 3$.
(b) Aproxime $\ln 3$ usando os dois primeiros termos da série. Arredonde sua resposta até três casas decimais, e compare o resultado com aquele produzido diretamente por uma calculadora.

ENFOCANDO CONCEITOS

- (a) Use a série de Maclaurin para $\arctan x$ para aproximar com três casas decimais de precisão $\arctan \frac{1}{2}$ e $\arctan \frac{1}{3}$.
(b) Use os resultados da parte (a) e a Fórmula (16) para aproximar π .
(c) Como garantir que o resultado em (b) seja preciso até a terceira casa decimal? Explique seu raciocínio.
(d) Compare sua resposta da parte (b) com aquela produzida por uma calculadora.
- A proposta deste exercício é mostrar que a série de Taylor de uma função f pode convergir para um valor diferente de $f(x)$ para certos valores de x . Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
 (a) Use a definição de derivada para mostrar que $f'(0) = 0$.
(b) Com alguma dificuldade pode-se mostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n \geq 2$. Admitindo este fato, mostre que a série de Maclaurin de f converge para todo x , mas converge para $f(x)$ somente no ponto $x = 0$.

-  15. (a) Determine uma cota superior para o erro que pode resultar se $\cos x$ for aproximado por $1 - (x^2/2!) + (x^4/4!)$ no intervalo $[-0,2; 0,2]$.

(b) Verifique sua resposta na parte (a) fazendo o gráfico de

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right|$$

sobre o intervalo.

16. (a) Determine uma cota superior para o erro que pode resultar se $\ln(1+x)$ for aproximado por x no intervalo $[-0,01; 0,01]$.

(b) Verifique a sua resposta na parte (a) fazendo o gráfico de

$$|\ln(1+x) - x|$$

sobre o intervalo.

17. Use a Fórmula (17) para a série binomial para obter a série de Maclaurin para

(a) $\frac{1}{1+x}$ (b) $\sqrt[3]{1+x}$ (c) $\frac{1}{(1+x)^3}$

18. Se m for qualquer número real e k um inteiro não-negativo, então definimos o *coeficiente binomial*

$$\binom{m}{k} \text{ pela fórmula } \binom{m}{0} = 1 \text{ e}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

para $k \geq 1$. Expresse a Fórmula (17) do texto em termos de coeficientes binomiais.

19. Neste exercício, usaremos o Teorema da Estimativa do Resto para determinar o número de termos que são necessários na Fórmula (14) para aproximar $\ln 2$ com cinco casas decimais de precisão. Para este propósito, seja

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

(a) Mostre que

$$f^{(n+1)}(x) = n! \left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]$$

(b) Use a desigualdade triangular [Teorema 1.1.4(d) do Volume 1] para mostrar que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq n! \left[\frac{1}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]$$

(c) Uma vez que queremos obter até cinco casas decimais de precisão, nosso objetivo é escolher n de tal forma que o valor absoluto do enésimo resto em $x = \frac{1}{3}$ não exceda o valor $0,000005 = 0,5 \times 10^{-5}$; isto é, $|R_n(\frac{1}{3})| \leq 0,000005$. Use o Teorema da Estimativa do Resto para mostrar que esta condição é satisfeita se n for escolhido tal que

$$\frac{M}{(n+1)!} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \leq 0,000005$$

onde $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ sobre o intervalo $[0, \frac{1}{3}]$.

(d) Use o resultado da parte (b) para mostrar que M pode ser tomado como

$$M = n! \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \right]$$

(e) Use o resultado das partes (c) e (d) para mostrar que até cinco casas decimais de precisão serão obtidas se n satisfizer

$$\frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] \leq 0,000005$$

e então mostrar que o menor valor de n que satisfaz esta condição é $n = 13$.

20. Use a Fórmula (12) e o método do Exercício 19 para aproximar $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ com cinco casas decimais de precisão. Então verifique seu trabalho comparando a sua resposta com aquela produzida diretamente de uma calculadora.

21. Prove: A série de Taylor para $\cos x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ converge para $\cos x$ em cada x .

22. Prove: A série de Taylor para $\sin x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ converge para $\sin x$ em cada x .

23. A pesquisa tem mostrado que a proporção p da população com QI (Quociente de Inteligência) entre α e β é aproximadamente

$$p = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{16}\right)^2} dx$$

Use os três primeiros termos diferentes de zero de uma série de Maclaurin apropriada para estimar a proporção da população que tem QI entre 100 e 110.

24. Na Seção 7.7 do Volume 1, definimos a energia cinética K de uma partícula com massa m e velocidade v por $K = \frac{1}{2}mv^2$ [ver a Fórmula (6) daquela seção]. Nesta fórmula, a massa m é considerada constante e K é denominada *energia cinética newtoniana*. Entretanto, na teoria da relatividade de Albert Einstein, a massa m cresce com a velocidade e a energia K é dada pela fórmula

$$K = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right]$$

na qual m_0 é a massa da partícula quando sua velocidade é zero e c é a velocidade da luz. Isso é chamado de *energia cinética relativística*. Use uma série binomial apropriada para mostrar que se a velocidade for pequena comparada com a velocidade da luz (i.e. $v/c \approx 0$), então as energias newtoniana e relativista são praticamente a mesma.

25. (a) Em 1706, o astrônomo e matemático britânico John Machin descobriu a seguinte fórmula para $\pi/4$, chamada de *fórmula de Machin*:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

Use um CAS para aproximar $\pi/4$ usando a fórmula de Machin com até 25 casas decimais.

(b) Em 1914, o brilhante matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) mostrou que

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26.390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Use um CAS para calcular as primeiras quatro somas parciais nessa *fórmula de Ramanujan*.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.9

1. $(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ 2. $\frac{x^k}{k!}$ 3. $(-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!}; (-1, 1]$ 4. $\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k; 1$

10.10 DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS; MODELANDO COM SÉRIES DE TAYLOR

Nesta seção, discutiremos métodos para encontrar séries de potências de derivadas e integrais de funções, e discutiremos, também, alguns métodos práticos para encontrar séries de Taylor que podem ser usados em situações nas quais é difícil ou impossível encontrar a série diretamente.

■ DERIVANDO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Iniciaremos considerando o problema seguinte.

10.10.1 PROBLEMA Suponha que uma função f seja representada por uma série de potências em um intervalo aberto. Como poderíamos usar a série de potências para encontrar a derivada de f naquele intervalo?

A solução para este problema pode ser motivada considerando a série para $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

Naturalmente, já sabemos que a derivada de $\sin x$ é $\cos x$; entretanto, estamos interessados aqui em usar a série de Maclaurin para concluir isto. A solução é simples – tudo o que precisamos fazer é diferenciar, termo a termo, a série de Maclaurin e observar que a série resultante é a série de Maclaurin para $\cos x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right] &= 1 - 3\frac{x^2}{3!} + 5\frac{x^4}{5!} - 7\frac{x^6}{7!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x \end{aligned}$$

Aqui está outro exemplo.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^x] &= \frac{d}{dx} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right] \\ &= 1 + 2\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x \end{aligned}$$

A computação precedente sugere que se uma função f estiver representada por uma série de potências em um intervalo aberto, então a representação de f' por uma série de potências naquele intervalo aberto pode ser obtida diferenciando termo a termo a série de potências de f . Isso está enunciado mais precisamente no seguinte teorema, o qual daremos sem prova.

10.10.2 TEOREMA (Diferenciação de Séries de Potências) Suponha que uma função f esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha um raio de convergência R não nulo; isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

Então:

- (a) A função f é diferenciável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.
 (b) Se a representação de f por uma série de potências for diferenciada termo a termo, então a série resultante tem raio de convergência R e converge para f' no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$; isto é,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_k(x - x_0)^k] \quad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

Esse teorema tem uma importante implicação sobre a diferenciabilidade de funções que estão representadas por séries de potências. De acordo com o teorema, a série de potências para f' tem o mesmo raio de convergência que a série de potências para f e isso significa que o teorema pode voltar a ser aplicado para f' no lugar de f . Contudo, se fizermos isso, concluímos que f' é diferenciável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, e a série de potências para f'' tem o mesmo raio de convergência que a série de potências de f e f' . Podemos agora repetir esse processo indefinidamente, aplicando o teorema sucessivamente para f'' , f''' , ..., $f^{(n)}$, ... para concluir que f tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Assim, estabelecemos o resultado seguinte.

10.10.3 TEOREMA Se uma função f puder ser representada por uma série de potências em $x - x_0$ com um raio de convergência R diferente de zero, então f tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Resumindo, apenas uma função “bem comportada” pode ser representada por uma série de potências; isto é, se uma função f não possuir derivadas de todas as ordens num intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, então a função não pode ser representada por uma série de potências em $x - x_0$ naquele intervalo.

► **Exemplo 1** Na Seção 10.8, mostramos que a função de Bessel $J_0(x)$ é representada pela série de potências

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad (1)$$

com raio de convergência $+\infty$ [ver Fórmula (4) daquela seção e a discussão relacionada]. Desse modo, $J_0(x)$ tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(-\infty, +\infty)$, e essas podem ser obtidas diferenciando a série termo a termo. Por exemplo, se escrevermos (1) como

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

e diferenciarmos termo a termo, obteremos

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) x^{2k-1}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{2k-1} k! (k-1)!} \blacktriangleleft$$

Ver Exercício 44 para uma relação entre $J_0'(x)$ e $J_1(x)$.

Nos cálculos desse exemplo, usamos algumas técnicas que valem a pena ressaltar. Primeiro, quando uma série de potências é expressa em notação sigma, a fórmula para o termo geral da série muitas vezes não está numa forma que possa ser usada para diferenciar o termo constante. Assim, se a série tem termo constante diferente de zero, como aqui, é geralmente uma boa idéia separá-lo da soma antes de diferenciar. Segundo, observe como simplificamos a fórmula final cancelando o fator k de um dos fatoriais no denominador. Isso é uma técnica de simplificação padrão.

■ INTEGRANDO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma vez que a derivada de uma função que está representada por uma série de potências pode ser obtida diferenciando a série termo a termo, não deveria ser surpreendente que uma antiderivada da função representada por uma série de potências possa ser obtida integrando a série termo a termo. Por exemplo, sabemos que $\sin x$ é uma antiderivada de $\cos x$. Aqui está o resultado obtido pela integração termo a termo da série de Maclaurin para $\cos x$:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, dx &= \int \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3(2!)} + \frac{x^5}{5(4!)} - \frac{x^7}{7(6!)} + \dots \right] + C \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] + C = \sin x + C\end{aligned}$$

A mesma idéia aplica-se a integrais definidas. Por exemplo, integrando diretamente temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

e mostraremos mais adiante nesta seção que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (2)$$

Assim,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Aqui está como esse resultado pode ser obtido integrando termo a termo a série de Maclaurin para $1/(1+x^2)$ (ver Tabela 10.9.1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^1 [1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\end{aligned}$$

A computação precedente é justificada pelo teorema seguinte, o qual daremos sem prova.

10.10.4 TEOREMA (Integração de Séries de Potências) *Suponha que uma função f esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha um raio de convergência R não nulo; isto é,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

(a) *Se a série de potências que representa f for integrada termo a termo, então a série resultante tem um raio de convergência R e converge para uma antiderivada de $f(x)$ no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$; isto é,*

$$\int f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \right] + C \quad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

(b) *Se α e β forem pontos do intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e se a representação de f em série de potências for integrada termo a termo de α até β , então a série numérica resultante converge absolutamente no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\alpha}^{\beta} c_k (x - x_0)^k \, dx \right]$$

■ REPRESENTAÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS DEVEM SER SÉRIES DE TAYLOR

Para muitas funções, é difícil ou impossível encontrar as derivadas que são exigidas para obter uma série de Taylor. Por exemplo, para encontrar a série de Maclaurin para $1/(1+x^2)$ diretamente seriam necessárias algumas computações entediadas de derivada (tente-o). Um método mais prático é substituir $-x^2$ em x na série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

para obter

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Entretanto, há duas questões que exigem cuidado com este procedimento:

- Quando é que a série de potências que obtivermos para $1/(1+x^2)$ realmente converge para $1/(1+x^2)$?
- Como saber que a série de potências obtida é, realmente, a série de Maclaurin para $1/(1+x^2)$?

A primeira questão é fácil de resolver. Uma vez que a série geométrica converge para $1/(1-x)$ se $|x| < 1$, a segunda série convergirá para $1/(1+x^2)$ se $|-x^2| < 1$ ou $|x^2| < 1$. Contudo, isso é verdadeiro se, e somente se, $|x| < 1$, portanto a série de potências que obtivemos para a função $1/(1+x^2)$ converge para esta função se $-1 < x < 1$.

A segunda questão é mais difícil de responder e conduz-nos para o seguinte problema geral.

10.10.5 PROBLEMA Suponha que uma função f esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha raio de convergência diferente de zero. Qual relação existe entre a dada série de potências e a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$?

A resposta é que elas são a mesma; e aqui está o teorema que prova isto.

10.10.6 TEOREMA Se uma função f estiver representada por uma série de potências em $x - x_0$ em algum intervalo aberto contendo x_0 , então aquela série de potências é a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_k(x - x_0)^k + \dots$$

para todo x em algum intervalo aberto contendo x_0 . Para provar que isso é a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$, devemos mostrar que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Contudo, a hipótese de que a série converge para $f(x)$ em um intervalo aberto contendo x_0 garante que o raio de convergência R é diferente de zero; conseqüentemente, podemos dife-

O Teorema 10.10.6 nos diz que não importando como chegamos a uma representação de uma função f em série de potências, quer seja por substituição, diferenciação, integração ou por alguma manipulação algébrica, aquela série será a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$, desde que convirja para f em algum intervalo aberto contendo x_0 .

reenciar termo a termo de acordo com o Teorema 10.10.2. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + c_4(x - x_0)^4 + \dots \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \dots \\ f''(x) &= 2!c_2 + (3 \cdot 2)c_3(x - x_0) + (4 \cdot 3)c_4(x - x_0)^2 + \dots \\ f'''(x) &= 3!c_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)c_4(x - x_0) + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo $x = x_0$, todas as potências de $x - x_0$ desaparecem, deixando

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = 2!c_2, \quad f'''(x_0) = 3!c_3, \dots$$

das quais obtemos

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots$$

mostrando que os coeficientes c_0, c_1, c_2, \dots são precisamente os coeficientes da série de Taylor em torno de x_0 para $f(x)$. ■

■ ALGUMAS MANEIRAS PRÁTICAS PARA ENCONTRAR SÉRIES DE TAYLOR

► **Exemplo 2** Determine a série de Maclaurin para $\arctan x$.

Solução Seria tedioso encontrar a série de Maclaurin diretamente. O melhor método é começar com a fórmula

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

e integrar a série de Maclaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad (-1 < x < 1)$$

termo a termo. Disso resulta

$$\arctan x + C = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int [1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots] dx$$

ou

$$\arctan x = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \right] - C$$

A constante da integração pode ser calculada substituindo $x = 0$ e usando a condição $\arctan 0 = 0$. Isso dá $C = 0$, e assim

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (-1 < x < 1) \quad (3)$$



Observe que nem o Teorema 10.10.2 nem o Teorema 10.10.3 voltam-se para o que acontece nos pontos extremos do intervalo de convergência. Entretanto, pode ser provado que se a série de Taylor para f em torno de $x = x_0$ converge para $f(x)$ em todo x no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, e se a série de Taylor convergir no extremo à direita $x_0 + R$, então o valor para o qual converge naquele ponto é o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0 + R$ pelo lado esquerdo; e se a série de Taylor converge no extremo esquerdo $x_0 - R$, então o valor para o qual converge naquele ponto é o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0 - R$ pelo lado direito.

Por exemplo, a série de Maclaurin para $\arctan x$ dada em (3) converge em ambos $x = -1$ e $x = 1$, uma vez que as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 10.6.1) estão satisfeitas naqueles pontos. Assim, a continuidade de $\arctan x$ sobre o intervalo $[-1, 1]$ implica que em $x = 1$ a série de Maclaurin converge para

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

e em $x = -1$ converge para

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \arctan x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Isso mostra que a série de Maclaurin para $\arctan x$ converge, de fato, para $\arctan x$ no intervalo fechado $-1 \leq x \leq 1$. Além disso, a convergência em $x = 1$ fornece a Fórmula (2).

As séries de Taylor fornecem uma alternativa para a regra de Simpson e outros métodos numéricos para aproximar integrais definidas.

► **Exemplo 3** Aproxime a integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

com três casas decimais de precisão expandindo o integrando em uma série de Maclaurin e integrando termo a termo.

Solução A maneira mais simples de obter a série de Maclaurin para e^{-x^2} é substituir x por $-x^2$ na série de Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

para obter

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5(2!)} - \frac{x^7}{7(3!)} + \frac{x^9}{9(4!)} - \dots \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \end{aligned}$$

Como esta série satisfaz evidentemente as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 10.6.1), tem-se a partir do Teorema 10.6.2 que se aproximarmos a integral por s_n (a n ésima

soma parcial da série), então

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - s_n \right| < \frac{1}{[2(n+1)+1](n+1)!} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Assim, para três casas decimais de precisão devemos escolher n tal que

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} \leq 0,0005 = 5 \times 10^{-4}$$

Com a ajuda de uma calculadora, podemos mostrar que o menor valor de n que satisfaça essa condição é $n = 5$. Assim, o valor da integral com três casas decimais de precisão é

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} \approx 0,747$$

Para comparar, uma calculadora com capacidade de integração numérica produziu a aproximação 0,746824, que coincide com nosso resultado quando arredondado até três casas decimais. ◀

Quais vantagens o método deste exemplo tem sobre a regra de Simpson? Quais são as desvantagens?

■ ENCONTRANDO SÉRIES DE MACLAURIN POR MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Os seguintes exemplos ilustram algumas técnicas algébricas que são úteis, às vezes, para encontrar séries de Taylor.

► **Exemplo 4** Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para a função $f(x) = e^{-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

Solução Usando as séries para e^{-x^2} e $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ obtidas nos Exemplos 2 e 3, temos

$$e^{-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots \right) \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)$$

Multiplicando, como mostrado na margem, obtemos

$$e^{-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{31}{30}x^5 - \dots$$

Podem ser obtidos mais termos na série incluindo mais termos nos fatores. Além disso, podemos provar que a série obtida por esse método converge em cada ponto na interseção dos intervalos de convergência dos fatores (e, possivelmente, em um intervalo maior). Assim, podemos ter certeza de que a série obtida converge em todo x do intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (por quê?). ◀

► **Exemplo 5** Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para $\operatorname{tg} x$.

Solução Usando os três primeiros termos na série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cos} x$, podemos expressar $\operatorname{tg} x$ como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

Dividindo, como mostrado na margem, obtemos

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{array}{r} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots \\ \times \\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \\ \hline x - x^3 + \frac{x^5}{2} - \dots \\ - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{6} + \dots \\ \quad \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{5} + \dots \\ \hline x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{31}{30}x^5 - \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \quad \left| \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right. \\ \times \\ x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \dots \quad \left. x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \right. \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \dots \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \dots \\ \hline \frac{2x^5}{15} + \dots \end{array}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use o recurso de multiplicar e dividir polinômios para efetuar as contas dos Exemplos 4 e 5.

$$\begin{aligned}
3. \quad & \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} \right) \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \right) \\
&= \text{_____} + \text{_____} x + \text{_____} x^2 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \text{Suponha que } f(1) = 4 \text{ e } f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (x-1)^k \\
(a) \quad & f''(1) = \text{_____} \\
(b) \quad & f(x) = \text{_____} + \text{_____} (x-1) \\
& \quad + \text{_____} (x-1)^2 + \text{_____} (x-1)^3 + \dots \\
&= \text{_____} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{_____}
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 10.10  CAS

1. Em cada parte, obtenha a série de Maclaurin para a função fazendo uma substituição apropriada na série de Maclaurin para $1/(1-x)$. Inclua o termo geral na sua resposta e dê o raio de convergência da série.

(a) $\frac{1}{1+x}$ (b) $\frac{1}{1-x^2}$ (c) $\frac{1}{1-2x}$ (d) $\frac{1}{2-x}$

2. Em cada parte, obtenha a série de Maclaurin para a função fazendo uma substituição apropriada na série de Maclaurin para $\ln(1+x)$. Inclua o termo geral na sua resposta e dê o raio de convergência da série.

(a) $\ln(1-x)$ (b) $\ln(1+x^2)$
(c) $\ln(1+2x)$ (d) $\ln(2+x)$

3. Em cada parte, obtenha os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para a função, fazendo uma substituição apropriada em uma das séries binomiais obtidas no Exemplo 4 da Seção 10.9.

(a) $(2+x)^{-1/2}$ (b) $(1-x^2)^{-2}$

4. (a) Use a série de Maclaurin para $1/(1-x)$ para encontrar a série de Maclaurin de $1/(a-x)$, onde $a \neq 0$, e dê o raio de convergência da série.

(b) Use a série binomial para $1/(1+x)^2$ obtida no Exemplo 4 da Seção 10.9 para encontrar os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para $1/(a+x)^2$, onde $a \neq 0$, e dê o raio de convergência da série.

5-8 Obtenha os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para a função, fazendo uma substituição apropriada numa série de Maclaurin conhecida e efetuando qualquer operação algébrica que for necessária. Dê o raio de convergência da série.

5. (a) $\sin 2x$ (b) e^{-2x} (c) e^{x^2} (d) $x^2 \cos \pi x$

6. (a) $\cos 2x$ (b) $x^2 e^x$ (c) $x e^{-x}$ (d) $\sin(x^2)$

7. (a) $\frac{x^2}{1+3x}$ (b) $x \sinh 2x$ (c) $x(1-x^2)^{3/2}$

8. (a) $\frac{x}{x-1}$ (b) $3 \cosh(x^2)$ (c) $\frac{x}{(1+2x)^3}$

9-10 Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para a função usando uma identidade trigonométrica apropriada ou uma propriedade dos logaritmos e, então, substitua numa série de Maclaurin conhecida.

9. (a) $\sin^2 x$ (b) $\ln[(1+x^3)^{12}]$

10. (a) $\cos^2 x$ (b) $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

11. (a) Use uma série de Maclaurin conhecida para determinar a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x=1$, expressando esta função como

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$$

(b) Determine o intervalo de convergência da série de Taylor.

12. Use o método do Exercício 11 para determinar a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x=x_0$ e dê o intervalo de convergência da série de Taylor.

13-14 Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin multiplicando as séries de Maclaurin dos fatores.

13. (a) $e^x \sin x$ (b) $\sqrt{1+x} \ln(1+x)$

14. (a) $e^{-x^2} \cos x$ (b) $(1+x^2)^{4/3} (1+x)^{1/3}$

15-16 Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para a função, dividindo séries de Maclaurin apropriadas.

15. (a) $\sec x \left(= \frac{1}{\cos x} \right)$ (b) $\frac{\sin x}{e^x}$

16. (a) $\frac{\arctg x}{1+x}$ (b) $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$

17. Use as séries de Maclaurin para e^x e e^{-x} para deduzir as séries de Maclaurin para $\sinh x$ e $\cosh x$. Inclua na sua resposta o termo geral e estabeleça o raio de convergência de cada série.

18. Use as séries de Maclaurin para $\sinh x$ e $\cosh x$ para obter os quatro primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para $\tgh x$.

19-20 Determine os cinco primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin usando frações parciais e uma série de Maclaurin conhecida.

19. $\frac{4x - 2}{x^2 - 1}$ 20. $\frac{x^3 + x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}$

21-22 Confirme a fórmula de derivação diferenciando termo a termo a série de Maclaurin apropriada.

21. (a) $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$ (b) $\frac{d}{dx}[\ln(1+x)] = \frac{1}{1+x}$

22. (a) $\frac{d}{dx}[\sinh x] = \cosh x$ (b) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,tg} x] = \frac{1}{1+x^2}$

23-24 Confirme a fórmula de integração integrando termo a termo a série de Maclaurin apropriada.

23. (a) $\int e^x dx = e^x + C$

(b) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

24. (a) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(b) $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) + C$

25. (a) Use a série de Maclaurin para $1/(1-x)$ para determinar a série de Maclaurin para

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

(b) Use a série de Maclaurin obtida na parte (a) para determinar $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

(c) O que podemos dizer sobre o valor de $f^{(n)}(0)$?

26. Seja $f(x) = x^2 \cos 2x$. Use o método do Exercício 25 para determinar $f^{(99)}(0)$.

27-28 O limite de uma forma indeterminada quando $x \rightarrow x_0$ pode, às vezes, ser determinado, expandindo as funções envolvidas em série de Taylor em torno de $x = x_0$, e tomando o limite desta série termo a termo. Use este método para determinar o limite nesses exercícios.

27. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^3}$

28. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x} - \sin 2x}{x}$

29-32 Use séries de Maclaurin para aproximar a integral com três casas decimais de precisão.

29. $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ 30. $\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,tg}(2x^2) dx$

31. $\int_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^4} dx$ 32. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2+1}}$

ENFOCANDO CONCEITOS

33. (a) Encontre a série de Maclaurin para e^{x^4} . Qual é o raio de convergência?

(b) Explique duas maneiras diferentes de usar a série de Maclaurin para e^{x^4} para encontrar a série para $x^3 e^{x^4}$. Confirme que ambos métodos produzem a mesma série.

34. (a) Diferencie a série de Maclaurin para $1/(1-x)$ e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{para } -1 < x < 1$$

(b) Integre a série de Maclaurin para $1/(1-x)$ e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad \text{para } -1 < x < 1$$

(c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \quad \text{para } -1 < x < 1$$

(d) Mostre que a série na parte (c) converge se $x = 1$.

(e) Use a observação que segue o Exemplo 2 para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \quad \text{para } -1 < x \leq 1$$

35. Use os resultados do Exercício 34 para encontrar a soma de cada série.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4^k)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(4^2)} + \frac{1}{3(4^3)} + \frac{1}{4(4^4)} + \dots$

36. Use os resultados do Exercício 34 para encontrar a soma de cada série.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-1)^k}{ke^k} = \frac{e-1}{e} + \frac{(e-1)^2}{2(e^2)} - \frac{(e-1)^3}{3(e^3)} + \dots$

37. (a) Use a relação

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arc\,sinh} x + C$$

para determinar os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para $\operatorname{arc\,sinh} x$.

(b) Expresse a série em notação sigma.

(c) Qual é o raio de convergência?

38. (a) Use a relação

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

para determinar os quatro primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para $\operatorname{arc\,sen} x$.

(b) Expresse a série em notação sigma.

(c) Qual é o raio de convergência?

39. Mostramos pela Fórmula (11) da Seção 9.3 que se há y_0 unidades de radiocarbono-14 presentes no instante $t = 0$, então o número de unidades presentes t anos depois será de

$$y(t) = y_0 e^{-0,000121t}$$

- (a) Expresse $y(t)$ como uma série de Maclaurin.
 (b) Use os dois primeiros termos da série para mostrar que o número de unidades presentes depois de 1 ano é de aproximadamente $(0,999879)y_0$.
 (c) Compare esse valor com o produzido pela fórmula para $y(t)$.
40. Na Seção 9.1, estudamos o movimento de um objeto em queda que tem massa m e é retardado pela resistência do ar. Mostramos que se a velocidade inicial é v_0 e a força de resistência F_R é proporcional à velocidade, isto é, $F_R = -cv$, então a velocidade do objeto no instante t é

$$v(t) = e^{-ct/m} \left(v_0 + \frac{mg}{c} \right) - \frac{mg}{c}$$

onde g é a aceleração devida à gravidade [ver Fórmula (27) da Seção 9.1].

- (a) Use uma série de Maclaurin para mostrar que se $ct/m \approx 0$, então a velocidade pode ser aproximada por

$$v(t) \approx v_0 - \left(\frac{cv_0}{m} + g \right) t$$

- (b) Melhore a aproximação na parte (a).

- C** 41. Suponha que a um pêndulo simples com um comprimento de $L = 1$ metro seja dado um deslocamento inicial de $\theta_0 = 5^\circ$ em relação à vertical.
- (a) Aproxime o período do pêndulo usando a Fórmula (6) para o modelo de primeira ordem. [Use $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.]
 (b) Aproxime o período do pêndulo usando a Fórmula (7) para o modelo de segunda ordem.
 (c) Use a integração numérica de um CAS para aproximar o período do pêndulo pela Fórmula (4) e compare-o com os valores obtidos nas partes (a) e (b).
42. Use os três primeiros termos diferentes de zero na Fórmula (5) e a fórmula do seno de Wallis que está no final deste livro na

Tabela de Integrais da Capa (Fórmula 122) para obter um modelo para o período de um pêndulo simples.

43. Lembre-se que a força da gravidade exercida pela Terra sobre um objeto é chamada *peso* do objeto (ou mais precisamente, *peso terrestre*). Se um objeto de massa m estiver na superfície da Terra (nível médio do mar), então a magnitude de seu peso é mg , onde g é a aceleração devida à gravidade na superfície da Terra. Uma fórmula mais geral para a magnitude da força gravitacional que a Terra exerce sobre um objeto de massa m é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e h é a altura que o objeto está em relação à superfície da Terra.

- (a) Use a série binomial para $1/(1+x)^2$ obtida no Exemplo 4 da Seção 10.9 para expressar F como uma série de Maclaurin em potências de h/R .
 (b) Mostre que se $h = 0$, então $F = mg$.
 (c) Mostre que se $h/R \approx 0$, então $F \approx mg - (2mgh/R)$. [Observação: A quantidade $2mgh/R$ pode ser interpretada como um "termo de correção" para o peso, quando se leva em conta a altura do objeto em relação à superfície da Terra.]
 (d) Se supormos que a Terra seja uma esfera de raio $R = 4000$ milhas em média ao nível do mar, qual é a porcentagem aproximada de mudança no peso de uma pessoa variando do nível do mar ao topo do Monte Everest (29.028 pés)?
44. (a) Mostre que a função de Bessel $J_0(x)$ dada pela Fórmula (4) da Seção 10.8 satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$. (Essa é a *equação de Bessel de ordem zero*.)
 (b) Mostre que a função de Bessel $J_1(x)$ dada pela Fórmula (5) da Seção 10.8 satisfaz a equação diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$. (Essa é a *equação de Bessel de primeira ordem*.)
 (c) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
45. Prove: Se as séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ tiverem a mesma soma num intervalo $(-r, r)$, então $a_k = b_k$ para todos os valores de k .

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.10

1. $(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$ 2. 1; -1; 1; -1; $(-1)^k x^k$ 3. 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$ 4. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) 4; 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{18}$; 4; $(-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k \cdot (k!)}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

- Qual é a diferença entre uma seqüência infinita e uma série infinita?
- O que se entende pela soma de uma série infinita?
- (a) O que é uma série geométrica? Dê alguns exemplos de séries geométricas convergentes e divergentes.
 (b) O que é uma série p ? Dê alguns exemplos de séries p convergentes e divergentes.
- Enuncie condições sob as quais uma série alternada certamente convirja.
- (a) O que significa dizer que uma série infinita converge absolutamente?
 (b) Qual relação existe entre convergência e convergência absoluta de uma série infinita?
- Enuncie o Teorema da Estimativa do Resto e descreva alguns de seus usos.

28. A série $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \dots$ converge? Justifique sua resposta.

29. (a) Determine os cinco primeiros polinômios de Maclaurin da função $p(x) = 1 - 7x + 5x^2 + 4x^3$.

(b) Faça uma afirmação geral sobre o polinômio de Maclaurin de um polinômio de grau n .

30. Mostre que a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

é precisa em até 4 casas decimais se $0 \leq x \leq \pi/4$.

31. Use uma série de Maclaurin e propriedades das séries alternadas para mostrar que $|\ln(1+x) - x| \leq x^2/2$ se $0 < x < 1$.

32. Use uma série de Maclaurin para aproximar a integral

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

com três casas decimais de precisão.

33. Nas partes (a) – (d), determine a soma da série associando-a com alguma série de Maclaurin.

(a) $2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} + \dots$

(b) $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots$

(c) $1 - \frac{e^2}{2!} + \frac{e^4}{4!} - \frac{e^6}{6!} + \dots$

(d) $1 - \ln 3 + \frac{(\ln 3)^2}{2!} - \frac{(\ln 3)^3}{3!} + \dots$

34. Em cada parte, escreva os quatro primeiros termos da série e então determine o raio de convergência.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)} x^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} x^{2k+1}$

35. Use uma série de Taylor apropriada para $\sqrt[3]{x}$ para aproximar $\sqrt[3]{28}$ com três casas decimais de precisão e verifique sua resposta comparando-a com aquela produzida por uma calculadora.

36. Diferencie a série de Maclaurin para xe^x e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e$$

37. Use as séries de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ dadas abaixo para encontrar os quatro primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para as funções dadas.

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(a) $\operatorname{sen} x \cos x$

(b) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

GEOMETRIA ANALÍTICA NO CÁLCULO

...sem os tratados dos geômetras gregos acerca das seções cônicas, não teríamos tido Kepler; sem Kepler, nenhum Newton e, sem Newton, nenhuma ciência na acepção moderna desse termo...

—Henry John Stephen Smith
Matemático

Neste capítulo, estudaremos aspectos da Geometria Analítica que são importantes nas aplicações do Cálculo. Vamos começar introduzindo sistemas de coordenadas polares, que são úteis, por exemplo, no acompanhamento do movimento de planetas e de satélites, na identificação e na localização de objetos em telas de radar e nos projetos de antenas. Em seguida, discutiremos relações entre curvas dadas em coordenadas polares e curvas paramétricas em coordenadas retangulares e discutiremos métodos para encontrar áreas em coordenadas polares e retas tangentes a curvas dadas em coordenadas polares ou parametricamente em coordenadas retangulares. Faremos, então, uma revisão das propriedades básicas das elipses, das hipérbolas e das parábolas e examinaremos essas curvas no contexto de coordenadas polares. Finalmente, daremos algumas aplicações básicas dessas idéias à Astronomia.

Foto: Com a Geometria Analítica podemos descrever matematicamente curvas matemáticas como as espirais na flor do girassol.

11.1 COORDENADAS POLARES

Até agora, especificamos a localização de um ponto no plano através de suas coordenadas relativas a dois eixos perpendiculares. Porém, às vezes, um ponto em movimento tem uma afinidade especial com algum ponto fixo, tal como um planeta numa órbita sob a atração central do Sol. Nesses casos, a trajetória da partícula fica melhor descrita por sua direção angular e sua distância de um ponto fixo. Nesta seção, discutiremos um novo tipo de sistema de coordenadas, que é baseado nessa idéia.

■ SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Um *sistema de coordenadas polares* num plano consiste em um ponto O fixo, chamado de *pólo* (ou *origem*) e de um raio que parte do pólo, chamado *eixo polar*. Num tal sistema de coordenadas, podemos associar a cada ponto P no plano um par de *coordenadas polares* (r, θ) , onde r é a distância de P ao pólo e θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio OP (Figura 11.1.1). O número r é chamado de *coordenada radial* de P enquanto que θ é a *coordenada angular* (ou *ângulo polar*) de P . Na Figura 11.1.2, os pontos $(6, 45^\circ)$, $(5, 120^\circ)$, $(3, 225^\circ)$ e $(4, 330^\circ)$ estão plotados num sistema de coordenadas polares. Se P for o pólo, então $r = 0$, mas nesse caso não há uma definição clara do ângulo polar. Vamos convencionar que qualquer ângulo possa ser usado nesse caso; isto é, $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do pólo para qualquer escolha de θ .

As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, as coordenadas polares

$$(1, 315^\circ), \quad (1, -45^\circ) \quad \text{e} \quad (1, 675^\circ)$$

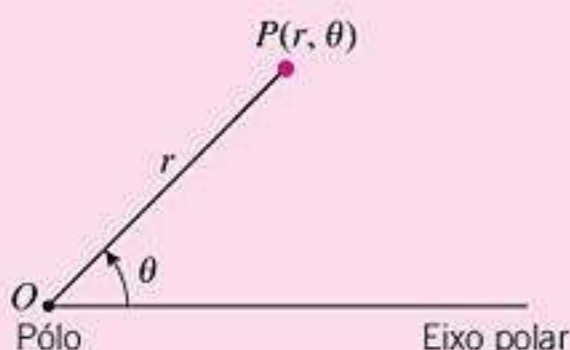


Figura 11.1.1

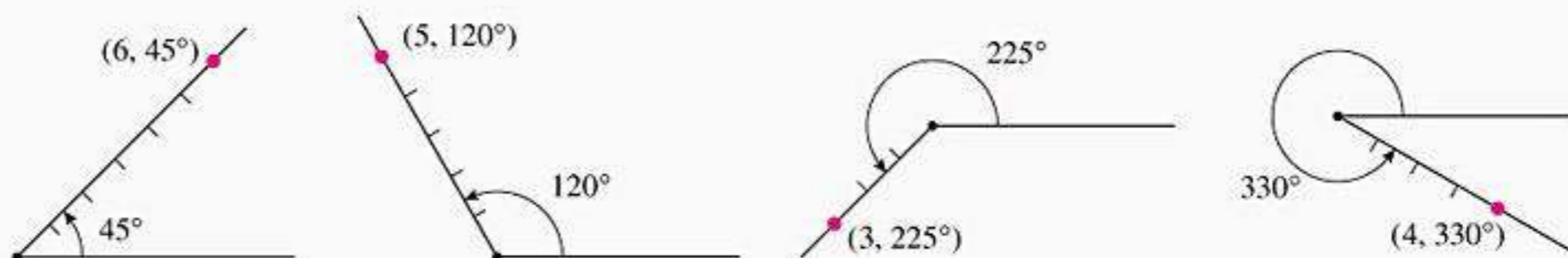


Figura 11.1.2

representam todas o mesmo ponto (Figura 11.1.3). Em geral, se um ponto P tiver coordenadas polares (r, θ) , então

$$(r, \theta + n \cdot 360^\circ) \text{ e } (r, \theta - n \cdot 360^\circ)$$

também são coordenadas polares de P , para todo n inteiro não-negativo. Assim, todo ponto tem uma infinidade de coordenadas polares.

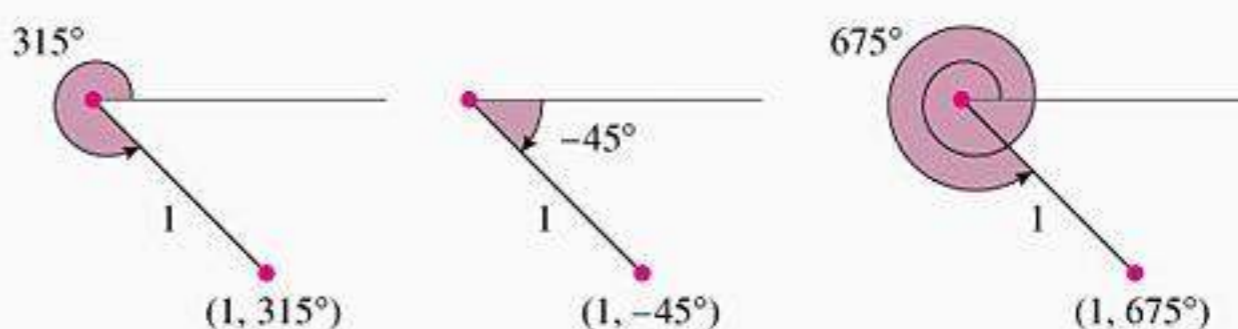
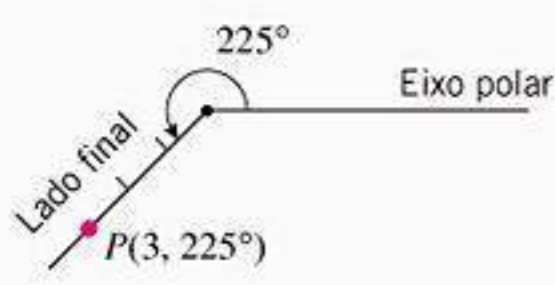


Figura 11.1.3

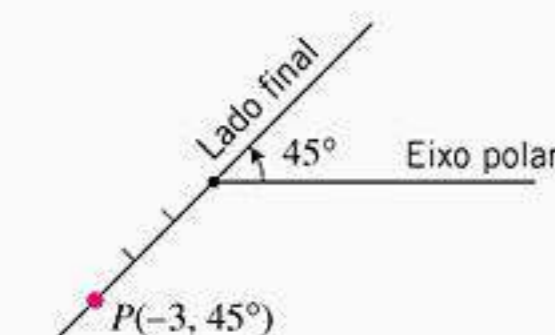


Figura 11.1.4

Conforme definido acima, a coordenada radial r de um ponto P é não-negativa, pois representa a distância de P ao pólo. No entanto, seria conveniente que r pudesse ser negativo. Para motivar uma definição apropriada, seja P o ponto com coordenadas polares $(3, 225^\circ)$. De acordo com a Figura 11.1.4, podemos atingir este ponto rodando o eixo polar por um ângulo de 225° e movendo-se 3 unidades a partir do pólo ao longo do lado final do ângulo ou então podemos atingir P rodando o eixo polar por um ângulo de 45° e movendo-se 3 unidades a partir do pólo ao longo da extensão do lado final. Isso sugere que o ponto $(3, 225^\circ)$ também possa ser denotado por $(-3, 45^\circ)$, onde o sinal menos serve para indicar que o ponto está sobre a *extensão* do lado final do ângulo em vez de estar no próprio lado final do ângulo.

Em geral, o lado final de um ângulo de $\theta + 180^\circ$ é a extensão do lado final de θ , portanto definimos as coordenadas radiais negativas convencionando que

$$(-r, \theta) \text{ e } (r, \theta + 180^\circ)$$

são coordenadas polares do mesmo ponto.

Em problemas envolvendo fórmulas de derivadas ou integrais, os ângulos devem ser medidos em radianos, uma vez que essas fórmulas foram deduzidas sob esta hipótese. Utilizaremos sempre a medida em radianos para os ângulos polares, exceto nas aplicações em que a medida em graus for mais conveniente e a medida em radianos não for necessária.

■ RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS POLARES E RETANGULARES

É freqüentemente útil sobrepor ao sistema de coordenadas polares um sistema de coordenadas retangulares xy de tal forma que o eixo x positivo coincida com o eixo polar. Se isso for feito, cada ponto P terá coordenadas retangulares (x, y) bem como coordenadas polares (r, θ) . Conforme sugere a Figura 11.1.5, essas coordenadas estão relacionadas pelas equações

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \tag{1}$$

Estas equações permitem encontrar x e y quando forem dados r e θ . Entretanto, para encontrar r e θ a partir de x e y é preferível usar as identidades $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ e $\text{tg } \theta = \sin \theta / \cos \theta$ para reescrever (1) como

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \tag{2}$$

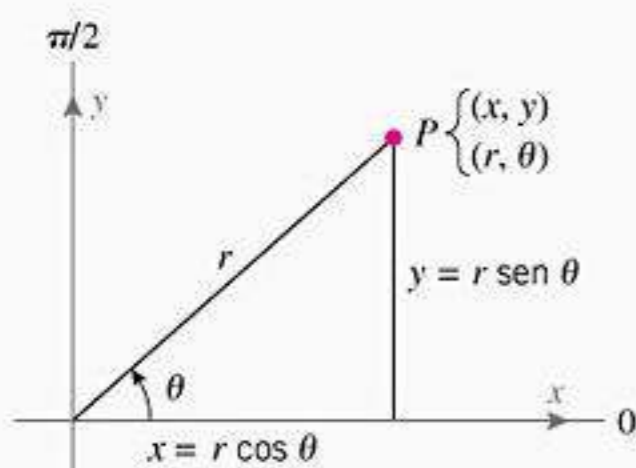


Figura 11.1.5

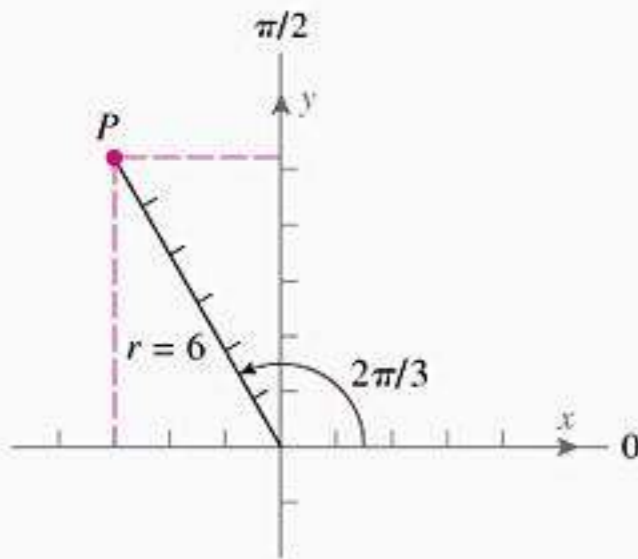


Figura 11.1.6

► **Exemplo 1** Encontre as coordenadas retangulares do ponto P cujas coordenadas polares são $(6, 2\pi/3)$.

Solução Substituindo as coordenadas polares $r = 6$ e $\theta = 2\pi/3$ em (1), obtemos

$$x = 6 \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \left(-\frac{1}{2} \right) = -3$$

$$y = 6 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3}$$

Portanto, as coordenadas retangulares de P são $(-3, 3\sqrt{3})$ (Figura 11.1.6). ◀

► **Exemplo 2** Encontre as coordenadas polares do ponto P cujas coordenadas retangulares são $(-2, 2\sqrt{3})$.

Solução Vamos encontrar as coordenadas polares $(r; \theta)$ de P que satisfazem as condições $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Da primeira equação em (2),

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$$

logo, $r = 4$. Da segunda equação em (2),

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Disto e do fato de $(-2, 2\sqrt{3})$ estar no segundo quadrante, tem-se que o ângulo que satisfaz $0 \leq \theta < 2\pi$ é $\theta = 2\pi/3$. Assim, as coordenadas polares de P são $(4, 2\pi/3)$. Todas as demais coordenadas polares de P podem ser expressas como

$$\left(4, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \right) \quad \text{ou} \quad \left(-4, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \right)$$

onde n é um inteiro. ◀

■ GRÁFICOS EM COORDENADAS POLARES

Vamos considerar agora o problema de traçar o gráfico de equações em r e θ , nas quais supomos que θ seja medido em radianos. Alguns exemplos de tais equações são

$$r = 1, \quad \theta = \pi/4, \quad r = \theta, \quad r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = \cos 2\theta$$

Em um sistema de coordenadas retangulares, o gráfico de uma equação em x e y consiste em todos os pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação. Em coordenadas polares, porém, os pontos têm um número infinito de coordenadas, de modo que um dado ponto pode ter algumas coordenadas polares que satisfazem uma equação, enquanto que outras não. Dada uma equação em r e θ , definimos o **gráfico em coordenadas polares** dessa equação como todos os pontos nos quais *pelo menos um* par de coordenadas $(r; \theta)$ satisfaz a equação.

► **Exemplo 3** Esboce os gráficos de

$$(a) \ r = 1 \qquad (b) \ \theta = \frac{\pi}{4}$$

em coordenadas polares

Solução (a) Para todos os valores de θ , o ponto $(1, \theta)$ está a uma unidade do pólo. Como θ é arbitrário, o gráfico é um círculo de raio 1 com centro no pólo (Figura 11.1.7a).

Solução (b) Para todos os valores de r , o ponto $(r, \pi/4)$ está sobre uma reta que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo polar. (Figura 11.1.7b). Valores positivos de r correspondem a pontos sobre a reta no primeiro quadrante, enquanto que valores negativos de r correspondem a pontos no terceiro quadrante. Assim, sem nenhuma restrição sobre r , o gráfico é a reta toda. Observe, contudo, que imposta a condição $r \geq 0$, o gráfico será então, somente o raio no primeiro quadrante. ◀

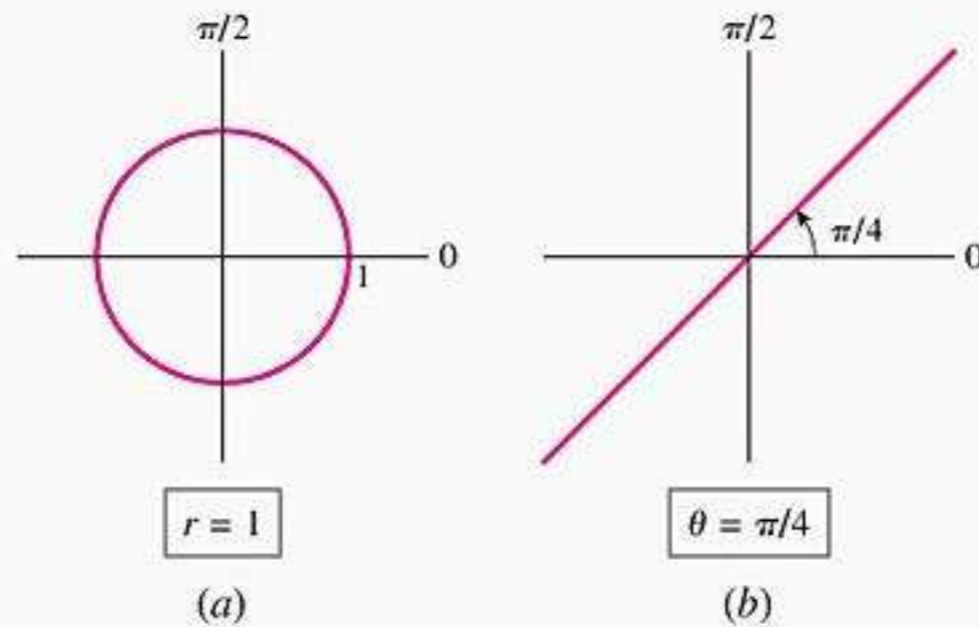


Figura 11.1.7

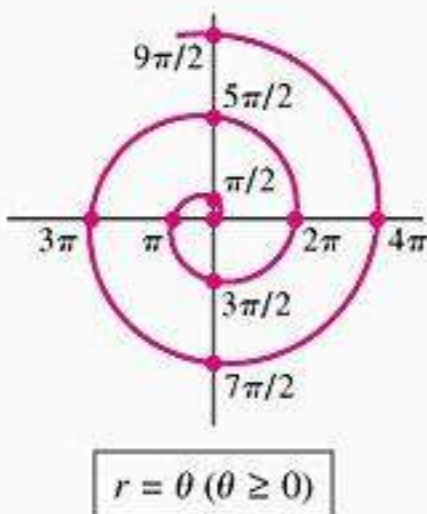


Figura 11.1.8

Especialmente importantes são as equações $r = f(\theta)$ que expressam r como função de θ . Uma maneira de fazer o gráfico de uma tal equação é escolher alguns valores típicos de θ , calcular os correspondentes valores de r e então esboçar os pares (r, θ) resultantes num sistema de coordenadas polares. Os próximos dois exemplos ilustram esse processo.

► **Exemplo 4** Esboce o gráfico de $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) em coordenadas polares esboçando pontos escolhidos.

Solução Observe que θ cresce à medida que r cresce; assim, o gráfico é uma curva que se afasta em espiral do pólo quando θ cresce. Um esboço razoavelmente preciso da espiral pode ser obtido plotando os pontos que correspondam a valores de θ que sejam múltiplos de $\pi/2$, lembrando que o valor de r é sempre igual ao valor de θ (Figura 11.1.8). ◀

► **Exemplo 5** Esboce o gráfico da equação $r = \text{sen } \theta$ em coordenadas polares plotando pontos.

Solução A Tabela 11.1.1 mostra as coordenadas de pontos do gráfico com incrementos de $\pi/6$ ($= 30^\circ$).

Esses pontos estão plotados na Figura 11.1.5. Observe que, no entanto, há 13 pontos na tabela, mas somente 6 pontos distintos foram plotados. Isso ocorre porque os pares a partir de $\theta = \pi$ resultam em duplicatas dos pontos precedentes. Por exemplo, $(-1/2, 7\pi/6)$ e $(1/2, \pi/6)$ representam o mesmo ponto. ◀

Observe que os pontos da Figura 11.1.5 aparentam estar dispostos em um círculo. Podemos confirmar isso expressando a equação polar $r = \text{sen } \theta$ em termos de x e y . Para isso, multiplicamos por r a equação, obtendo

$$r^2 = r \text{sen } \theta$$

Faça o gráfico da espiral $r = \theta$ ($\theta \leq 0$). Compare seu gráfico com o da Figura 11.1.8.

Tabela 11.1.1

θ (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \text{sen } \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(r, θ)	(0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$	$(1, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6})$	(0, π)	$(-\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3})$	$(-1, \frac{3\pi}{2})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{3})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$	(0, 2π)

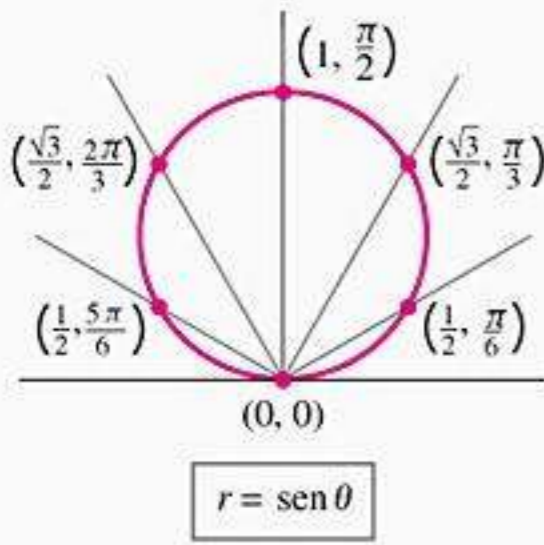


Figura 11.1.9

o que, a partir das Fórmulas (1) e (2), pode ser reescrito como

$$x^2 + y^2 = y$$

Reescrevendo esta equação como $x^2 + y^2 - y = 0$ e completando o quadrado, obtemos

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

que é um círculo de centro $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$ no plano xy .

O simples fato de uma equação $r = f(\theta)$ envolver as variáveis r e θ não implica que seu gráfico deva ser traçado em coordenadas polares. Quando for útil, esta equação pode também ter seu gráfico feito em coordenadas retangulares. Por exemplo, a Figura 11.1.10 mostra o gráfico de $r = \text{sen } \theta$ em coordenadas retangulares θr . Este gráfico realmente pode ajudar a visualizar como foi gerado o gráfico polar da Figura 11.1.9:

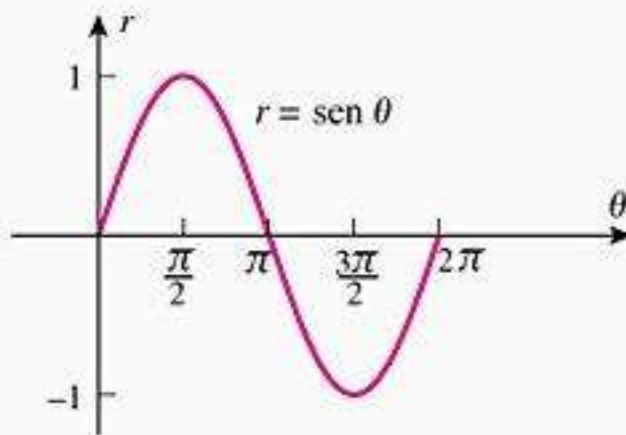


Figura 11.1.10

- Em $\theta = 0$ temos $r = 0$, o que corresponde ao pólo (0, 0) do gráfico polar.
- À medida que θ varia de 0 a $\pi/2$, o valor de r cresce de 0 para 1, logo o ponto (r, θ) move-se ao longo do círculo do pólo ao ponto no alto, em $(1, \pi/2)$.
- À medida que θ varia de $\pi/2$ até π o valor de r decresce de 1 para 0, logo o ponto (r, θ) move-se ao longo do círculo desde o ponto mais alto de volta ao pólo.
- À medida que θ varia de π a $3\pi/2$, os valores de r são negativos, variando de 0 até -1 . Assim, o ponto (r, θ) move-se ao longo do círculo do pólo ao ponto mais alto em $(1, \pi/2)$, que é o mesmo que $(-1, 3\pi/2)$. Isso duplica o movimento que ocorreu em $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
- À medida que θ varia de $3\pi/2$ a 2π , o valor de r varia de -1 a 0. Assim, o ponto (r, θ) move-se ao longo do círculo do ponto mais alto para o pólo, duplicando o movimento que ocorreu em $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

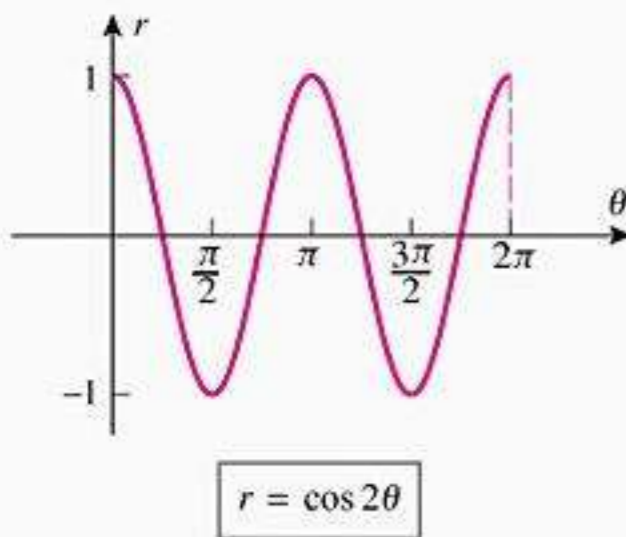


Figura 11.1.11

► **Exemplo 6** Esboce o gráfico de $r = \cos 2\theta$ em coordenadas polares.

Solução Em vez de esboçar pontos, vamos usar o gráfico de $r = \cos 2\theta$ em coordenadas retangulares (Figura 11.1.11) para visualizar como é gerado o gráfico polar dessa equação. A análise e o gráfico polar resultantes estão mostrados na Figura 11.1.12. Essa curva é chamada de *rosácea de quatro pétalas*. ◀

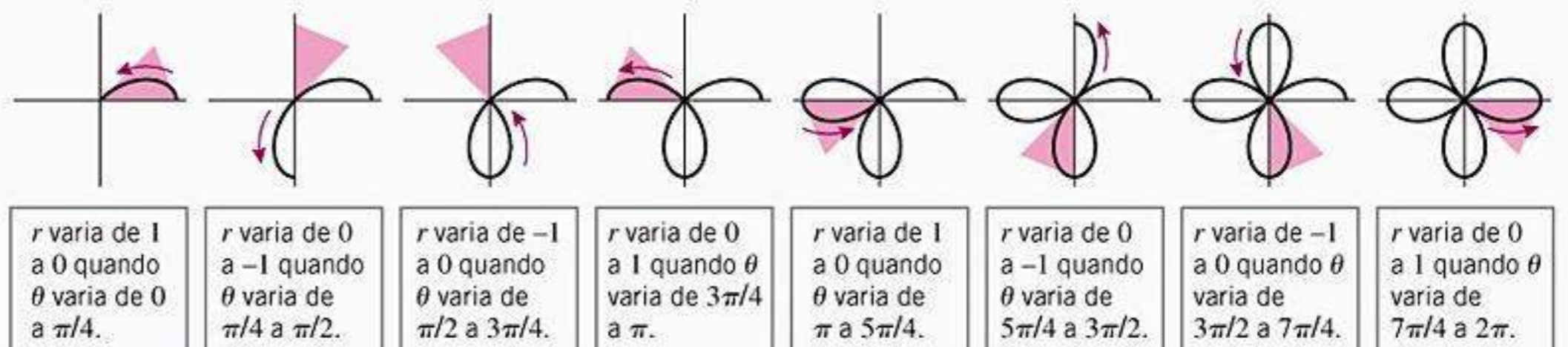


Figura 11.1.12

TESTES DE SIMETRIA

Observe que o gráfico polar de $r = \cos 2\theta$, na Figura 11.1.12, é simétrico em relação aos eixos x e y . Esta simetria poderia ter sido antecipada a partir do seguinte teorema, sugerido pela Figura 11.1.13. (omitiremos a prova).

A recíproca de cada parte do Teorema 11.1.1 é falsa. Ver Exercício 82.

11.1.1 TEOREMA (Testes de Simetria)

- (a) Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo x se substituindo θ por $-\theta$, obtivermos uma equação equivalente (Figura 11.1.13a).
- (b) Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo y se substituindo θ por $\pi - \theta$, obtivermos uma equação equivalente (Figura 11.1.13b).
- (c) Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação à origem se substituindo θ por $\theta + \pi$, ou substituindo r por $-r$, obtivermos uma equação equivalente (Figura 11.1.13c).

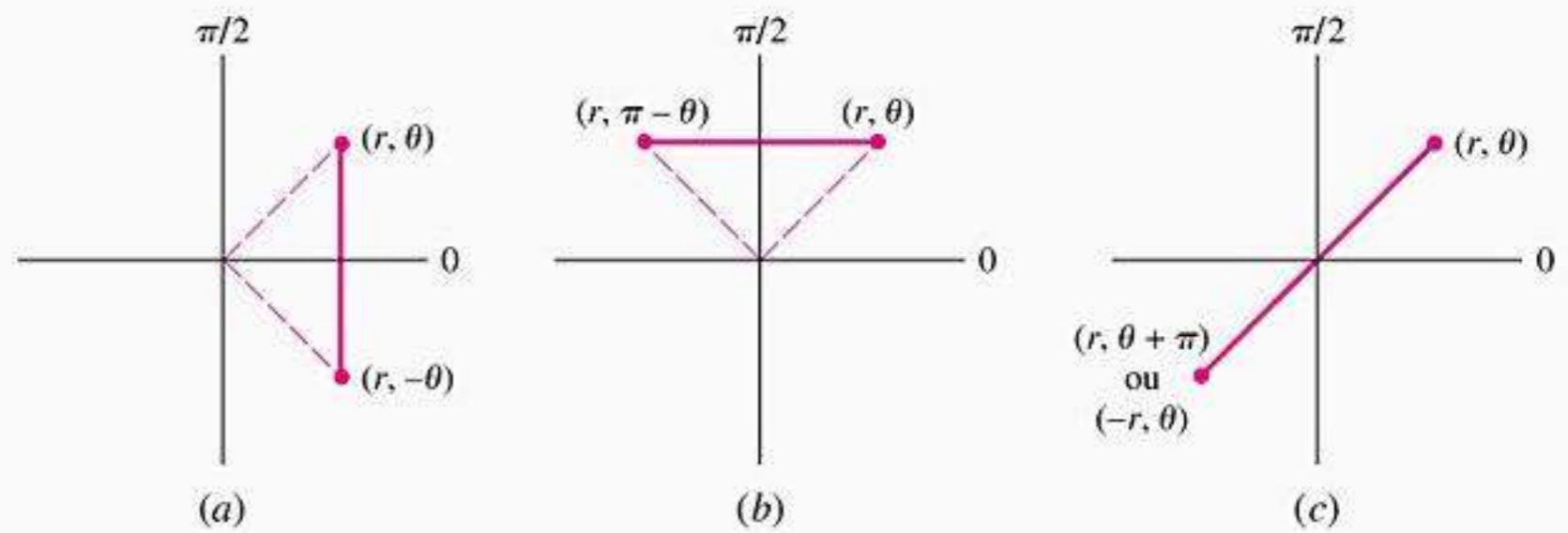


Figura 11.1.13

Exemplo 7 Use o Teorema 11.1.1 para confirmar que o gráfico de $r = \cos 2\theta$ na Figura 11.1.12 é simétrico em relação aos eixos x e y .

Solução Para testar a simetria em relação ao eixo x , substituímos θ por $-\theta$. Disso resulta

$$r = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

Assim, a equação não se modifica quando substituímos θ por $-\theta$.

Para testar a simetria em relação ao eixo y , substituímos θ por $\pi - \theta$. Disso resulta

$$r = \cos 2(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

Assim, a equação não se modifica quando substituímos θ por $\pi - \theta$. ◀

Exemplo 8 Esboce o gráfico de $r = a(1 - \cos \theta)$ em coordenadas polares, supondo que a seja uma constante positiva.

Solução Observe primeiro que, trocando θ por $-\theta$, não altera a equação, portanto sabemos antecipadamente que o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar. Fazendo, então, a parte superior do gráfico da curva, a inferior pode ser obtida por reflexão pelo eixo polar.

Como no exemplo anterior, vamos primeiro fazer o gráfico em coordenadas retangulares. Esse gráfico, mostrado na Figura 11.1.14a, pode ser obtido reescrevendo a equação dada como $r = a - a \cos \theta$. Esse gráfico pode ser obtido refletindo o gráfico de $r = a \cos \theta$ pelo eixo

Um gráfico que é simétrico em relação a ambos eixos x e y também é simétrico em relação à origem. Use o Teorema 11.1.1(c) para verificar que a curva do Exemplo 7 é simétrica em relação à origem.

x para obter o gráfico de $r = -a \cos \theta$ e, a seguir, transladando o gráfico a unidades para obter o gráfico de $r = a - a \cos \theta$. Podemos, agora, ver que:

- Quando θ varia de 0 a $\pi/3$, r cresce de 0 até $a/2$.
- Quando θ varia de $\pi/3$ a $\pi/2$, r cresce de $a/2$ até a .
- Quando θ varia de $\pi/2$ a $2\pi/3$, r cresce de a até $3a/2$.
- Quando θ varia de $2\pi/3$ a π , r cresce de $3a/2$ até $2a$.

Isso produz a curva polar mostrada na Figura 11.1.14b. O restante da curva pode ser obtido continuando a análise precedente de π até 2π , ou, conforme observado anteriormente, refletindo pelo eixo x a parte já feita (Figura 11.1.14c). Essa curva em forma de coração é denominada *cardióide* (a palavra grega *kardia* significa “coração”). ◀

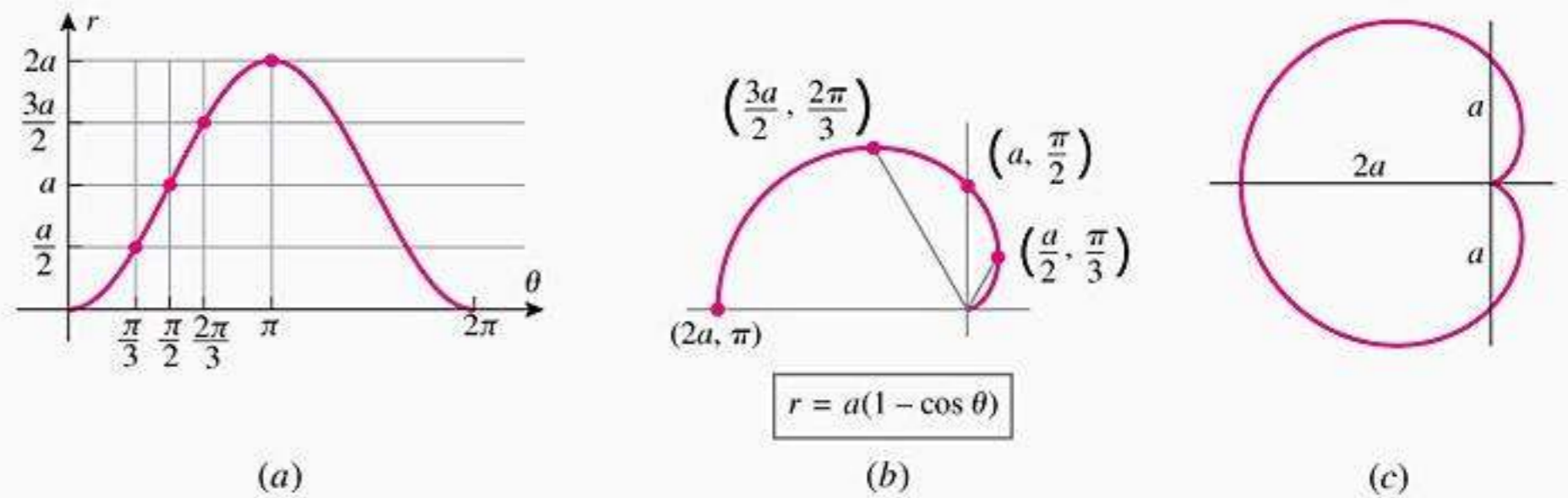


Figura 11.1.14

► **Exemplo 9** Esboce o gráfico de $r^2 = 4 \cos 2\theta$ em coordenadas polares.

Solução Essa equação não expressa r como uma função de θ , uma vez que resolvendo para r em termos de θ , obtemos duas funções:

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta} \quad \text{e} \quad r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$$

Desse modo, para obter o gráfico da equação $r^2 = 4 \cos 2\theta$ devemos fazer separadamente o gráfico dessas duas funções e, então, combiná-los.

Vamos começar com o gráfico de $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$. Observe primeiro que essa equação não muda se substituirmos θ por $-\theta$ ou se substituirmos θ por $\pi - \theta$. Assim, o gráfico é simétrico em relação aos eixos x e y . Isso significa que todo o gráfico pode ser obtido fazendo-se o gráfico da parte no primeiro quadrante, refletindo-se essa parte pelo eixo y para obter a parte no segundo quadrante e refletindo-se, então, essas duas partes pelo eixo x para obter as partes no terceiro e quarto quadrantes.

Para começar a análise, vamos fazer o gráfico da equação $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ em coordenadas retangulares (ver Figura 11.1.15a). Observe que há falhas no gráfico nos intervalos $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ e $5\pi/4 < \theta < 7\pi/4$, pois $\cos 2\theta$ torna-se negativo para estes valores de θ . A partir desse gráfico vemos que:

- À medida que θ varia de 0 a $\pi/4$, r decresce de 2 para 0 .
- À medida que θ varia de $\pi/4$ a $\pi/2$, não são gerados pontos no gráfico polar.

Isso dá a parte do gráfico mostrada na Figura 11.1.15b. Conforme observado anteriormente, podemos completar o gráfico por uma reflexão pelo eixo y seguida de uma reflexão pelo eixo x (11.1.15c). O gráfico resultante é denominado *lemniscata* (da palavra grega *lemniscos* para um laço de fita que se parece com o número oito). Deixamos a cargo do leitor verificar que a

equação $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ tem o mesmo gráfico que $r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$, porém traçado de forma diagonalmente oposta. Assim, o gráfico da equação $r^2 = 4 \cos 2\theta$ consiste de duas lemniscatas idênticas sobrepostas. ◀

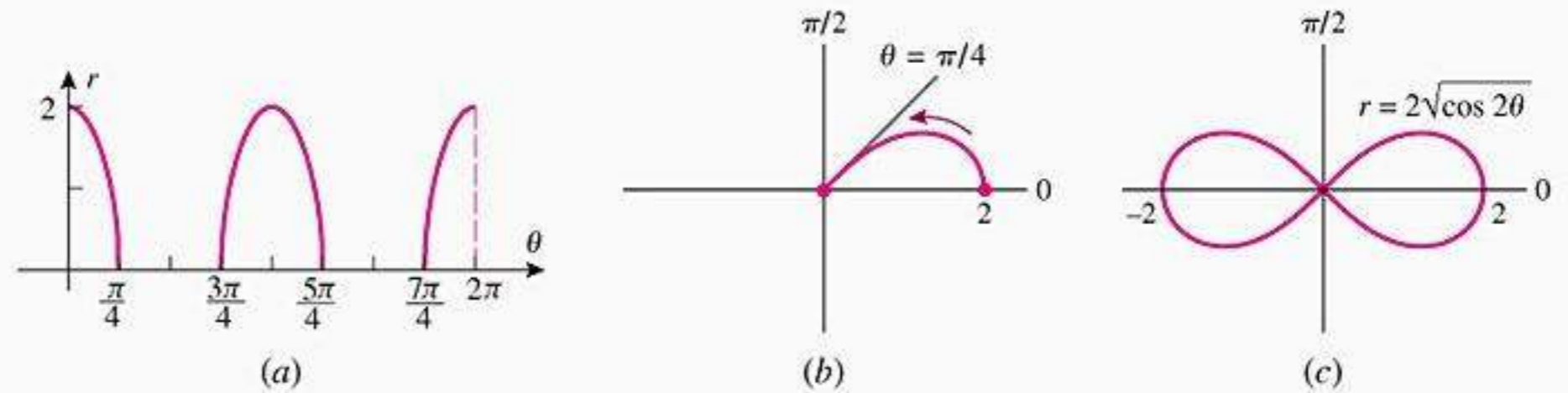


Figura 11.1.15

■ FAMÍLIAS DE RETAS E RAIOS ATRAVÉS DO PÓLO

Se θ_0 for um ângulo fixo, então para todos os valores de r o ponto (r, θ_0) está sobre uma reta que forma com o eixo polar um ângulo $\theta = \theta_0$; reciprocamente, todo ponto sobre esta reta tem um par de coordenadas da forma (r, θ_0) . Assim, a equação $\theta = \theta_0$ representa a reta que passa pelo pólo e forma um ângulo θ_0 com o eixo polar (Figura 11.1.16a). Se exigirmos que r seja não-negativo, então o gráfico da equação $\theta = \theta_0$ é o raio que emana do pólo e forma um ângulo de θ_0 com o eixo polar (Figura 11.1.16b). Desse modo, enquanto θ_0 varia, a equação $\theta = \theta_0$ produz uma família de retas através do pólo ou de raios através do pólo, dependendo das restrições sobre r .

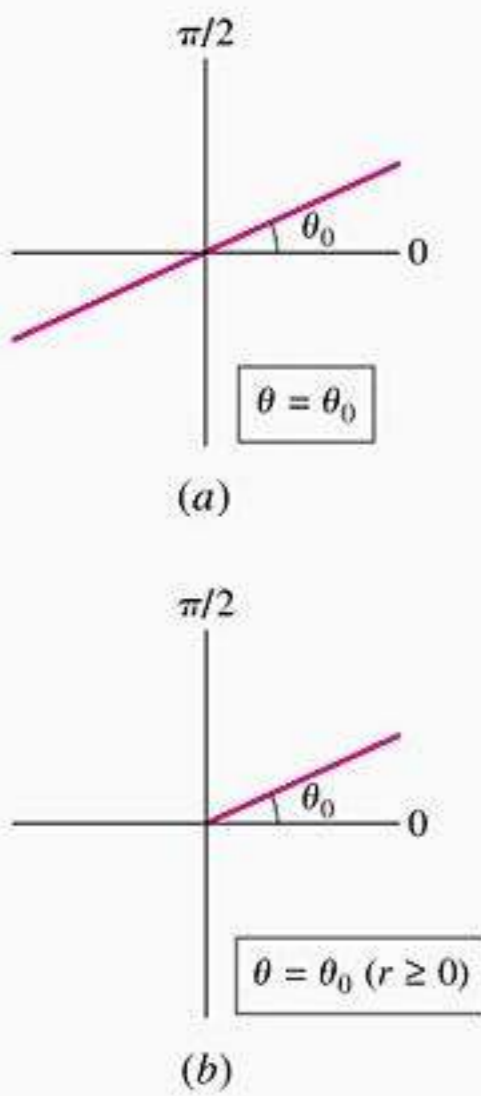


Figura 11.1.16

■ FAMÍLIAS DE CÍRCULOS

Vamos considerar três famílias de círculos supondo que a seja uma constante positiva.

$$r = a \quad r = 2a \cos \theta \quad r = 2a \sin \theta \quad (3-5)$$

A equação $r = a$ representa um círculo de raio a com centro no pólo (Figura 11.1.17a). Assim, variando a , essa equação produz uma família de círculos com centro no pólo. Para as famílias (4) e (5), lembre-se da Geometria plana de que um triângulo inscrito em um círculo com um diâmetro do círculo como um de seus lados, deve ser um triângulo retângulo. Assim, conforme indicado nas Figuras 11.1.17b e 11.1.17c, a equação $r = 2a \cos \theta$ representa um círculo de raio a , com centro sobre o eixo x e tangente na origem ao eixo y ; da mesma forma, a equação $r = 2a \sin \theta$ representa um círculo de raio a , com o centro sobre o eixo y e tangente ao eixo x na origem. Portanto, variando a , as Equações (4) e (5) produzem as famílias ilustradas nas Figuras 11.1.17d e 11.1.17e.

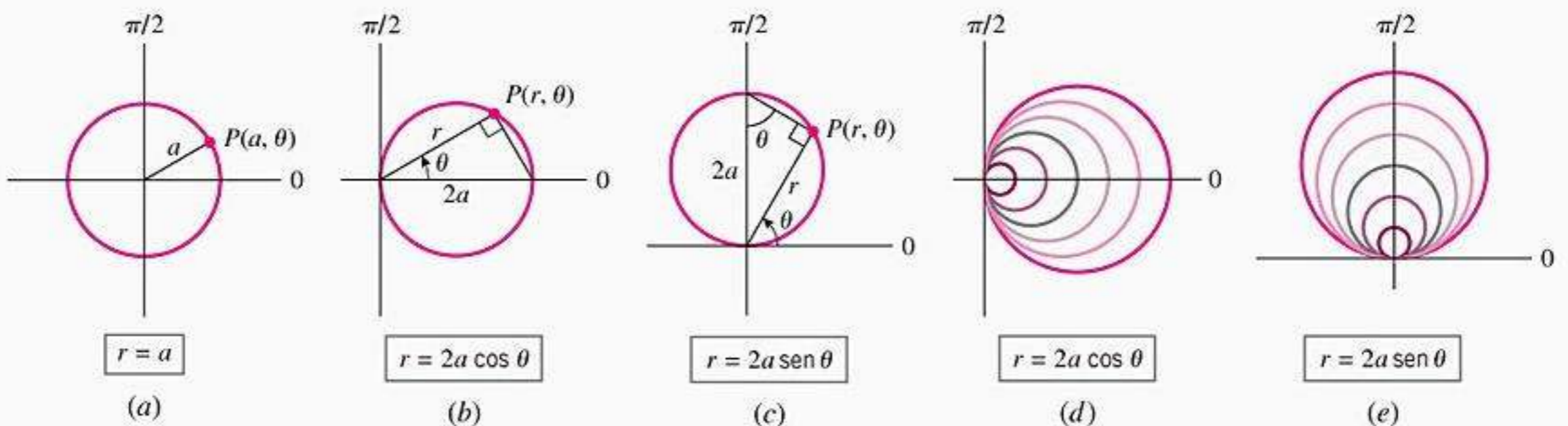


Figura 11.1.17

FAMÍLIAS DE ROSÁCEAS

Em coordenadas polares, as equações da forma

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \quad r = a \operatorname{cos} n\theta \quad (6-7)$$

em que $a > 0$ e n é um inteiro positivo, representam famílias de curvas em forma de flor chamadas *rosáceas* (Figura 11.1.18). A rosácea consiste de n pétalas de raio a igualmente espaçadas se n for ímpar e, se n for par, $2n$ pétalas de raio a igualmente espaçadas. Pode-se mostrar que uma rosácea com um número par de pétalas é traçada exatamente uma vez quando θ varia no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ e uma rosácea com um número ímpar de pétalas é traçada exatamente uma vez quando θ varia no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (Exercício 81). Uma rosácea de quatro pétalas e raio 1 teve seu gráfico feito no Exemplo 6.

Observe que, substituindo θ por $-\theta$, a equação $r = 2a \operatorname{cos} \theta$ não muda, enquanto que substituindo θ por $\pi - \theta$ não muda a equação $r = 2a \operatorname{sen} \theta$. Isso explica por que os círculos nas Figuras 11.1.17d são simétricos em relação ao eixo x e os da Figura 11.1.17e são simétricos em relação ao eixo y .

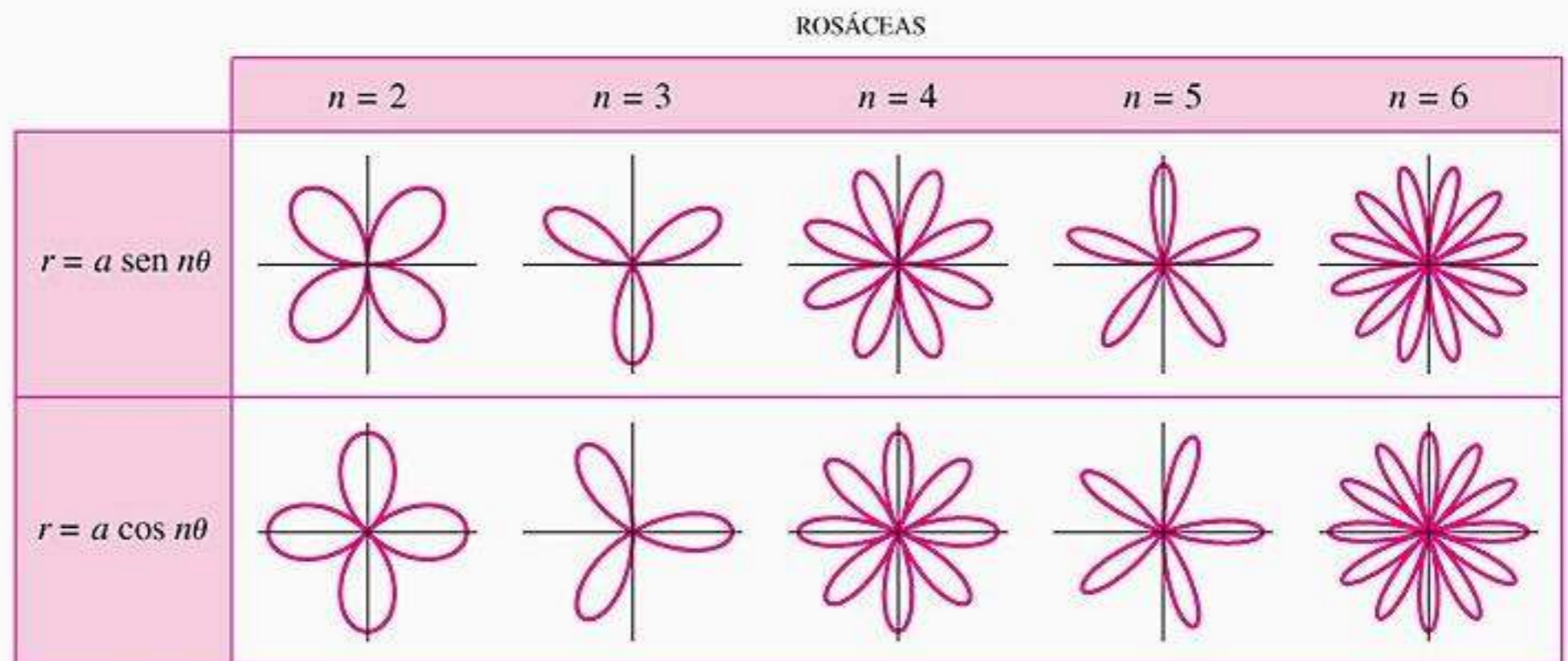


Figura 11.1.18

FAMÍLIAS DE CARDIÓIDES E LIMAÇONS

As equações de qualquer um dos quatro tipos

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta \quad r = a \pm b \operatorname{cos} \theta \quad (8-9)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$, representam curvas polares chamadas *limaçons* (do latim *limax* para uma criatura parecida com uma lesma). Há quatro formas possíveis para os limaçons, que são determinadas pela razão a/b (Figura 11.1.19). Se $a = b$ (o caso $a/b = 1$), então o limaçon é denominado *cardióide*, dada a semelhança com o aspecto de um coração, conforme notado no Exemplo 8.

Qual é o aspecto de uma rosácea de uma pétala?

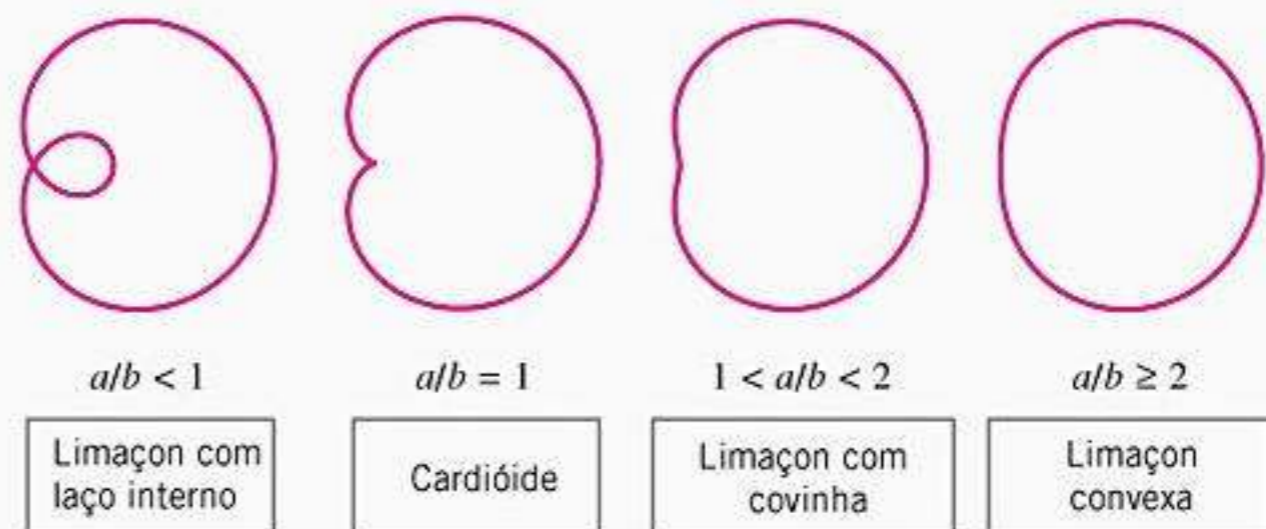


Figura 11.1.19

► **Exemplo 10** A Figura 11.1.20 mostra a família de limaçons $r = a + \cos \theta$ na qual a constante a varia em passos de 0,25 desde 0,25 até 2,50. Conforme observa-se na Figura 11.1.19, os limaçons evoluem desde o tipo com laço até o tipo convexo. À medida que a cresce a partir de 0,25, o laço vai ficando cada vez menor até que a cardióide é atingida quando $a = 1$. Quando a cresce mais ainda, leva os limaçons a evoluírem para o tipo com covinha até o tipo convexo. ◀

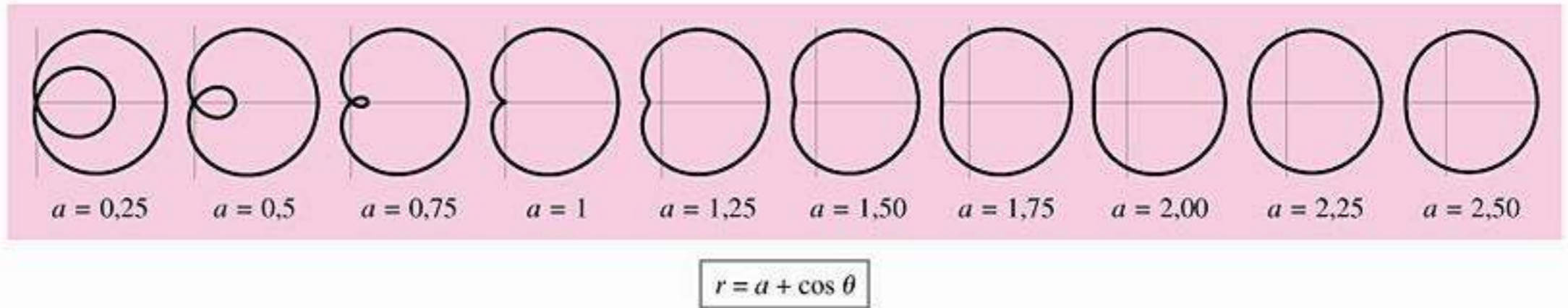


Figura 11.1.20

■ **FAMÍLIAS DE ESPIRAIS**

Uma *espiral* é uma curva que se enrola em torno de um ponto central. Em geral, as espirais têm versões “destras” e “canhotas”, que se enrolam em sentidos opostos, dependendo das restrições sobre o ângulo polar e dos sinais das constantes que aparecem em suas equações. Alguns dos tipos mais comuns de espirais estão mostrados na Figura 11.1.21 para valores não-negativos de θ , a e b .

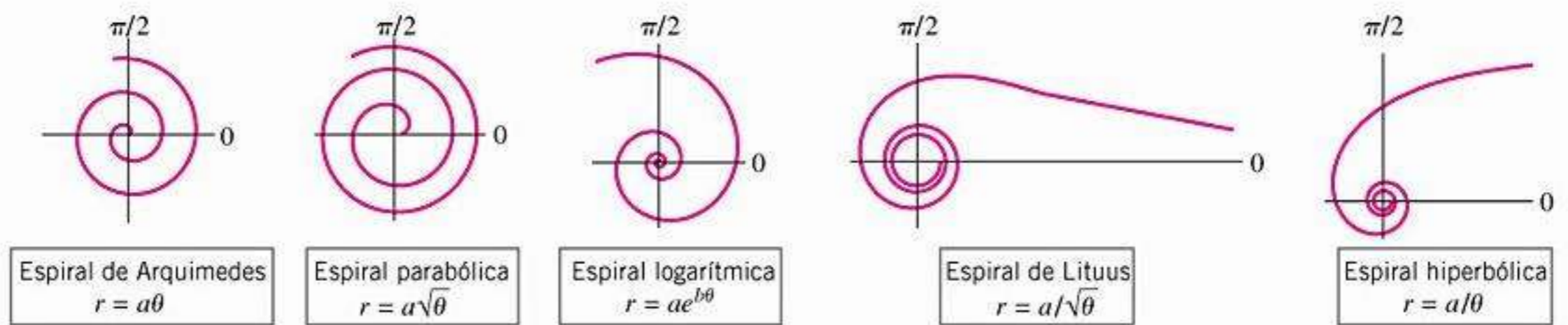


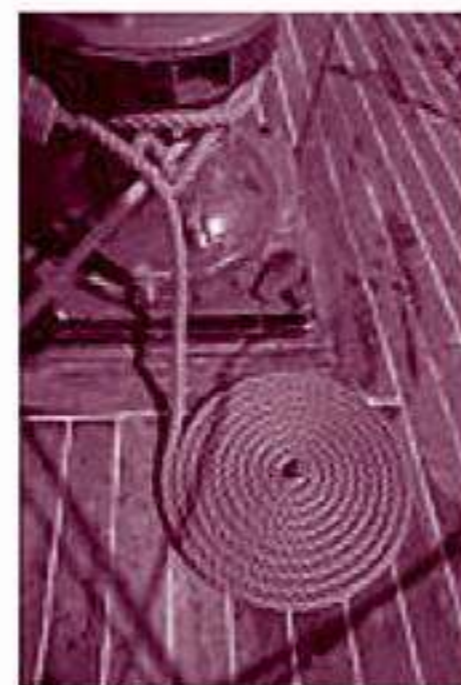
Figura 11.1.21

■ **ESPIRAIS NA NATUREZA**

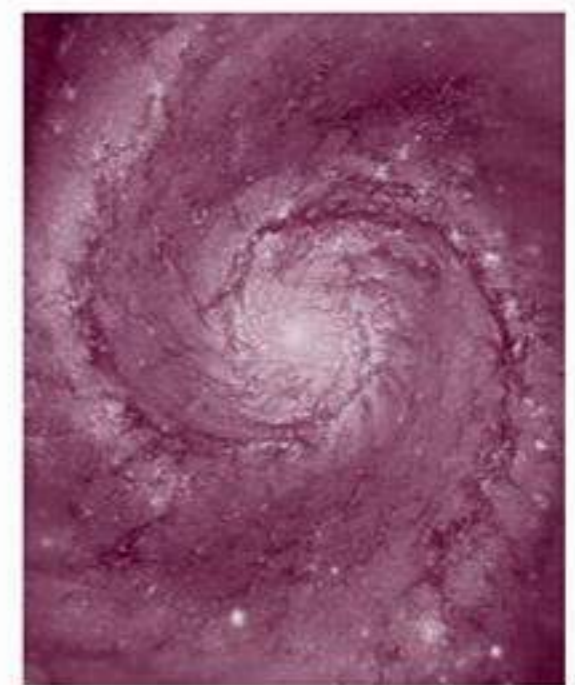
Vários tipos de espirais ocorrem na natureza. Por exemplo, o caramujo de argonauta que tem câmaras (*abaixo*) forma uma espiral logarítmica e uma corda de marinheiro enrolada forma uma espiral de Arquimedes. As espirais também ocorrem em flores, nas presas de certos animais e no formato de galáxias.



O caramujo de argonauta com câmara mostra uma espiral logarítmica. O animal vive na câmara mais para fora.



Uma corda de marinheiro enrolada formando uma espiral de Arquimedes.



Uma galáxia espiral.

■ GERANDO CURVAS POLARES COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

Para as curvas polares que são muito complicadas para o cálculo à mão, devem ser usados recursos gráficos computacionais. Embora a maioria dos recursos sejam capazes de fazer diretamente gráficos de curvas polares, há alguns que são incapazes. No entanto, se um recurso gráfico computacional puder ser usado para fazer gráficos de curvas paramétricas, então ele pode ser usado para fazer o gráfico de uma curva polar $r = f(\theta)$, convertendo-se esta equação para a forma paramétrica. Isso pode ser feito substituindo-se $f(\theta)$ no lugar de r em (1). Obtém-se

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta \quad (10)$$

que é um par de equações paramétricas para a curva polar em termos do parâmetro θ .

► **Exemplo 11** Exprese a equação polar

$$r = 2 + \cos \frac{5\theta}{2}$$

parametricamente e gere o gráfico polar a partir das equações paramétricas usando um recurso gráfico.

Solução Substituindo a equação dada para r em $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, obtemos as equações paramétricas

$$x = \left[2 + \cos \frac{5\theta}{2} \right] \cos \theta, \quad y = \left[2 + \cos \frac{5\theta}{2} \right] \sin \theta$$

Em seguida, precisamos encontrar um intervalo no qual variar θ para obter todo o gráfico. Para encontrar tal intervalo, buscamos o menor número de revoluções que devem ocorrer até r começar a repetir. Algebricamente, isso equivale a encontrar o menor valor positivo de n tal que

$$2 + \cos \left(\frac{5(\theta + 2n\pi)}{2} \right) = 2 + \cos \frac{5\theta}{2}$$

ou

$$\cos \left(\frac{5\theta}{2} + 5n\pi \right) = \cos \frac{5\theta}{2}$$

Para esta equação ser válida, a quantidade $5n\pi$ deve ser um múltiplo par de π ; o menor valor n para o qual isto ocorre é $n = 2$. Assim, o gráfico inteiro será traçado em duas revoluções, significando que ele pode ser gerado das equações paramétricas

$$x = \left[2 + \cos \frac{5\theta}{2} \right] \cos \theta, \quad y = \left[2 + \cos \frac{5\theta}{2} \right] \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 4\pi)$$

Assim, obtemos o gráfico na Figura 11.1.22. ◀

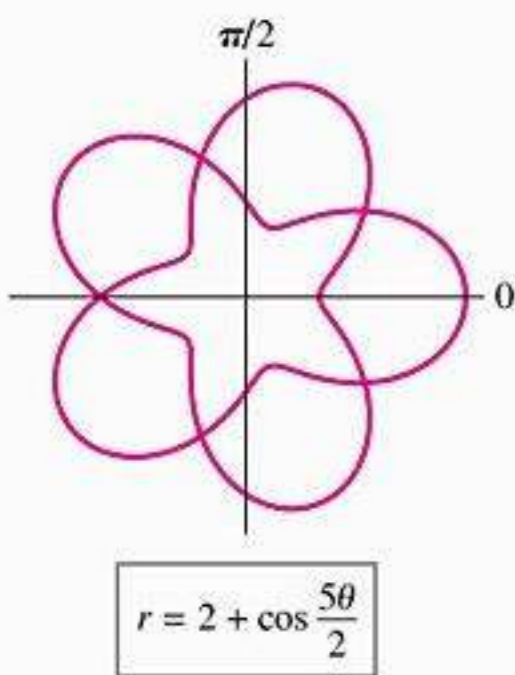


Figura 11.1.22

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico computacional para reproduzir a curva da Figura 11.1.22. Se o recurso gráfico requer t como parâmetro, o leitor deve trocar θ por t em (10) para gerar o gráfico.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.1 (Ver página 731 para respostas.)

- (a) As coordenadas retangulares (x, y) podem ser recuperadas das coordenadas polares (r, θ) através das equações $x = \underline{\hspace{2cm}}$ e $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) As coordenadas polares (r, θ) podem ser recuperadas das coordenadas retangulares (x, y) através das equações $r^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ e $\text{tg } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Obtenha as coordenadas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares são dadas.

(a) $(4, \pi/3)$	(b) $(2, -\pi/6)$
(c) $(6, -2\pi/3)$	(d) $(4, 5\pi/4)$
- Em cada parte, encontre coordenadas polares que satisfaçam as condições dadas para o ponto cujas coordenadas retangulares são $(1, \sqrt{3})$.

(a) $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$
(b) $r \leq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$
- Em cada parte, dê o nome que melhor descreve a curva polar: rosácea, reta, círculo, limaçon, cardióide, espiral, lemniscata ou nenhuma dessas.

(a) $r = 1 - \theta$	(b) $r = 1 + 2 \sin \theta$
(c) $r = \sin 2\theta$	(d) $r = \cos^2 \theta$
(e) $r = \text{cosec } \theta$	(f) $r = 2 + 2 \cos \theta$
(g) $r = -2 \sin \theta$	

EXERCÍCIOS 11.1 Recurso Gráfico

1-2 Esboce os pontos em coordenadas polares.

1. (a) $(3, \pi/4)$ (b) $(5, 2\pi/3)$ (c) $(1, \pi/2)$
 (d) $(4, 7\pi/6)$ (e) $(-6, -\pi)$ (f) $(-1, 9\pi/4)$
 2. (a) $(2, -\pi/3)$ (b) $(3/2, -7\pi/4)$ (c) $(-3, 3\pi/2)$
 (d) $(-5, -\pi/6)$ (e) $(2, 4\pi/3)$ (f) $(0, \pi)$

3-4 Determine as coordenadas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares estão dadas.

3. (a) $(6, \pi/6)$ (b) $(7, 2\pi/3)$ (c) $(-6, -5\pi/6)$
 (d) $(0, -\pi)$ (e) $(7, 17\pi/6)$ (f) $(-5, 0)$
 4. (a) $(-2, \pi/4)$ (b) $(6, -\pi/4)$ (c) $(4, 9\pi/4)$
 (d) $(3, 0)$ (e) $(-4, -3\pi/2)$ (f) $(0, 3\pi)$
 5. Em cada parte, é dado um ponto em coordenadas retangulares. Encontre dois pares de coordenadas polares para o ponto, um par satisfazendo $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ e um segundo par satisfazendo $r \geq 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$.
 (a) $(-5, 0)$ (b) $(2\sqrt{3}, -2)$ (c) $(0, -2)$
 (d) $(-8, -8)$ (e) $(-3, 3\sqrt{3})$ (f) $(1, 1)$
 6. Em cada parte, encontre as coordenadas polares que satisfazem as condições dadas para os pontos cujas coordenadas retangulares são $(-\sqrt{3}, 1)$.
 (a) $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$
 (b) $r \leq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$
 (c) $r \geq 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$
 (d) $r \leq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$

7-8 Use um recurso computacional, quando for necessário, para aproximar as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas retangulares estão dadas.

7. (a) $(3, 4)$ (b) $(6, -8)$ (c) $(-1, \text{arc tg } 1)$
 8. (a) $(-3, 4)$ (b) $(-3, 1.7)$ (c) $(2, \text{arc sen } \frac{1}{2})$

9-10 Identifique a curva transformando a equação polar dada para coordenadas retangulares.

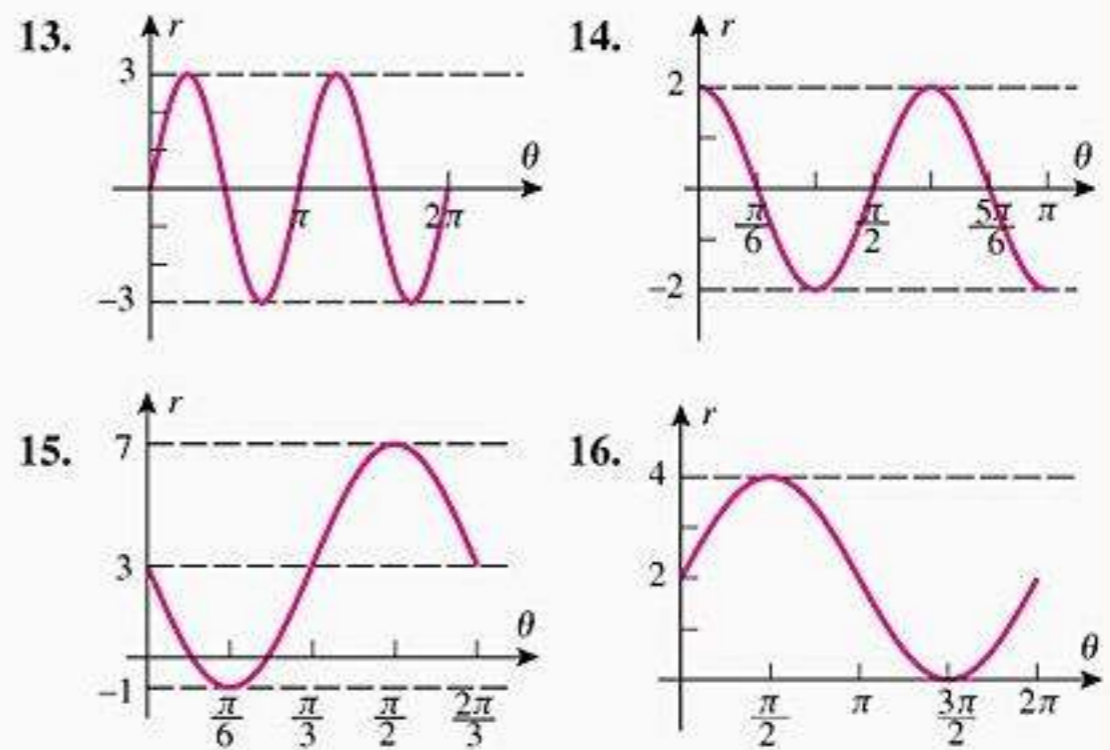
9. (a) $r = 2$ (b) $r \text{ sen } \theta = 4$
 (c) $r = 3 \cos \theta$ (d) $r = \frac{6}{3 \cos \theta + 2 \text{ sen } \theta}$
 10. (a) $r = 5 \sec \theta$ (b) $r = 2 \text{ sen } \theta$
 (c) $r = 4 \cos \theta + 4 \text{ sen } \theta$ (d) $r = \sec \theta \text{ tg } \theta$

11-12 Expresse as equações dadas em coordenadas polares.

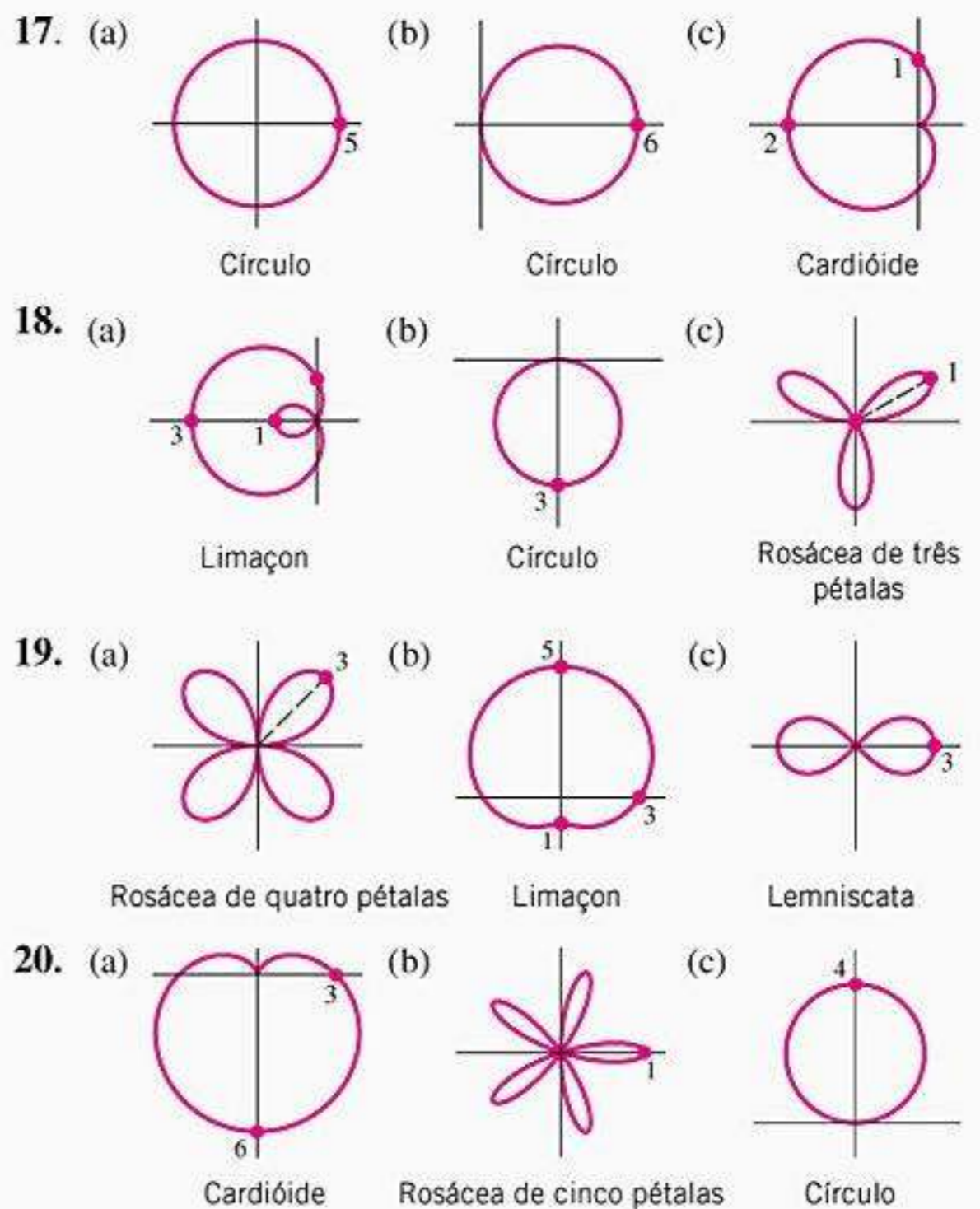
11. (a) $x = 3$ (b) $x^2 + y^2 = 7$
 (c) $x^2 + y^2 + 6y = 0$ (d) $9xy = 4$
 12. (a) $y = -3$ (b) $x^2 + y^2 = 5$
 (c) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (d) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$

ENFOCANDO CONCEITOS

13-16 É dado um gráfico em um sistema de coordenadas retangulares θr . Esboce o gráfico correspondente em coordenadas polares.



17-20 Determine uma equação para o gráfico polar dado.



21-50 Esboce a curva em coordenadas polares.

21. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 22. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ 23. $r = 3$
 24. $r = 4 \cos \theta$ 25. $r = 6 \text{ sen } \theta$ 26. $r = 1 + \text{sen } \theta$
 27. $2r = \cos \theta$ 28. $r - 2 = 2 \cos \theta$

- | | |
|---|---|
| 29. $r = 3(1 + \sen \theta)$ | 30. $r = 5 - 5 \sen \theta$ |
| 31. $r = 4 - 4 \cos \theta$ | 32. $r = 1 + 2 \sen \theta$ |
| 33. $r = -1 - \cos \theta$ | 34. $r = 4 + 3 \cos \theta$ |
| 35. $r = 2 + \cos \theta$ | 36. $r = 3 - \sen \theta$ |
| 37. $r = 3 + 4 \cos \theta$ | 38. $r - 5 = 3 \sen \theta$ |
| 39. $r = 5 - 2 \cos \theta$ | 40. $r = -3 - 4 \sen \theta$ |
| 41. $r^2 = \cos 2\theta$ | 42. $r^2 = 9 \sen 2\theta$ |
| 43. $r^2 = 16 \sen 2\theta$ | 44. $r = 4\theta \quad (\theta \geq 0)$ |
| 45. $r = 4\theta \quad (\theta \leq 0)$ | 46. $r = 4\theta$ |
| 47. $r = -2 \cos 2\theta$ | 48. $r = 3 \sen 2\theta$ |
| 49. $r = 9 \sen 4\theta$ | 50. $r = 2 \cos 3\theta$ |

51–55 Use um recurso computacional para gerar o gráfico polar. Confirme que o intervalo escolhido para o parâmetro garanta que seja gerado um gráfico completo.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 51. $r = \cos \frac{\theta}{2}$ | 52. $r = \sen \frac{\theta}{2}$ |
| 53. $r = 1 - 2 \sen \frac{\theta}{4}$ | 54. $r = 0,5 + \cos \frac{\theta}{3}$ |
| 55. $r = \cos \frac{\theta}{5}$ | |

56. A figura abaixo mostra o gráfico da “curva da borboleta”

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \sen^3 \frac{\theta}{4}$$

Gere a curva completa com um recurso gráfico computacional e dê o intervalo do parâmetro usado.

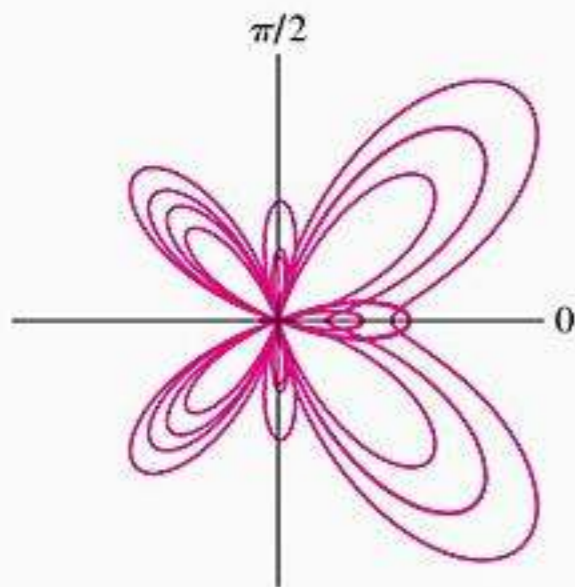
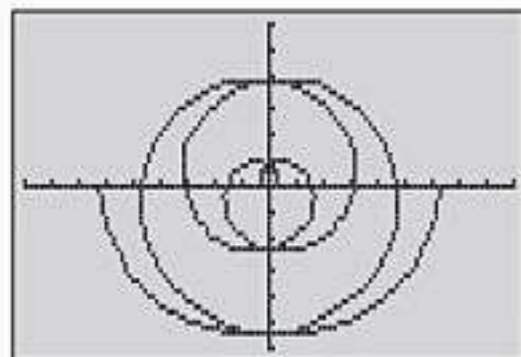


Figura Ex-56

57. A figura abaixo mostra a espiral de Arquimedes $r = \theta/2$ produzida por um recurso gráfico computacional.
- Qual é o intervalo de valores de θ que foi usado para gerar o gráfico?
 - Duplique o gráfico com seu próprio recurso gráfico computacional.



$[-9, 9] \times [-6, 6]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura Ex-57

58. Determine equações para as duas famílias de círculos na figura abaixo.

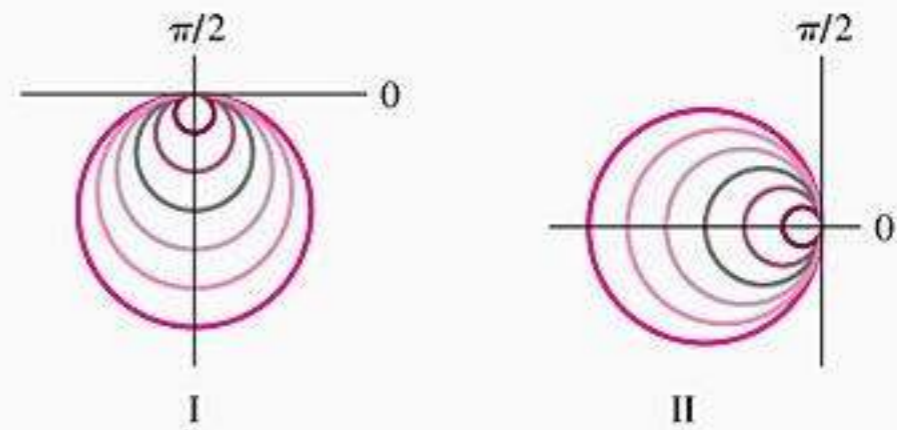


Figura Ex-58

59. (a) Mostre que quando a varia, a equação polar

$$r = a \sec \theta \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

descreve uma família de retas perpendiculares ao eixo polar.

(b) Mostre que quando b varia, a equação polar

$$r = b \operatorname{cosec} \theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

descreve uma família de retas paralelas ao eixo polar.

ENFOCANDO CONCEITOS

60. A figura abaixo mostra os gráficos da espiral de Arquimedes $r = \theta$ e da espiral parabólica $r = \sqrt{\theta}$. Qual é qual? Explique seu raciocínio.

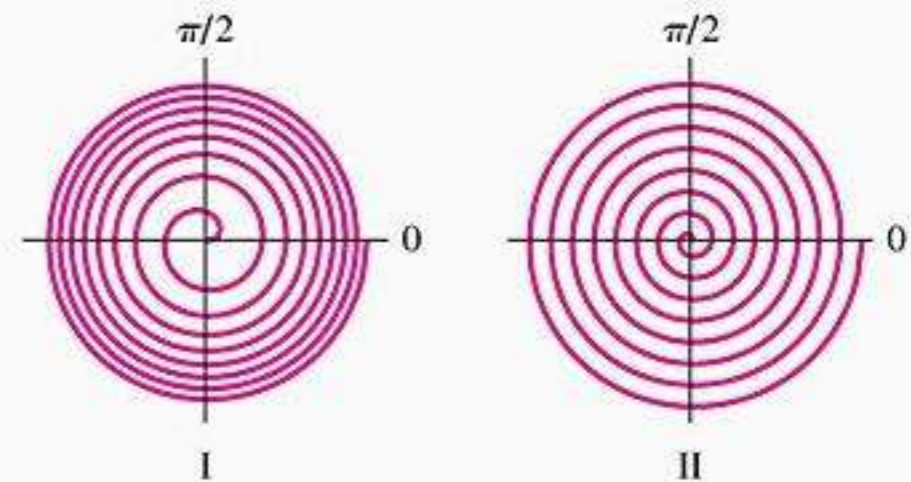


Figura Ex-60

61. A figura abaixo mostra o gráfico polar da equação $r = f(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$). Esboce o gráfico de

- | | |
|--|--|
| (a) $r = f(-\theta)$ | (b) $r = f\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ |
| (c) $r = f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ | (d) $r = -f(\theta)$ |
| (e) $r = f(\theta) + 1$. | |

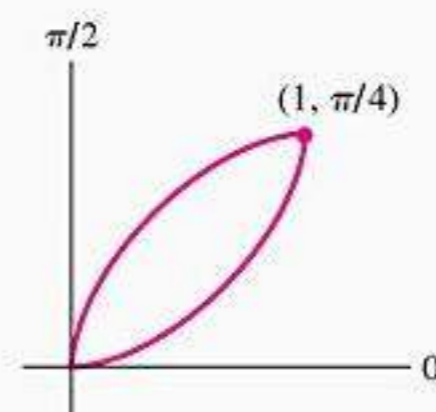


Figura Ex-61

62. Repita o Exercício 61 usando a figura abaixo.

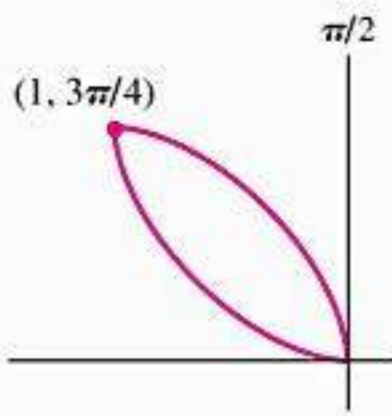


Figura Ex-62

63. Use um recurso computacional para investigar como a família de curvas polares $r = 1 + a \cos n\theta$ é afetada pela mudança de valores de a e n , na qual a é um número real positivo e n é um inteiro positivo. Escreva um breve parágrafo para explicar suas conclusões.

64. Mostre que se o gráfico polar de $r = f(\theta)$ for girado no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo α , então $r = f(\theta - \alpha)$ é uma equação para a curva girada. [Sugestão: se (r_0, θ_0) for um ponto qualquer do gráfico original, então $(r_0, \theta_0 + \alpha)$ é um ponto no gráfico girado.]

65. Use o resultado do Exercício 64 para encontrar uma equação para a cardióide $r = 1 + \cos \theta$, após ela ter sido girada pelo ângulo dado e verifique a sua resposta com um recurso computacional.

- (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\frac{5\pi}{4}$

66. Use o resultado do Exercício 64 para encontrar uma equação para a lemniscata que resulta quando aquela do Exemplo 9 for girada no sentido anti-horário por um ângulo de $\pi/2$.

67. Esboce o gráfico polar da equação $(r - 1)(\theta - 1) = 0$.

68. (a) Se A e B não forem ambos nulos, mostre que o gráfico da equação polar

$$r = A \sin \theta + B \cos \theta$$

é um círculo. Encontre seu raio.

(b) Deduza as Fórmulas (4) e (5) da fórmula dada na parte (a).

69. Encontre o ponto mais alto da cardióide $r = 1 + \cos \theta$.

70. Encontre o ponto mais à esquerda da parte superior da cardióide $r = 1 + \cos \theta$.

71. Defina a largura da pétala de uma rosácea como sendo a dimensão que está mostrada na figura em anexo. Mostre que a largura w de uma rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$ é $w = 2\sqrt{6}/9$. [Sugestão: expresse y em termo de θ e investigue o maior valor de y .]

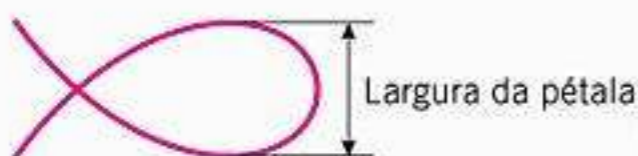


Figura Ex-71

72. Modifique o argumento no Exercício 71 para encontrar a largura (vertical) da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.

73. (a) Mostre que em um sistema de coordenadas polares a distância d entre os pontos (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

(b) Mostre que se $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ e se r_1 e r_2 forem positivos, então a área A do triângulo com vértices $(0, 0)$, (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é

$$A = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Encontre a distância entre os pontos cujas coordenadas polares são $(3, \pi/6)$ e $(2, \pi/3)$.

(d) Encontre a área do triângulo cujos vértices em coordenadas polares são $(0, 0)$, $(1, 5\pi/6)$ e $(2, \pi/3)$.

74. Use a fórmula obtida na parte (a) do Exercício 73 para encontrar a distância entre as pontas de pétalas sucessivas da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$ e confira sua resposta usando Geometria.

75. Use a fórmula obtida na parte (a) do Exercício 73 para encontrar a distância entre as pontas de pétalas sucessivas da rosácea de três pétalas $r = \sin 3\theta$ e confira sua resposta usando Trigonometria.

76. No final do século XVII, o astrônomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712) introduziu a família de curvas

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - b^4 - 4a^2x^2 = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

em seus estudos sobre os movimentos relativos da Terra e do Sol. Estas curvas são chamadas de *ovais de Cassini* e têm um dos três aspectos básicos mostrados na figura abaixo.

(a) Mostre que se $a = b$, então a equação polar da oval de Cassini é $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, que é uma lemniscata.

(b) Use a fórmula do Exercício 73(a) para mostrar que a lemniscata em (a) é a curva traçada por um ponto que se move de tal forma que o produto de suas distâncias dos pontos polares $(a, 0)$ e (a, π) é a^2 .

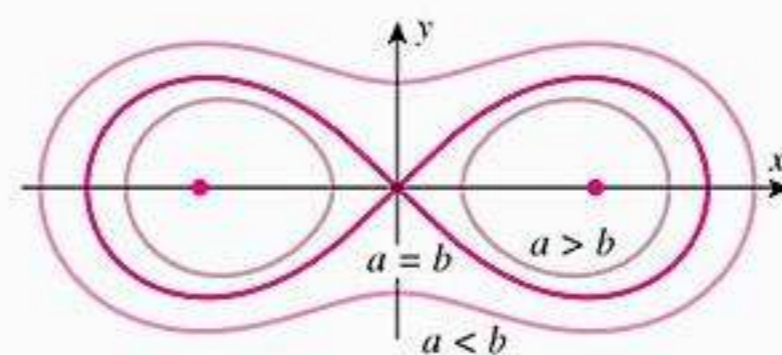


Figura Ex-76

77-80 Assíntotas verticais e horizontais de curvas polares podem ser, às vezes, detectadas investigando o comportamento de $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ à medida que θ varia. Use essa idéia nesses exercícios.

77. Mostre que a *espiral hiperbólica* $r = 1/\theta$ ($\theta > 0$) tem uma assíntota horizontal em $y = 1$, mostrando que $y \rightarrow 1$ e $x \rightarrow +\infty$ quando $\theta \rightarrow 0^+$. Confirme seu resultado gerando a espiral com um recurso computacional.

78. Mostre que a espiral $r = 1/\theta^2$ não tem quaisquer assíntotas horizontais.

79. (a) Mostre que a *curva kappa* $r = 4 \operatorname{tg} \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) tem uma assíntota vertical em $x = 4$ mostrando que $x \rightarrow 4$ e $y \rightarrow +\infty$ quando $\theta \rightarrow \pi/2^-$ e que $x \rightarrow 4$ e $y \rightarrow -\infty$ quando $\theta \rightarrow \pi/2^+$.

- (b) Use o método da parte (a) para mostrar que a curva kappa tem também uma assíntota vertical em $x = -4$.
- (c) Confirme os resultados nas partes (a) e (b) gerando a curva kappa com um recurso gráfico computacional.

80. Use um recurso gráfico computacional para fazer uma conjectura sobre a existência de assíntotas para $r = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$, uma curva denominada *cissóide*, e então confirme sua conjectura calculando os limites apropriados.

81. Prove que a rosácea com um número par de pétalas é traçada exatamente uma vez quando θ varia sobre o intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$

e uma rosácea com um número ímpar de pétalas é traçada exatamente uma vez quando θ varia no intervalo $0 \leq \theta < \pi$.

- 82. (a) Use um recurso gráfico computacional para confirmar que o gráfico de $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta/2)$ ($0 \leq \theta \leq 4\pi$) é simétrico em relação ao eixo x .
- (b) Mostre que substituindo θ por $-\theta$ na equação polar $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta/2)$ não produz uma equação equivalente. Por que isso não contradiz a simetria demonstrada na parte (a)?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.1

- 1. (a) $r \cos \theta$; $r \operatorname{sen} \theta$ (b) $x^2 + y^2$; y/x 2. (a) $(2, 2\sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1)$ (c) $(-3, -3\sqrt{3})$ (d) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
- 3. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(-2, 4\pi/3)$ 4. (a) espiral (b) limaçon (c) rosácea (d) nenhuma dessas (e) reta (f) cardióide (g) círculo

11.2 RETAS TANGENTES E COMPRIMENTO DE ARCO PARA CURVAS PARAMÉTRICAS E POLARES

Nesta seção, deduziremos as fórmulas necessárias para encontrar inclinações, retas tangentes e comprimentos de arco de curvas paramétricas e polares.

RETAS TANGENTES A CURVAS PARAMÉTRICAS

Nesta seção, estaremos interessados em curvas dadas por equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

nas quais $f(t)$ e $g(t)$ têm derivadas primeiras contínuas em relação a t . Pode-se provar que se $dx/dt \neq 0$, então y é uma função diferenciável de x , caso em que a regra da cadeia implica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{1}$$

Essa fórmula permite encontrar dy/dx diretamente das equações paramétricas sem eliminar o parâmetro.

Exemplo 1 Encontre a inclinação da reta tangente ao círculo unitário

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

no ponto em que $t = \pi/6$ (Figura 11.2.1).

Solução A partir de (1), a inclinação num ponto qualquer do círculo é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\operatorname{cotg} t \tag{2}$$

Assim, a inclinação em $t = \pi/6$ é

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/6} = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \blacktriangleleft$$

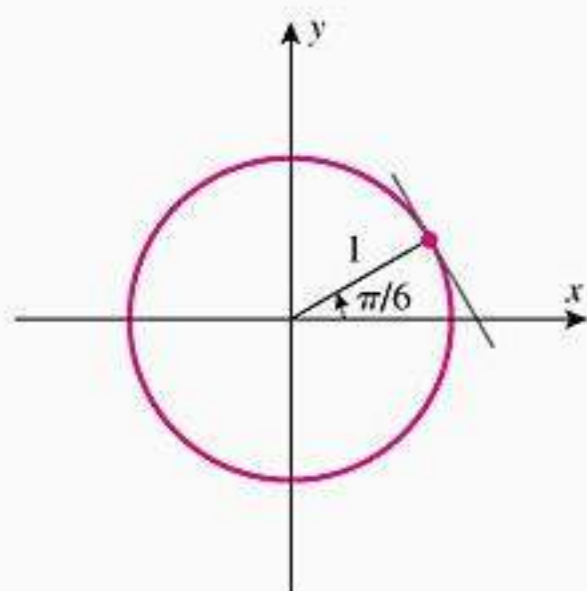
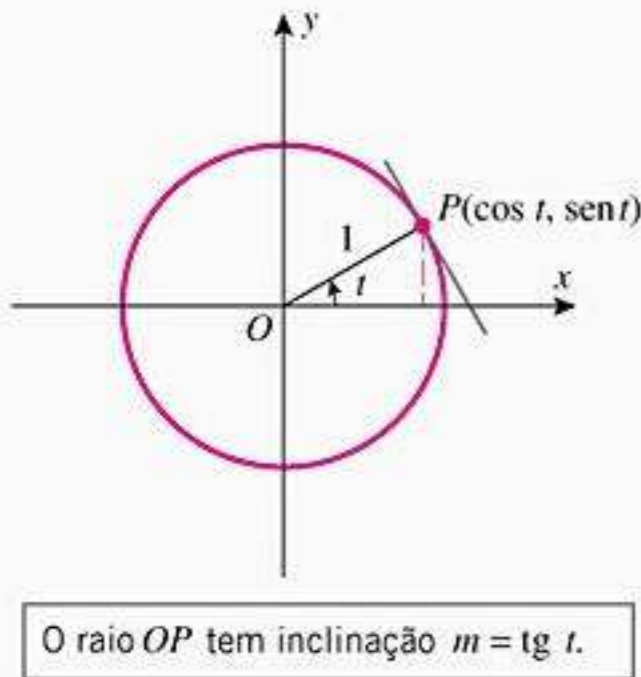


Figura 11.2.1

Note que a Fórmula (2) faz sentido geometricamente, pois o raio da origem para o ponto $P(\cos t, \text{sen } t)$ tem inclinação $m = \text{tg } t$. Assim, a reta tangente em P , sendo perpendicular ao raio, tem inclinação

$$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{\text{tg } t} = -\text{cotg } t$$

(Figura 11.2.2)



O raio OP tem inclinação $m = \text{tg } t$.

Figura 11.2.2

Tem-se a partir da Fórmula (1) que a reta tangente a uma curva paramétrica será horizontal naqueles pontos em que $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$, uma vez que $dy/dx = 0$ naqueles pontos. Duas situações distintas ocorrem quando $dx/dt = 0$. Nos pontos em que $dx/dt = 0$ e $dy/dt \neq 0$, o lado direito de (1) tem numerador não-nulo e um denominador nulo; vamos convencionar que nesses pontos a curva tem *inclinação infinita* e uma *reta tangente vertical*. Nos pontos em que dx/dt e dy/dt forem ambas nulas, o lado direito de (1) torna-se uma forma indeterminada; tais pontos são chamados de *pontos singulares*. Nenhuma afirmativa geral pode ser feita sobre o comportamento da curva paramétrica em pontos singulares, que devem ser analisados caso a caso.

► **Exemplo 2** Em um desastroso vôo inicial, um avião de papel experimental seguiu a trajetória

$$x = t - 3 \text{ sen } t, \quad y = 4 - 3 \text{ cos } t \quad (t \geq 0)$$

mas bateu contra uma parede no instante $t = 10$ (Figura 11.2.3).

- (a) Em quais instantes o avião voou horizontalmente?
- (b) Em quais instantes o avião voou verticalmente?

Solução (a) O avião voava horizontalmente naqueles instantes em que $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Para a trajetória dada, temos

$$\frac{dy}{dt} = 3 \text{ sen } t \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 1 - 3 \text{ cos } t \tag{3}$$

Equacionando $dy/dt = 0$ obtemos a equação $3 \text{ sen } t = 0$ ou, mais simplesmente, $\text{sen } t = 0$. Essa equação tem quatro soluções em $0 \leq t \leq 10$:

$$t = 0, \quad t = \pi, \quad t = 2\pi, \quad t = 3\pi$$

Como $dx/dt = 1 - 3 \text{ cos } t \neq 0$ para esses valores de t (verifique), o avião estava voando horizontalmente nos instantes

$$t = 0, \quad t = \pi \approx 3,14, \quad t = 2\pi \approx 6,28 \quad \text{e} \quad t = 3\pi \approx 9,42$$

o que está de acordo com a Figura 11.2.3.

Solução (b) O avião voava verticalmente naqueles instantes em que $dx/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Equacionando $dx/dt = 0$ em (3), obtemos

$$1 - 3 \text{ cos } t = 0 \quad \text{ou} \quad \text{cos } t = \frac{1}{3}$$

Essa equação tem três soluções em $0 \leq t \leq 10$ (Figura 11.2.4):

$$t = \text{arc cos } \frac{1}{3}, \quad t = 2\pi - \text{arc cos } \frac{1}{3}, \quad t = 2\pi + \text{arc cos } \frac{1}{3}$$

Como $dy/dt = 3 \text{ sen } t$ não se anula em nenhum destes pontos (por quê?), segue que o avião estava voando verticalmente nos instantes

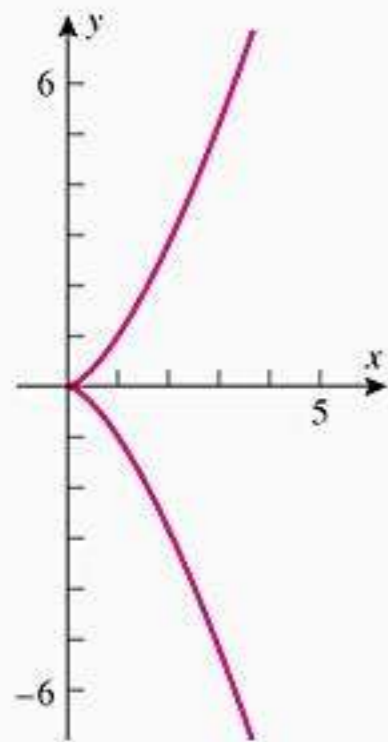
$$t = \text{arc cos } \frac{1}{3} \approx 1,23, \quad t \approx 2\pi - 1,23 \approx 5,05, \quad t \approx 2\pi + 1,23 \approx 7,51$$

o que está de acordo com a Figura 11.2.3. ◀

► **Exemplo 3** A curva representada parametricamente pelas equações

$$x = t^2, \quad y = t^3 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

é denominada *parábola semicúbica*. O parâmetro t pode ser eliminado elevando x ao cubo e y ao quadrado, do que segue que $y^2 = x^3$. O gráfico dessa equação, mostrado na Figura 11.2.5, consiste de dois ramos: um superior, obtido fazendo o gráfico de $y = x^{3/2}$ e um inferior, obtido de $y = -x^{3/2}$. Os dois ramos encontram-se na origem, que corresponde a $t = 0$ nas equações



$$x = t^2, y = t^3$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

Figura 11.2.5

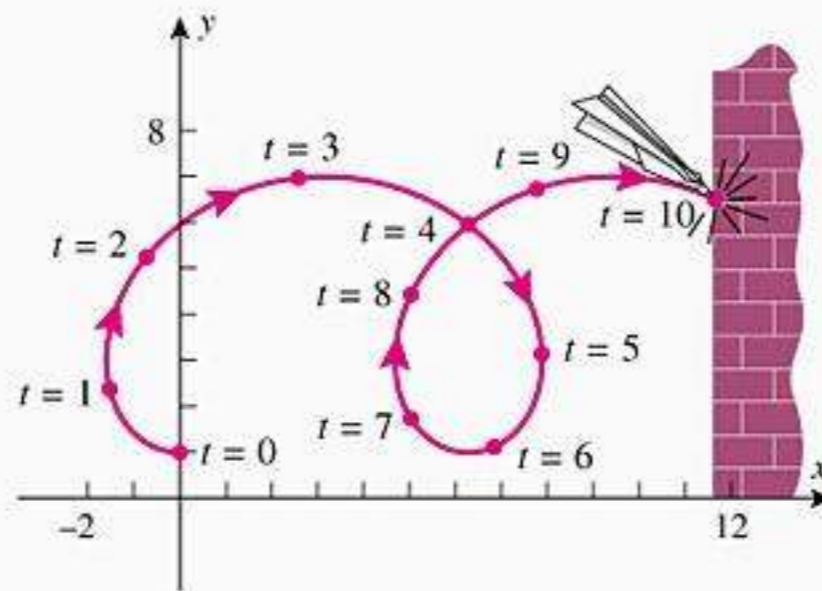


Figura 11.2.3

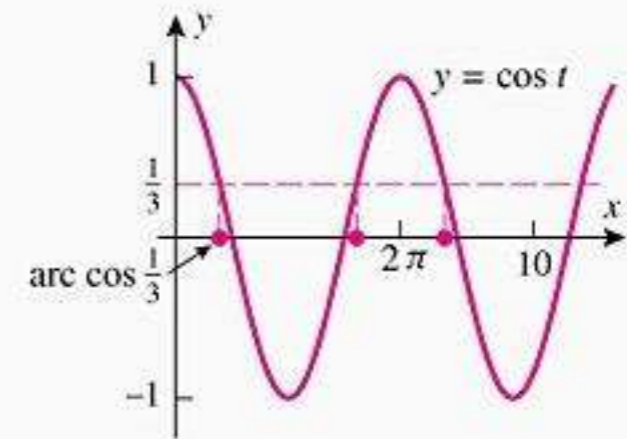


Figura 11.2.4

paramétricas. A origem é um ponto singular, pois nela as derivadas $dx/dt = 2t$ e $dy/dt = 3t^2$ são ambas nulas. ◀

► **Exemplo 4** Sem eliminar o parâmetro, encontre dy/dx e d^2y/dx^2 nos pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$ na parábola semicúbica dada pelas equações paramétricas do Exemplo 3.

Solução A partir de (1) temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t \quad (t \neq 0) \quad (4)$$

e de (1) aplicado a $y' = dy/dx$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{3/2}{2t} = \frac{3}{4t} \quad (5)$$

Como o ponto $(1, 1)$ da curva corresponde a $t = 1$ nas equações paramétricas, segue por (4) e (5) que

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \frac{3}{4}$$

Analogamente, o ponto $(1, -1)$ corresponde a $t = -1$ nas equações paramétricas e novamente usando (4) e (5), obtemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-1} = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=-1} = -\frac{3}{4}$$

Observe que os valores obtidos para as derivadas estão de acordo com o gráfico na Figura 11.2.5, pois no ponto $(1, 1)$ do ramo superior, a reta tangente tem inclinação positiva e a curva é côncava para cima e no ponto $(1, -1)$ do ramo inferior, a reta tangente tem inclinação negativa e a curva é côncava para baixo

Observe finalmente que foi possível aplicar as Fórmulas (4) e (5) para ambos $t = 1$ e $t = -1$, mesmo estando os pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$ em ramos diferentes. Em contrapartida, se tivéssemos escolhido efetuar os mesmos cálculos por eliminação do parâmetro, teríamos que obter fórmulas separadas para as derivadas, uma para $y = x^{3/2}$ e outra para $y = -x^{3/2}$. ◀

■ RETAS TANGENTES A CURVAS POLARES

Nosso próximo objetivo é encontrar um método para obter as inclinações das retas tangentes a curvas polares da forma $r = f(\theta)$, em que r é uma função diferenciável de θ . Mostramos

na última seção que uma curva dessa forma pode ser expressa parametricamente em termos do parâmetro θ substituindo $f(\theta)$ no lugar de r nas equações $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Assim, temos

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta = -r \sin \theta + \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta = r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (6)$$

Assim, se $dx/d\theta$ e $dy/d\theta$ forem contínuas e se $dx/d\theta \neq 0$, então y é diferenciável como função de x e a Fórmula (1) com θ no lugar de t dá lugar a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r \cos \theta + \sin \theta \frac{dr}{d\theta}}{-r \sin \theta + \cos \theta \frac{dr}{d\theta}} \quad (7)$$

► **Exemplo 5** Encontre a inclinação da reta tangente ao círculo $r = 4 \cos \theta$ no ponto em que $\theta = \pi/4$.

Solução A partir de (7) com $r = 4 \cos \theta$, obtemos (verifique)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta}{-8 \sin \theta \cos \theta} = \frac{4 \cos 2\theta}{-4 \sin 2\theta} = -\cotg 2\theta$$

Assim, no ponto em que $\theta = \pi/4$, a inclinação da reta tangente é

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\pi/4} = -\cotg \frac{\pi}{2} = 0$$

o que implica que o círculo tem uma reta tangente horizontal no ponto em que $\theta = \pi/4$ (Figura 11.2.6) ◀

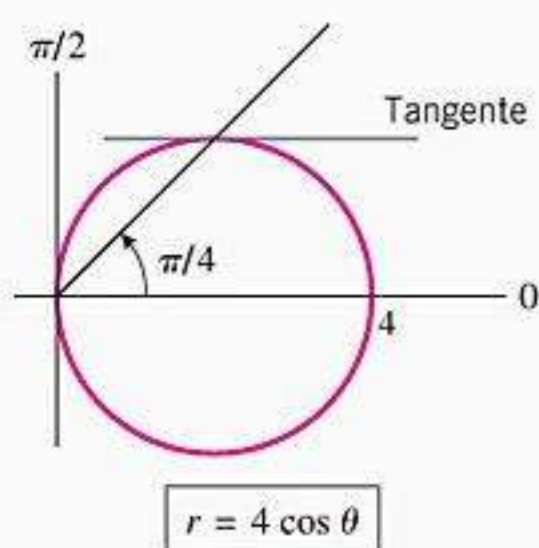


Figura 11.2.6

► **Exemplo 6** Encontre os pontos da cardióide $r = 1 - \cos \theta$ nos quais há uma reta tangente horizontal, uma reta tangente vertical, ou um ponto singular.

Solução Uma reta tangente horizontal irá ocorrer onde $dy/d\theta = 0$ e $dx/d\theta \neq 0$, uma reta tangente vertical onde $dy/d\theta \neq 0$ e $dx/d\theta = 0$ e um ponto singular onde $dy/d\theta = 0$ e $dx/d\theta = 0$. Poderíamos determinar essas derivadas a partir das fórmulas (6). Uma abordagem alternativa, porém, é voltar aos princípios básicos e expressar parametricamente a cardióide, substituindo $r = 1 - \cos \theta$ nas fórmulas de conversão $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Dessa forma,

$$x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Diferenciando essas equações em relação a θ e, então, simplificando, obtemos (verifique)

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta (2 \cos \theta - 1), \quad \frac{dy}{d\theta} = (1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)$$

Assim, $dx/d\theta = 0$ se $\sin \theta = 0$ ou $\cos \theta = \frac{1}{2}$, e $dy/d\theta = 0$ se $\cos \theta = 1$ ou $\cos \theta = -\frac{1}{2}$. Deixamos a cargo do leitor resolver essas equações e mostrar que as soluções de $dx/d\theta = 0$ no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ são

$$\frac{dx}{d\theta} = 0: \quad \theta = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3}, \quad 2\pi$$

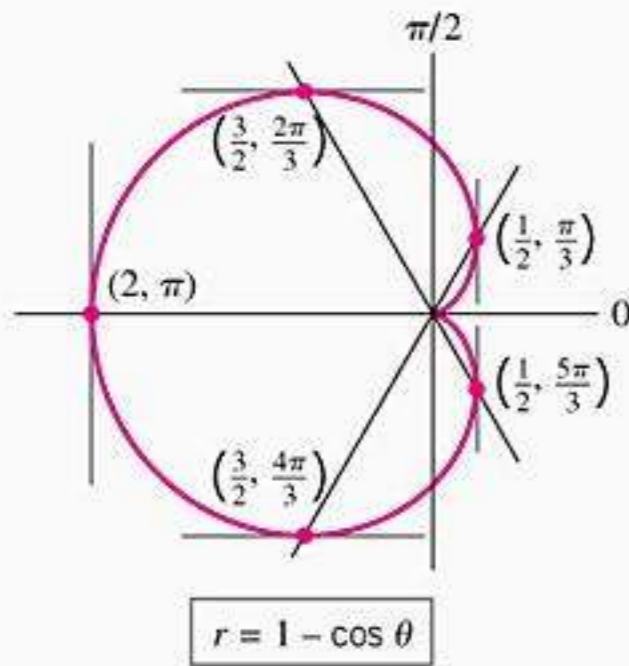


Figura 11.2.7

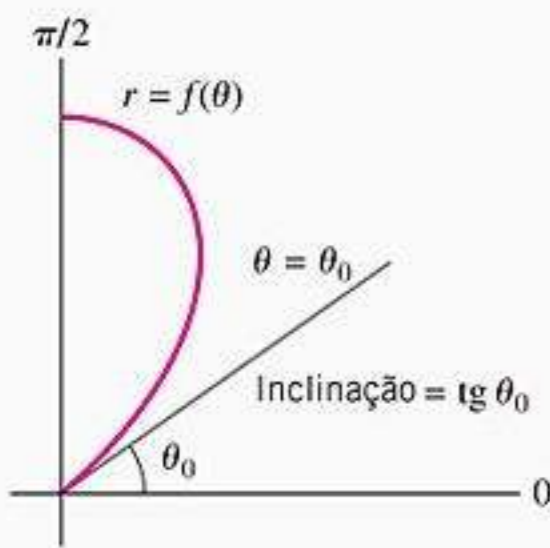


Figura 11.2.8

e as soluções de $dy/dθ = 0$ no intervalo $0 ≤ θ ≤ 2π$ são

$$\frac{dy}{dθ} = 0: \quad θ = 0, \quad \frac{2π}{3}, \quad \frac{4π}{3}, \quad 2π$$

Assim, as retas tangentes horizontais ocorrem em $θ = 2π/3$ e $θ = 4π/3$; retas tangentes verticais ocorrem em $θ = π/3, π$ e $5π/3$; e os pontos singulares ocorrem em $θ = 0$ e $θ = 2π$ (Figura 11.2.7). Note, entretanto, que $r = 0$ nos pontos singulares, logo há, realmente, apenas um único ponto singular sobre a cardióide: o pólo. ◀

■ **RETAS TANGENTES A CURVAS POLARES NA ORIGEM**

A Fórmula (7) revela algumas informações úteis sobre o comportamento de uma curva polar $r = f(θ)$ que passa na origem. Se supusermos que $r = 0$ e $dr/dθ ≠ 0$ quando $θ = θ_0$, então tem-se a partir da Fórmula (7) que a inclinação da reta tangente à curva em $θ = θ_0$ é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + \text{sen } θ_0 \frac{dr}{dθ}}{0 + \text{cos } θ_0 \frac{dr}{dθ}} = \frac{\text{sen } θ_0}{\text{cos } θ_0} = \text{tg } θ_0$$

(Figura 11.2.8). Contudo, $\text{tg } θ_0$ é também a inclinação da reta $θ = θ_0$, de modo que podemos concluir que essa reta é tangente à curva na origem. Dessa forma, estabelecemos o seguinte resultado.

11.2.1 TEOREMA *Se a curva polar $r = f(θ)$ passa na origem em $θ = θ_0$ e se $dr/dθ ≠ 0$ em $θ = θ_0$, então a reta $θ = θ_0$ é tangente à curva na origem.*

Esse teorema nos diz que as equações das retas tangentes na origem à curva $r = f(θ)$ podem ser obtidas resolvendo a equação $f(θ) = 0$. É importante lembrar, entretanto, que $r = f(θ)$ poderia ser zero para mais de um valor de $θ$, logo poderia haver mais do que uma reta tangente à origem. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

► **Exemplo 7** A rosácea de três pétalas $r = \text{sen } 3θ$, na Figura 11.2.9, tem três retas tangentes à origem, que podem ser encontradas resolvendo a equação

$$\text{sen } 3θ = 0$$

Mostrou-se no Exercício 81 da Seção 11.1 que a rosácea completa é descrita uma vez quando $θ$ varia no intervalo $0 ≤ θ < π$, logo precisaremos olhar apenas para as soluções desse intervalo. Deixamos a cargo do leitor confirmar que essas soluções são

$$θ = 0, \quad θ = \frac{π}{3} \quad \text{e} \quad θ = \frac{2π}{3}$$

Como $dr/dθ = 3 \text{cos } 3θ ≠ 0$ para esses valores de $θ$, essas três retas são tangentes à rosácea na origem, o que está de acordo com a figura. ◀

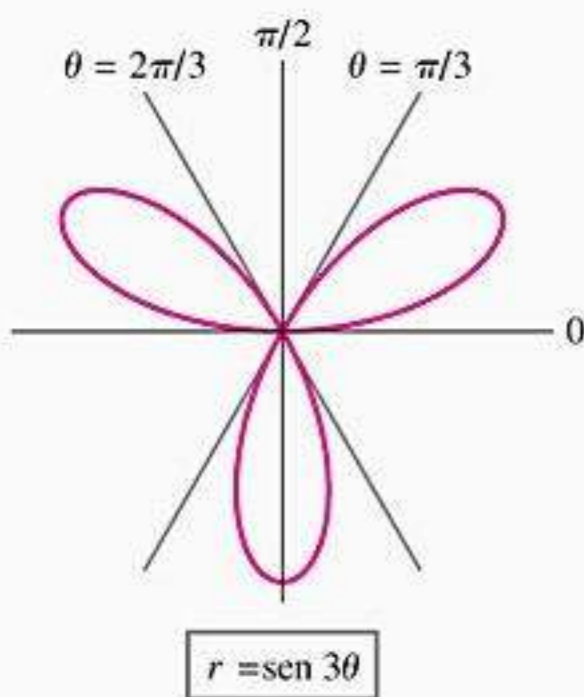


Figura 11.2.9

■ **COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA POLAR**

Uma fórmula para o comprimento de arco de uma curva polar $r = f(θ)$ pode ser deduzida expressando a curva na forma paramétrica e aplicando a Fórmula (6) da Seção 7.4 do Volume 1 para o comprimento de arco de uma curva paramétrica. Vamos deixar como exercício provar o que segue.

11.2.2 FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO PARA CURVAS POLARES Se nenhum segmento da curva polar $r = f(\theta)$ for traçado mais de uma vez à medida que θ cresce de α até β e se $dr/d\theta$ for contínua para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, então o comprimento de arco L de $\theta = \alpha$ até $\theta = \beta$ é dado por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (8)$$

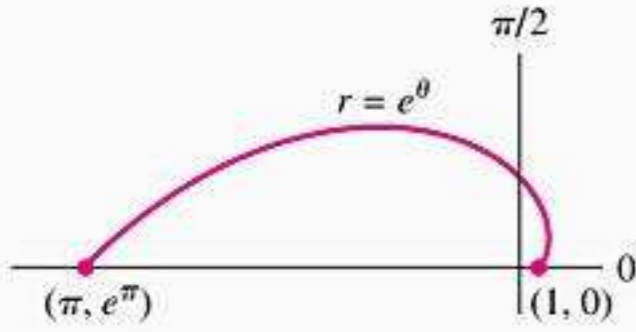


Figura 11.2.10

► **Exemplo 8** Encontre o comprimento de arco da espiral $r = e^\theta$ na Figura 11.2.10 entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Solução

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(e^\theta)^2 + (e^\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2} e^\theta d\theta = \sqrt{2} e^\theta \Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}(e^\pi - 1) \approx 31,3 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 9** Encontre o comprimento de arco total da cardióide $r = 1 + \cos \theta$.

Solução Uma cardióide é traçada uma vez quando θ varia de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2}\theta} d\theta \quad \text{Fórmula do ângulo metade.} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |\cos \frac{1}{2}\theta| d\theta \end{aligned}$$

Como $\cos \frac{1}{2}\theta$ muda de sinal em π , devemos dividir a última integral numa soma de duas: uma de 0 até π e outra de π a 2π . Porém, a integral de π a 2π é igual à de 0 até π , pois a cardióide é simétrica em relação ao eixo polar (Figura 11.2.11). Assim,

$$L = 2 \int_0^{2\pi} |\cos \frac{1}{2}\theta| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{1}{2}\theta d\theta = 8 \sin \frac{1}{2}\theta \Big|_0^{\pi} = 8 \quad \blacktriangleleft$$

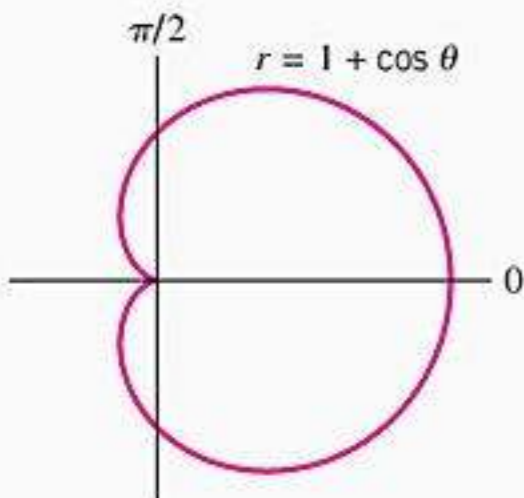


Figura 11.2.11

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.2** (Ver página 740 para respostas.)

1. (a) Para encontrar dy/dx diretamente das equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

podemos usar a fórmula $dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt}$.

(b) Obtenha dy/dx e d^2y/dx^2 diretamente das equações paramétricas $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ ($0 < t < \pi/2$).

2. (a) Para obter dy/dx diretamente da equação polar $r = f(\theta)$, podemos usar a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r \sin \theta + \theta \cos \theta}{r \cos \theta - \theta \sin \theta}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para encontrar dy/dx diretamente da equação polar $r = \operatorname{cosec} \theta$.

3. a Que condição sobre $f(\theta_0)$ e $f'(\theta_0)$ garantem que a reta $\theta = \theta_0$ e a tangente à curva $r = f(\theta)$ na origem
 b obtenha a reta θ_0 em $[0, 2\pi]$ para a qual a reta $\theta = \theta_0$ e a tangente na origem à rãcea e uatr éta a $r = c - 2\theta$
4. a Para encontrar o comprimento e a área L da curva $r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$), em qual fórmula $L =$ _____
 b a curva $r = ec\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/4$) tem comprimento e área $L =$ _____

EXERCÍCIOS 11.2  

ENFOCANDO CONCEITOS

1. a Encentre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = t/2, y = t^2 + 1$ em $t = -1$ e $t = 1$ em e i minar arãmetr
 b verifique qual a reta a arte a e iminan arãmetr e i erencian uma unã a r ria a e x
2. a Encentre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = 3 \cos t, y = 4$ em $t = \pi/4$ e $t = 7\pi/4$ em e i minar arãmetr
 b verifique qual a reta a arte a e iminan arãmetr e i erencian uma unã a r ria a e x
3. Para a curva paramétrica Exercício 1, aça uma c n ectura bre ina e d^2y/dx^2 em $t = -1$ e $t = 1$ e c n firme ua c n ectura em e i minar arãmetr
4. Para a curva paramétrica Exercício 2, aça uma c n ectura bre ina e d^2y/dx^2 em $t = \pi/4$ e $t = 7\pi/4$, e c n firme ua c n ectura em e i minar arãmetr

5-10 Encentre dy/dx e d^2y/dx^2 nãnt a em e i minar arãmetr

5. $x = \sqrt{t}, y = 2t + 4; t = 1$
 6. $x = \frac{1}{2}t^2 + 1, y = \frac{1}{3}t^3 - t; t = 2$
 7. $x = \sec t, y = \tan t; t = \pi/3$
 8. $x = \sinh t, y = \cosh t; t = 0$
 9. $x = \theta + \cos \theta, y = 1 + \sin \theta; \theta = \pi/6$
 10. $x = \cos \phi, y = 3 \sin \phi; \phi = 5\pi/6$
 11. a Encentre a equação da reta tangente à curva $x = e^t, y = e^{-t}$ em $t = 1$, em e i minar arãmetr
 b Encentre a equação da reta tangente a arte a e iminan arãmetr
12. a Encentre a equação da reta tangente à curva $x = 2t + 4, y = 8t^2 - 2t + 4$ em $t = 1$, em e i minar arãmetr
 b Encentre a equação da reta tangente a arte a e iminan arãmetr

13-14 Encentre a reta e a tangente à curva paramétrica que tem a uma reta tangente horizontal e b uma reta tangente vertical

13. $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
 14. $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 7, y = t^2 + t + 1$

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Determine a figura abaixo, a curva e Li a u $x = \sin t, y = \sin 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ cruza a si mesma na origem. Encentre a equação da reta tangente na origem.
16. Determine a figura abaixo a *ciclóide alongada* $x = 2 - \pi \cos t, y = 2t - \pi \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$ cruza a si mesma em um ponto. Encentre a equação da reta tangente nesse ponto.

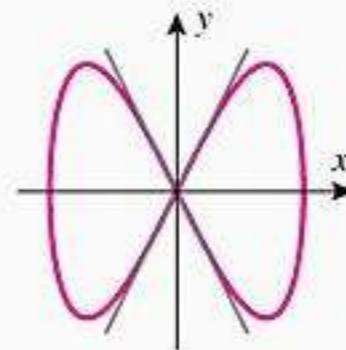


Figura Ex-15

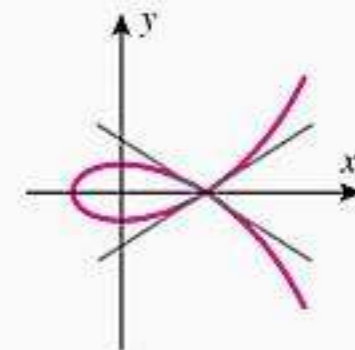



Figura Ex-16

17. Determine a curva $x = t^2, y = t^3 - 4t$ cruza a si mesma no ponto $(4, 0)$ e encentre a equação da reta tangente à curva nesse ponto.
18. Determine a curva com equação paramétrica $x = t^2 - 3t + 5, y = t^3 + t^2 - 10t + 9$ cruza a si mesma no ponto $(3, 1)$ e encentre a equação da reta tangente à curva nesse ponto.
-  19. a) Usando um recurso computacional, gere o gráfico da curva paramétrica $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ e aça uma conjectura sobre a reta tangente nesse ponto.

b) confirme sua conexão a arte a ca cu an a e ri a a a r r i a a

20. a) Em uai a re e θ em e erar enc ntrar nt ingu are na cic ói e a Figura 1 8 14 ume l

b) confirme sua re ta a arte a ca cu an a eri a a a r r i a a

21-26 Enc ntre a inc inaçaã a reta tangente à cur a ar ara a r a e θ

21. $r = 2 \text{ sen } \theta; \theta = \pi/6$ 22. $r = 1 + \text{cos } \theta; \theta = \pi/2$
 23. $r = 1/\theta; \theta = 2$ 24. $r = a \text{ sec } 2\theta; \theta = \pi/6$
 25. $r = \text{sen } 3\theta; \theta = \pi/4$ 26. $r = 4 - 3 \text{ sen } \theta; \theta = \pi$

27-28 a cu e a inc inaçoẽ a reta tangente in íca a na figura abai

27. $r = 2 + 2 \text{ sen } \theta$ 28. $r = 1 - 2 \text{ sen } \theta$

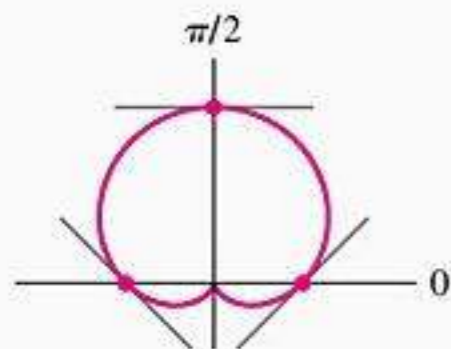


Figura Ex-27

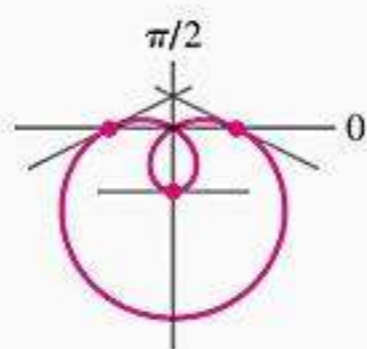


Figura Ex-28

29-30 Enc ntre a c r ena a are e t nt n uai a cur a ar tem uma reta tangente ertica u h riz nta

29. $r = a(1 + \text{cos } \theta)$ 30. $r = a \text{ sen } \theta$

31-32 e um recur c m utaci na ara azer uma c n ectura bre númer e nt a cur a ar n uai há uma reta tangente h riz nta, e c nfirm e ua c n ectura enc ntran a eri a a a r r i a a

31. $r = \text{en } \theta c^2 \theta$ 32. $r = 1 - 2 \text{ en } \theta$

33-38 E b ce a cur a ar e enc ntre e uaçoẽ are a reta tangente à cur a n ó

33. $r = 2 \text{ cos } 3\theta$ 34. $r = 4 \text{ sen } \theta$ 35. $r = 4\sqrt{\text{cos } 2\theta}$
 36. $r = \text{sen } 2\theta$ 37. $r = 1 - 2 \text{ cos } \theta$ 38. $r = 2\theta$

39-44 e a Fórmu a 8 ara ca cu ar c m riment e arc a cur a ar

39. círcu inteir $r = a$
 40. círcu inteir $r = 2a \text{ cos } \theta$
 41. car iói e inteira $r = a(1 - \text{cos } \theta)$
 42. $r = \text{en}^2(\theta/2)$ e $\theta = 0$ a $\theta = \pi$
 43. $r = e^{3\theta}$ e $\theta = 0$ a $\theta = 2$
 44. $r = \text{en}^3(\theta/3)$ e $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$

45. a) Qua é a inc inaçaã a reta tangente à tra etória a iã e a e E em 2 num in tante t

b) Qua i ângu e a r imaçaã a iã uan e e ba teu na are e

46. Su nha ue uma abe ha iga a tra etória

$$x = t - 2 \text{ cos } t, \quad y = 2 - 2 \text{ en } t \quad (0 \leq t \leq 10)$$

a) Em uai in tante a abe ha u h riz nta mente

b) Em uai in tante a abe ha u ertica mente

47. a) tre ue c m riment e arc e uma éta a ar á cea $r = \text{cos } n\theta$ é a r

$$2 \int_0^{\pi/(2n)} \sqrt{1 + (n^2 - 1) \text{sen}^2 n\theta} d\theta$$

b) e a ca aci a e numérica e integraçaã e uma ca cu a ra ara a r imar c m riment e arc e uma éta a ar ácea e uatr éta a $r = \text{cos } 2\theta$

e a ca aci a e e integraçaã numérica e uma ca cu a ra ara a r imar c m riment e arc e uma éta a ar ácea e $2n$ éta a $r = \text{cos } n\theta, n = 2, 3, 4, \dots, 20$ entã aça uma c n ectura bre imite e e c m ri ment e arc uan $n \rightarrow +\infty$

48. a) E b ce a e ira $r = e^{-\theta/8}$ ($0 \leq \theta < +\infty$).

b) Determine uma integra im ró ria ara c m riment e arc t ta a e ira

c) tre ue a integra c n erge e etermine c m riment e arc t ta a e ira

49-54 Se $f'(t)$ e $g'(t)$ rem unçoẽ c ntínua e e nenhum eg ment a cur a

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

r traça mai ue uma ez, entã e er m tra ue a área a u er ície gera a e a re uçaã e a cur a em t rn ei x é

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

e a área a u er ície gera a e a re uçaã e a cur a em t rn ei y é

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

[e uçoẽ ã aná ga à u a a ara bter a Fórmu a 4 e 5 na Seqã 7 5 ume l] e e a órmu a ne te e erc íci

49. Determine a área a u er ície gera a azen girar a cur a $x = t^2, y = 3t$ ($0 \leq t \leq 2$) em t rn ei x

50. Determine a área a u er ície gera a azen girar a cur a $x = e^t \text{ cos } t, y = e^t \text{ en } t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) em t rn ei x

51. Determine a área a u er ície gera a azen girar a cur a $x = \text{cos}^2 t, y = \text{en}^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) em t rn ei y

52. Determine a área a u er ície gera a azen girar a cur a $x = 6t, y = 4t^2$ ($0 \leq t \leq 1$) em t rn ei y

53. Fazem girar emicirculo

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

em t r n e i x, m t r e u e a área a u e r í c i e e u m a e e r a e r a i r é $4\pi r^2$

54. e u a ç ã o

$$x = a\phi - a \sin \phi, \quad y = a - a \cos \phi \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

r e r e e n t a m u m a r c e u m a c i c ó i e t r e u e a área a u e r í c i e g e r a a e a r e u ç ã e a c u r a e m t r n e i x é a a r $S = 4\pi a^2/3$

ENFOCANDO CONCEITOS

55. n r m e i u t r a n a f i g u r a a b a i , u n h a u e u m a r e t a c m u m e t r e m f i n ó e u m i t e m a e c r e n a a a r e g i r e n e n t i a n t i h r á r i a u m a t a a c n t a n t e e l r a / i n t a n t e $t = 0$ u m b e u r b r e a a r e t a e t á a 10 mm ó e e t á e m e n a r a r a a n g a a r e t a c m u m a e c i a e c n t a n t e e 2 mm/
- Determine uma equação da rma $r = f(\theta)$ para caminhar e be ur , u n u e $\theta = 0$ u a n $t = 0$
 - Determine a distância que be ur e r r e a n g c a m i n h n a a r t e a u r a n t e 5 r i m e i r e g u n r r e n e a u a r e t a a r a é c i m e u m m i é i m m a i r ó i m

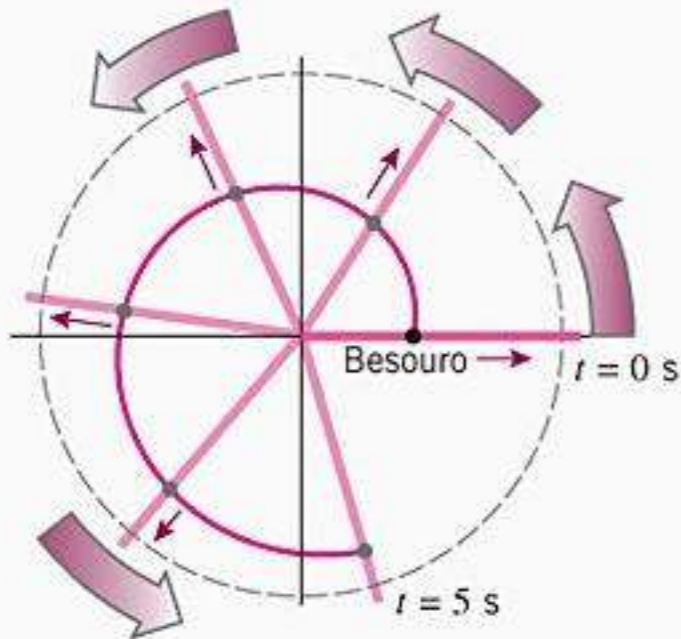


Figura Ex-55

56. e a Fórmu a a Seçã 7.4 u m e l a r a e u z i r a Fórmu a 8

57. m a a t r a ç ã e u m a r u e e i e r ã e i u t r a a n a f i g u r a e m a n e c n i t e e i b r a ç r t a t i c n e c t a e c m r i m e n t l : u m b r a ç i n t e r n u e g i r a n e n t i a n t i h r á r i a l r a i a n r e g u n e u m b r a ç e t e r n u e e r e r g r a m a a r a r a r t a n t n e n t i h r á r i a 2 r a i a n r e g u n a t a m e i a u a n t n e n t i a n t i h r á r i a 2 r a i a n r e g u n a t a c a i c e n t r a g a i a a a g e i r e t á n a e t r e m i a e b r a ç e t e r n a t r e u e , n a t a m e i a , c e n t r a g a i a t e m e u a ç ã o a r a m é t r i c a

$$x = \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin t - \sin 2t$$

- Encontre a equação paramétrica para centr a gai a n a t a c a i e u e u m r e c u r g r á f i c a r a c n f i r m a r u e c e n t r a g a i a e r e e a c u r a m t r a a n a f i g u r a e m a n e

c Será ue um a ageir e r r e a m e m a i t â n c i a n u m a r e u ç ã n a t a c a i u e n u m a r e u ç ã n a t a m e i a u t i f i u e u a c n c u ã

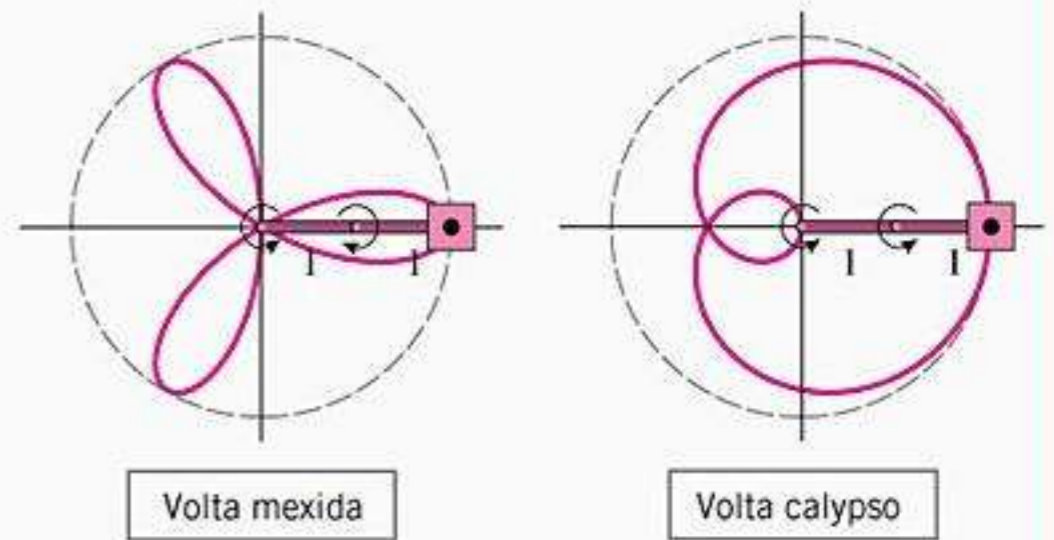


Figura Ex-57

58. e u m r e c u r g r á f i c c m u t a c i n a a r a e r a r e e i t a a r i a ç ã a t a a e r t a ç ã e c m r i m e n t b r a ç E e r c í c i 57
59. a Se uma c r a r e e n r a a e u m c í r c u f i a m a n t e n a t e n a i t é , t a n g e n t e a c í r c u , e n t ã a e t r e m i a e a c r a e r e e u m a c u r a e n m i n a a *involuta de um círculo* t r e u e e c í r c u t i e r c e n t r n a r i g e m e r a i a e a e t r e m i a e a c r a e t i e r i n i c i a m e n t n t a , 0 , e n t ã a i n u t a e e r e r e a a r a m e t r i c a m e n t e c m

$$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

n e θ é ângu m t r a n a a r t e a a f i g u r a a b a i

- Su n u e u m c a c h r r n a a r t e b a f i g u r a a b a i e e n r e u a c r r e i a m a n t e n a t e n a , a r a u a i a r e e θ n i n t e r a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ c a c h r r e t a r á a n a n a i r e ç ã r t e S u L e t e e t e
- e u m r e c u r g r á f i c c m u t a c i n a a r a g e r a r a c u r a t r a ç a a e c a c h r r e m t r e u e e a e t á e a c r c m a u a r e t a n a a r t e b

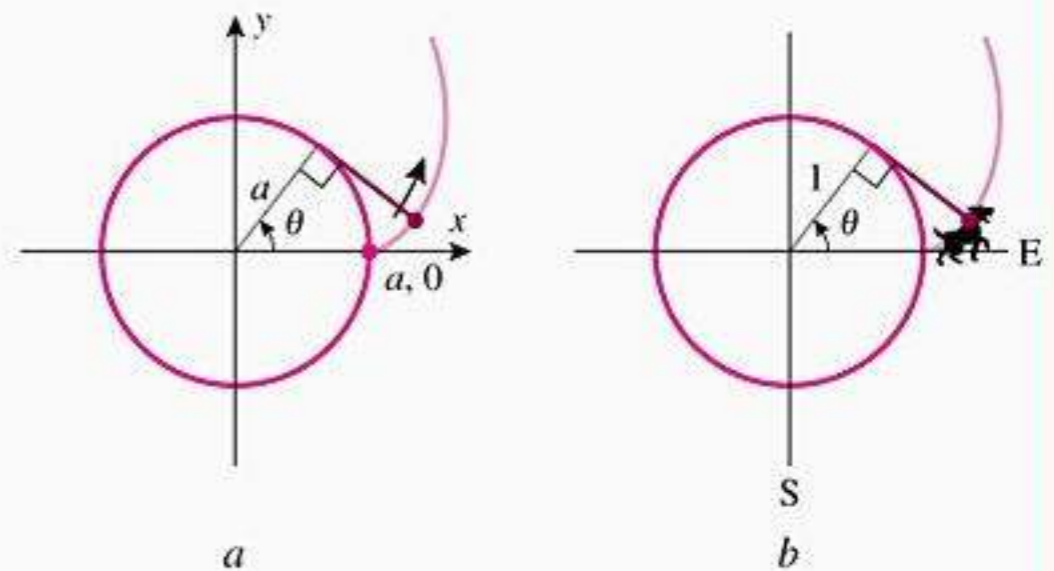


Figura Ex-59

60. Lembre e ue na Seçã 9 u m e l a u n ç ã o e n e c e n e F r e n e r a m e f i n i a c m e n

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad e \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

Seguinte curva paramétrica, que é uma espiral de Cornu, é chamada de *clotóide* ou *espiral de Cornu*, em homenagem ao cientista francês G. Darboux em 1841-1902:

$$x = C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$y = S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

- a) Desenhe um sistema de eixes cartesianos e faça o gráfico da espiral.
- b) Determine o comprimento da espiral quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$.
- c) Determine o comprimento do arco da espiral para $-1 \leq t \leq 1$.

61. No triângulo OPR na figura abaixo, $P(r, \theta)$ é um ponto da curva $r = f(\theta)$, e ψ é o ângulo entre a normal à curva em P e a reta tangente em P . Determine ψ em função de θ e r .

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

Substitua $dy/dx = r \tan \phi$ na Fórmula 7 e obtenha a seguinte relação trigonométrica:

$$\tan(\phi - \theta) = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \tan \theta}$$

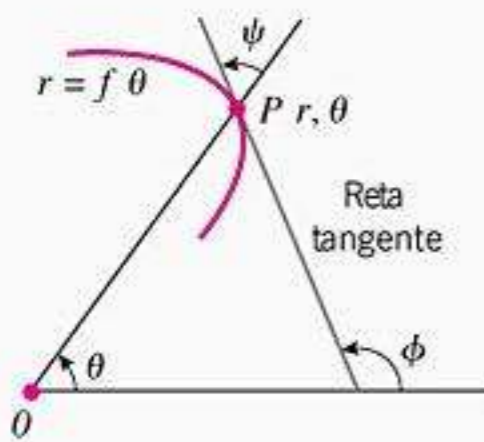


Figura Ex-61

62-63. Use a fórmula para ψ obtida no Exercício 61.

62. a) Use a identidade trigonométrica $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

para mostrar que, se r, θ formam uma cardioides $r = 1 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

então $\psi = \theta/2$

b) Encontre a cardioides e mostre que o ângulo ψ não muda em qualquer ponto da cardioides e cruza o eixo y .

c) Determine o ângulo ψ não muda em qualquer ponto da cardioides e cruza o eixo y .

63. Para uma espiral logarítmica $r = ae^{b\theta}$, o ângulo entre a reta radial e a reta tangente é constante. Encontre a expressão para ψ em função de θ . [Nota: Para a espiral logarítmica $r = ae^{b\theta}$, a constante b é chamada de *espirais equiângulares*]

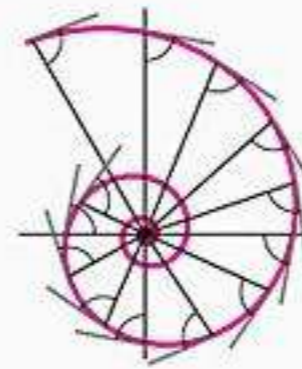


Figura Ex-63

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.2

- 1. a) $\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ b) $\frac{dy}{dx} = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2. a) $\frac{r \cos \theta + \sin \theta \frac{dr}{d\theta}}{-r \sin \theta + \cos \theta \frac{dr}{d\theta}}$ b) $\frac{dy}{dx} = 0$
- 3. a) $f(\theta_0) = 0, f'(\theta_0) \neq 0$ b) $\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 4. a) $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$ b) 1

11.3 ÁREA EM COORDENADAS POLARES

Nesta seção, mostraremos como determinar as áreas de regiões delimitadas por curvas polares.

■ ÁREA EM COORDENADAS POLARES

meçam na origem e a área em coordenadas polares é dada por

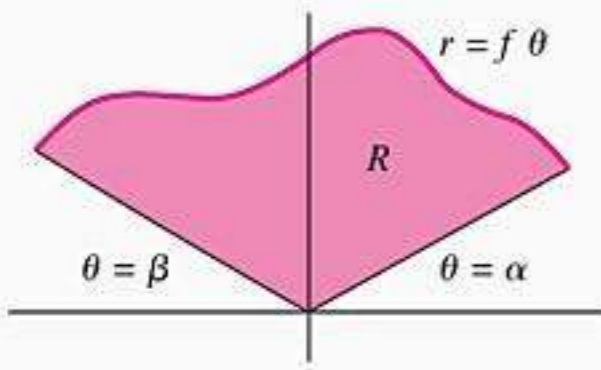


Figura 11.3.1

11.3.1 PROBLEMA DA ÁREA EM COORDENADAS POLARES Suponha que α e β sejam ângulos que se iniciam a partir da origem

$$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$$

e suponha que $f(\theta)$ seja contínua e não negativa para $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Determine a área da região R em função da curva $r = f(\theta)$ e raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Figura 11.3.1

Em cada retângulo, a área abscissa da curva é aproximada por um número crescente de retângulos, a aproximação da área da região em um limite. Em cada retângulo, a área é aproximada por um número crescente de retângulos, a aproximação da área da região em um limite.

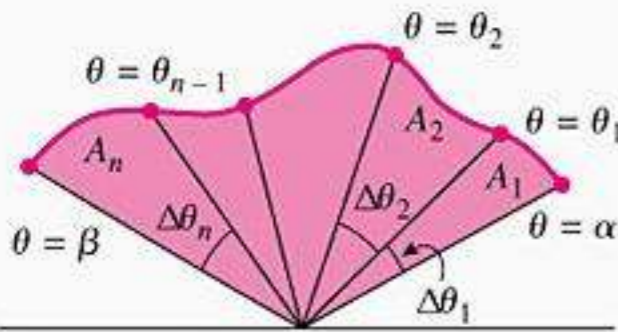


Figura 11.3.2

$$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_{n-1}$$

tai ue

$$\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \beta$$

Figura 11.3.2 mostra a região R dividida em n setores triangulares com áreas A_1, A_2, \dots, A_n e ângulos centrais $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$. A área da região inteira é dada por

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k \tag{1}$$

Se $\Delta\theta_k$ for pequeno, então a área A_k da k -ésima cunha é aproximadamente a área de um setor circular com ângulo central $\Delta\theta_k$ e raio $f(\theta_k^*)$, onde θ_k^* é um valor intermediário na k -ésima cunha. Figura 11.3.3 ilustra a aproximação da área da região inteira A por meio da soma das áreas das cunhas.

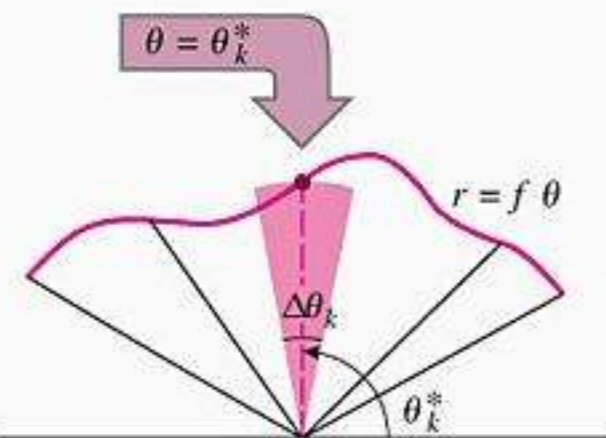


Figura 11.3.3

$$A = \sum_{k=1}^n A_k \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k \tag{2}$$

Se agora aumentarmos n de tal maneira que $\Delta\theta_k \rightarrow 0$, então a aproximação da área da região inteira A torna-se cada vez mais precisa, e a soma das áreas das cunhas converge para a área A . Figura 11.3.4 ilustra este processo.

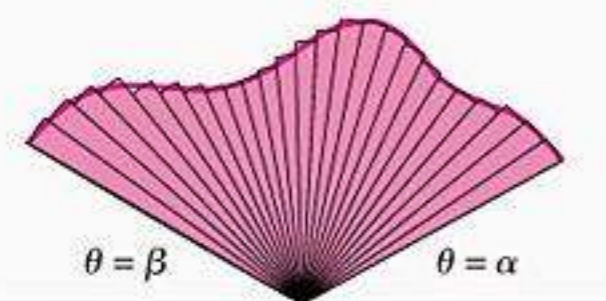


Figura 11.3.4

$$A = \lim_{\max \Delta\theta_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Portanto, a área da região R é dada por

11.3.2 ÁREA EM COORDENADAS POLARES Se α e β forem ângulos que se iniciam a partir da origem

$$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$$

e se $f(\theta)$ for contínua e não negativa para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, então a área A da região R em função da curva $r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) e raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é

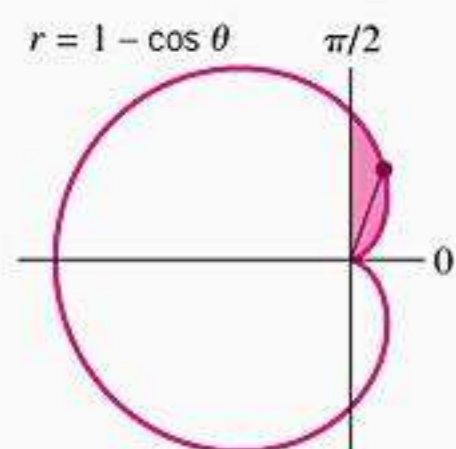
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \tag{3}$$

A parte mais difícil da aplicação de (3) é determinar os limites de integração. Isso pode ser feito da seguinte maneira:

Área em Coordenadas Polares: os Limites de Integração

- Passo 1** Esboce a região R cuja área queremos determinar.
- Passo 2** Desenhe uma “linha radial” arbitrária do pólo até a curva $r = f(\theta)$ da fronteira.
- Passo 3** Pergunte: “Sobre qual intervalo de valores deve θ variar para que a reta radial varra a região R ?”
- Passo 4** A sua resposta no Passo 3 determinará os limites inferior e superior da integração.

► **Exemplo 1** Determine a área da região do primeiro quadrante dentro da cardióide $r = 1 - \cos \theta$.



A região sombreada é varrida pela reta radial quando θ varia de 0 a $\pi/2$.

Figura 11.3.5

Solução A região e uma reta radial típica estão mostradas na Figura 11.3.5. Para as retas radiais varrerem a região, θ deve variar de 0 a $\pi/2$. Assim, a partir de (3) com $\alpha = 0$ e $\beta = \pi/2$, obtemos

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

Com a ajuda da identidade $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, isso pode ser reescrito como

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} \pi - 1 \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 2** Determine a área inteira interna à cardióide do Exemplo 1.

Solução Para a reta radial varrer a cardióide inteira, θ deve variar de 0 a 2π . Assim, a partir de (3), com $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

Se procedermos como no Exemplo 1, isso reduz a

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Solução Alternativa Uma vez que a cardióide é simétrica em relação ao eixo x , podemos calcular a área da porção acima do eixo x e dobrar o resultado. Na porção da cardióide acima do eixo x , θ varia de 0 a π , assim

$$A = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \blacktriangleleft$$

■ USANDO A SIMETRIA

Embora a Fórmula (3) seja aplicável quando $r = f(\theta)$ for negativa, o cálculo de áreas pode, algumas vezes, ser simplificado usando a simetria para restringir os limites de integração a intervalos onde $r \geq 0$. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

► **Exemplo 3** Determine a área da região envolvida pela rosácea $r = \cos 2\theta$.

Solução Referindo-se à Figura 11.1.12 e usando a simetria, a área no primeiro quadrante que é varrida com $0 \leq \theta \leq \pi/4$ é um oitavo da área total dentro da rosácea. Assim, da Fórmula (3),

$$\begin{aligned} A &= 8 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta \\ &= 2\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Às vezes, a maneira mais natural de satisfazer a restrição $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ requerida pela Fórmula (3) é usar um valor negativo para α . Por exemplo, suponha que estejamos interessados em encontrar a área da região sombreada na Figura 11.3.6a. O primeiro passo seria determinar as interseções da cardióide $r = 4 + 4 \cos \theta$ com o círculo $r = 6$, uma vez que esta informação é necessária para os limites de integração. Para encontrar os pontos de interseção, podemos equacionar as duas expressões para r . Isso dá

$$4 + 4 \cos \theta = 6 \quad \text{ou} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

que é satisfeito pelos ângulos positivos

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Entretanto, aqui surge um problema, pois as retas radiais para o círculo e a cardióide não varrem completamente a região sombreada mostrada na Figura 11.3.6b, quando θ varia no intervalo $\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/3$. Há duas maneiras de contornar este problema: uma é aproveitar-se da simetria, integrando no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/3$ e dobrar o resultado, e a segunda é usar um limite inferior negativo na integração e integrar no intervalo $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ (Figura 11.3.6c). Os dois métodos estão ilustrados no próximo exemplo.

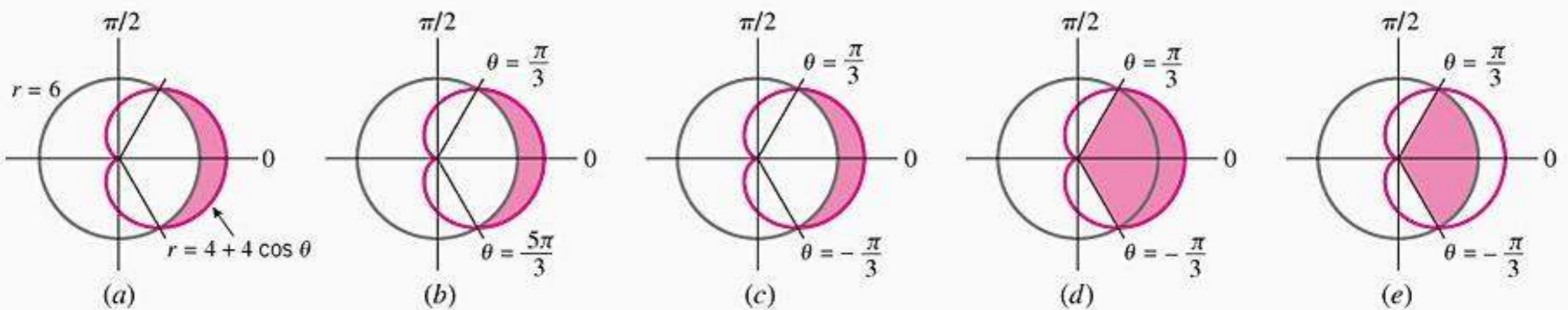


Figura 11.3.6

► **Exemplo 4** Determine a área da região que está dentro da cardióide $r = 4 + 4 \cos \theta$ e fora do círculo $r = 6$.

Solução Usando um Ângulo Negativo A área da região pode ser obtida subtraindo as áreas das Figuras 11.3.6d e 11.3.6e:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} (4 + 4 \cos \theta)^2 d\theta - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} (6)^2 d\theta && \text{Área dentro da cardióide} \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} [(4 + 4 \cos \theta)^2 - 36] d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (16 \cos \theta + 8 \cos^2 \theta - 10) d\theta && \text{menos área dentro do círculo.} \\ &= [16 \operatorname{sen} \theta + (4\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta) - 10\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 18\sqrt{3} - 4\pi \end{aligned}$$

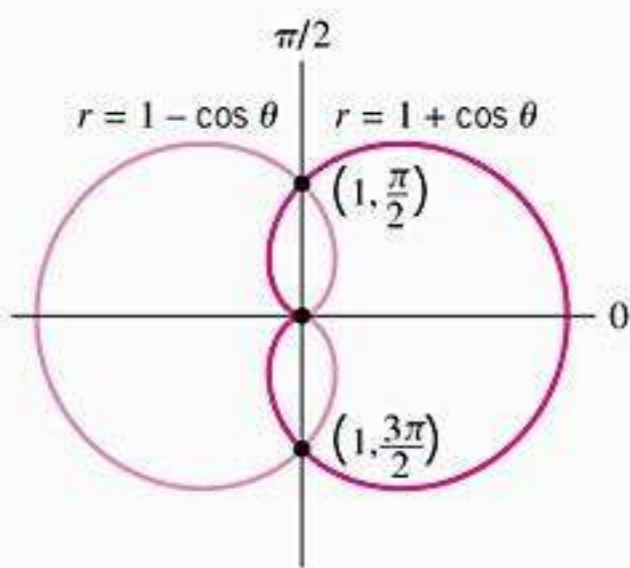


Figura 11.3.7



As órbitas se intersectam, mas os satélites não colidem.

Figura 11.3.8

Solução Usando Simetria Usando simetria, podemos calcular a área acima do eixo polar e dobrá-la. Isso dá (verifique)

$$A = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} [(4 + 4 \cos \theta)^2 - 36] d\theta = 2(9\sqrt{3} - 2\pi) = 18\sqrt{3} - 4\pi$$

que coincide com o resultado precedente. ◀

■ INTERSEÇÕES DE GRÁFICOS POLARES

No último exemplo, encontramos a interseção da cardióide com o círculo equacionando suas expressões para r e resolvendo em θ . Contudo, como um ponto pode ser representado de diferentes maneiras em coordenadas polares, esse procedimento nem sempre produzirá todas as interseções. Por exemplo, as cardióides

$$r = 1 - \cos \theta \quad \text{e} \quad r = 1 + \cos \theta \tag{4}$$

se cortam em três pontos: o pólo, o ponto $(1, \pi/2)$ e o ponto $(1, 3\pi/2)$ (Figura 11.3.7). Igualando os lados direitos das Equações (4) obtemos $1 - \cos \theta = 1 + \cos \theta$ ou $\cos \theta = 0$, de modo que

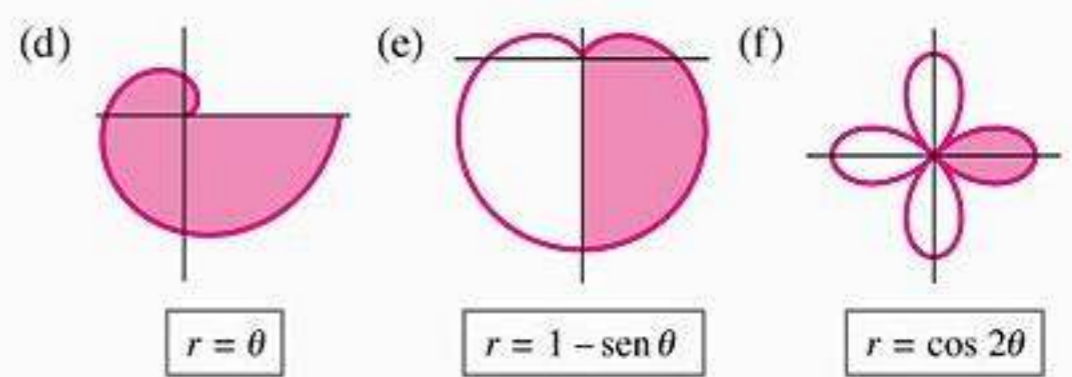
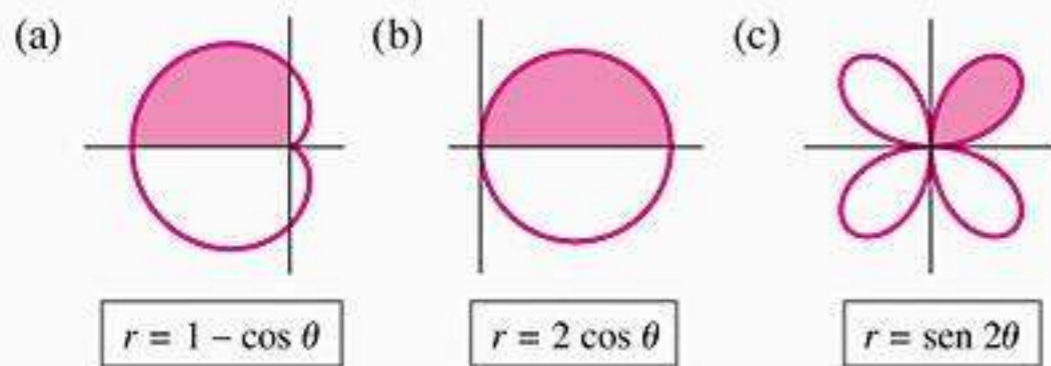
$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Substituindo quaisquer destes valores em (4), obtém-se $r = 1$, portanto encontramos apenas dois pontos distintos da interseção, $(1, \pi/2)$ e $(1, 3\pi/2)$; o pólo não foi encontrado. Esse problema ocorre porque as duas cardióides passam pelo pólo em diferentes valores de θ : a cardióide $r = 1 - \cos \theta$ passa no pólo em $\theta = 0$ e a cardióide $r = 1 + \cos \theta$ passa no pólo em $\theta = \pi$.

O que ocorre com estas duas cardióides é análogo a dois satélites circulando em torno da Terra em órbitas que se intersectam (Figura 11.3.8). Os satélites não colidirão, a menos que eles atinjam o mesmo ponto no mesmo instante. Em geral, é uma boa idéia, quando da busca de interseções de curvas polares, fazer o gráfico das curvas para determinar o número de interseções que deveriam existir.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.3 (Ver página 746 para respostas.)

1. A área A englobada por uma curva polar não-negativa $r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) e as retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dada pela integral definida $A = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. Encontre a área do círculo $r = a$ por integração.
3. Escreva, mas não calcule, uma integral para a área de cada região sombreada.



4. Encontre a área da região sombreada dada em 3(d) acima.

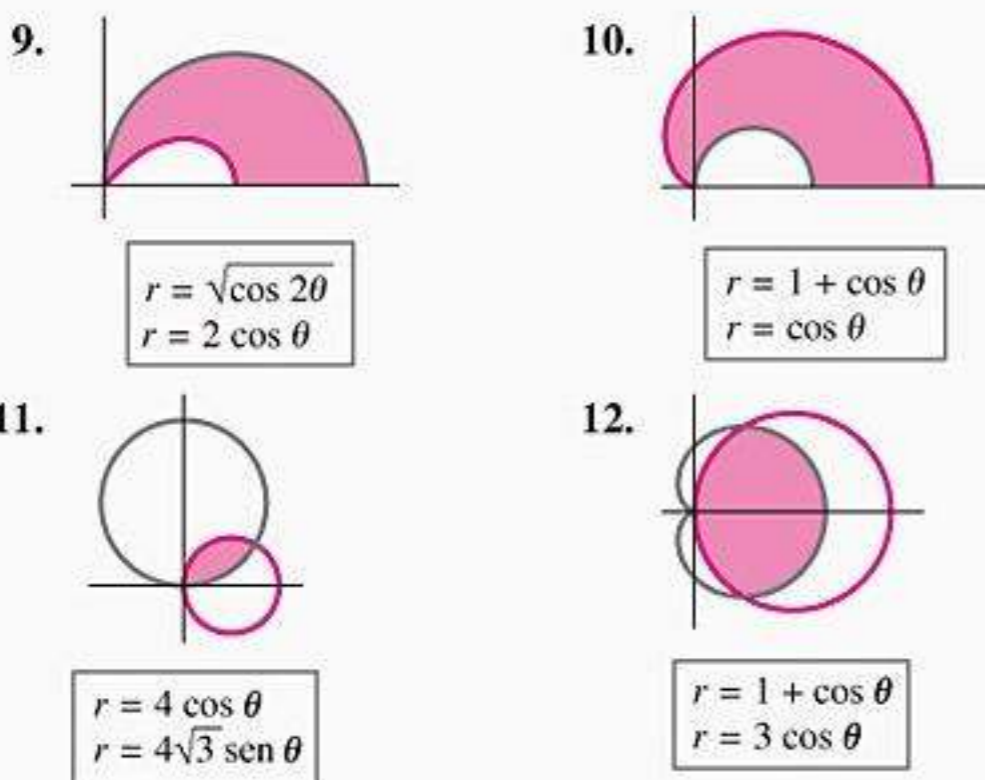
EXERCÍCIOS 11.3 Recurso Gráfico CAS

1. Em cada parte, determine a área do círculo por integração
 - (a) $r = 2a \sin \theta$
 - (b) $r = 2a \cos \theta$
2. (a) Mostre que $r = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$ é um círculo.
 (b) Determine a área do círculo usando uma fórmula geométrica e, então, usando integração.

3-8 Determine a área da região descrita.

3. A região englobada pela cardióide $r = 2 + 2 \sin \theta$.
4. A região interna à cardióide $r = 1 + \cos \theta$ que está no primeiro quadrante.
5. A região englobada pela rosácea $r = 4 \cos 3\theta$.
6. A região englobada pela rosácea $r = 2 \sin 2\theta$.
7. A região englobada pelo laço interno da limaçon $r = 1 + 2 \cos \theta$. [Sugestão: $r \leq 0$ sobre o intervalo de integração.]
8. A região varrida pela reta radial a partir do pólo à curva $r = 2/\theta$, quando θ varia no intervalo $1 \leq \theta \leq 3$.

9-12 Determine a área da região sombreada.



13-20 Determine a área da região descrita.

13. A região interna ao círculo $r = 3 \sin \theta$ e externa à cardióide $r = 1 + \sin \theta$.
14. A região externa à cardióide $r = 2 - 2 \cos \theta$ e interna ao círculo $r = 4$.
15. A região interna à cardióide $r = 2 + 2 \cos \theta$ e externa ao círculo $r = 3$.
16. A região que é comum aos círculos $r = 2 \cos \theta$ e $r = 2 \sin \theta$.
17. A região entre os laços do limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$.
18. A região interna à cardióide $r = 2 + 2 \cos \theta$ e à direita da reta $r \cos \theta = \frac{3}{2}$.
19. A região interna ao círculo $r = 2$ e à direita da reta $r = \sqrt{2} \sec \theta$.
20. A região interna à rosácea $r = 2a \cos 2\theta$ e externa ao círculo $r = a\sqrt{2}$.

ENFOCANDO CONCEITOS

21. (a) Determine o erro: a área que está na parte interna da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ é

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

- (b) Determine a área correta.
 (c) Determine a área interna à lemniscata $r^2 = 4 \cos 2\theta$ e externa ao círculo $r = \sqrt{2}$.
22. Determine a área interna da curva $r^2 = \sin 2\theta$.
23. Uma reta radial é desenhada da origem à espiral $r = a\theta$ ($a > 0$ e $\theta \geq 0$). Determine a área varrida durante a segunda revolução da reta radial que não foi varrida durante a primeira revolução.

24. (a) Na discussão associada com os Exercícios 49-54 da Seção 11.2, foram dadas fórmulas para a área da superfície de revolução que é gerada girando uma curva paramétrica em torno do eixo x ou do eixo y . Use essas fórmulas para deduzir as seguintes fórmulas para as áreas de superfícies de revolução que são geradas girando a parte da curva polar $r = f(\theta)$, de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$, em torno do eixo polar e em torno da reta $\theta = \pi/2$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{Em torno de } \theta = 0$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{Em torno de } \theta = \pi/2$$

- (b) Enuncie condições sob as quais essas fórmulas são verdadeiras.

25-28 Esboce a superfície e use as fórmulas do Exercício 24 para determinar a área da superfície.

25. A superfície gerada girando o círculo $r = \cos \theta$ em torno da reta $\theta = \pi/2$.
 26. A superfície gerada girando a espiral $r = e^\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) em torno da reta $\theta = \pi/2$.
 27. A “maçã” gerada girando a parte superior da cardióide $r = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) em torno do eixo polar.
 28. A esfera de raio a gerada girando o semicírculo $r = a$ do semiplano superior em torno do eixo polar.
- C** 29. (a) Mostre que o Fólio de Descartes $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ pode ser expresso em coordenadas polares como

$$r = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

- (b) Use um CAS para mostrar que a área interna do laço é $\frac{3}{2}$ (Figura 4.1.3a do Volume 1).

30. (a) Qual é a área que é envolvida por uma pétala da rosácea $r = a \cos n\theta$ se n for um inteiro par?
- (b) Qual é a área que é envolvida por uma pétala de rosácea $r = a \cos n\theta$ se n for um inteiro ímpar?
- (c) Use um CAS para mostrar que a área total envolvida pela rosácea $r = a \cos n\theta$ is $\pi a^2/2$ se o número de pétalas for par. [Sugestão: Ver o Exercício 81 da Seção 11.1]
- (d) Use um CAS para mostrar que a área total envolvida pela rosácea $r = a \cos n\theta$ é $\pi a^2/4$ se o número de pétalas for ímpar.
31. Um dos mais famosos problemas na antigüidade grega era o da “quadratura do círculo”, isto é, usando uma régua e um compasso construir um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo dado. Foi provado no século XIX que não era possível tal cons-

trução. Contudo, mostre que as áreas sombreadas na figura abaixo são iguais, portanto provamos a “quadratura da crescente”.

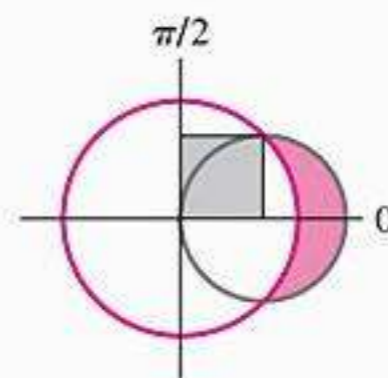


Figura Ex-31

32. Use um recurso gráfico para gerar o gráfico polar da equação $r = \cos 3\theta + 2$ e determine a área envolvida.
33. Use um recurso gráfico para gerar o gráfico do *bifólio* $r = 2 \cos \theta \sin^2 \theta$ e determine a área do laço superior.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.3

$$1. \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 d\theta = \pi a^2 \quad 3. (a) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta \quad (b) \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 2\theta d\theta \quad (d) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta \quad (e) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \sin \theta)^2 d\theta \quad (f) \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \quad 4. \frac{4\pi^3}{3}$$

11.4 SEÇÕES CÔNICAS NO CÁLCULO

Nesta seção, discutiremos algumas das propriedades geométricas básicas de parábolas, de elipses e de hipérbolas. Essas curvas representam um papel importante no Cálculo e também surgem naturalmente em uma variedade ampla de aplicações em campos tais como o movimento planetário, projeto de telescópios e antenas, o posicionamento geodésico, e a Medicina, para mencionar algumas.

Alguns alunos podem já estar familiarizados com o material desta seção; nesse caso, este material pode ser tratado como revisão. Os professores que quiserem gastar tempo adicional numa revisão pré-cálculo, podem querer alocar mais do que uma aula a este material.

SEÇÕES CÔNICAS

Círculos, elipses, parábolas e hipérbolas são chamadas de *seções cônicas* ou *cônicas*, pois eles podem ser obtidos como a interseção de um plano com um cone circular (Figura 11.4.1). Se o plano passa no vértice do cone, então a interseção é um ponto, um par de retas coincidentes ou uma só reta. Essas são chamadas de *seções cônicas degeneradas*.

DEFINIÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS

Embora pudéssemos deduzir propriedades de parábolas, de elipses e de hipérbolas definindo-as como interseções com um cone circular, será mais adequado ao Cálculo se começarmos com definições equivalentes que são baseadas em suas propriedades geométricas.

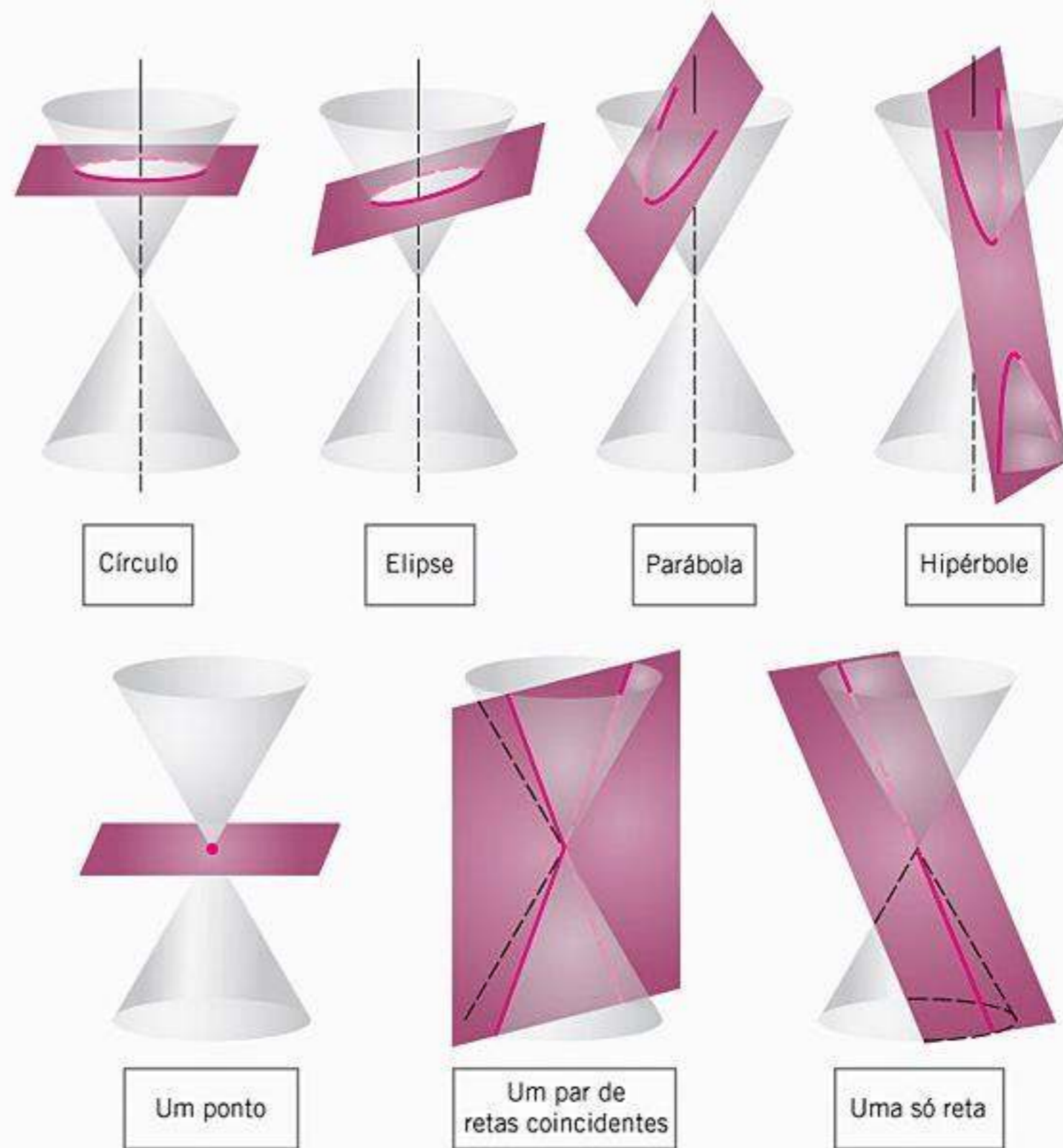


Figura 11.4.1

11.4.1 DEFINIÇÃO Uma *parábola* é o conjunto de todos os pontos no plano que são equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta.

A reta é chamada de *diretriz* da parábola e o ponto é chamado de *foco* (Figura 11.4.2). Uma parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo foco em ângulo reto com a diretriz. Esta reta, chamada de *eixo* ou *eixo de simetria* da parábola, intersecta a parábola em um ponto que é chamado de *vértice*.



Figura 11.4.2

11.4.2 DEFINIÇÃO Uma *elipse* é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de *focos* da elipse e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de *centro* (Figura 11.4.3a). Para ajudar a visualizar a Definição 11.4.2, imagine que as duas pontas de um barbante estejam pregadas nos focos e que um lápis descreva uma curva mantendo o barbante esticado (Figura 11.4.3b). A curva resultante será

uma elipse, uma vez que a soma das distâncias aos focos é constante, a saber, o comprimento total do barbante. Note que se os focos coincidirem, a elipse se reduz a um círculo. Para elipses outras que não sejam círculos, o segmento de reta através dos focos com extremidades na elipse é chamado de *eixo maior* (Figura 11.4.3c) e o segmento de reta através do centro com extremidades na elipse, e perpendicular ao eixo maior, é chamado de *eixo menor*. Os extremos do eixo maior são chamados de *vértices*.

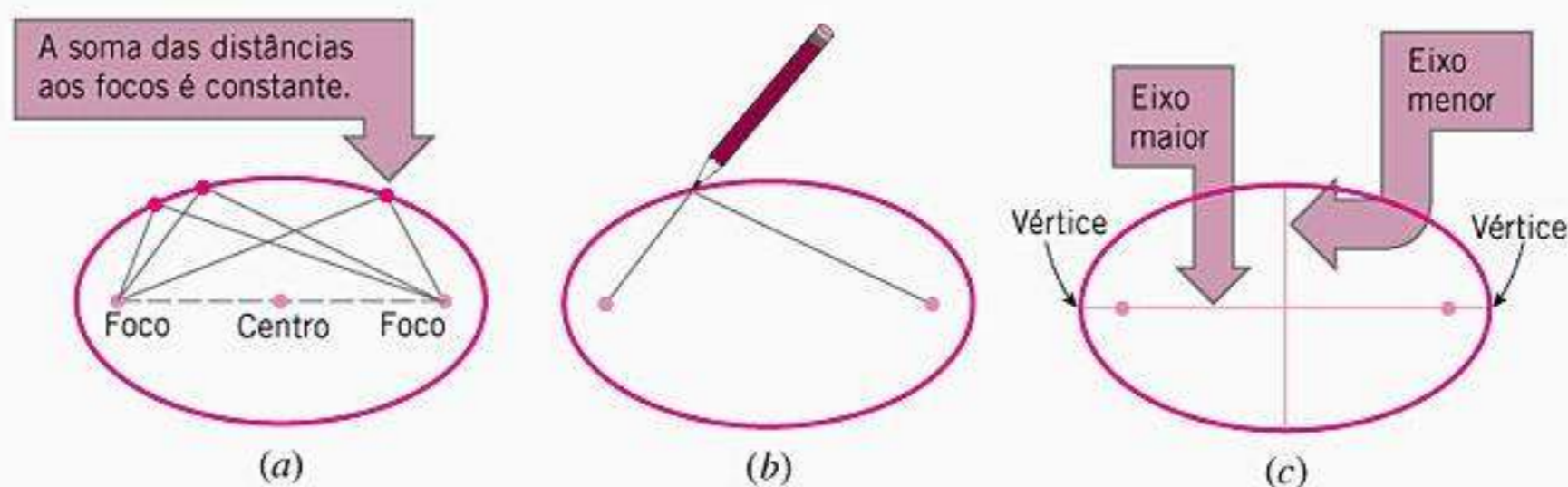


Figura 11.4.3

11.4.3 DEFINIÇÃO Uma *hipérbole* é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor que a distância entre os dois pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de *focos* da hipérbole e o termo “diferença” usado na definição deve ser entendido como a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo. Como resultado, os pontos da hipérbole formam dois *ramos*, cada um dos quais “está rodeando” o foco mais próximo (Figura 11.4.4a). O ponto médio do segmento de reta que une os focos é chamado de *centro* da hipérbole, a reta que passa pelos focos é chamada *eixo focal* e a reta que passa pelo centro e é perpendicular ao eixo focal é chamada *eixo conjugado*. A hipérbole intersecta o eixo focal em dois pontos, chamados *vértices*.

Associado com toda hipérbole existe um par de retas, chamadas *assíntotas* da hipérbole. Essas retas cortam o centro da hipérbole e têm a propriedade que à medida que um ponto P move-se ao longo da hipérbole afastando-se do centro, a distância vertical entre P e uma das assíntotas tende a zero (Figura 11.4.4b)

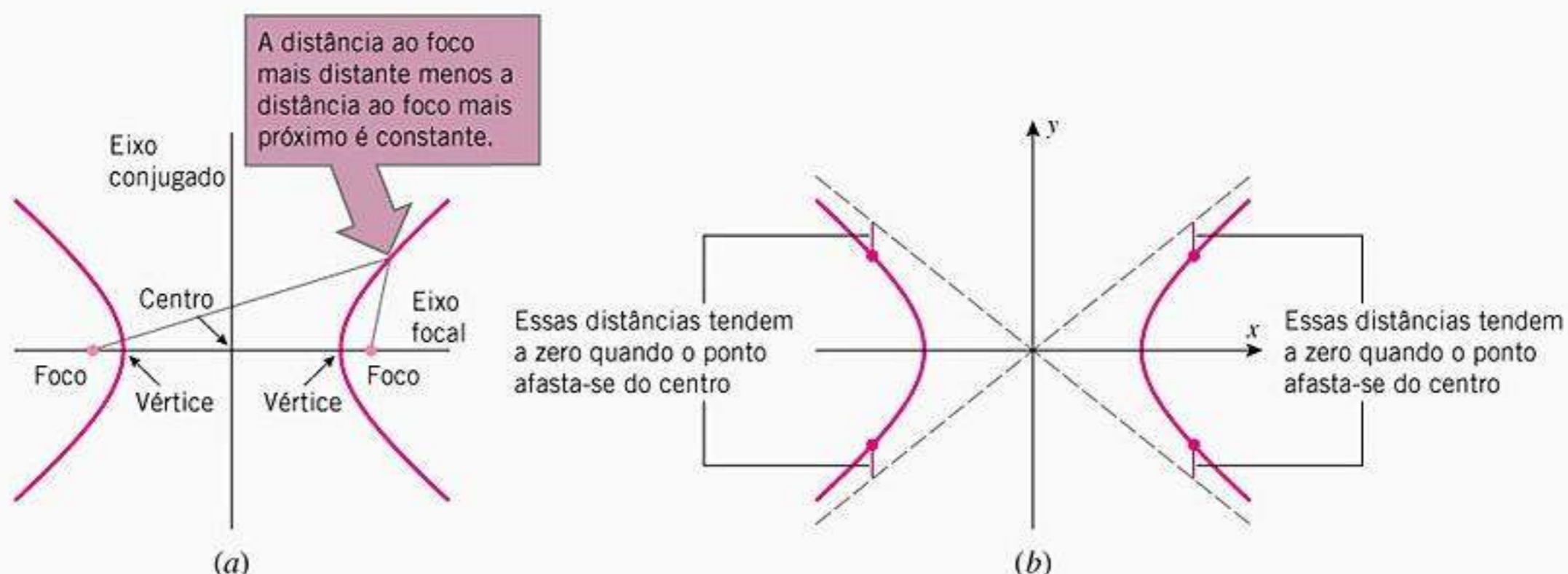


Figura 11.4.4

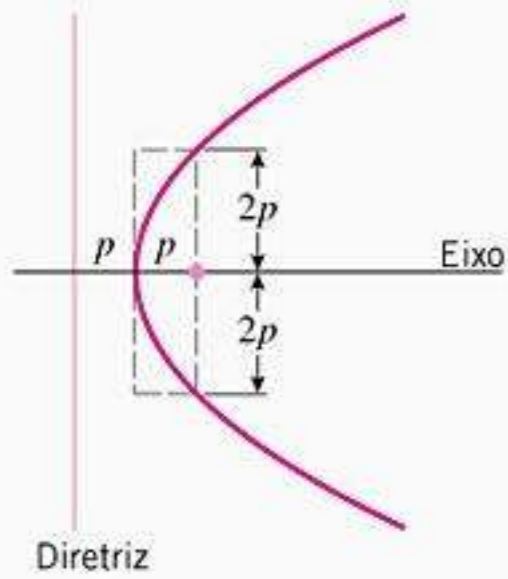


Figura 11.4.5

■ EQUAÇÕES DE PARÁBOLAS EM POSIÇÃO PADRÃO

No estudo de parábolas é tradicional denotar a distância entre o foco e o vértice por p . O vértice é equidistante do foco e da diretriz, logo a distância entre o vértice e a diretriz também é p ; conseqüentemente, a distância entre o foco e a diretriz é $2p$ (Figura 11.4.5). Conforme ilustrado nessa figura, a parábola passa por dois dos cantos do retângulo que se estende do vértice para o foco ao longo do eixo de simetria e se estende $2p$ unidades acima e $2p$ unidades abaixo do eixo de simetria.

A equação de uma parábola é a mais simples se o vértice for a origem e se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo x ou do eixo y . As quatro possíveis orientações estão mostradas na Figura 11.4.6. Essas são chamadas de *posições padrão* de uma parábola, e as equações resultantes são chamadas de *equações padrão* de uma parábola.

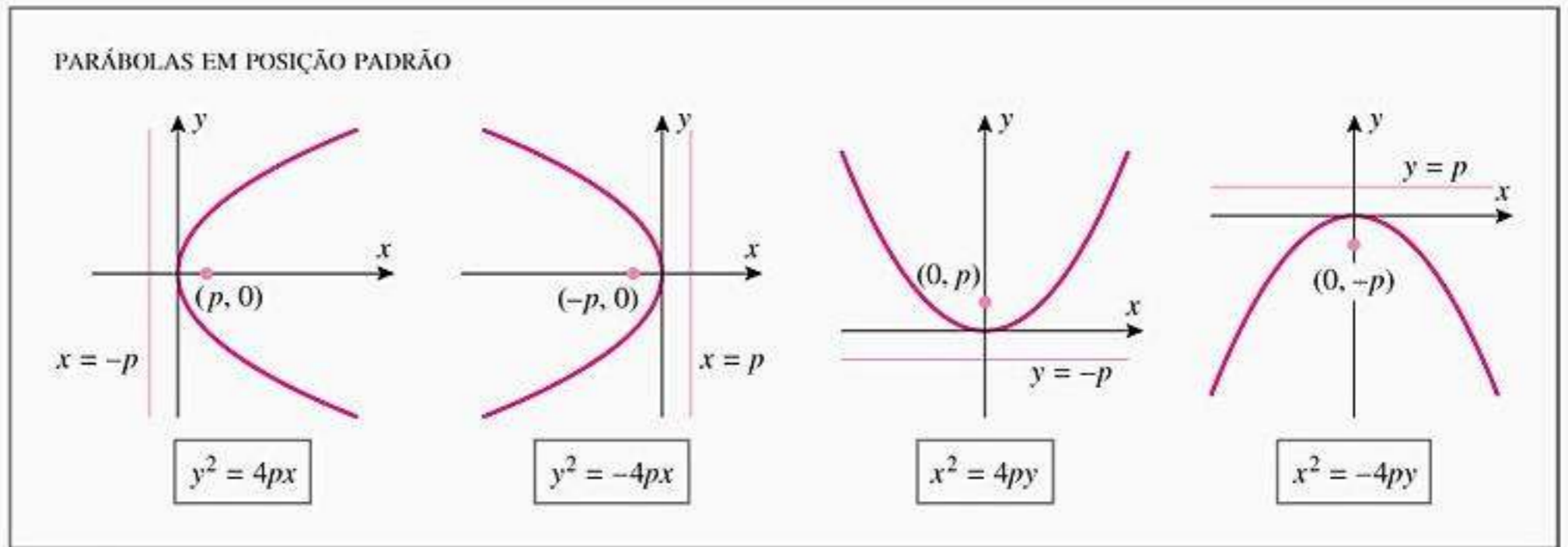


Figura 11.4.6

Para ilustrar como foram obtidas as equações na Figura 11.4.6, deduziremos a equação para a parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$. Seja $P(x, y)$ qualquer ponto sobre a parábola. Como P é equidistante do foco e diretriz, as distâncias PF e PD na Figura 11.4.7 são iguais; isto é,

$$PF = PD \tag{1}$$

onde $D(-p, y)$ é o pé da perpendicular de P à diretriz. Pela fórmula da distância, as distâncias PF e PD são

$$PF = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad PD = \sqrt{(x + p)^2} \tag{2}$$

Substituindo em (1) e elevando ao quadrado obtemos

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2 \tag{3}$$

e depois de simplificar

$$y^2 = 4px \tag{4}$$

As deduções das outras equações na Figura 11.4.6 são análogas.

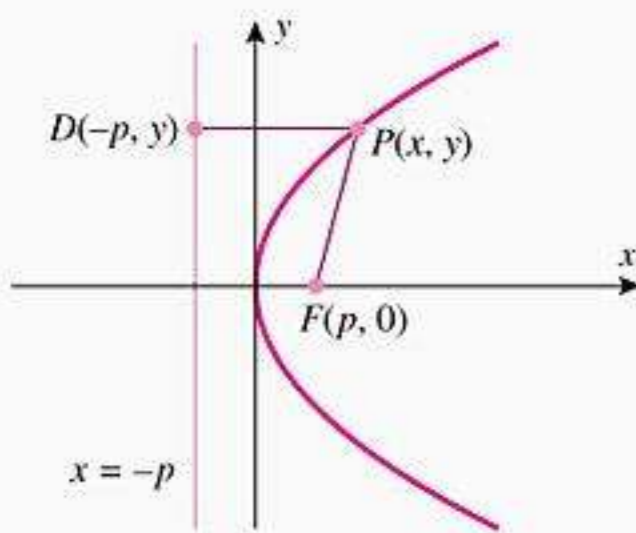


Figura 11.4.7

■ UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR PARÁBOLAS

As parábolas podem ser esboçadas a partir de suas *equações padrão* usando quatro passos básicos:

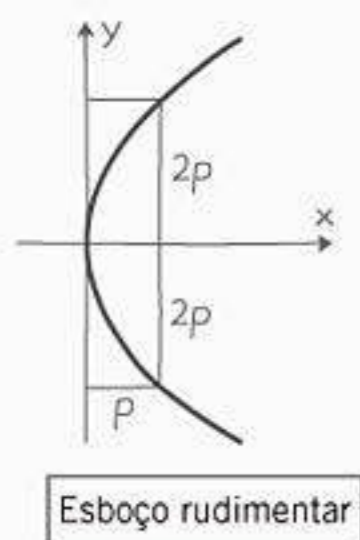


Figura 11.4.8

Esboçando uma Parábola a Partir de Sua Equação Padrão

- Passo 1** Determine se o eixo de simetria está ao longo do eixo x ou do eixo y . Em referência à Figura 11.4.6, o eixo de simetria está ao longo do eixo x se a equação tiver um termo y^2 , e está ao longo do eixo y se tiver um termo x^2 .
- Passo 2** Determine de que maneira a parábola se abre. Se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo x , então a parábola abre-se para a direita se os coeficientes de x forem positivos, e abre-se para a esquerda se os coeficientes forem negativos. Se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo y , então a parábola abre-se para cima se os coeficientes de y forem positivos, e abre-se para baixo se forem negativos.
- Passo 3** Determine o valor de p e desenhe uma caixa que se estenda p unidades a partir da origem ao longo do eixo de simetria na direção em que a parábola se abre e que se estenda $2p$ unidades, para cada lado do eixo de simetria.
- Passo 4** Usando a caixa como guia, esboce a parábola de forma que seu vértice esteja na origem e que ela passe pelos cantos da caixa (Figura 11.4.8).

► Exemplo 1 Esboce os gráficos das parábolas

$$(a) x^2 = 12y \quad (b) y^2 + 8x = 0$$

e mostre o foco e a diretriz de cada uma.

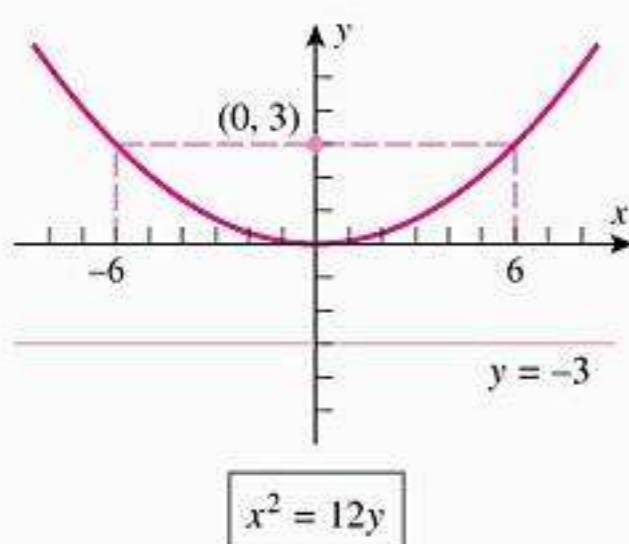


Figura 11.4.9

Solução (a) Essa equação envolve x^2 , logo o eixo de simetria está ao longo do eixo y , e o coeficiente de y é positivo, portanto a parábola abre-se para cima. Dos coeficientes de y , obtemos $4p = 12$ ou $p = 3$. Desenhando uma caixa que se amplie $p = 3$ unidades acima da origem e $2p = 6$ unidades à direita do eixo y , e usando os cantos da caixa como guia, obtemos o gráfico na Figura 11.4.9.

O foco está a $p = 3$ unidades do vértice ao longo do eixo de simetria na direção em que a parábola se abre, logo sua coordenada é $(0, 3)$. A diretriz é perpendicular ao eixo de simetria e está a uma distância de $p = 3$ unidades do vértice no lado oposto do foco, portanto sua equação é $y = -3$.

Solução (b) Primeiro, reescrevemos a equação na forma padrão

$$y^2 = -8x$$

Esta equação envolve y^2 , assim o eixo de simetria está ao longo do eixo x , e o coeficiente de x é negativo, logo a parábola se abre para a esquerda. Dos coeficientes de x , obtemos $4p = 8$, então $p = 2$. Desenhando uma caixa ampliada $p = 2$ unidades à esquerda da origem e $2p = 4$ unidades acima e $2p = 4$ unidades abaixo do eixo x , e usando os cantos da caixa como guia, obtemos o gráfico na Figura 11.4.10. ◀

► Exemplo 2 Determine uma equação da parábola que seja simétrica em relação ao eixo y , tenha vértice na origem e passe pelo ponto $(5, 2)$.

Solução Como a parábola é simétrica em relação ao eixo y e tem seu vértice na origem, a equação é da forma

$$x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad x^2 = -4py$$

onde o sinal depende de a parábola abrir para cima ou para baixo. Mas a parábola deve abrir para cima, uma vez que ela passa pelo ponto $(5, 2)$, que está situado no primeiro quadrante. Assim, a equação é da forma

$$x^2 = 4py \quad (5)$$

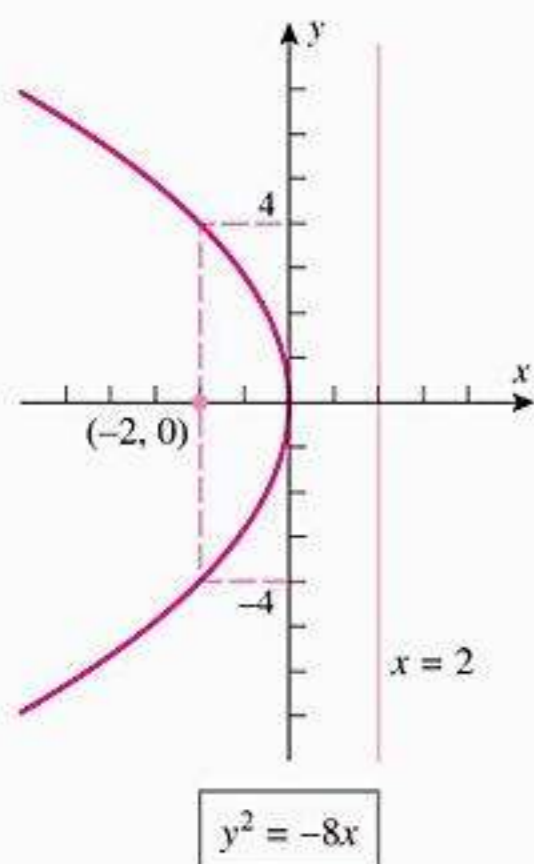


Figura 11.4.10

Como a parábola passa por (5, 2), devemos ter $5^2 = 4p \cdot 2$ ou $4p = \frac{25}{2}$. Portanto, (5) torna-se

$$x^2 = \frac{25}{2}y \blacktriangleleft$$

■ EQUAÇÕES DE ELIPSES EM POSIÇÃO PADRÃO

No estudo de elipses é tradicional denotar o comprimento do eixo maior por $2a$, o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos por $2c$ (Figura 11.4.11). O número a é chamado *semi-eixo maior* e o número b , o *semi-eixo menor* (terminologia padrão, mas estranha, uma vez que a e b são números, não eixos geométricos).

Há uma relação básica entre os números a , b e c que pode ser obtida examinando a soma das distâncias aos focos a partir de um ponto P na extremidade do eixo maior, e de um ponto Q na extremidade do eixo menor (Figura 11.4.12). A partir da Definição 11.4.2, essas somas devem ser iguais, logo obtemos

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = (a - c) + (a + c)$$

do que segue

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{6}$$

ou de modo equivalente,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{7}$$

A partir de (6), a distância de um foco até uma extremidade do eixo menor é a (Figura 11.4.13), o que implica que para *todos* os pontos sobre a elipse a soma das distâncias aos focos é $2a$.

Segue também de (6) que $a \geq b$, com a igualdade valendo apenas quando $c = 0$. Geometricamente, isso significa que o eixo maior de uma elipse é pelo menos tão grande quanto o eixo menor e que os dois eixos têm o mesmo comprimento quando os focos coincidem, caso em que a elipse é um círculo.

A equação de uma elipse é a mais simples se o seu centro estiver na origem e os focos estiverem sobre o eixo x ou do eixo y . As duas possíveis orientações mostradas na Figura 11.4.14. Essas são chamadas de *posições padrão* de uma elipse, e as equações resultantes são chamadas de *equações padrão* de uma elipse.

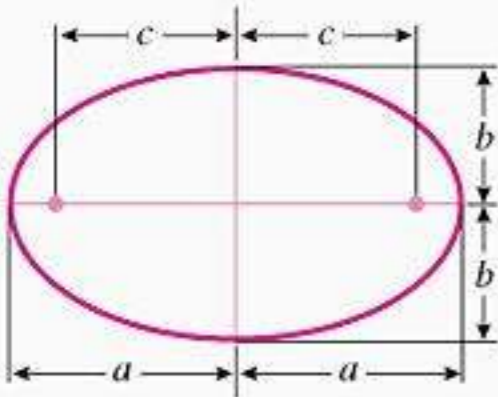


Figura 11.4.11

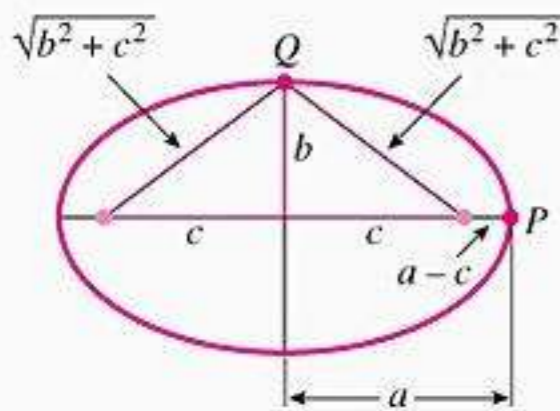


Figura 11.4.12

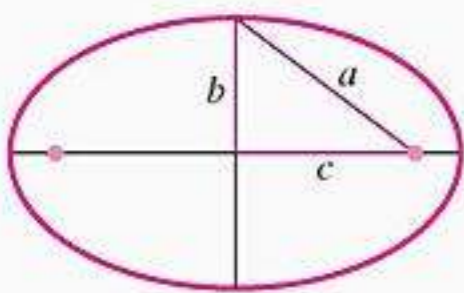


Figura 11.4.13

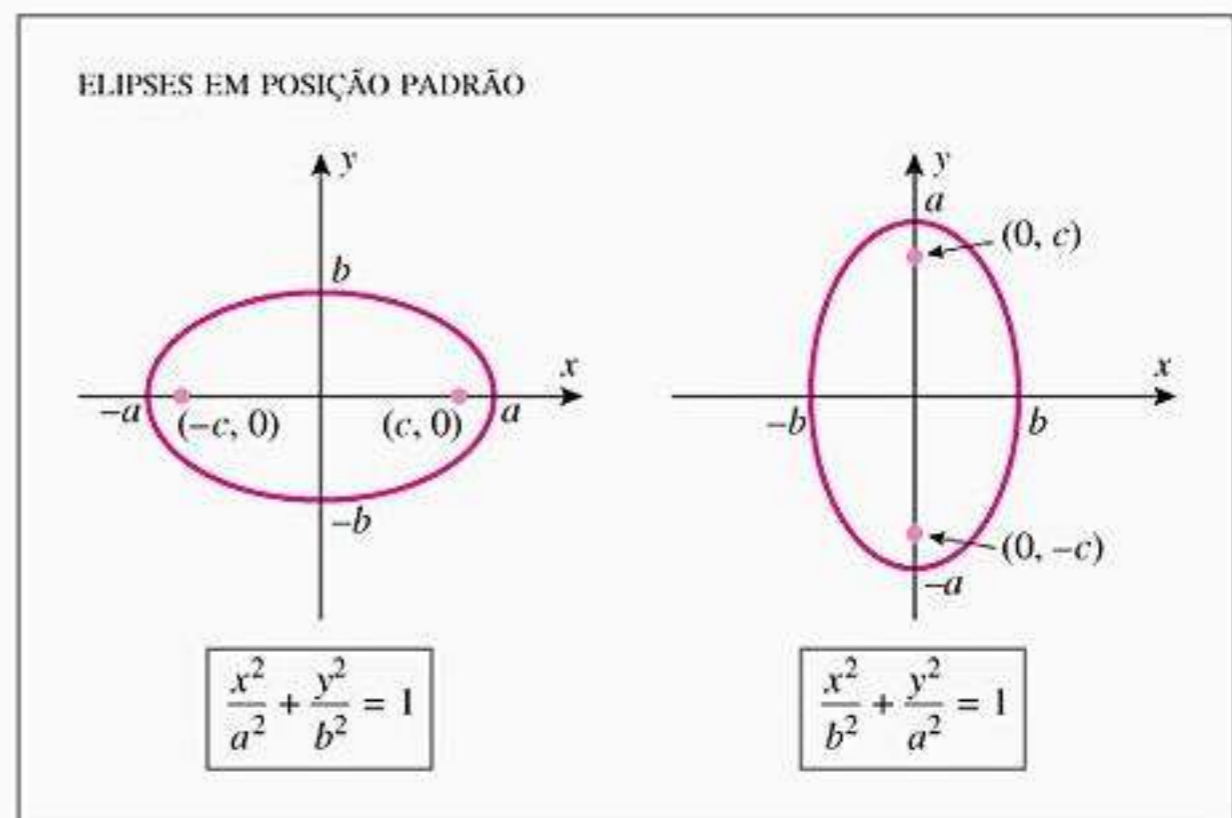


Figura 11.4.14

Para ilustrar como foram obtidas as equações na Figura 11.4.14, deduziremos a equação para a elipse com os focos no eixo x . Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a elipse. Uma vez que a soma das distâncias de P até os focos é $2a$, tem-se (Figura 11.4.15) que

$$PF' + PF = 2a$$

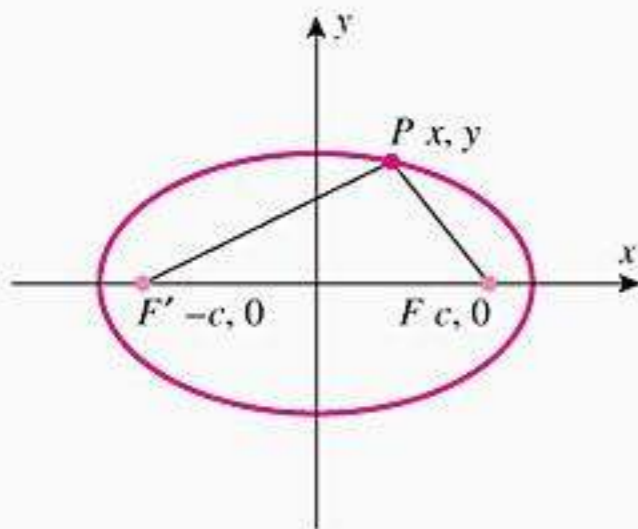


Figura 11.4.15

g

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
 ran n egun ra ica ara a ireit a e uaçã e e e an a ua ra , btem

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e, im ifican ,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \tag{8}$$

E e an a ua ra utra eze im ifican , btem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ue, e i a , em e cre er c m

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

eci r camente, e er m tra ue ua uer nt cu a c r ena a ati fizerem 9 tem $2ac$ m a ma e ua i tância a c , em ue ta nt e tará na e i e

■ **UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR ELIPSES**

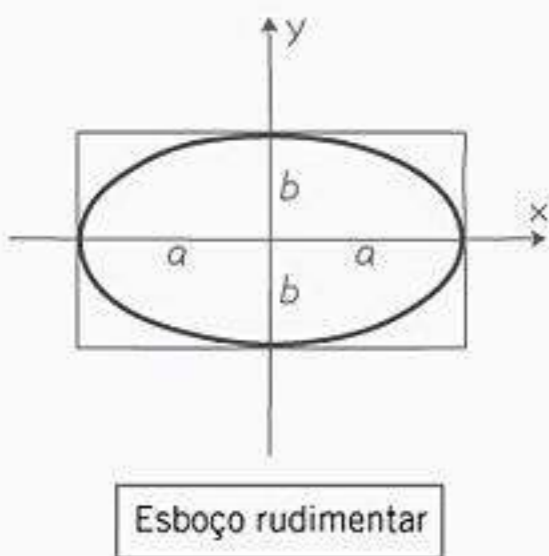
ci e em cre b ça a a artir e ua *equações padrão* u an trê a b á ic :

Esboçando uma Elipse a Partir de Sua Equação Padrão

Passo 1 Determine e ei mai r e tá bre ei x u ei y e er e rifica a artir tamanh en mina re na e uaçã Em re erênci à Figura 11 4 12, e em bran ue $a^2 > b^2$ uma ez ue $a > b$, ei mai r e tá a ng ei x e x^2 ti er mai r en mina r e e tá a ng ei y e y^2 ti er mai r en mina r Se en mina re rem iguai , a ei é um círcu

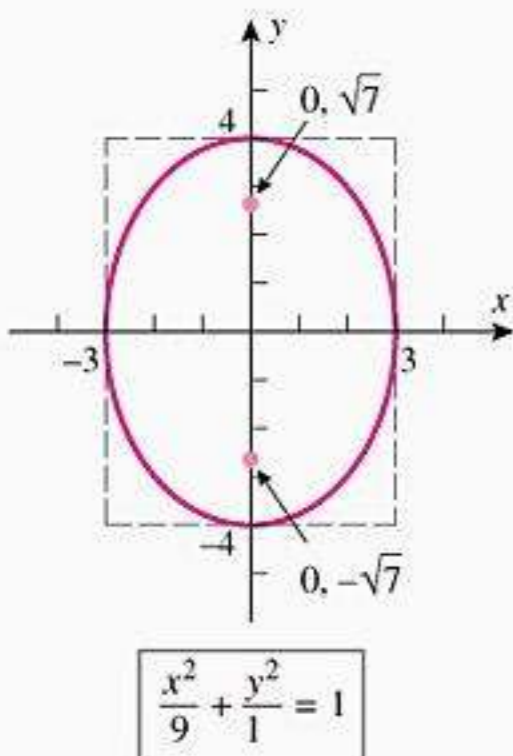
Passo 2 Determine a re e a e b e e enhe uma cai a ue e e ten a r a uni a e araca a a a artir centr a ng ei mai r, e r b uni a e araca a a a artir centr a ng ei men r

Passo 3 an a cai a c m guia, e b ce a ei e em ue eu centr e te a na rigem e ue e at ue a a cai a ne e e a inter ectam ei c r ena Figura 11 4 1



Esboço rudimentar

Figura 11.4.16



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Figura 11.4.17

► **Exemplo 3** tran c e ca a uma, e b ce gráfíc a ei e

$$(a) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (b) x^2 + 2y^2 = 4$$

Solução (a) m y^2 tem mai r en mina r, ei mai r e tá a ng ei y ém i , c m $a^2 > b^2$, e em ter $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, e m ue

$$a = 4 \quad e \quad b = 3$$

De enhan c m guia uma cai a ue e e ten e 4 uni a e araca a a a artir a rigem a ng ei y e 3 uni a e araca a a a artir a rigem a ng ei x , btem gráfíc na Figura 11 4 17

centro em $(0, 0)$ e eixo maior em y . Então, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2,6$. Assim, a órbita é a elipse $(0, \sqrt{7})$ e $(0, -\sqrt{7})$ que está situada a $\sqrt{7}$ unidades da origem em y .

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2,6$$

Assim, a órbita é a elipse $(0, \sqrt{7})$ e $(0, -\sqrt{7})$ que está situada a $\sqrt{7}$ unidades da origem em y .

Solução (b) Primeiro, reescreva a equação na forma padrão

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Como x^2 tem maior denominador, o eixo maior está em x e tem $a^2 = 4$ e $b^2 = 2$. De maneira semelhante, a equação $a = 2$ representa a rigidez em x e a equação $b = \sqrt{2} \approx 1,4$ unidades representa a rigidez em y , conforme gráfico na Figura 11.4.18

De 7, temos

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2} \approx 1,4$$

Assim, a órbita é a elipse $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$, que está situada a $\sqrt{2}$ unidades da origem em x .

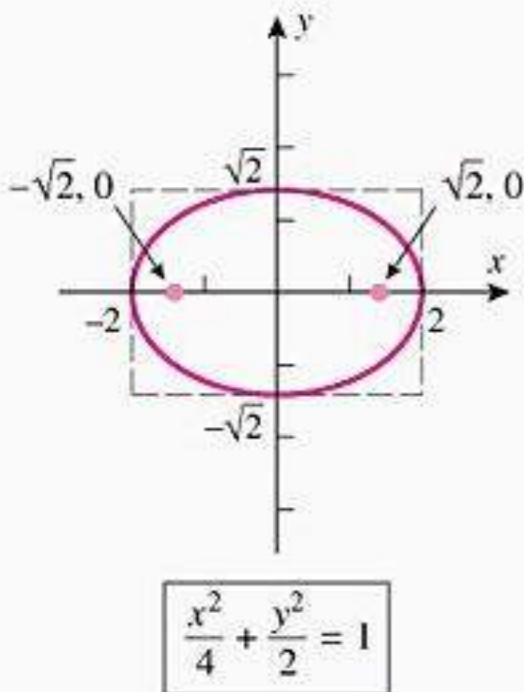


Figura 11.4.18

Exemplo 4 Determine uma equação para a elipse com vértices em $(0, \pm 2)$ e eixos maiores em $(0, \pm 4)$.

Solução Conforme a Figura 11.4.14, a equação tem a forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

onde $a = 4$ e $c = 2$. Segue-se que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

em que a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

■ EQUAÇÕES DE HIPÉRBOLES EM POSIÇÃO PADRÃO

Uma hipérbole é traçada em uma distância entre vértices $2a$, a distância entre centros $2c$. Figura 11.4.19 e definir a quantidade b com

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{10}$$

Essa relação, que também se refere a c com

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11}$$

está apresentada na Figura 11.4.20. Normalmente, na mesma figura, c mede a distância entre os vértices, a a distância entre os centros e b unidades representa a distância entre o centro da hipérbole e o eixo focal. A hipérbole e o número a é chamado **semi-eixo focal** e o número b **semi-eixo conjugado**. Assim, a mede a distância entre os vértices e b mede a distância entre os centros.

Se V é um vértice de uma hipérbole, então, a distância entre V e o centro C até o eixo focal F até o centro C maior é

$$[(c - a) + 2a] - (c - a) = 2a$$

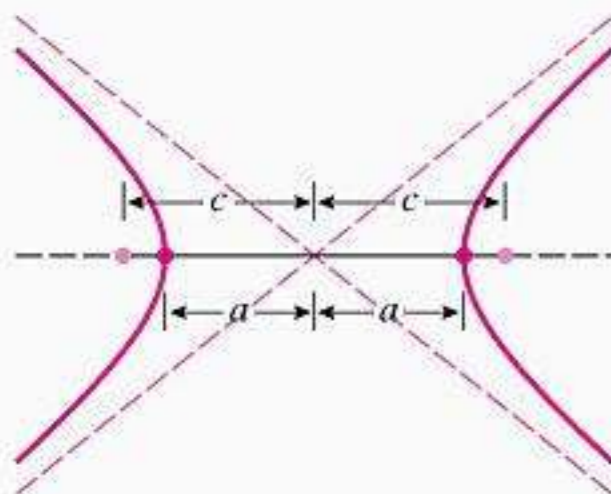


Figura 11.4.19

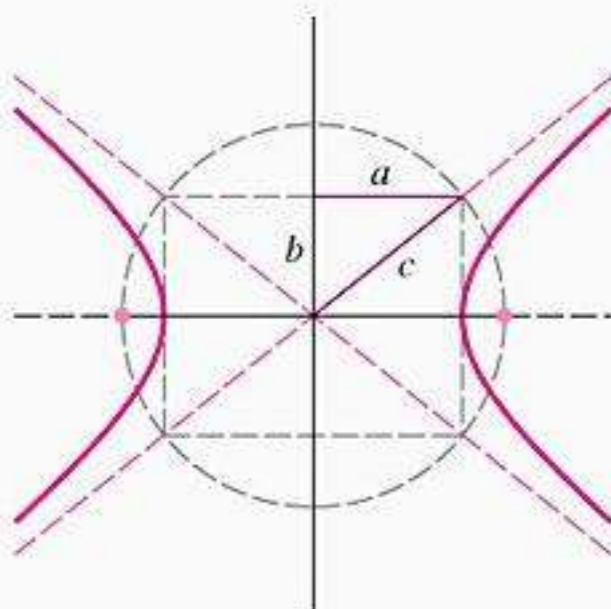


Figura 11.4.20

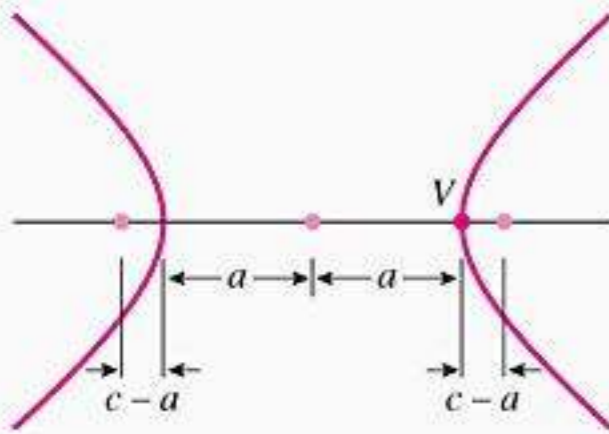


Figura 11.4.21

De tal forma, para todos os pontos da hipérbole, a distância a cada um dos focos é maior que a distância a cada um dos vértices.

Uma hipérbole é a maior coleção de pontos no plano que satisfaz a propriedade de que a diferença absoluta das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos dois focos é constante e igual a $2a$. Essa constante é denominada *distância focal* e é denotada por $2c$. A distância a é denominada *semi-eixo real* e a distância b é denominada *semi-eixo imaginário*. A distância c é denominada *semi-eixo focal*. A distância c é denominada *semi-eixo focal*. A distância a é denominada *semi-eixo real* e a distância b é denominada *semi-eixo imaginário*. A distância c é denominada *semi-eixo focal*.

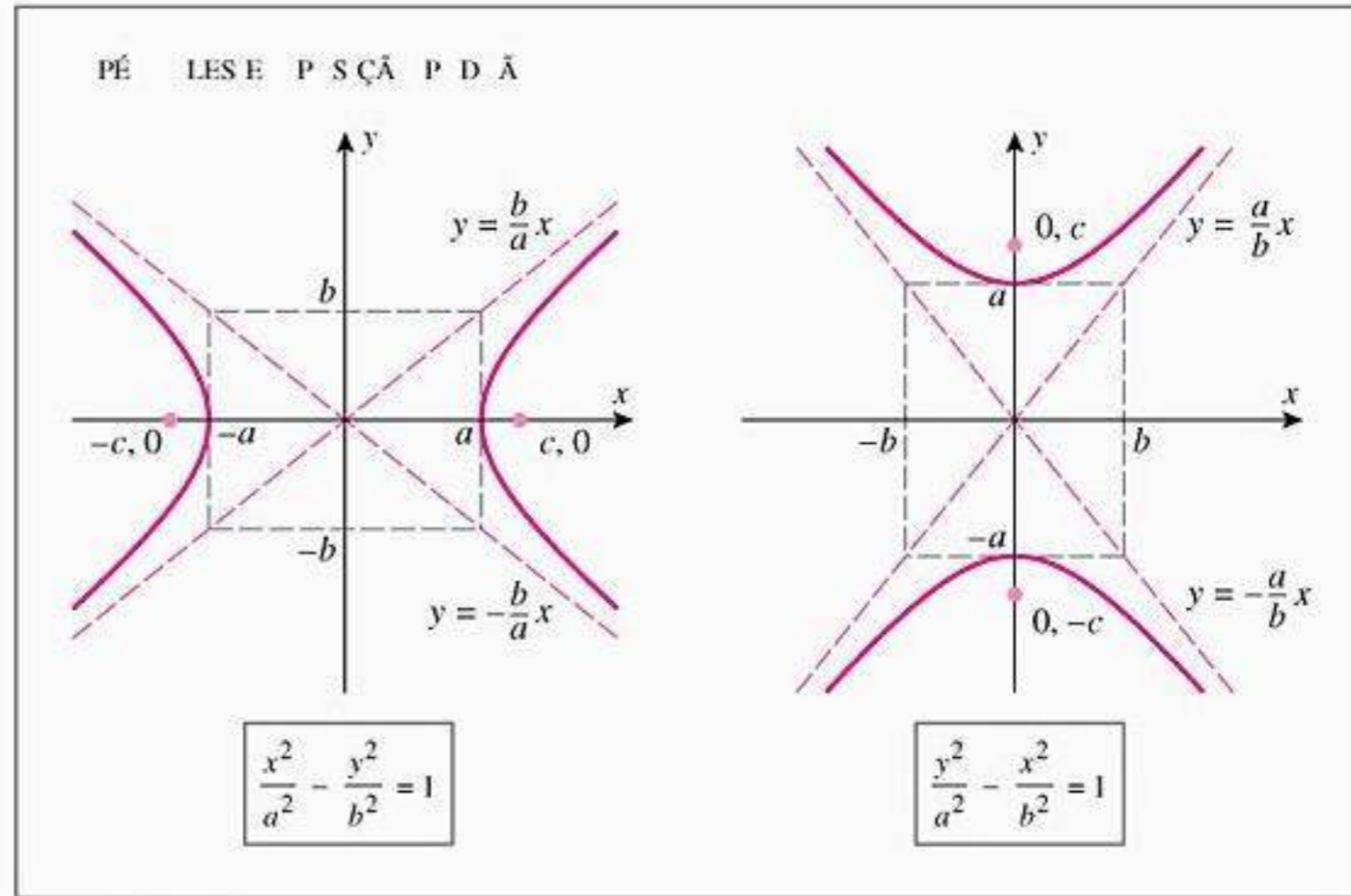


Figura 11.4.22

Uma hipérbole é a maior coleção de pontos no plano que satisfaz a propriedade de que a diferença absoluta das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos dois focos é constante e igual a $2a$. Essa constante é denominada *distância focal* e é denotada por $2c$. A distância a é denominada *semi-eixo real* e a distância b é denominada *semi-eixo imaginário*. A distância c é denominada *semi-eixo focal*.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para encontrar a equação de uma hipérbole, vamos considerar a hipérbole que abre para a direita e a esquerda.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

que é equivalente a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Assim, para encontrar a equação da hipérbole, vamos considerar a hipérbole que abre para a direita e a esquerda. Vamos considerar a hipérbole que abre para a direita e a esquerda.

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Essa distância tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a distância entre o ponto da hipérbole e a reta $y = \frac{b}{a}x$ tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$.

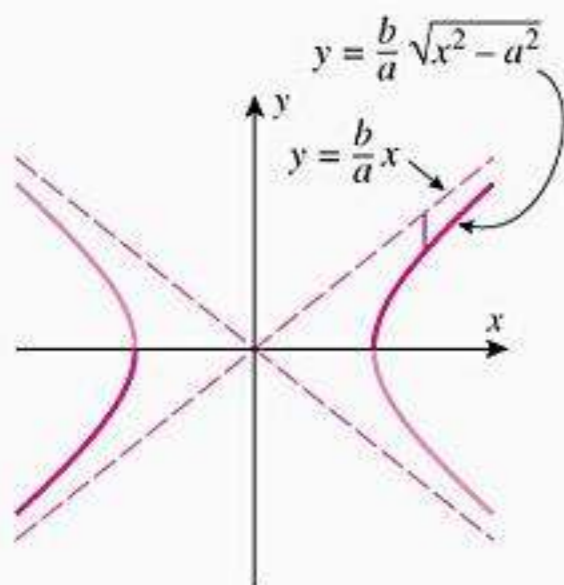


Figura 11.4.23

■ **UMA MANEIRA RÁPIDA DE ENCONTRAR AS ASSÍNTOTAS**

há uma maneira rápida de encontrar as assíntotas de uma hipérbole. Em primeiro lugar, vamos lembrar que a equação padrão de uma hipérbole é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Se a hipérbole é centrada na origem e tem eixos de simetria x e y , então podemos encontrar as assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

escrevendo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{b}{a}x$$

que são as equações das assíntotas.

■ **UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR HIPÉRBOLES**

Uma hipérbole pode ser esboçada a partir de suas equações padrão usando a seguinte técnica:

Esboçando uma Hipérbole a Partir de Sua Equação Padrão

Passo 1 Determine os eixos de simetria x e y e verifique a partir da equação em qual eixo a hipérbole abre. Em referência à Figura 11.4.22, se a hipérbole abre para cima e para baixo, então a equação padrão contém o termo y^2 , e se abre para a esquerda e para a direita, então contém o termo x^2 .

Passo 2 Determine os valores a e b e desenhe uma caixa unitária e um eixo de simetria. Se a hipérbole abre para cima e para baixo, desenhe a caixa unitária com centro na origem e lados de comprimento $2a$ e $2b$. Se a hipérbole abre para a esquerda e para a direita, desenhe a caixa unitária com centro na origem e lados de comprimento $2a$ e $2b$.

Passo 3 Desenhe as assíntotas usando a caixa unitária.

Passo 4 Use a caixa unitária e as assíntotas como guia, e desenhe o gráfico da hipérbole (veja a Figura 11.4.24).

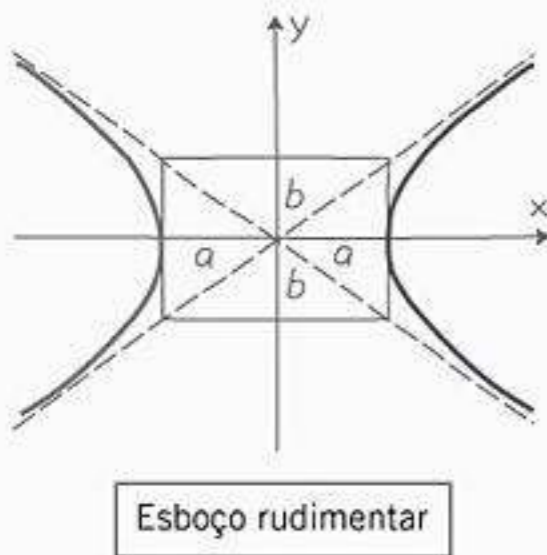


Figura 11.4.24

► **Exemplo 5** Esboce o gráfico da hipérbole

$$(a) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (b) y^2 - x^2 = 1$$

com trans e vértices, e as assíntotas.

Solução (a) Como a hipérbole abre para a esquerda e para a direita, então a equação padrão contém o termo x^2 . Portanto, a hipérbole abre para a esquerda e para a direita, e os eixos de simetria são os eixos x e y .

$$a^2 = 4 \quad \text{e} \quad b^2 = 9$$

Logo, os eixos de simetria são os eixos x e y , e os vértices estão em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Desenhe uma caixa unitária com centro na origem e lados de comprimento $2a = 4$ e $2b = 6$. Desenhe as assíntotas usando a caixa unitária e as assíntotas como guia, e desenhe o gráfico da hipérbole (veja a Figura 11.4.25).

Para obter as equações das assíntotas, substitua 1 por 0 na equação da hipérbole, resultando em

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{3}{2}x$$

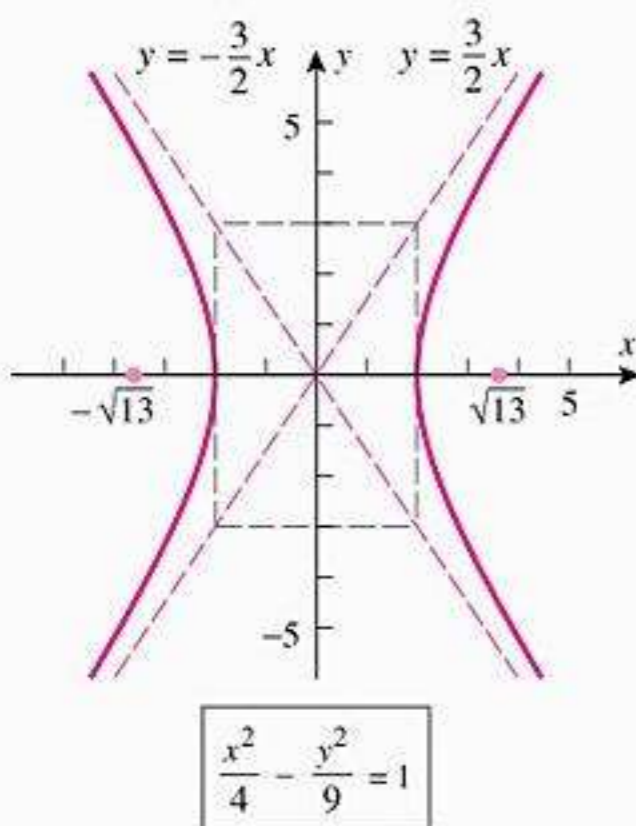


Figura 11.4.25

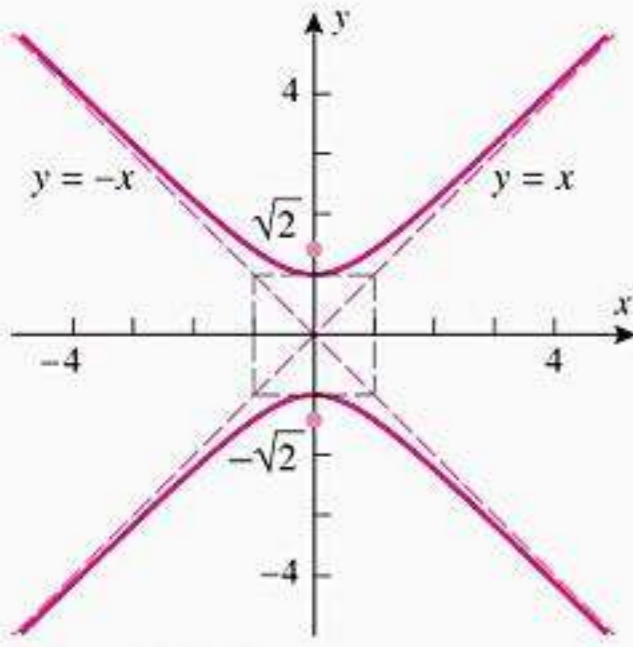


Figura 11.4.26

Uma hipérbole na qual $a = b$, como na parte (b) do Exemplo 5, é chamada de *hipérbole equilátera*. Tais hipérbolas sempre têm as assíntotas perpendiculares.

centro em $(0, 0)$ e eixos reais e imaginários coincidentes com os eixos x e y . O eixo real tem comprimento $2a$ e o eixo imaginário tem comprimento $2b$. O comprimento da semi-eixo real é a e o comprimento da semi-eixo imaginário é b . O comprimento da semi-eixo focal é c , onde $c^2 = a^2 + b^2$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,6$$

Logo, os focos estão em $(\sqrt{13}, 0)$ e $(-\sqrt{13}, 0)$.

Solução (b) Como $a = b = 1$, a hipérbole tem equação $y^2 - x^2 = 1$. As assíntotas são $y = \pm x$.

$$a = 1 \text{ e } b = 1$$

Logo, os vértices estão em $(0, -1)$ e $(0, 1)$. De fato, a hipérbole tem equação $y^2 - x^2 = 1$ e eixos reais e imaginários coincidentes com os eixos x e y . O eixo real tem comprimento $2a = 2$ e o eixo imaginário tem comprimento $2b = 2$. O comprimento da semi-eixo focal é $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Logo, os focos estão em $(0, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Logo, os focos estão em $(0, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$.

Exemplo 6 Determine a equação da hipérbole com vértices $(0, \pm 8)$ e assíntotas $y = \pm \frac{4}{3}x$.

Solução Como os vértices estão em $(0, \pm 8)$, a hipérbole tem a forma $(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$ e as assíntotas são

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

Logo, a hipérbole tem vértices em $(0, \pm 8)$, portanto a equação da hipérbole é

$$y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{8}{b}x = \pm \frac{4}{3}x$$

Logo, $b = 6$. Assim, a hipérbole tem a equação

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

■ CÔNICAS TRANSLADADAS

A equação de uma cônica que é transladada para o ponto (h, k) em um sistema de coordenadas cartesianas é $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ para uma circunferência, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 4p(x-h)$ para uma parábola que abre para a direita, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 4p(y-k)$ para uma parábola que abre para cima, $(x-h)^2 - (y-k)^2 = 1$ para uma hipérbole que abre para a esquerda e para a direita, e $(y-k)^2 - (x-h)^2 = 1$ para uma hipérbole que abre para cima e para baixo.

Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo x

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{[Aberta para a direita]} \quad 12$$

$$(y - k)^2 = -4p(x - h) \quad \text{[Aberta para a esquerda]} \quad 13$$

Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo y

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{[Aberta para cima]} \quad 14$$

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \quad \text{[Aberta para baixo]} \quad 15$$

Elipse com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo x

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad [b \leq a] \quad 1$$

Elipse com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo y

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad [b \leq a] \quad (17)$$

Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo x

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (18)$$

Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

► **Exemplo 7** Determine uma equação da parábola que tem seu vértice em $(1, 2)$ e o foco em $(4, 2)$.

Solução Como o foco e o vértice estão numa reta horizontal e como o foco está à direita do vértice, a parábola abre para a direita e sua equação é da forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Como o vértice e o foco estão a uma distância de 3 unidades, temos $p = 3$, e como o vértice é $(h, k) = (1, 2)$, obtemos

$$(y - 2)^2 = 12(x - 1) \quad \blacktriangleleft$$

Às vezes, as equações das cônicas transladadas ocorrem numa forma não simplificada; nesse caso, enfrentamos o problema de identificar o gráfico de uma equação quadrática em x e y :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (20)$$

O procedimento básico para determinar a natureza de tal gráfico é completar os quadrados dos termos quadráticos e tentar igualar a equação resultante com uma das formas das cônicas transladadas.

► **Exemplo 8** Determine o gráfico da equação

$$y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$$

Solução A equação envolve termos quadráticos em y mas nenhum em x , portanto primeiro colocamos todos os termos de y num mesmo lado:

$$y^2 - 6y = 8x + 23$$

A seguir, completamos o quadrado nos termos em y somando 9 em cada lado:

$$(y - 3)^2 = 8x + 32$$

Finalmente, fatorando o coeficiente do termo em x , obtemos

$$(y - 3)^2 = 8(x + 4)$$

Essa equação está na forma (12) com $h = -4$, $k = 3$ e $p = 2$; assim, o gráfico é uma parábola com vértice $(-4, 3)$ aberta para a direita. Uma vez que $p = 2$, o foco está a 2 unidades à direita do vértice, o que o localiza no ponto $(-2, 3)$; e a diretriz está a 2 unidades à esquerda do vértice, o que significa que sua equação é $x = -6$. A parábola está mostrada na Figura 11.4.27. ◀

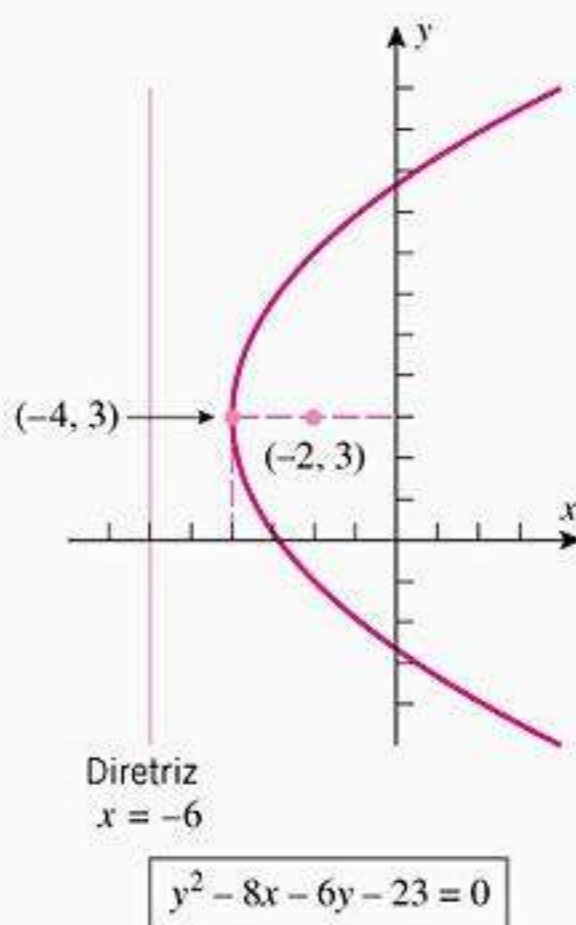


Figura 11.4.7

► **Exemplo 9** Descreva o gráfico da equação

$$16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$$

Solução Essa equação envolve termos quadráticos em x e y , portanto agrupamos os termos com x e os termos com y em um lado e a constante no outro:

$$(16x^2 - 64x) + (9y^2 - 54y) = -1$$

Em seguida, fatoramos os coeficientes de x^2 e y^2 e completamos os quadrados:

$$16(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -1 + 64 + 81$$

ou

$$16(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 144$$

Finalmente, dividindo por 144, introduzimos um 1 no lado direito:

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

Isso é uma equação da forma (17), com $h = 2$, $k = 3$, $a^2 = 16$, e $b^2 = 9$. Assim, o gráfico da equação é uma elipse com centro $(2, 3)$ e o eixo maior paralelo ao eixo y . Como $a = 4$, o eixo maior estende-se a 4 unidades acima e 4 unidades abaixo do centro. Desse modo, os extremos são $(2, 7)$ e $(2, -1)$ (Figura 11.4.28). Como $b = 3$, o eixo menor estende-se a 3 unidades à esquerda e 3 unidades à direita do centro, de modo que seus extremos são $(-1, 3)$ e $(5, 3)$. Como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

os focos situam-se a $\sqrt{7}$ unidades acima e abaixo do centro, localizando-se nos pontos $(2, 3 + \sqrt{7})$ e $(2, 3 - \sqrt{7})$. ◀

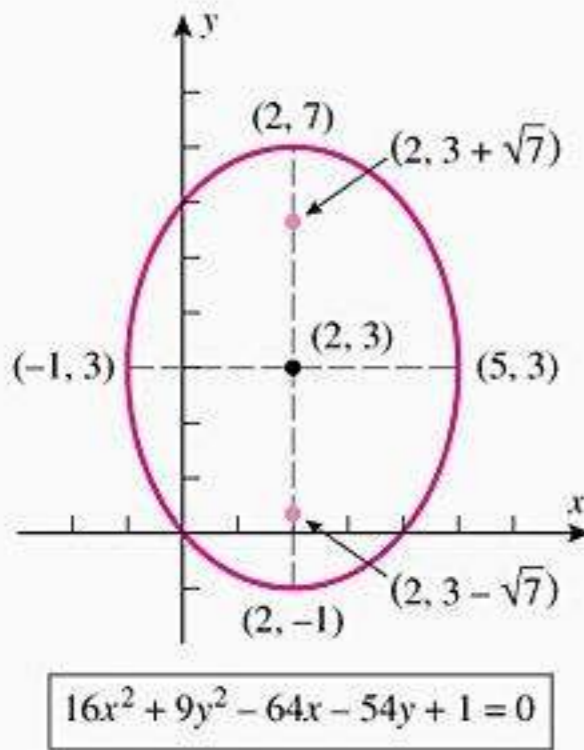


Figura 11.4.28

► **Exemplo 10** Descreva o gráfico da equação

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 21 = 0$$

Solução Essa equação envolve termos quadráticos em x e y , portanto agrupamos os termos com x e os termos com y em um lado e a constante no outro:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 21$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que, completando o quadrado, esta equação pode ser escrita como

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 4)^2}{9} = 1 \tag{21}$$

Essa é uma equação da forma (18) com $h = 2$, $k = 4$, $a^2 = 9$ e $b^2 = 9$. Assim, a equação representa uma hipérbole com centro $(2, 4)$ e eixo focal paralelo ao eixo x . Como $a = 3$, os vértices estão localizados a 3 unidades à esquerda e à direita do centro, ou seja, nos pontos $(-1, 4)$ e $(5, 4)$. Por (11), $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ logo os focos estão localizados a $3\sqrt{2}$ unidades à esquerda e à direita do centro, isto é, nos pontos $(2 - 3\sqrt{2}, 4)$ e $(2 + 3\sqrt{2}, 4)$.

As equações das assíntotas podem ser encontradas usando o truque de substituir 1 por 0 em (21), para obter

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 4)^2}{9} = 0$$

Isso pode ser escrito como $y - 4 = \pm(x - 2)$, donde resultam as assíntotas

$$y = x + 2 \quad \text{e} \quad y = -x + 6$$

Com a ajuda de uma caixa estendida $a = 3$ unidades à esquerda e à direita do centro e $b = 3$ unidades acima e abaixo do centro, obtemos o esboço na Figura 11.4.29. ◀

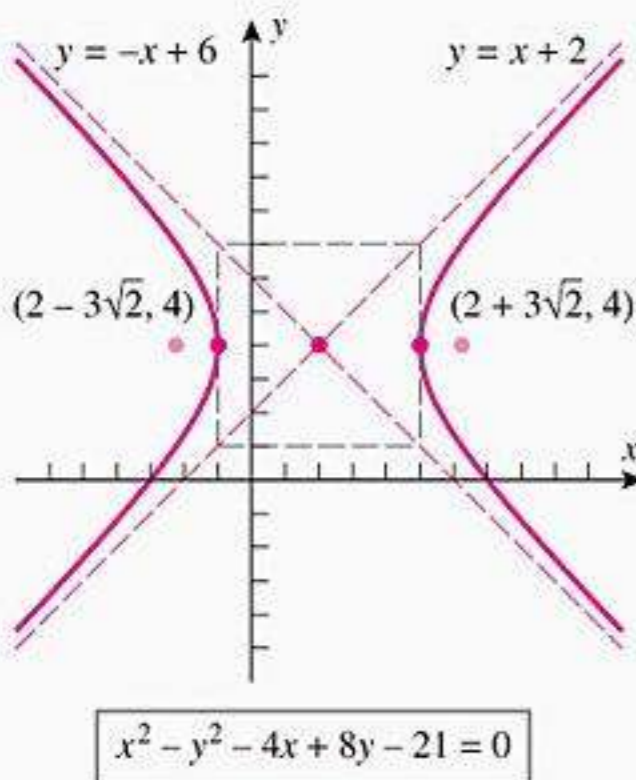


Figura 11.4.29

■ PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

As parábolas, elipses e hipérbolas têm certas propriedades de reflexão que as fazem extremamente importantes em várias aplicações. Nos exercícios, solicitamos ao leitor que prove os seguintes resultados.

11.4.4 TEOREMA (Propriedade de Reflexão da Parábola) A reta tangente em um ponto P da parábola faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco (Figura 11.4.30a).

11.4.5 TEOREMA (Propriedade de Reflexão da Elipse) Uma reta tangente a uma elipse em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos (Figura 11.4.30b).

11.4.6 TEOREMA (Propriedade de Reflexão da Hipérbole) Uma reta tangente à hipérbole em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos. (Figura 11.4.30c).

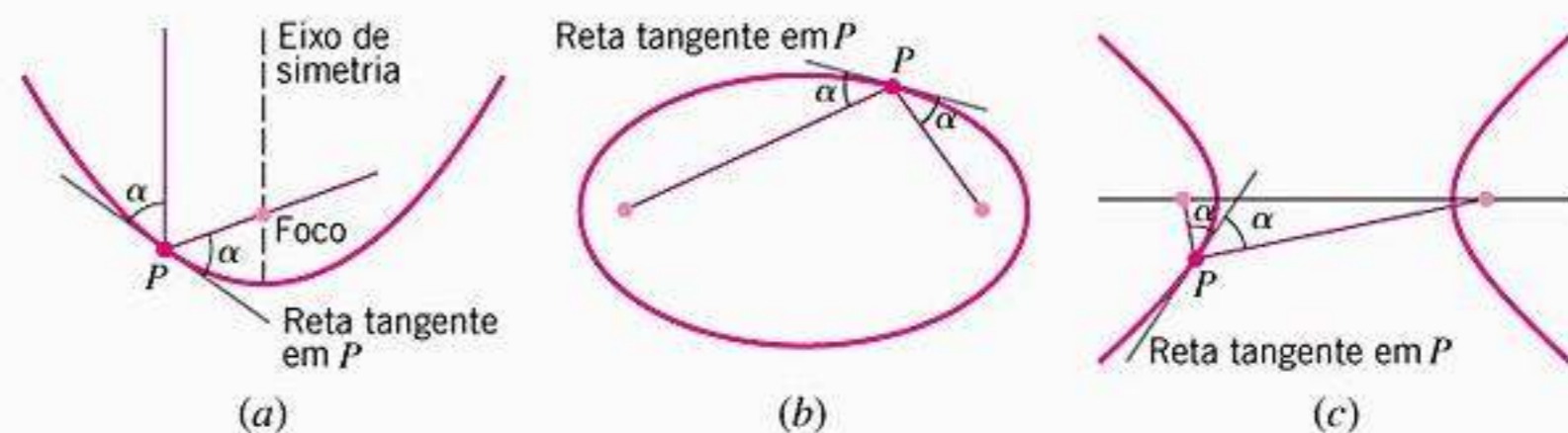


Figura 11.4.30

■ APLICAÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS



Sinais incidentes são refletidos pela antena parabólica para o receptor no foco.

O princípio de Fermat na Óptica implica que a luz se reflete numa superfície num ângulo igual ao ângulo de incidência (ver Exercício 63 na Seção 5.5 do Volume 1). Em particular, se uma superfície refletora for gerada pela revolução de uma parábola em torno de seu eixo de simetria, então segue do Teorema 11.4.4 que todos raios de luz entrando paralelamente ao eixo x serão refletidos no foco (Figura 11.4.31a); reciprocamente, se uma fonte de luz estiver localizada no foco, então os raios refletidos serão paralelos ao eixo (Figura 11.4.31b). Esse princípio é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz aproximadamente paralelos de estrelas e planetas de um espelho parabólico para uma lente no foco; os refletores parabólicos de uma lanterna e os faróis de um carro utilizam este princípio para formar um feixe paralelo de raios de luz a partir de uma lâmpada localizada no foco. O mesmo princípio óptico é aplicado aos sinais de radares e ondas sonoras, o que explica a forma de muitas antenas.

Visitantes de várias salas do Capitólio dos Estados Unidos e da Catedral de São Paulo em Roma ficam muitas vezes atônitos com a “galeria de sussurros”, efeito segundo o qual duas pessoas em lados opostos da sala podem ouvir os sussurros um do outro muito nitidamente. Tais salas têm tetos com seções transversais elípticas e focos em comum. Assim, quando duas pessoas ficam nos focos, seus sussurros são refletidos diretamente de um para o outro pelo teto elíptico.

Os *sistemas de navegação hiperbólico* foram desenvolvidos na Segunda Guerra Mundial como ajuda na navegação dos navios e são baseados na definição de uma hipérbole. Com esses sistemas, o navio recebe sinais sincronizados de rádio a partir de dois transmissores à grande distância com suas posições conhecidas. O receptor eletrônico do navio mede a diferença nos tempos de recepção entre os sinais e usa essa diferença para calcular a diferença



Figura 11.4.32

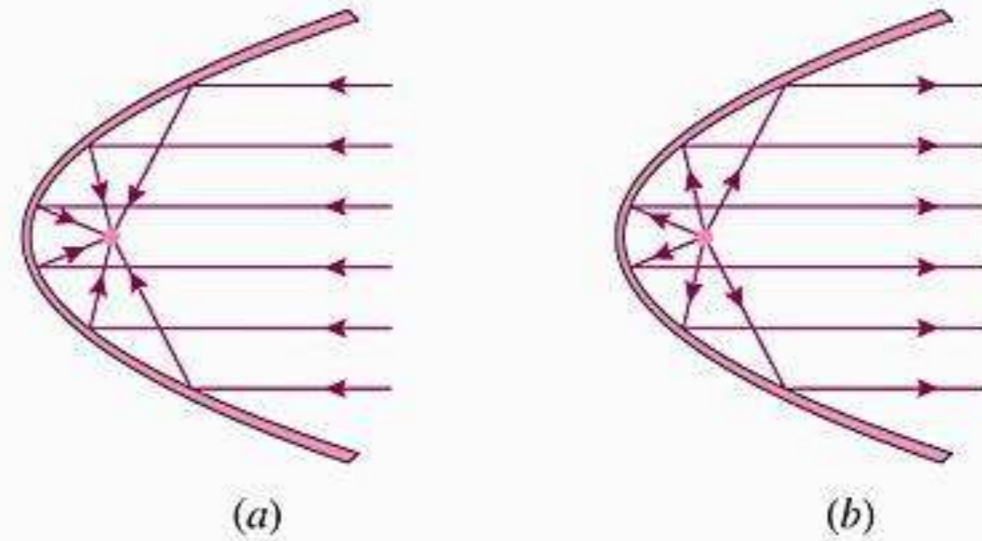


Figura 11.4.31

2a entre suas distâncias dos transmissores. Essa informação coloca o navio em algum ponto da hipérbole, cujos focos estão nos transmissores e cujos pontos têm 2a como a diferença entre suas distâncias dos focos. Repetindo-se o processo com um segundo conjunto de transmissores, a posição do navio pode ser aproximada como a interseção de duas hipérboles (Figura 11.4.32). (O moderno sistema de posicionamento global GPS é baseado no mesmo princípio.)

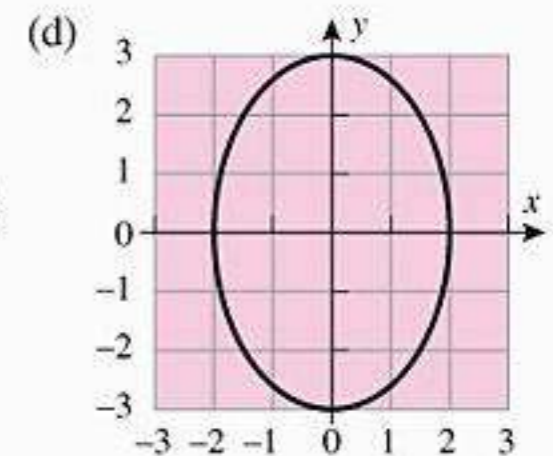
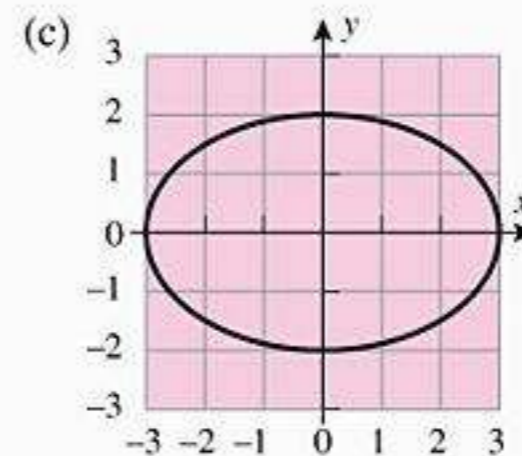
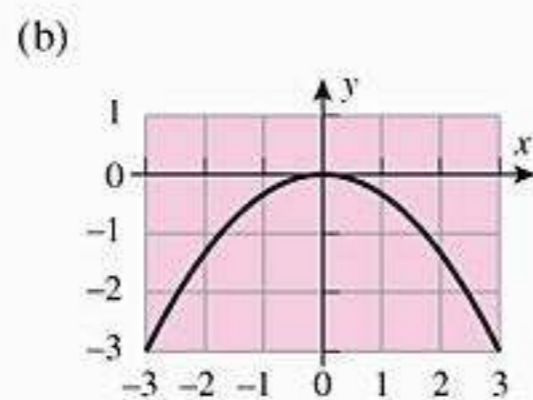
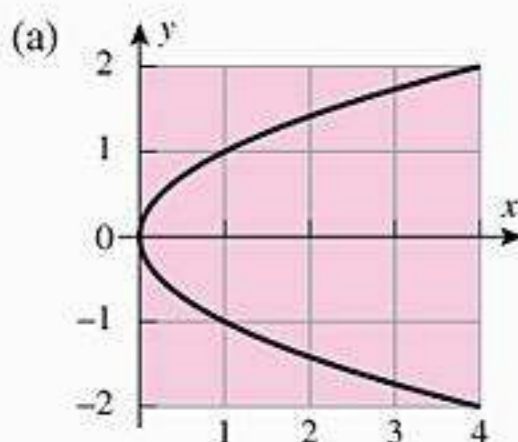
EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.4 (Ver página 765 para respostas.)

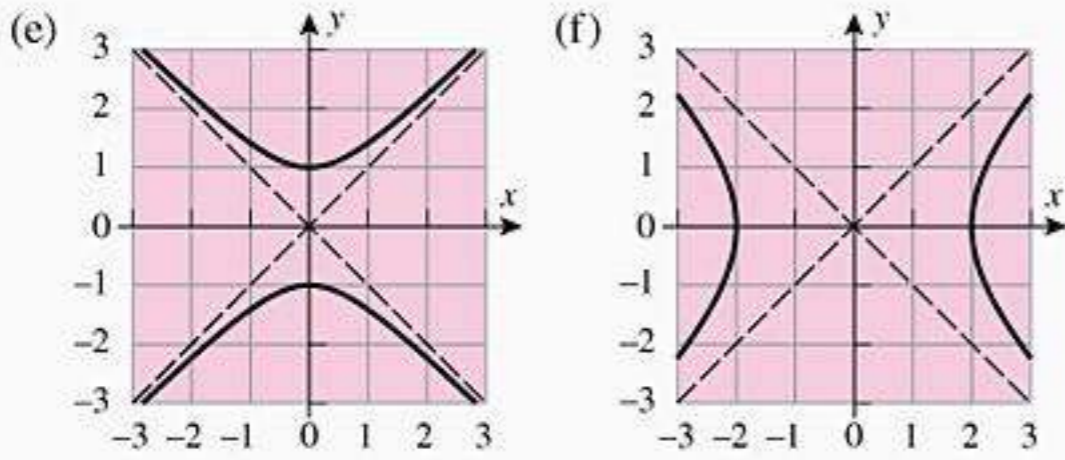
- Identifique a cônica.
 - O conjunto de pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva maior do que a distância entre esses pontos fixados é _____.
 - O conjunto de pontos do plano tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva menor do que a distância entre esses pontos fixados é _____.
 - O conjunto de pontos do plano equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado fora dessa reta é _____.
- A equação da parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$ é _____.
 - A equação da parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$ é _____.
- Suponha que uma elipse tenha semi-eixo maior a e semi-eixo menor b . Então, para cada ponto da elipse, a soma das distâncias aos focos é igual a _____.
 - As duas equações padrão da elipse de semi-eixo maior a e semi-eixo menor b são _____ e _____.
- Suponha que uma hipérbole tenha semi-eixo focal a e semi-eixo conjugado b . Então, para cada ponto da hipérbole, a distância ao foco mais afastado menos a distância ao foco mais próximo é igual a _____.
 - As duas equações padrão da hipérbole de semi-eixo focal a e semi-eixo conjugado b são _____ e _____.
 - Suponha que uma hipérbole em posição padrão tenha semi-eixo focal a , semi-eixo conjugado b e focos $(\pm c, 0)$. Então c pode ser obtido a partir de a e b pela equação $c =$ _____. As equações das assíntotas dessa hipérbole são $y = \pm$ _____.

EXERCÍCIOS 11.4 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Nas partes (a) – (f), determine a equação da cônica.





2. (a) Determine o foco e a diretriz de cada parábola do Exercício 1.
 (b) Determine os focos das elipses do Exercício 1.
 (c) Determine os focos e as equações das assíntotas das hipérbolas do Exercício 1.

3-8 Esboce a parábola e indique o foco, o vértice e a diretriz.

3. (a) $y^2 = 4x$ (b) $x^2 = -8y$
 4. (a) $y^2 = -10x$ (b) $x^2 = 4y$
 5. (a) $(y - 3)^2 = 6(x - 2)$ (b) $(x + 2)^2 = -(y + 2)$
 6. (a) $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$ (b) $(x - 1)^2 = 2(y - \frac{1}{2})$
 7. (a) $x^2 - 4x + 2y = 1$ (b) $x = y^2 - 4y + 2$
 8. (a) $y^2 - 6y - 2x + 1 = 0$ (b) $y = 4x^2 + 8x + 5$

9-14 Esboce a elipse e indique os focos, os vértices e os extremos do eixo menor.

9. (a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (b) $9x^2 + y^2 = 9$
 10. (a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ (b) $4x^2 + y^2 = 36$
 11. (a) $16(x - 1)^2 + 9(y - 3)^2 = 144$
 (b) $9(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 36$
 12. (a) $(x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 16$
 (b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}(y + 2)^2 - 1 = 0$
 13. (a) $x^2 + 9y^2 + 2x - 18y + 1 = 0$
 (b) $4x^2 + y^2 + 8x - 10y = -13$
 14. (a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$
 (b) $5x^2 + 9y^2 + 20x - 54y = -56$

15-20 Esboce a hipérbole e indique os vértices, os focos e as assíntotas.

15. (a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (b) $9y^2 - x^2 = 36$
 16. (a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$ (b) $16x^2 - 25y^2 = 400$
 17. (a) $\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$
 (b) $4(y - 3)^2 - 9(x - 2)^2 = 36$

18. (a) $\frac{(y + 4)^2}{3} - \frac{(x - 2)^2}{5} = 1$
 (b) $16(x + 1)^2 - 8(y - 3)^2 = 16$
 19. (a) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
 (b) $16x^2 - y^2 - 32x - 6y = 57$
 20. (a) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 54y - 29 = 0$
 (b) $4y^2 - x^2 - 40y - 4x = -60$

21-26 Encontre uma equação para a parábola que satisfaça as condições dadas.

21. (a) Vértice (0, 0); foco (3, 0).
 (b) Vértice (0, 0); diretriz $x = 7$.
 22. (a) Vértice (0, 0); foco (0, -3).
 (b) Vértice (0, 0); diretriz $y = \frac{1}{4}$.
 23. (a) Foco (0, -3); diretriz $y = 3$.
 (b) Vértice (1, 1); diretriz $y = -2$.
 24. (a) Foco (6, 0); diretriz $x = -6$.
 (b) Foco (-1, 4); diretriz $x = 5$.
 25. Eixo $y = 0$; passando pelos pontos (3, 2) e (2, $-\sqrt{2}$).
 26. Vértice (5, -3); eixo paralelo ao eixo y ; passando por (9, 5).

27-32 Encontre uma equação para a elipse que satisfaça as condições dadas.

27. (a) Extremos do eixo maior ($\pm 3, 0$); extremos do eixo menor (0, ± 2).
 (b) Comprimento do eixo maior 26; focos ($\pm 5, 0$).
 28. (a) Extremidades do eixo maior (0, $\pm\sqrt{7}$); extremidades do eixo menor ($\pm 1, 0$).
 (b) Comprimento do eixo menor 8; focos (0, ± 3).
 29. (a) Focos ($\pm 1, 0$); $b = \sqrt{2}$
 (b) $c = 2\sqrt{3}$; $a = 4$; centro na origem; focos sobre um eixo coordenado (duas respostas).
 30. (a) Focos ($\pm 3, 0$); $a = 4$.
 (b) $b = 3$; $c = 4$; centro na origem; focos sobre um eixo coordenado (duas respostas).
 31. (a) Extremidades do eixo maior (0, ± 6); passa por (-3, 2).
 (b) Focos (-1, 1) e (-1, 3); eixo menor de comprimento 4.
 32. (a) Centro em (0, 0); eixos maior e menor ao longo dos eixos coordenados; passa por (3, 2) e (1, 6).
 (b) Focos (2, 1) e (2, -3); eixo maior de comprimento 6.

33-38 Encontre uma equação para a hipérbole que satisfaça as condições dadas. (Em alguns casos, pode haver mais do que uma hipérbole.)

33. (a) Vértices ($\pm 2, 0$); focos ($\pm 3, 0$).
 (b) Vértices ($\pm 1, 0$); assíntotas $y = \pm 2x$.
 34. (a) Vértices (0, ± 4); focos (0, ± 5).
 (b) Vértices (0, ± 2); assíntotas $y = \pm \frac{2}{3}x$.
 35. (a) Assíntotas $y = \pm \frac{3}{2}x$; $b = 4$.
 (b) Focos (0, ± 5); assíntotas $y = \pm 2x$.

36. (a) Assíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$; $c = 5$.
 (b) Focos $(\pm 3, 0)$; assíntotas $y = \pm 2x$.
37. (a) Vértices $(0, 6)$ e $(6, 6)$; distância por 10 unidades entre os focos.
 (b) Assíntotas $y = x - 2$ e $y = -x + 4$; passa pela origem.
38. (a) Focos $(1, 8)$ e $(1, -12)$; vértices afastados por 4 unidades.
 (b) Vértices $(-3, -1)$ e $(5, -1)$; $b = 4$.
39. (a) Como ilustrado na figura abaixo, um arco parabólico cruza uma estrada de 40 pés de extensão. Qual é a altura do arco se uma seção do centro da estrada com 20 pés de extensão tem um vão livre de, no mínimo, 12 pés?
 (b) Qual seria a altura do centro se o arco fosse a metade superior de uma elipse?
40. (a) Determine uma equação para o arco parabólico de base b e altura h , mostrado na figura em anexo.
 (b) Determine a área sob o arco.

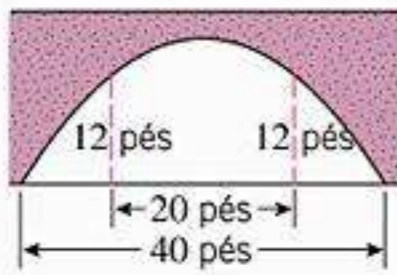


Figura Ex-39

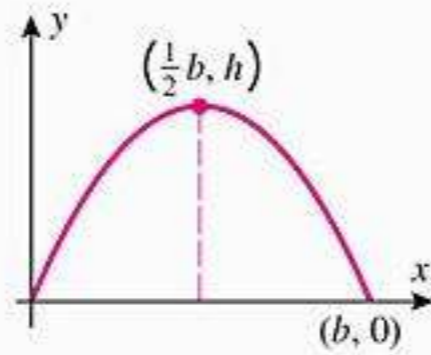


Figura Ex-40

41. Mostre que o vértice é o ponto da parábola mais próximo do foco. [Sugestão: introduza um sistema de coordenadas conveniente e use a Definição 11.4.1.]
42. Conforme ilustrado na figura abaixo, suponha que um cometa mova-se em uma órbita parabólica com o Sol em seu foco, e que a reta que passa pelo Sol e o cometa faça um ângulo de 60° com o eixo da parábola, quando o cometa está a 40 milhões de milhas do centro do Sol. Use o resultado do Exercício 41 para determinar quão próximo o cometa chegará do centro do Sol.
43. Para o refletor parabólico na figura abaixo, a que distância do vértice deve ser colocada a fonte de luz para produzir um feixe de raios paralelos?

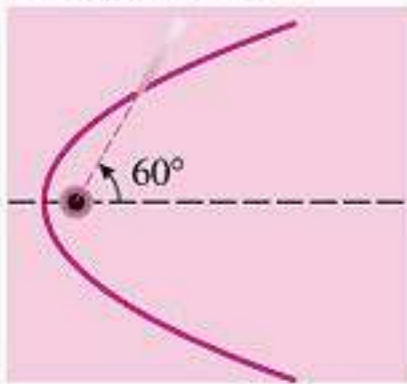


Figura Ex-42

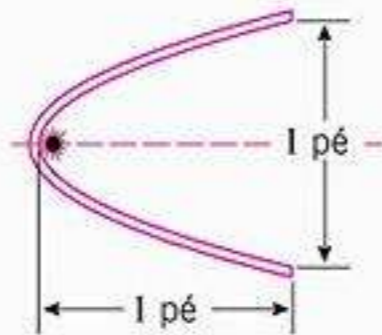
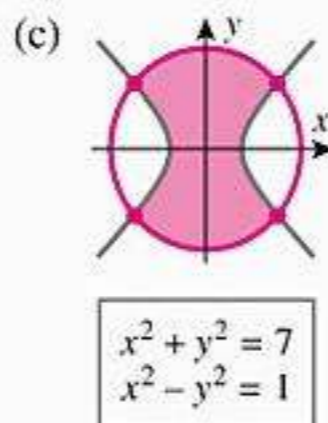
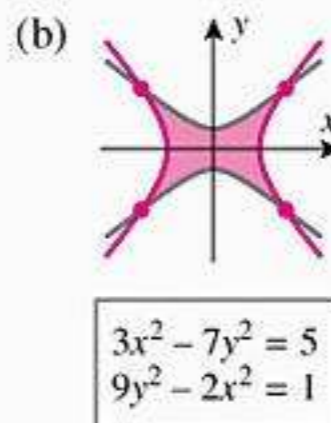
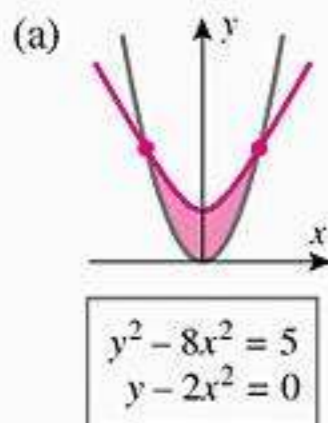


Figura Ex-40

44. Em cada parte, determine a área sombreada na figura.



45. (a) A figura abaixo mostra uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b . Expresse as coordenadas dos pontos P , Q e R em termos de t .
 (b) Qual é a diferença entre a interpretação geométrica do parâmetro t do círculo

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t$$

e da elipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t?$$

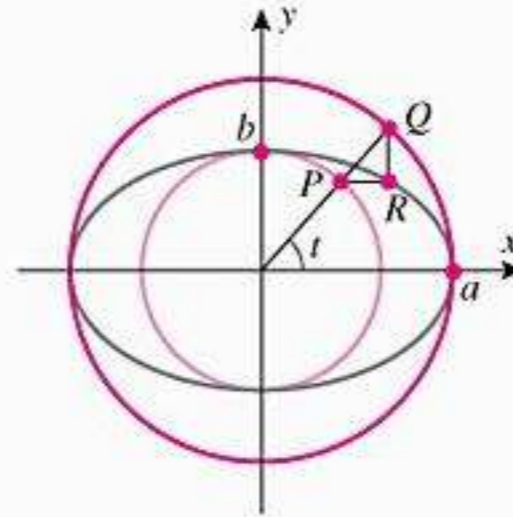


Figura Ex-45

46. (a) Mostre que os ramos direito e esquerdo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podem ser representados parametricamente como

$$\begin{aligned} x &= a \cosh t, & y &= b \sinh t & (-\infty < t < +\infty) \\ x &= -a \cosh t, & y &= b \sinh t & (-\infty < t < +\infty) \end{aligned}$$

- (b) Use um recurso gráfico para gerar ambos os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ sobre uma mesma tela.

47. (a) Mostre que os ramos direito e esquerdo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podem ser representados parametricamente por

$$\begin{aligned} x &= a \sec t, & y &= b \tan t & (-\pi/2 < t < \pi/2) \\ x &= -a \sec t, & y &= b \tan t & (-\pi/2 < t < \pi/2) \end{aligned}$$

- (b) Use um recurso gráfico para gerar ambos os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ na mesma tela.

48. Determine uma equação da parábola descrita por um ponto em movimento tal que a sua distância até o ponto $(2, 4)$ seja a mesma que sua distância ao eixo x .

49. Determine uma equação da elipse descrita por um ponto em movimento tal que a soma de suas distâncias a $(4, 1)$ e $(4, 5)$ seja 12.

50. Determine a equação da hipérbole descrita por um ponto em movimento tal que a diferença entre as distâncias a $(0, 0)$ e $(1, 1)$ seja 1.

51. Suponha que a base de um sólido seja elíptica com o eixo maior de comprimento 9 e eixo menor de comprimento 4. Determine o volume do sólido se as seções transversais perpendiculares ao eixo maior forem quadrados (ver figura a seguir).

52. Suponha que a base de um sólido seja elíptica com o eixo maior de comprimento 9 e o eixo menor de comprimento 4. Determine o volume do sólido se as seções transversais perpendiculares ao eixo menor forem triângulos equiláteros (ver figura a seguir).



Figura Ex-51



Figura Ex-52

53. Mostre que uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b tem área $A = \pi ab$.
54. (a) Mostre que o elipsóide obtido girando uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b em torno do eixo maior tem volume $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.
- (b) Mostre que o elipsóide obtido girando uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b em torno do eixo menor tem volume $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.
55. Mostre que o elipsóide obtido girando uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b em torno do eixo maior tem área de superfície

$$S = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} \arcsen \frac{c}{a} \right)$$

onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

56. Mostre que o elipsóide obtido girando uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b em torno do eixo menor tem área de superfície

$$S = 2\pi ab \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \ln \frac{a+c}{b} \right)$$

onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

ENFOCANDO CONCEITOS

57. Suponha que queiramos desenhar uma elipse com certos valores dados para os comprimentos dos eixos maior e menor, usando o método mostrado na Figura 11.4.3b. Supondo que os eixos estejam desenhados, explique como um compasso pode ser usado para localizar as posições para os pregos.
58. A figura a seguir mostra o método de Kepler para construir uma parábola. Um pedaço de barbante do tamanho da aresta esquerda do triângulo usado para o desenho é fixado ao vértice Q do triângulo, enquanto que o outro extremo é fixado em F . Um lápis estica o barbante em direção à base do triângulo, enquanto que o lado oposto a Q desliza ao longo da reta L horizontal abaixo de F . Mostre que o lápis traça um arco de parábola com foco F e diretriz L .

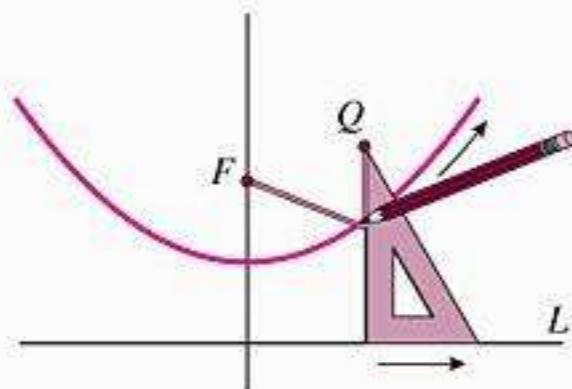


Figura Ex-58

59. A figura em anexo mostra um método para construir uma hipérbole. Um canto de uma régua é fixado a um ponto F_1 e a régua está livre para girar em torno daquele ponto. Um

pedaço de barbante cujo tamanho é menor do que o da régua é fixado ao ponto F_2 e ao canto livre Q da régua do mesmo lado que F_1 . Um lápis mantém o barbante preso ao lado superior da régua, enquanto a régua gira em torno do ponto F_1 . Mostre que o lápis traça um arco de hipérbole com os focos F_1 e F_2 .

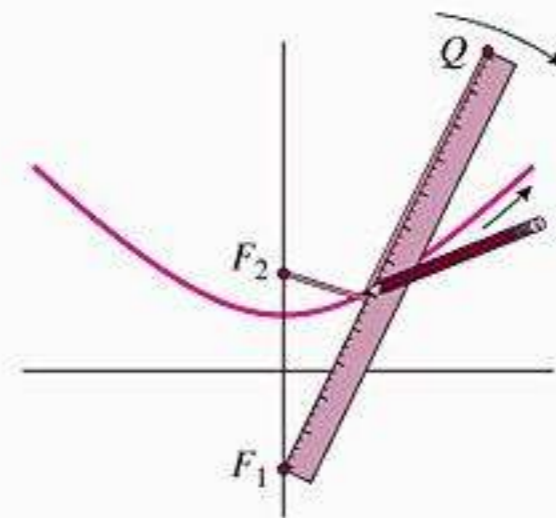


Figura Ex-59

60. Mostre que se um plano não é paralelo ao eixo de um cilindro circular reto, então a interseção do plano com o cilindro é uma elipse (possivelmente um círculo). [Sugestão: seja θ o ângulo mostrado na figura abaixo, introduza eixos coordenados como mostrado e expresse x' e y' em termos de x e y .]

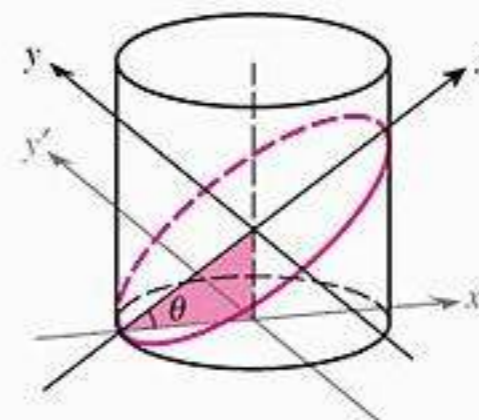


Figura Ex-60

61. Conforme ilustrado na figura abaixo, um carpinteiro precisa cortar um buraco elíptico em um telhado inclinado para inserir verticalmente um respiradouro circular com diâmetro D . O carpinteiro deseja esboçar o buraco no telhado, usando dois percevejos, um lápis e um barbante (conforme a Figura 11.4.3b). O ponto central da elipse é conhecido e o senso comum sugere que o eixo maior seja perpendicular à linha da calha do telhado. Ele precisa determinar o comprimento L do barbante e a distância T entre um percevejo e o ponto central. O plano do arquiteto mostra que a inclinação do telhado é p (inclinação = altura sobre a base: ver figura abaixo). Encontre T e L em termos de D e p .

Fonte: Esse exercício baseia-se num artigo de W. H. Enos que apareceu no *Mathematics Teacher*, Fevereiro de 1991, p.148.

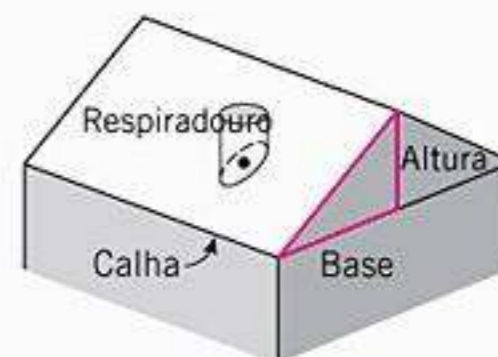


Figura Ex-61

62. Prove: A reta tangente à parábola $x^2 = 4py$ no ponto (x_0, y_0) é $x_0x = 2p(y + y_0)$.

63. Prove: A reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) tem a equação

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

64. Prove: A reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) tem a equação

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

65. Use os resultados dos Exercícios 63 e 64 para mostrar que se uma elipse e uma hipérbole têm os mesmos focos, então em cada ponto de interseção suas retas tangentes são perpendiculares.

66. Determine os dois valores de k tais que a reta $x + 2y = k$ seja tangente à elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. Determine os pontos de tangência.

67. Determine as coordenadas de todos os pontos da hipérbole

$$4x^2 - y^2 = 4$$

nos quais as duas retas que passam pelo ponto e os focos são perpendiculares.

68. Uma reta tangente à hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$ intersecta o eixo y no ponto $(0, 4)$. Determine o(s) ponto(s) de tangência.

ENFOCANDO CONCEITOS

69. Conforme ilustrado na figura abaixo, suponha que dois observadores estejam posicionados nos pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ no sistema de coordenadas xy . Suponha também que o som de uma explosão no plano xy seja ouvido pelo observador F_1 e que t , segundos depois seja ouvido pelo observador F_2 . Supondo que a velocidade do som é uma constante v , mostre que a explosão ocorreu em algum lugar da hipérbole

$$\frac{x^2}{v^2t^2/4} - \frac{y^2}{c^2 - (v^2t^2/4)} = 1$$

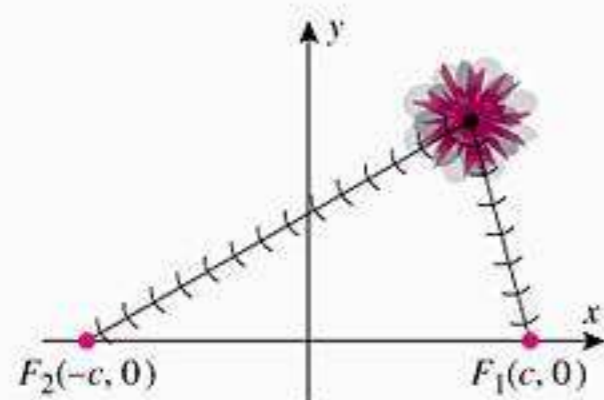


Figura Ex-69

70. Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que duas estações de transmissão estejam posicionadas a 100 km uma da outra nos pontos $F_1(50, 0)$ e $F_2(-50, 0)$ ao longo de uma praia reta, num sistema de coordenadas xy . Suponha também que um navio esteja navegando paralelo à praia, 200km mar adentro. Encontre a posição do navio se as

estações transmitem simultaneamente um pulso, mas o pulso de F_1 seja recebido pelo navio 100 microsegundos antes do que o pulso da estação F_2 . [Sugestão: use a fórmula obtida no Exercício 69, supondo que o pulso viaje à velocidade da luz (299.792.458 m/s).]

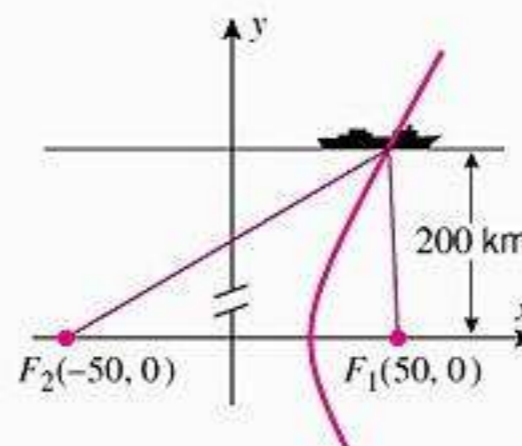


Figura Ex-70

71. Conforme ilustrado na figura abaixo, o tanque de um caminhão de óleo mede 18 pés de comprimento e tem uma seção transversal elíptica que tem 6 pés de extensão e 4 pés de altura.

(a) Mostre que o volume V do tanque do óleo (em pés cúbicos), quando estiver preenchido a uma profundidade de h pés, é

$$V = 27 \left[4 \arcsin \frac{h-2}{2} + (h-2)\sqrt{4h-h^2} + 2\pi \right]$$

(b) Use a capacidade numérica de encontrar raízes de um CAS para determinar a quantas polegadas da base da vareta que verifica o nível de óleo deveriam ser colocadas as marcas que indicam $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ da capacidade do tanque.

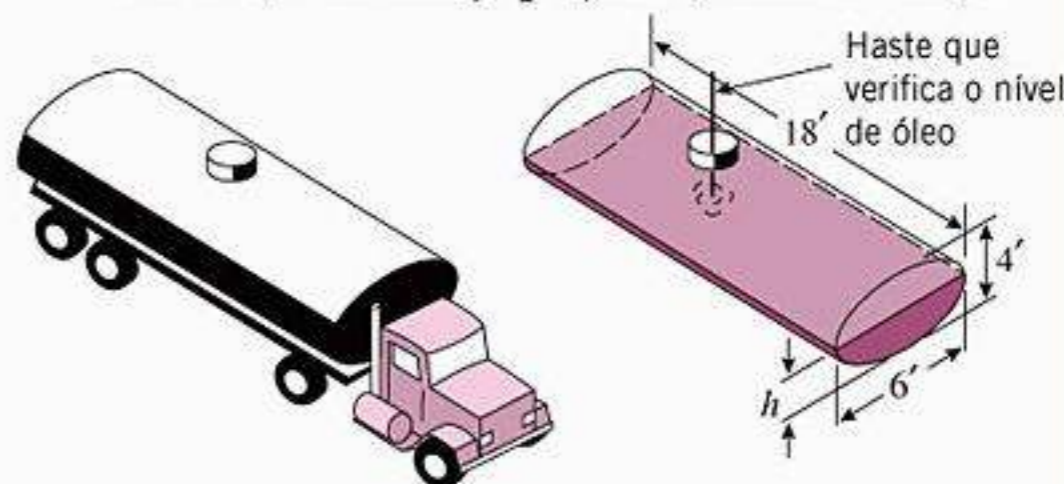


Figura Ex-71

72. Considere a equação de segundo grau.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A e C não são ambos nulos. Mostre completando o quadrado:

- (a) Se $AC > 0$, então a equação representa uma elipse, um círculo, um ponto, ou não possui gráfico.
- (b) Se $AC < 0$, então a equação representa uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.
- (c) Se $AC = 0$, então a equação representa uma parábola, um par de retas paralelas, ou não possui gráfico.

73. Em cada parte, use o resultado do Exercício 72 para fazer uma afirmação sobre o gráfico da equação e então examine sua conclusão completando o quadrado e identificando o gráfico.

- (a) $x^2 - 5y^2 - 2x - 10y - 9 = 0$
- (b) $x^2 - 3y^2 - 6y - 3 = 0$

- (c) $4x^2 + 8y^2 + 16x + 16y + 20 = 0$
- (d) $3x^2 + y^2 + 12x + 2y + 13 = 0$
- (e) $x^2 + 8x + 2y + 14 = 0$
- (f) $5x^2 + 40x + 2y + 94 = 0$

74. Deduza a equação $x^2 = 4py$ na Figura 11.4.6.
75. Deduza a equação $(x^2/b^2) + (y^2/a^2) = 1$ dada na Figura 11.4.14.
76. Deduza a equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ dada na Figura 11.4.22.
77. Prove o Teorema 11.4.4. [Sugestão: Escolha os eixos coordenados de tal modo que a parábola tenha a equação $x^2 = 4py$. Mostre que a reta tangente em $P(x_0, y_0)$ intersecta o eixo y no ponto $Q(0, -y_0)$ e que é isósceles o triângulo cujos três vértices estão em P, Q e o foco.]
78. Dadas duas retas que se cortam, seja L_2 a reta de maior ângulo de inclinação ϕ_2 e L_1 a reta de menor ângulo de inclinação ϕ_1 . Definimos o **ângulo θ entre L_1 e L_2** por $\theta = \phi_2 - \phi_1$. (Ver figura ao lado.)

(a) Prove: Se L_1 e L_2 não são perpendiculares, então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

onde L_1 e L_2 têm inclinações m_1 e m_2 .

- (b) Prove o Teorema 11.4.5. [Sugestão: Introduza coordenadas de tal modo que a elipse seja descrita pela equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e use a parte (a).]
- (c) Prove o Teorema 11.4.6. [Sugestão: Introduza coordenadas de tal modo que a hipérbole seja descrita pela equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e use a parte (a).]

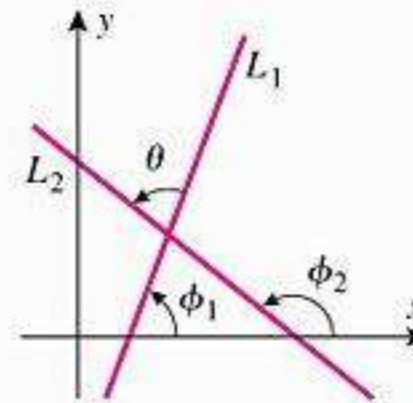


Figura Ex-78

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.4

1. (a) uma elipse (b) uma hipérbole (c) uma parábola 2. (a) $y^2 = 4px$ (b) $x^2 = 4py$
3. (a) $2a$ (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (c) $\sqrt{a^2 - b^2}$ 4. (a) $2a$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (c) $\sqrt{a^2 + b^2}$; $\frac{b}{a}x$

11.5 ROTAÇÃO DE EIXOS; EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Nas seções precedentes, obtivemos equações das seções cônicas com eixos paralelos aos eixos coordenados. Nesta seção, estudaremos as equações de cônicas que estão “inclinadas” em relação aos eixos coordenados. Isso nos levará a investigar rotações dos eixos coordenados.

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM x E y

Vimos nos Exemplos 8 a 10 da seção precedente que as equações da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

podem representar cônicas. A Equação (1) é um caso especial da equação mais geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

que é denominada **equação quadrática** em x e y se as constantes A, B e C não forem todas nulas. Geralmente, o gráfico de qualquer equação quadrática é uma seção cônica. Se $B = 0$, então (2) reduz a (1) e a seção cônica tem seu eixo ou eixos paralelos aos eixos coordenados. Contudo, se $B \neq 0$, então (2) contém o “termo misto” Bxy e o gráfico da seção cônica representada pela equação tem seu eixo ou eixos “inclinados” em relação aos eixos coordenados. Para ilustrar, consideremos a elipse com focos $F_1(1, 2)$ e $F_2(-1, -2)$ e tal que a soma das distâncias de cada ponto $P(x, y)$ da elipse aos focos seja de 6 unidades. Expressando essa condição como uma equação, obtemos (Figura 11.5.1)

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2} = 6$$

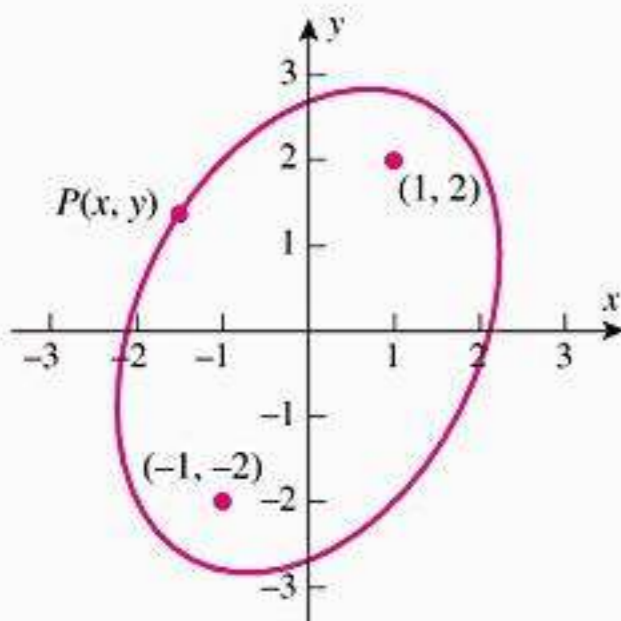


Figura 11.5.1

Elevando ambos lados ao quadrado, então isolando o radical remanescente e finalmente elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$$

como a equação da elipse. Essa equação está no formato (2) com $A = 8$, $B = -4$, $C = 5$, $D = 0$, $E = 0$ e $F = -36$.

■ ROTAÇÃO DE EIXOS

Para estudar cônicas que estão inclinadas em relação aos eixos coordenados, é muitas vezes útil girar os eixos coordenados de tal modo que os eixos coordenados girados sejam paralelos aos eixos da cônica. Antes de poder discutir os detalhes, precisamos desenvolver algumas idéias sobre a rotação de eixos coordenados.

Na Figura 11.5.2a, foi aplicada uma rotação de ângulo θ aos eixos de um sistema de coordenadas xy para produzir um novo sistema de coordenadas $x'y'$. Como podemos ver na figura, cada ponto P do plano tem coordenadas (x', y') além das coordenadas (x, y) . Para ver como essas coordenadas estão relacionadas, seja r a distância da origem comum ao ponto P e seja α o ângulo mostrado na Figura 11.5.2b. Segue que

$$x = r \cos(\theta + \alpha), \quad y = r \sin(\theta + \alpha) \quad (3)$$

e

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \sin \alpha \quad (4)$$

Usando identidades trigonométricas conhecidas, as relações (3) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ y &= r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

e substituindo (4) nessas equações, obtemos as seguintes relações, denominadas *equações de rotação*:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

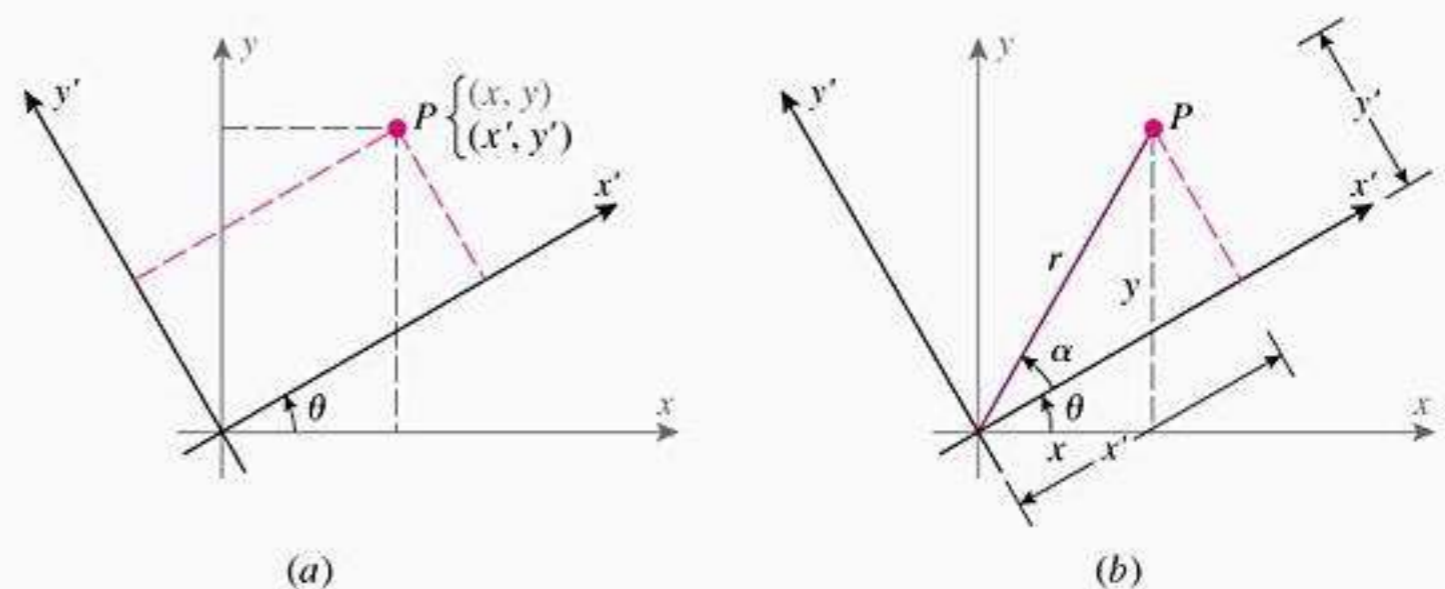


Figura 11.5.2

► **Exemplo 1** Suponha que tenha sido aplicada uma rotação de ângulo $\theta = 45^\circ$ aos eixos de um sistema de coordenadas xy para produzir um sistema de coordenadas $x'y'$. Encontre a equação da curva

$$x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$$

nas coordenadas $x'y'$.

Solução Substituindo $\sin \theta = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ e $\cos \theta = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ em (5), obtemos as equações de rotação

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

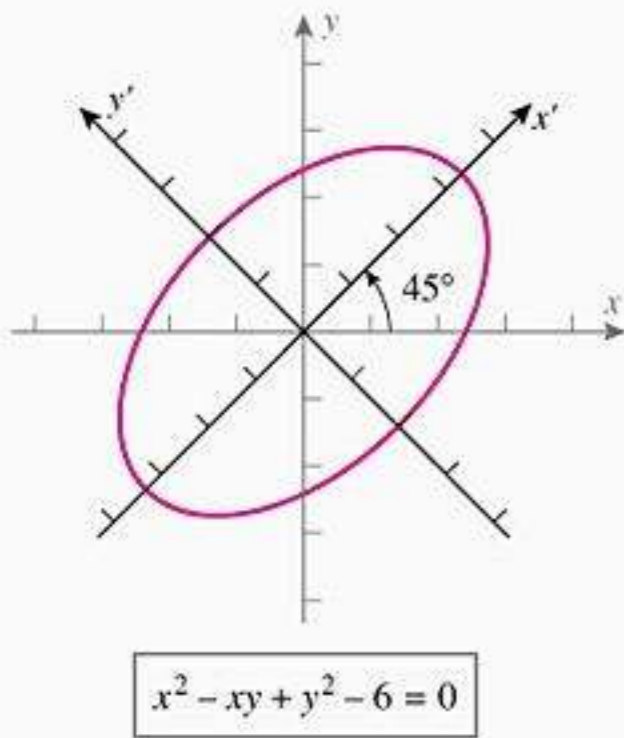


Figura 11.5.3

Substituindo essas relações na equação dada, obtemos

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0$$

ou

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2 - x'^2 + y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 6$$

ou

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse (Figura 11.5.3). ◀

Resolvendo as equações de rotação (5) para x' e y' , obtemos (Exercício 16):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \tag{6}$$

► **Exemplo 2** Encontre as novas coordenadas do ponto (2, 4) depois de ter sido aplicada uma rotação de ângulo $\theta = 30^\circ$ aos eixos coordenados.

Solução Usando as equações de rotação (6) com $x = 2$, $y = 4$, $\cos \theta = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\sin \theta = \sin 30^\circ = 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} x' &= 2(\sqrt{3}/2) + 4(1/2) = \sqrt{3} + 2 \\ y' &= -2(1/2) + 4(\sqrt{3}/2) = -1 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim, as novas coordenadas são $(\sqrt{3} + 2, -1 + 2\sqrt{3})$. ◀

■ ELIMINAÇÃO DO TERMO MISTO

No Exemplo 1 conseguimos identificar a curva $x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$ como uma elipse porque a rotação de eixos eliminou o termo xy e reduziu a equação a uma forma conhecida. Isso aconteceu porque os novos eixos $x'y'$ estavam alinhados com os eixos da elipse. O próximo teorema nos diz como determinar uma rotação apropriada de eixos para eliminar o termo misto de uma equação quadrática em x e y .

11.5.1 TEOREMA Se a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7}$$

for tal que $B \neq 0$ e se um sistema de coordenadas $x'y'$ tiver sido obtido pela rotação dos eixos xy por um ângulo satisfazendo

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B} \tag{8}$$

então no sistema de coordenadas $x'y'$ a Equação (7) terá a forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Sempre é possível satisfazer (8) com um ângulo θ no intervalo

$$0 < \theta < \pi/2$$

Aqui sempre escolheremos θ dessa maneira.

DEMONSTRAÇÃO Substituindo (5) em (7) e simplificando, obtemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta \\ B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta \\ C' &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta \\ E' &= -D \sin \theta + E \cos \theta \\ F' &= F \end{aligned} \tag{9}$$

(Confira.) Para completar a prova, devemos mostrar que $B' = 0$ se

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B} \tag{10}$$

Contudo, usando a fórmula trigonométrica do ângulo duplo, podemos reescrever B' na forma

$$B' = B \cos 2\theta - (A - C) \sin 2\theta$$

Assim, $B' = 0$ se θ satisfizer (10). ■

► **Exemplo 3** Identifique e esboce a curva $xy = 1$.

Solução Como um primeiro passo giramos os eixos coordenados para eliminar o termo misto. Comparando a equação dada com (7), temos

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0$$

Assim, o ângulo de rotação procurado deve satisfazer

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

Essa condição pode ser satisfeita tomando $2\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi/4 = 45^\circ$. Fazendo as substituições $\cos \theta = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ e $\sin \theta = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ em (5) obtemos

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Substituindo essas relações na equação $xy = 1$, obtemos

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole equilátera de vértices em $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$ no sistema de coordenadas $x'y'$ (Figura 11.5.4). ◀

Nos problemas em que é inconveniente resolver

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

para θ , podemos obter os valores de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ que são necessários para as equações de rotação calculando, primeiro $\cos 2\theta$ e, depois, calculando $\sin \theta$ e $\cos \theta$ a partir das identidades

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

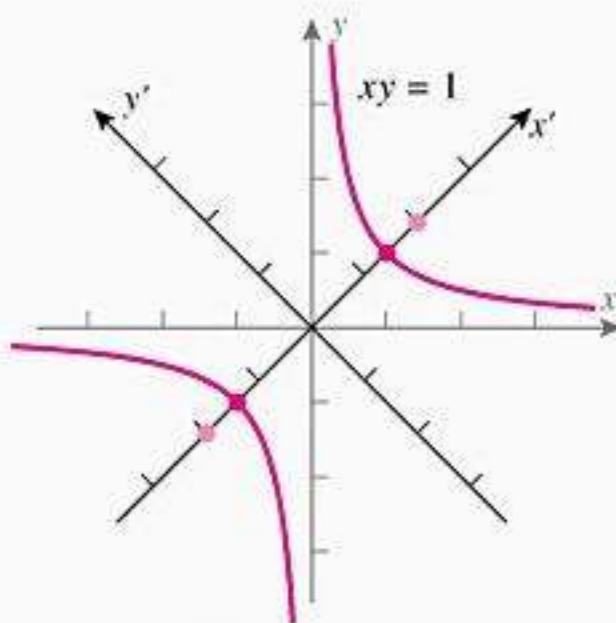


Figura 11.5.4

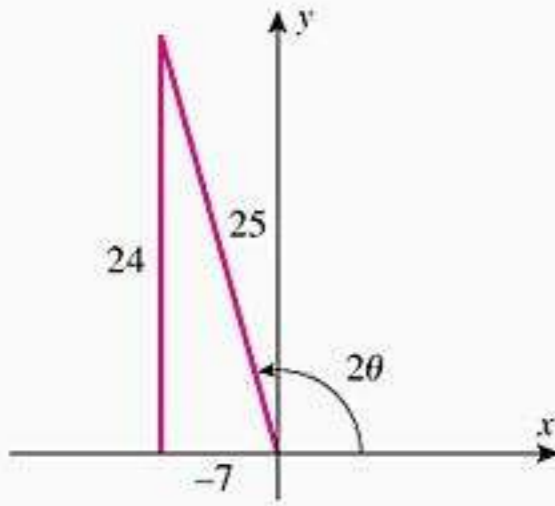


Figura 11.5.5

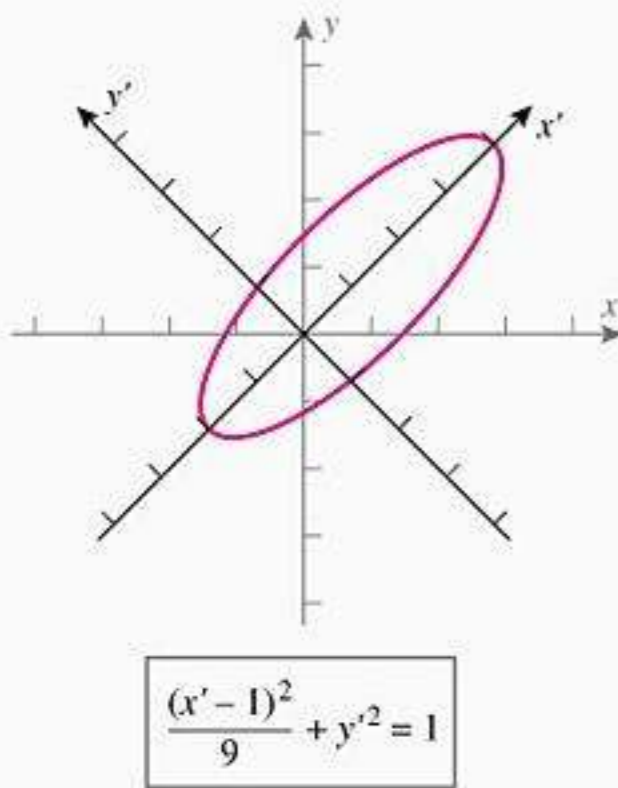


Figura 11.5.6

Existe um método para deduzir o tipo da curva representada por uma equação quadrática diretamente da equação sem rotação de eixos. Para uma discussão desse tópico, ver a seção sobre o *discriminante*, que aparece no Apêndice H disponível na web.

► **Exemplo 4** Identifique e esboce a curva

$$153x^2 - 192xy + 97y^2 - 30x - 40y - 200 = 0$$

Solução Temos $A = 153$, $B = -192$ e $C = 97$, portanto

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{56}{192} = -\frac{7}{24}$$

Como θ deve ser escolhido no intervalo $0 < \theta < \pi/2$, essa relação é representada pelo triângulo da Figura 11.5.5. A partir desse triângulo obtemos $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$, que implica

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\sen \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

Substituindo esses valores em (5) fornece as equações de rotação

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

cuja substituição na equação dada acarreta

$$\frac{153}{25}(3x' - 4y')^2 - \frac{192}{25}(3x' - 4y')(4x' + 3y') + \frac{97}{25}(4x' + 3y')^2 - \frac{30}{5}(3x' - 4y') - \frac{40}{5}(4x' + 3y') - 200 = 0$$

que simplifica para

$$25x'^2 + 225y'^2 - 50x' - 200 = 0$$

ou

$$x'^2 + 9y'^2 - 2x' - 8 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$\frac{(x' - 1)^2}{9} + y'^2 = 1$$

que é a equação de uma elipse com centro $(1, 0)$ e semi-eixos $a = 3$ e $b = 1$ no sistema de coordenadas $x'y'$ (Figura 11.5.6). ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.5** (Ver página 771 para respostas.)

- Suponha que um sistema de coordenadas xy tenha sido girado por θ radianos para produzir um novo sistema de coordenadas $x'y'$.
 - x e y podem ser obtidos a partir de x' , y' e θ usando as equações de rotação $x = \underline{\hspace{2cm}}$ e $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - x' e y' podem ser obtidos a partir de x , y e θ usando as equações $x' = \underline{\hspace{2cm}}$ e $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Se a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
 é tal que $B \neq 0$, então o termo xy dessa equação pode ser eliminado através de uma rotação de eixos por um ângulo θ satisfazendo $\cotg 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Em cada parte, determine um ângulo de rotação θ que elimine o termo misto.
 - $2x^2 + xy + 2y^2 + x - y = 0$
 - $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2x + y = 1$
 - $3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 + y = 0$
- Expresse $2x^2 + xy + 2y^2 = 1$ no sistema de coordenadas $x'y'$ obtido pela rotação do sistema de coordenadas xy por um ângulo de $\theta = \pi/4$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.5

1. (a) $x' \cos \theta - y' \sin \theta$; $x' \sin \theta + y' \cos \theta$ (b) $x \cos \theta + y \sin \theta$; $-x \sin \theta + y \cos \theta$ 2. $\frac{A - C}{B}$ 3. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$
 4. $5x'^2 + 3y'^2 = 2$

11.6 SEÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES

Adiante, neste livro, mostraremos que se um objeto movimenta-se em um campo gravitacional que atua na direção de um ponto fixo (tal como o centro do Sol), então o caminho daquele objeto deve ser uma seção cônica com o ponto fixo em um foco. Por exemplo, planetas no nosso sistema solar movem-se ao longo de um caminho elíptico com o Sol como foco e os cometas movem-se ao longo de um caminho parabólico, elíptico, ou hiperbólico com o Sol como um foco, dependendo das condições sob as quais se originaram. Para algumas aplicações deste tipo, é comumente desejável expressar as equações da seção cônica em coordenadas polares com o pólo como foco. Nesta seção, mostraremos como fazer isso.

■ CARACTERIZAÇÃO FOCO-DIRETRIZ DAS CÔNICAS

Para obter equações polares para as seções cônicas, precisaremos do teorema seguinte.

É um acidente histórico infeliz que a letra e seja usada para a base do logaritmo natural e para a excentricidade de seções cônicas. Entretanto, para fins práticos, a interpretação apropriada será comumente clara a partir do contexto no qual a letra for usada.

11.6.1 TEOREMA (Propriedades Foco-Diretriz das Cônicas) *Suponha que um ponto P mova-se no plano determinado por um ponto fixado (chamado de **foco**) e uma reta fixada (chamada de **diretriz**), sendo que o foco não está situado na diretriz. Se o ponto mover-se de tal maneira que sua distância ao foco dividida pela distância à diretriz for uma constante e (chamada de **excentricidade**), então a curva traçada pelo ponto é uma seção cônica. Além disso, a cônica é uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $0 < e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.*

Não daremos uma prova formal deste teorema; em vez disso, usaremos os casos específicos da Figura 11.6.1 para ilustrar as idéias básicas. Para a parábola, tomaremos a diretriz como sendo $x = -p$, como de costume; e para a elipse e a hipérbole, tomaremos a diretriz como sendo $x = a^2/c$. Queremos mostrar em todos os três casos que se P é um ponto sobre o gráfico, F é o foco, e D é a diretriz, então a razão PF/PD é alguma constante e , onde $e = 1$ para a parábola, $0 < e < 1$ para a elipse, e $e > 1$ para a hipérbole. Daremos os argumentos para a parábola e a elipse e deixaremos o argumento para a hipérbole como exercício.

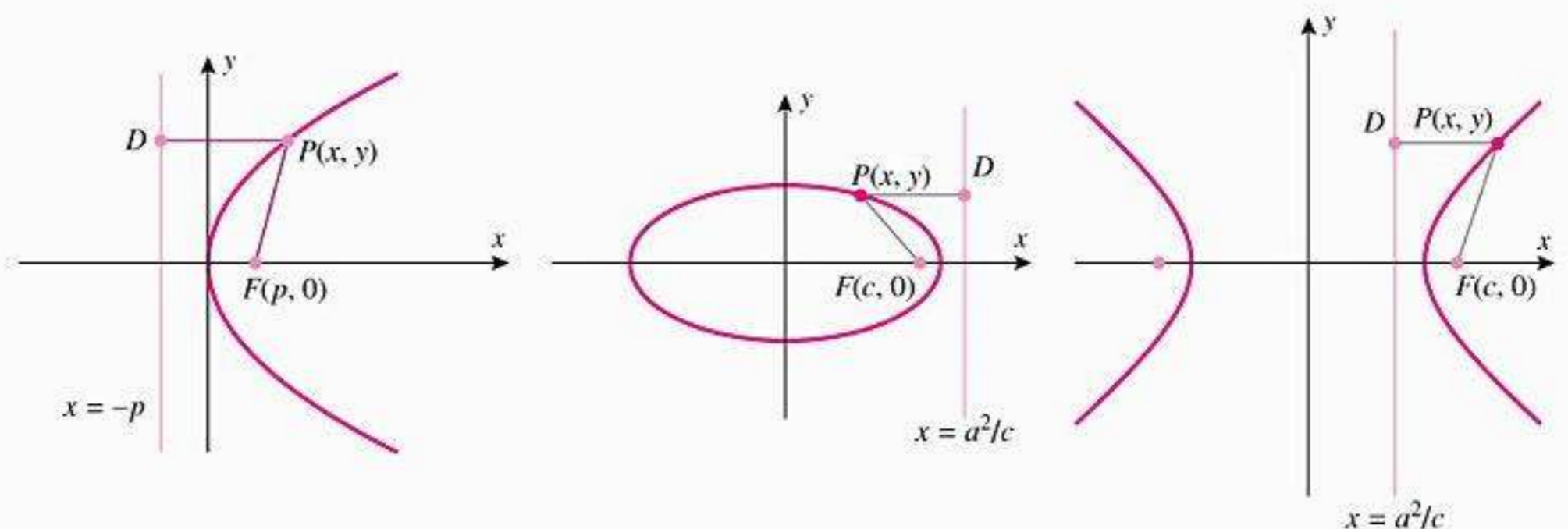


Figura 11.6.1

Para a parábola, a distância PF ao foco é igual à distância PD à diretriz e assim $PF/PD = 1$, que é o que queremos mostrar. Para a elipse, reescrevemos a Equação (8) da Seção 11.4 como

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x = \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - x \right)$$

Mas a expressão no lado esquerdo é a distância PF , e a expressão entre parênteses no lado direito é a distância PD , logo mostramos que

$$PF = \frac{c}{a}PD$$

Assim, PF/PD é constante, e a excentricidade é

$$e = \frac{c}{a} \tag{1}$$

Se excluirmos o caso degenerado em que $a = 0$ ou $c = 0$, então tem-se a partir da Fórmula (7) da Seção 11.4 que $0 < c < a$, logo $0 < e < 1$, que é o que precisamos mostrar.

Deixaremos como exercício mostrar que a excentricidade da hipérbole na Figura 11.6.1 é também dada pela Fórmula (1) mas, neste caso, tem-se a partir da Fórmula (11) da Seção 11.4 que $c > a$, logo $e > 1$.

■ EXCENTRICIDADE DE UMA ELIPSE COMO UMA MEDIDA DE ACHATAMENTO

A excentricidade de uma elipse pode ser vista como uma medida de seu achatamento: quando e tende a 0, as elipses tornam-se cada vez mais circulares, e quando e tende a 1, elas tornam-se cada vez mais achatadas (Figura 11.6.2). A Tabela 11.6.1 mostra a excentricidade orbital de vários objetos celestes. Note que muitos dos planetas têm, de fato, órbitas razoavelmente circulares.

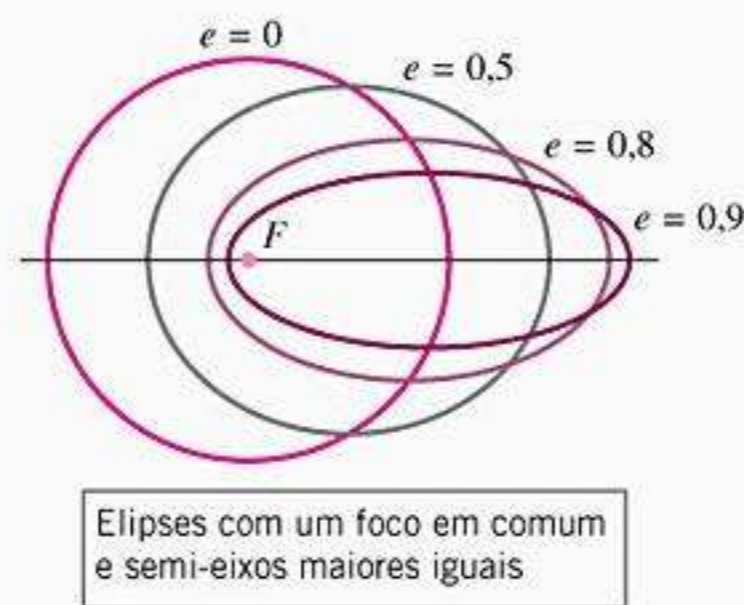


Figura 11.6.2

Tabela 11.6.1

Corpo Celeste	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Uranu	0,046
Netuno	0,010
Plutão	0,249
Cometa Halley	0,970

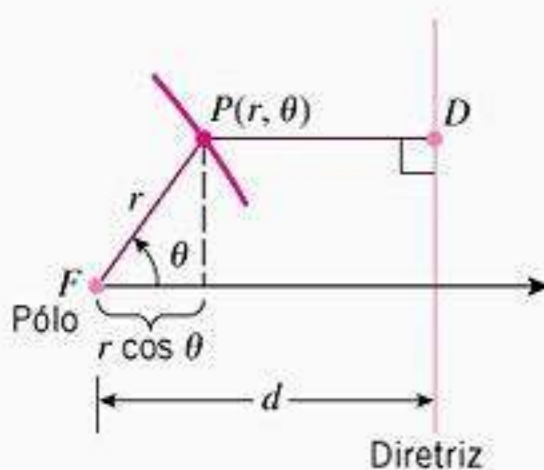


Figura 11.6.3

■ EQUAÇÕES POLARES DAS CÔNICAS

Nosso próximo objetivo é deduzir as equações polares para as seções cônicas a partir de suas caracterizações foco-diretriz. Vamos supor que o foco é o pólo e a diretriz é ou paralela ou perpendicular ao eixo polar. Se a diretriz for paralela ao eixo polar, então ela pode estar acima ou abaixo do pólo; e se a diretriz for perpendicular ao eixo polar, então ela pode estar à esquerda ou à direita do pólo. Assim, há quatro casos para considerar. Deduziremos a fórmula para o caso em que a diretriz é perpendicular ao eixo polar e está à direita do pólo.

Conforme ilustrado na Figura 11.6.3, vamos supor que a diretriz seja perpendicular ao eixo polar e esteja a d unidades à direita do pólo, sendo que a constante d é conhecida. Se P

Conforme mostrado na figura, seja r_0 a distância do foco ao vértice mais próximo e r_1 a distância ao vértice mais afastado. Assim,

$$r_0 = a - c \quad \text{e} \quad r_1 = a + c \tag{7}$$

do que seguem

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) \quad c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) \tag{8-9}$$

Além disso, tem-se também, por (7) que

$$r_0 r_1 = a^2 - c^2 = b^2$$

Assim,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{10}$$

Em palavras, a Fórmula (8) afirma que a é a *média aritmética* de r_0 e r_1 e a Fórmula (10) afirma que b é a *média geométrica* de r_0 e r_1 .

► **Exemplo 2** Esboce o gráfico de $r = \frac{6}{2 + \cos \theta}$ em coordenadas polares.

Solução Essa equação não corresponde a qualquer uma das formas do Teorema 11.6.2, pois todas elas requerem um termo constante 1 no denominador. Entretanto, podemos colocar a equação dentro de uma dessas formas dividindo o numerador e o denominador por 2 para obter

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}$$

Essa equação é idêntica a (3) com $d = 6$ e $e = \frac{1}{2}$, portanto o gráfico é uma elipse com a diretriz 6 unidades à direita do pólo. A distância r_0 do foco ao vértice mais próximo pode ser obtida fixando $\theta = 0$ nesta equação e a distância r_1 ao vértice mais afastado pode ser obtida fixando $\theta = \pi$. Disso resulta

$$r_0 = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos 0} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2, \quad r_1 = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos \pi} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Assim, a partir das Fórmulas (8),(10) e (9), respectivamente, obtemos

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) = 4, \quad b = \sqrt{r_0 r_1} = 2\sqrt{3}, \quad c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = 2$$

Assim, a elipse é parecida grosseiramente com a esboçada na Figura 11.6.6 ◀

Todas as informações importantes sobre uma hipérbole podem ser obtidas a partir dos valores de a , b e c na Figura 11.6.7. Da mesma forma que com a elipse, uma maneira de encontrar esses valores, a partir da equação polar de uma hipérbole, decorre da dedução das distâncias do foco aos vértices. Conforme mostrado na figura, seja r_0 a distância do foco ao vértice mais próximo e r_1 a distância ao vértice mais afastado. Assim,

$$r_0 = c - a \quad \text{e} \quad r_1 = c + a \tag{11}$$

do que seguem

$$a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) \quad c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) \tag{12-13}$$

Além disso, tem-se também, por (11), que

$$r_0 r_1 = c^2 - a^2 = b^2$$

do que segue

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{14}$$

Em palavras, a Fórmula (13) afirma que c é a *média aritmética* de r_0 e r_1 , e a Fórmula (14) afirma que b é a *média geométrica* de r_0 e r_1 .

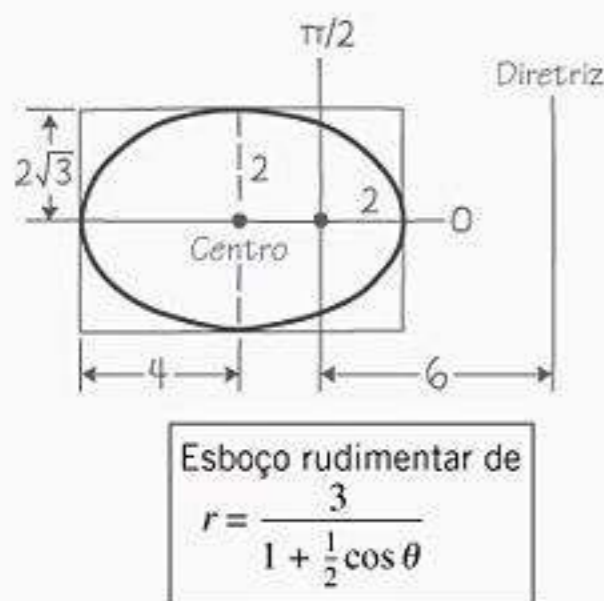


Figura 11.6.6

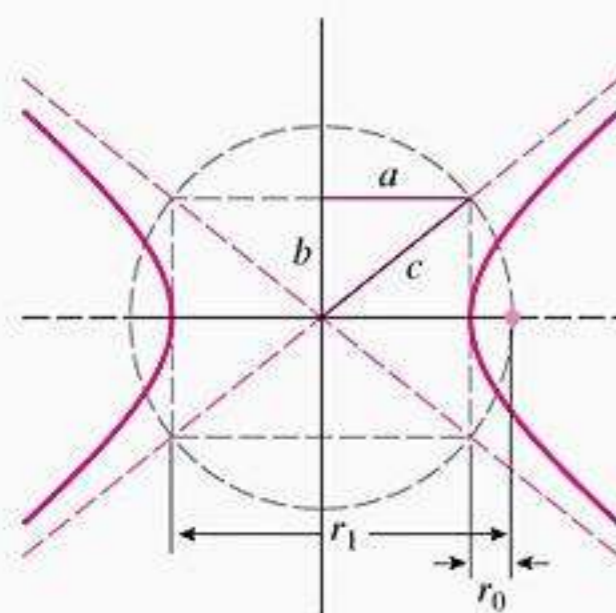


Figura 11.6.7

► **Exemplo 3** Esboce o gráfico de $r = \frac{2}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$ em coordenadas polares.

Solução Essa equação corresponde exatamente a (5) com $d = 1$ e $e = 2$. Assim, o gráfico é uma hipérbole com sua diretriz 1 unidade acima do pólo. No entanto, não é tão direto calcular os valores r_0 e r_1 , uma vez que as hipérboles em coordenadas polares são geradas de uma maneira estranha quando θ varia de 0 a 2π . Isso pode ser visto na Figura 11.6.8a, que é o gráfico da equação dada em coordenadas retangulares. Tem-se deste gráfico que o gráfico polar correspondente é gerado por partes (Figura 11.6.8b):

- Quando θ varia no intervalo $0 \leq \theta < 7\pi/6$, o valor de r é positivo e varia de 2 a $2/3$ e daí a $+\infty$, o que gera uma parte do ramo inferior.
- Quando θ varia no intervalo $7\pi/6 < \theta \leq 3\pi/2$, o valor de r é negativo e varia de $-\infty$ a -2 , o que gera a parte da direita do ramo superior.
- Quando θ varia no intervalo $3\pi/2 \leq \theta < 11\pi/6$, o valor de r é negativo e varia de -2 a $-\infty$, o que gera a parte da esquerda do ramo superior.
- Quando θ varia no intervalo $11\pi/6 < \theta \leq 2\pi$, o valor de r é positivo e varia de $+\infty$ a 2, o que completa a parte que falta à direita do ramo inferior.

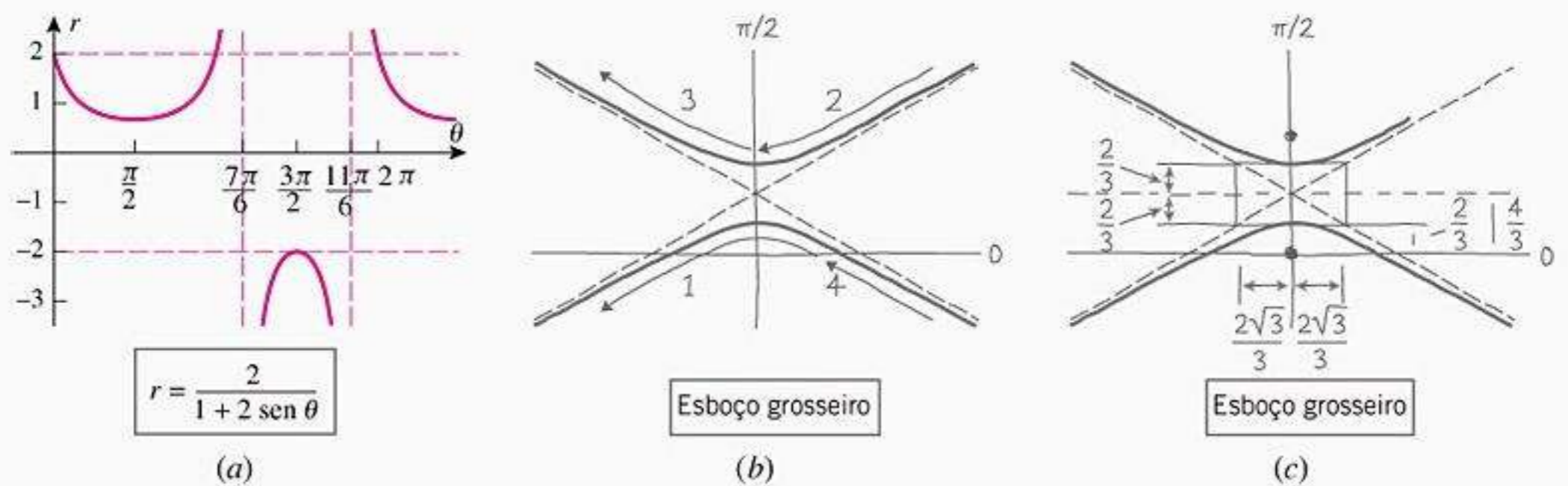


Figura 11.6.8

Está evidente, agora, que podemos obter r_0 fixando $\theta = \pi/2$ e r_1 fixando $\theta = 3\pi/2$. Lembrando que r_0 e r_1 são positivos, isso dá

$$r_0 = \frac{2}{1 + 2 \operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{2}{3}, \quad r_1 = \left| \frac{2}{1 + 2 \operatorname{sen}(3\pi/2)} \right| = \left| \frac{2}{-1} \right| = 2$$

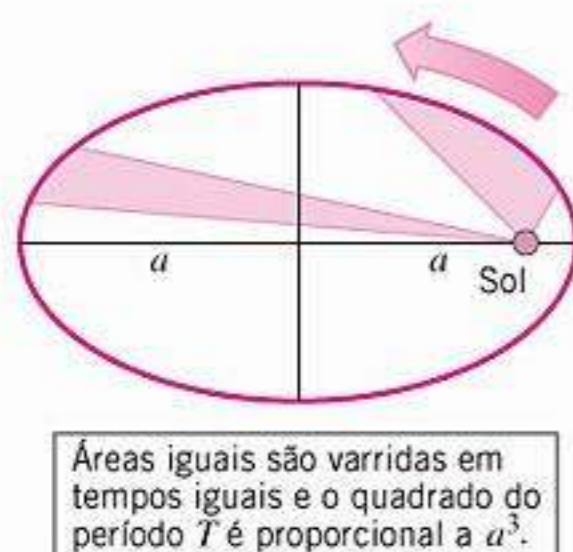
Assim, a partir das Fórmulas (12), (14), e (13), respectivamente, obtemos

$$a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = \frac{2}{3}, \quad b = \sqrt{r_0 r_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) = \frac{4}{3}$$

Assim, a hipérbole é parecida grosseiramente com a esboçada na Figura 11.6.8c. ◀

■ APLICAÇÕES EM ASTRONOMIA

Em 1609 Johannes Kepler publicou um livro conhecido como *Astronomia Nova* (ou algumas vezes, *Comentários sobre o Movimento do Planeta Marte*), no qual conseguiu destilar milhares de anos de astronomia observacional em três belas leis do movimento planetário (Figura 11.6.9).



Áreas iguais são varridas em tempos iguais e o quadrado do período T é proporcional a a^3 .

Figura 11.6.9

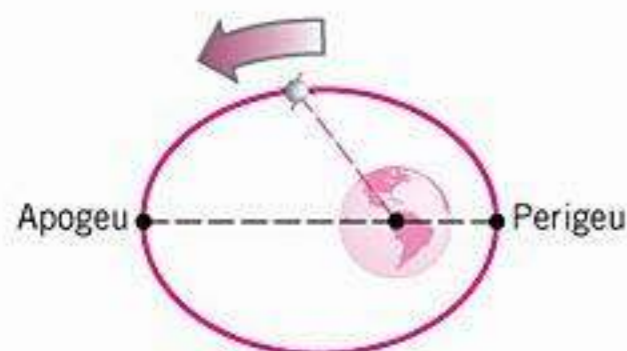


Figura 11.6.10

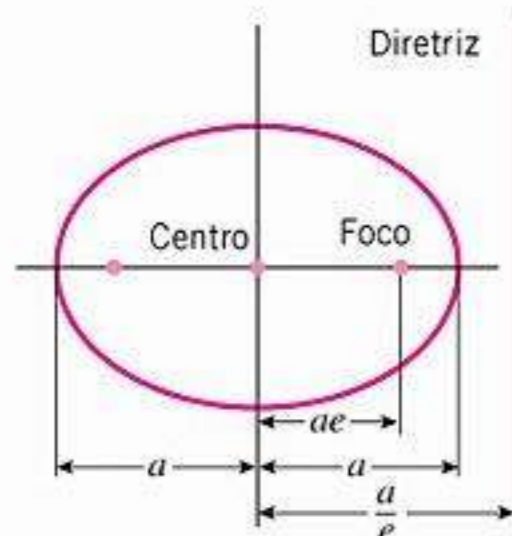


Figura 11.6.11

11.6.3 LEIS DE KEPLER

- Primeira lei (*Lei das Órbitas*) Cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um foco.
- Segunda lei (*Lei das Áreas*) A reta radial que sai do centro do Sol e vai ao centro de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
- Terceira lei (*Lei dos Períodos*) O quadrado do período de um planeta (o tempo em que o planeta completa uma órbita em torno do Sol) é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

As leis de Kepler, embora enunciadas para o movimento planetário em torno do Sol, aplicam-se a todos os corpos celestes que estão sujeitos a uma *única* força gravitacional central, tanto satélites artificiais sujeitos apenas à força gravitacional central da Terra quanto luas sujeitas apenas à força gravitacional de um planeta, por exemplo. Adiante no livro iremos derivar as leis de Kepler a partir de princípios básicos, mas, por ora, mostraremos como elas podem ser usadas em computações básicas na Astronomia.

Em uma órbita elíptica, o ponto mais próximo ao foco é chamado de *perigeu* e o ponto mais afastado de *apogeu* (Figura 11.6.10). As distâncias do foco ao perigeu e apogeu são chamadas de *distância do perigeu* e *distância do apogeu*, respectivamente. Para as órbitas ao redor do Sol, é comum usar o termo *periélio* e *afélio*, ao invés de perigeu e apogeu, e medir o tempo em anos da Terra e a distância em unidades astronômicas (UA), onde uma UA é o semi-eixo maior a da órbita da Terra (aproximadamente 150×10^6 km ou $92,9 \times 10^6$ milhas). Com esta escolha de unidades, a terceira lei de Kepler pode ser expressa como

$$T = a^{3/2} \quad (15)$$

As formas das órbitas elípticas são freqüentemente especificadas por uma dada excentricidade e e o semi-eixo maior a , logo é útil expressar as equações polares de uma elipse em termos dessas constantes. A Figura 11.6.11, que pode ser obtida a partir da elipse da Figura 11.6.1 e da



Johannes Kepler (1571-1630) Astrônomo e físico alemão. Kepler, cujo trabalho forneceu a nossa visão contemporânea do movimento planetário, levou uma vida fascinante, mas desastrosa. Seu pai, um alcoólotra, o fez trabalhar na taverna de sua família quando criança, e depois retirou-o da escola elementar e empregou-o como um trabalhador no campo, onde o rapaz contraiu varíola, o que aleijou permanentemente as suas mãos e prejudicou a sua visão. Anos mais tarde, a primeira mulher de Kepler e vários filhos morreram, sua mãe foi acusada de bruxaria, e ele, por ser protestante, foi freqüentemente perseguido pelas autoridades católicas. Ele empobreceu muitas vezes, ganhando a vida com dificuldade como astrólogo e predizendo o futuro. Relembrando a sua infância infeliz, Kepler descreveu seu pai como tendo “tendências criminosas” e “briguento” e sua mãe como “conversadora” e “mal-humorada”. Entretanto, foi a sua mãe quem deixou uma marca inesquecível em seus 6 anos de idade mostrando-lhe o cometa de 1577; e anos depois, preparou pessoalmente a defesa de sua mãe contra a acusação de bruxaria. Kepler conheceu o trabalho de Copérnico quando estudante na Universidade de Tübingen, onde

ele recebeu o grau de mestre em 1591. Continuou como estudante de Teologia, mas, por insistência das autoridades da Universidade, abandonou seus estudos clericais e concordou com uma posição como matemático e professor em Graz, na Áustria. Contudo, ele foi expulso da cidade quando ela passou a controle católico e, em 1600, ele finalmente mudou-se para Praga, onde tornou-se um assistente no observatório do famoso astrônomo dinamarquês Tycho Brahe. Brahe foi um brilhante e metucioso observador astronômico que acumulou os dados astronômicos mais precisos conhecidos em seu tempo; e quando Brahe morreu em 1601, Kepler herdou todo seu tesouro em dados. Depois de 8 anos de intenso trabalho, Kepler decifrou os princípios contidos nos dados e, em 1609, publicou seu trabalho monumental, *Astronomia Nova*, no qual enunciou suas duas primeiras leis do movimento planetário. Comentando sua descoberta da órbita elíptica, Kepler escreveu, “fiquei quase louco ao calcular esta questão. Não conseguia entender por que o planeta prefere ir sobre uma órbita elíptica (em vez de uma circular). Oh, fui ridículo!” Finalmente, ficou para Isaac Newton descobrir as leis da gravitação que explicaram a razão para as órbitas elípticas.

relação $c = ea$, implica que a distância d entre o foco e a diretriz é

$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ea = \frac{a(1 - e^2)}{e} \quad (16)$$

da qual tem-se que $ed = a(1 - e^2)$. Assim, dependendo da orientação da elipse, as fórmulas no Teorema 11.6.2 podem ser expressadas em termos de a e e como

$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \theta}$	$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \sin \theta}$
+: Diretriz à direita do pólo -: Diretriz à esquerda do pólo	+: Diretriz acima do pólo -: Diretriz abaixo do pólo

(17-18)

Além disso, é evidente da Figura 11.6.11 que as distâncias do foco aos vértices mais próximo e mais afastado podem ser expressas em termos de a e e como

$$r_0 = a - ea = a(1 - e) \quad \text{e} \quad r_1 = a + ea = a(1 + e) \quad (19-20)$$

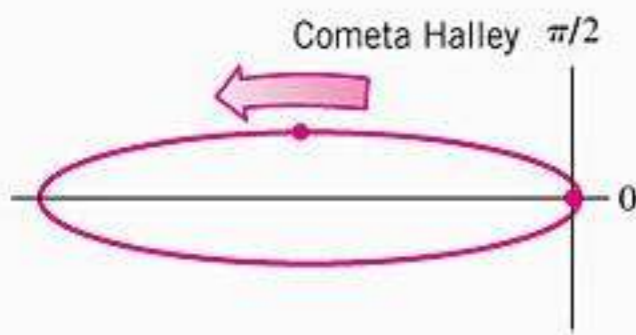


Figura 11.6.12

► **Exemplo 4** O cometa Halley (visto por último em 1986) tem uma excentricidade de 0,97 e um semi-eixo maior de $a = 18,1$ UA.

- Determine a equação de sua órbita no sistema de coordenadas polares mostrado na Figura 11.6.12.
- Determine o período de sua órbita.
- Determine as distâncias do periélio e do afélio.

Solução (a) A partir de (17), a equação polar da órbita tem a forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

Mas $a(1 - e^2) = 18,1 [1 - (0,97)^2] \approx 1,07$. Assim, a equação da órbita é

$$r = \frac{1,07}{1 + 0,97 \cos \theta}$$

Solução (b) A partir de (15), com $a = 18,1$, o período da órbita é

$$T = (18,1)^{3/2} \approx 77 \text{ anos}$$

Solução (c) Uma vez que as distâncias do periélio e do afélio são as distâncias para os vértices mais próximo e mais afastado, respectivamente, tem-se a partir de (19) e (20) que

$$\begin{aligned} r_0 &= a - ea = a(1 - e) = 18,1(1 - 0,97) \approx 0,543 \text{ AU} \\ r_1 &= a + ea = a(1 + e) = 18,1(1 + 0,97) \approx 35,7 \text{ AU} \end{aligned}$$

ou, como $1 \text{ UA} \approx 150 \times 10^6 \text{ km}$, as distâncias do periélio e do afélio em quilômetros são

$$\begin{aligned} r_0 &= 18,1(1 - 0,97)(150 \times 10^6) \approx 81.500.000 \text{ km} \\ r_1 &= 18,1(1 + 0,97)(150 \times 10^6) \approx 5.350.000.000 \text{ km} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



Cometa Halley fotografado no Peru em 21 de abril de 1910.



Figura 11.6.13

► **Exemplo 5** Um módulo lunar da missão Apollo orbita a Lua em órbita elíptica com excentricidade $e = 0,12$ e semi-eixo maior $a = 2015 \text{ km}$. Supondo que a Lua seja uma esfera de 1740 km de raio, determine a altura máxima e mínima do módulo acima da superfície lunar (Figura 11.6.13).

Solução Se denotarmos por r_0 e r_1 as distâncias mínima e máxima do centro da Lua, então as distâncias mínima e máxima da superfície da Lua serão

$$d_{\min} = r_0 - 1740$$

$$d_{\max} = r_1 - 1740$$

ou a partir das Fórmulas (19) e (20),

$$d_{\min} = r_0 - 1740 = a(1 - e) - 1740 = 2015(0,88) - 1740 = 33,2 \text{ km}$$

$$d_{\max} = r_1 - 1740 = a(1 + e) - 1740 = 2015(1,12) - 1740 = 516,8 \text{ km} \blacktriangleleft$$

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.6 (Ver página 780 para respostas.)

1. Em cada parte, dê o nome da cônica descrita.

(a) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto $(2, 3)$ é a metade da distância à reta $x + y = 1$ é _____.

(b) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto $(2, 3)$ é igual à distância à reta $x + y = 1$ é _____.

(a) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto $(2, 3)$ é o dobro da distância à reta $x + y = 1$ é _____.

2. Em cada parte: (i) Identifique o gráfico polar como uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole; (ii) diga se a diretriz está acima, abaixo, à esquerda ou à direita do pólo; e (iii) encontre a distância do pólo à diretriz.

(a) $r = \frac{1}{4 + \cos \theta}$

(b) $r = \frac{1}{1 - 4 \cos \theta}$

(c) $r = \frac{1}{4 + 4 \sin \theta}$

(d) $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$

3. Se a distância de um vértice de uma elipse ao foco mais próximo for r_0 e se a distância daquele vértice ao foco mais distante for r_1 , então o semi-eixo maior é $a =$ _____ e o semi-eixo menor é $b =$ _____.

4. Se a distância de um vértice de uma hipérbole ao foco mais próximo for r_0 e se a distância daquele vértice ao foco mais distante for r_1 , então o semi-eixo focal é $a =$ _____ e o semi-eixo conjugado é $b =$ _____.

EXERCÍCIOS 11.6 Recurso Gráfico

1-2 Encontre a excentricidade e a distância do pólo à diretriz e esboce o gráfico em coordenadas polares.

1. (a) $r = \frac{3}{2 - 2 \cos \theta}$

(b) $r = \frac{3}{2 + \sin \theta}$

(c) $r = \frac{4}{2 + 3 \cos \theta}$

(d) $r = \frac{5}{3 + 3 \sin \theta}$


2. (a) $r = \frac{3}{4 - 2 \cos \theta}$

(b) $r = \frac{3}{3 - 6 \sin \theta}$

(c) $r = \frac{1}{2 + 2 \cos \theta}$

(d) $r = \frac{1}{2 + 8 \cos \theta}$


3-4 Use as Fórmulas (3)–(6) para identificar e descrever a orientação da cônica e então confira sua resposta gerando o gráfico com um recurso gráfico computacional.

 3. (a) $r = \frac{8}{1 - \sin \theta}$

(b) $r = \frac{16}{4 + 3 \sin \theta}$

(c) $r = \frac{4}{2 - 3 \sin \theta}$

(d) $r = \frac{12}{4 + \cos \theta}$

 4. (a) $r = \frac{15}{1 + \cos \theta}$

(b) $r = \frac{2}{3 + 3 \cos \theta}$

(c) $r = \frac{64}{7 - 12 \sin \theta}$

(d) $r = \frac{12}{3 - 2 \cos \theta}$

5-8 Encontre uma equação polar para a cônica que tenha o foco no pólo e satisfaça as condições dadas. Para simplificar, os pontos estão em coordenadas polares e as diretrizes em coordenadas retangulares. (Em alguns casos, pode haver mais do que uma cônica que satisfaça as condições.)

5. (a) Elipse; $e = \frac{3}{4}$; diretriz $x = 2$.
 (b) Parábola; diretriz $x = 1$.
 (c) Hipérbole; $e = \frac{4}{3}$; diretriz $y = 3$.

6. (a) Elipse; $e = \frac{2}{3}$; diretriz $y = -1$.
 (b) Parábola; diretriz $y = 1$.
 (c) Hipérbole; $e = \frac{4}{3}$; diretriz $x = -1$.

7. (a) Elipse; vértices, $(6, 0)$ e $(4, \pi)$.
 (b) Parábola; vértice $(1, 3\pi/2)$.
 (c) Hipérbole; vértices $(3, \pi/2)$ e $(-7, 3\pi/2)$

8. (a) Elipse; extremidades do eixo maior $(2, \pi/2)$ e $(6, 3\pi/2)$.
 (b) Parábola; vértice $(2, \pi)$.
 (c) Hipérbole; $e = \sqrt{2}$; vértice $(2, 0)$.

9-10 Encontre as distâncias do pólo aos vértices, e então aplique as Fórmulas (8)–(10) para determinar a equação da elipse em coordenadas retangulares.

9. (a) $r = \frac{6}{2 + \sin \theta}$ (b) $r = \frac{1}{2 - \cos \theta}$

10. (a) $r = \frac{6}{5 + 2 \cos \theta}$ (b) $r = \frac{8}{4 - 3 \sin \theta}$

11-12 Encontre as distâncias do pólo aos vértices e então aplique as Fórmulas (12)–(14) para determinar a equação da hipérbole em coordenadas retangulares.

11. (a) $r = \frac{3}{1 + 2 \sin \theta}$ (b) $r = \frac{5}{2 - 3 \cos \theta}$

12. (a) $r = \frac{4}{1 - 2 \sin \theta}$ (b) $r = \frac{15}{2 + 8 \cos \theta}$

13-14 Encontre uma equação polar para a elipse cujo foco esteja no pólo que satisfaça as condições dadas.

13. (a) Diretriz à direita do pólo; $a = 8$; $e = \frac{1}{2}$.
 (b) Diretriz abaixo do pólo; $a = 4$; $e = \frac{3}{5}$.
 (c) Diretriz à esquerda do pólo; $b = 4$; $e = \frac{3}{5}$.
 (d) Diretriz acima do pólo; $c = 5$; $e = \frac{1}{5}$.
14. (a) Diretriz acima do pólo; $a = 6$; $e = \frac{1}{2}$.
 (b) Diretriz à esquerda do pólo; $a = 5$; $e = \frac{1}{5}$.
 (c) Diretriz abaixo do pólo; $b = 4$; $e = \frac{4}{5}$.
 (d) Diretriz à direita do pólo; $c = 9$; $e = \frac{3}{4}$.

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Prove que uma hipérbole é equilátera se, e somente se, $e = \sqrt{2}$.
16. Como é afetado o formato de uma hipérbole quando sua excentricidade tende a 1? E quando tende a $+\infty$? Esboce algumas figuras para ilustrar suas conclusões.
17. O que acontece com a distância entre a diretriz e o centro de uma elipse se os focos permanecerem fixados e a excentricidade tender a 0?
18. (a) Mostre que as coordenadas do ponto P sobre a hipérbole na Figura 11.6.1. satisfazem a equação

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a$$

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que $PF_1PD = ca$.

19. (a) Mostre que a excentricidade de uma elipse pode ser expressa em termos de r_0 e r_1 como

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}$$

(b) Mostre que

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

20. (a) Mostre que a excentricidade de uma hipérbole pode ser expressa em termos de r_0 e r_1 como

$$e = \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0}$$

(b) Mostre que

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{e + 1}{e - 1}$$

21. Encontre a equação polar de uma hipérbole equilátera com um foco no pólo e vértice $(5, 0)$.

22. (a) Esboce as curvas

$$r = \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

- (b) Determine as coordenadas polares das interseções das curvas da parte (a).
 (c) Mostre que as curvas são *ortogonais*, isto é, suas retas tangentes são perpendiculares nos pontos de interseção.

23-28 Use os seguintes valores, quando forem necessários:

- raio da Terra = 4000 milhas = 6440km
 1 ano (ano na Terra) = 365 dias (dias na Terra)
 1 UA = $92,9 \times 10^6$ milhas = 150×10^6 km

23. O planeta Plutão tem uma excentricidade $e = 0,249$ e o semi-eixo maior $a = 39,5$ UA.

- (a) Determine o período T em dias.
 (b) Determine as distâncias do periélio e do afélio.
 (c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no pólo e determine uma equação polar da órbita de Plutão naquele sistema de coordenadas.
 (d) Faça um esboço da órbita com proporções razoavelmente precisas.

24. (a) Seja a o semi-eixo maior da órbita de um planeta em torno do Sol, e seja T seu período. Mostre que se T for medido em dias e a em quilômetros, então $T = (365 \times 10^{-9})(a/150)^{3/2}$.

- (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o período do planeta Mercúrio em dias, dado que o seu semi-eixo maior é $a = 57,95 \times 10^6$.
 (c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o Sol no pólo e encontre uma equação para a órbita de Mercúrio naquele sistema de coordenadas, dado que a excentricidade da órbita é $e = 0,206$.

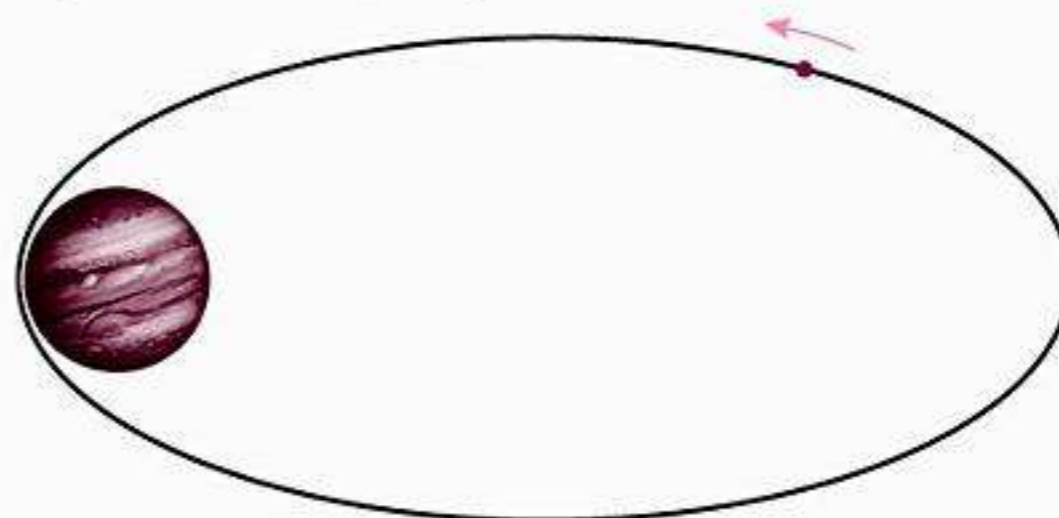
- (d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a órbita de Mercúrio a partir da equação obtida na parte (c).

25. O cometa Hale-Bopp, descoberto independentemente em 23 de julho de 1995, por Alan Hale e Thomas Bopp, tem uma excentricidade orbital de $e = 0,9951$ e um período de 2380 anos.

- (a) Determine seu semi-eixo maior em unidades astronômicas (UA).
 (b) Determine a distância do seu periélio e afélio.
 (c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no pólo, e determine uma equação para a órbita do Hale-Bopp naquele sistema de coordenadas.

- (d) Faça um esboço da órbita do Halle-Boop com proporções razoavelmente precisas.
26. Marte tem uma distância do periélio de 204.520.000 km e a distância do afélio é de 246.280.000 km.
- Use esses dados para calcular a excentricidade e compare sua resposta com o valor dado na Tabela 11.6.1.
 - Determine o período de Marte.
 - Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no pólo e determine uma equação para a órbita de Marte naquele sistema de coordenadas.
 - Use um recurso gráfico computacional para gerar a órbita de Marte a partir da equação obtida na parte (c).
27. O *Vanguard 1* foi lançado em março de 1958 em uma órbita em torno da Terra com excentricidade $e = 0,21$ e semi-eixo maior de 8864,5 km. Determine a altura máxima e mínima do *Vanguard 1* acima da superfície da Terra.
28. Acredita-se que o planeta Júpiter tenha um centro rochoso com 10.000 km de raio, circundado por duas camadas de hidrogênio – uma camada grossa de 40.000 km de hidrogênio comprimido quase metálico e uma outra camada grossa de 20.000

km de hidrogênio molecular regular. Os aspectos visíveis, tais como a grande mancha vermelha, estão na superfície externa da camada de hidrogênio molecular. Em 6 de novembro de 1997, a espaçonave *Galileo* foi colocada na órbita jupiteriana para estudar a lua Europa. A órbita tinha uma excentricidade de 0,814580 e semi-eixo maior de 3.514.918,9 km. Determine a altura mínima e máxima da *Galileo* acima da camada de hidrogênio molecular (ver figura abaixo).



Sem escala

Figura Ex-28

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.6

1. (a) uma elipse (b) uma parábola (c) uma hipérbole 2. (a) (i) uma elipse (ii) à direita do pólo (iii) distância = 1
 (b) (i) hipérbole (ii) à esquerda do pólo (iii) distância = $\frac{1}{4}$ (c) (i) parábola (ii) acima do pólo (iii) distância = $\frac{1}{4}$
 (d) (i) parábola (ii) abaixo do pólo (iii) distância = 4 3. $\frac{1}{2}(r_1 + r_0)$; $\sqrt{r_0 r_1}$ 4. $\frac{1}{2}(r_1 - r_0)$; $\sqrt{r_0 r_1}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO Recurso Gráfico CAS

- Em cada parte, encontre as coordenadas retangulares do ponto cujas coordenadas polares estão dadas.
 - $(-8, \pi/4)$
 - $(7, -\pi/4)$
 - $(8, 9\pi/4)$
 - $(5, 0)$
 - $(-2, -3\pi/2)$
 - $(0, \pi)$
 - Expresse os pontos cujas coordenadas xy são $(-1, 1)$ em coordenadas polares com
 - $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$
 - $r < 0, 0 \leq \theta < 2\pi$
 - $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$
 - $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$
 - Em cada parte, use uma calculadora para aproximar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares estão dadas.
 - $(4, 3)$
 - $(2, -5)$
 - $(1, \arctan 1)$
 - Em cada parte, decida o que descreve mais precisamente a curva polar: uma rosácea, uma reta, um círculo, um limaçon, uma cardióide, uma espiral, uma lemniscata, ou nenhum desses.
 - $r = 3 \cos \theta$
 - $r = \cos 3\theta$
 - $r = \frac{3}{\cos \theta}$
 - $r = 3 - \cos \theta$
 - $r = 1 - 3 \cos \theta$
 - $r^2 = 3 \cos \theta$
 - $r = (3 \cos \theta)^2$
 - $r = 1 + 3\theta$
 - Em cada parte, identifique a curva convertendo a equação polar para coordenadas retangulares. Suponha que $a > 0$.
 - $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$
 - $r^2 \cos 2\theta = a^2$
 - $r = 4 \operatorname{cosec} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$
 - $r = 4 \cos \theta + 8 \sin \theta$
 - Em cada parte, expresse a equação dada em coordenadas polares.
 - $x = 7$
 - $x^2 + y^2 = 9$
 - $x^2 + y^2 - 6y = 0$
 - $4xy = 9$
- 7-12** Esboce a curva em coordenadas polares.

 - $\theta = \frac{\pi}{6}$
 - $r = 6 \cos \theta$
 - $r = 3(1 - \sin \theta)$
 - $r = 2 + \sin \theta$
 - $r = 3 - \cos \theta$
 - $r^2 = \sin 2\theta$
- (a) Determine o máximo e o mínimo da coordenada x dos pontos da cardióide $r = 1 - \cos \theta$.
 (b) Determine o mínimo e o máximo da coordenada y dos pontos da cardióide da parte (a).

14. (a) Mostre que o valor máximo da coordenada y dos pontos da curva $r = 1/\sqrt{\theta}$ para θ no intervalo $(0, \pi]$ ocorre quando $\operatorname{tg} \theta = 2\theta$.
 (b) Use uma calculadora para resolver a equação da parte (a) para θ com, no mínimo, quatro casas decimais de precisão.
 (c) Use o resultado da parte (b) para aproximar o valor máximo de y para $0 < \theta \leq \pi$.
15. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = t^2 + 1, y = t/2$ em $t = -1$ e $t = 1$ sem eliminar o parâmetro.
 (b) Confira suas respostas na parte (a) eliminando o parâmetro e derivando uma função de x .
16. Encontre dy/dx e d^2y/dx^2 em $t = 2$ para a curva paramétrica $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{3}t^3$.
17. Encontre todos os valores de t para os quais a reta tangente à curva paramétrica $x = 2 \cos t, y = 4 \sin t$ é
 (a) horizontal (b) vertical
18. Determine a inclinação da reta tangente à curva polar $r = 1 + \sin \theta$ em $\theta = \pi/4$.
19. Uma curva paramétrica da forma

$$x = a \cotg t + b \cos t, \quad y = a + b \sen t \quad (0 < t < 2\pi)$$

é chamada de **concóide de Nicomede** (ver figura abaixo, para o caso $0 < a < b$).

- (a) Descreva como a concóide
- $$x = \cotg t + 4 \cos t, \quad y = 1 + 4 \sen t$$
- é traçada quando t varia no intervalo $0 < t < 2\pi$.
 (b) Determine a assíntota horizontal da concóide dada na parte (a).
 (c) Quais valores de t fazem com que a concóide da parte (a) tenha uma reta tangente horizontal? Uma reta tangente vertical?
 (d) Determine a equação polar $r = f(\theta)$ para a concóide da parte (a) e, então, determine as equações polares para as retas tangentes à concóide no pólo.

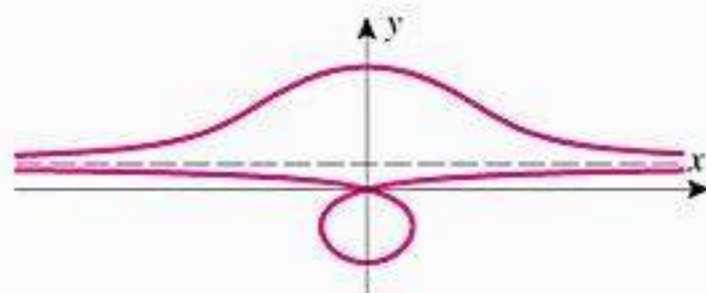


Figura Ex-19

20. (a) Determine o comprimento de arco da curva polar $r = 1/\theta$ para $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.
 (b) O que pode ser dito sobre o comprimento de arco da parte da curva que está situada dentro do círculo $r = 1$?
21. Determine a área da região englobada pela cardióide $r = 2 + 2 \cos \theta$.
22. Encontre a área da região do primeiro quadrante interior à cardióide $r = 1 + \sin \theta$.
23. Determine a área da região que é comum aos círculos $r = 1, r = 2 \cos \theta$ e $r = 2 \sen \theta$.

24. Determine a área da região que é interna à cardióide $r = a(1 + \sen \theta)$ e externa ao círculo $r = a \sen \theta$.

25-28 Esboce a parábola e identifique o foco, o vértice e a diretriz.

25. $y^2 = 6x$

26. $x^2 = -9y$

27. $(y + 1)^2 = -7(x - 4)$

28. $(x - \frac{1}{2})^2 = 2(y - 1)$

29-32 Esboce a elipse e identifique os focos, os vértices e as extremidades do eixo menor.

29. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

30. $4x^2 + 9y^2 = 36$

31. $9(x - 1)^2 + 16(y - 3)^2 = 144$

32. $3(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 12$

33-36 Esboce a hipérbole e identifique os vértices, os focos e as assíntotas.

33. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

34. $9y^2 - 4x^2 = 36$

35. $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$

36. $(y + 3)^2 - 9(x + 2)^2 = 36$

37. Em cada parte, esboce o gráfico da seção cônica com proporções razoavelmente precisas.

(a) $x^2 - 4x + 8y + 36 = 0$

(b) $3x^2 + 4y^2 - 30x - 8y + 67 = 0$

(c) $4x^2 - 5y^2 - 8x - 30y - 21 = 0$

- C** 38. Se você tiver um CAS que faça gráficos de equações implícitas, use-o para conferir seu trabalho no Exercício 37.

39-41 Encontre uma equação para a cônica descrita.

39. Uma parábola com vértice $(0, 0)$ e foco $(0, -4)$.

40. Uma elipse com extremidades do eixo maior em $(0, \pm\sqrt{5})$ e as extremidades do eixo menor em $(\pm 1, 0)$.

41. Uma hipérbole com vértices $(0, \pm 3)$ e assíntotas $y = \pm x$.

42. Pode-se provar que um cabo suspenso forma um arco parabólico em vez de uma catenária se ele for sujeito a uma força distribuída uniformemente para baixo, ao longo do seu comprimento. Por exemplo, supondo que o peso da estrada em uma ponte de suspensão seja distribuída uniformemente ao longo do cabo de sustentação, então os cabos podem ser modelados por parábolas (ver figura em anexo).

- (a) Supondo um modelo parabólico, determine uma equação para o cabo da figura em anexo, tomando o eixo y como a vertical e a origem no ponto mais baixo do cabo.

- (b) Determine o comprimento do cabo entre os suportes.

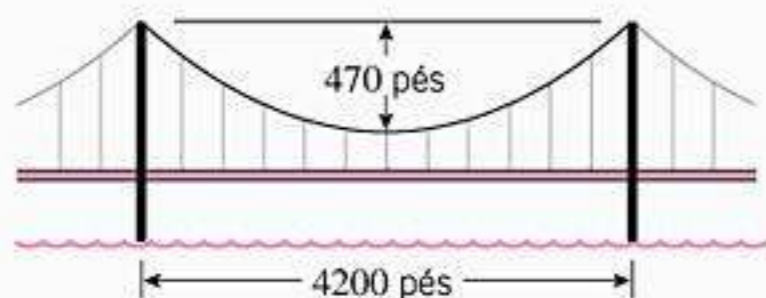


Figura Ex-42

43. Será mostrado mais adiante no livro que se um projétil for lançado com uma velocidade v_0 e em um ângulo α com a horizontal e a uma altura y_0 acima do nível do solo, então a trajetória resultante, relativa ao sistema de coordenadas na figura abaixo, terá equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

onde g é a aceleração devido à gravidade.

- (a) Mostre que a trajetória é uma parábola.
 (b) Determine as coordenadas do vértice.

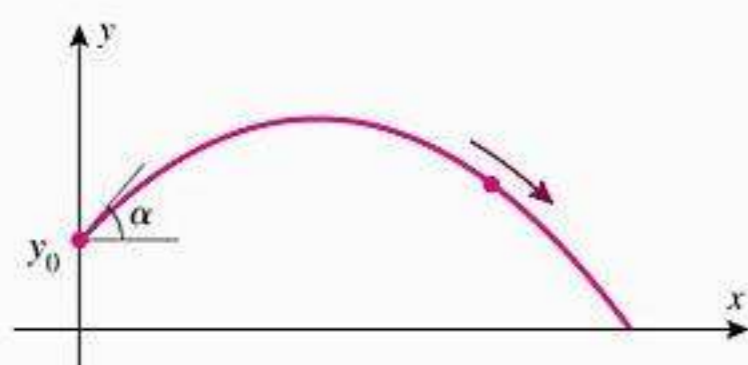


Figura Ex-43

44. Mickey Mantle é reconhecido como rei “não-oficial” dos *home runs*, os longos golpes do beisebol que permitem ao bateador completar o circuito das bases. Em 17 de abril de 1953, Mantle mandou pelos ares uma bola jogada por Chuck Stobbs do infeliz time Washington Senators, para fora do Griffith Stadium, passando por cima de uma parede de 50 pés de altura a um ponto a 391 pés do centro esquerdo. Supondo que a bola deixou o bastão a uma altura de 3 pés acima do chão e a um ângulo de 45° , use as equações paramétricas do Exercício 43 com $g = 32$ pés/s² para encontrar
- (a) a velocidade da bola quando ela deixou o bastão
 (b) a altura máxima da bola
 (c) a distância ao longo do chão a partir da base até onde a bola caiu no chão.
45. Seja R a região que está acima do eixo x e envolvida pela curva $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e a reta $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (a) Esboce o sólido obtido girando R em torno do eixo x e determine o seu volume.
 (b) Esboce o sólido obtido girando R em torno do eixo y e determine o seu volume.
46. Uma torre de resfriamento nuclear deve ter uma altura de h pés e a forma do sólido que é gerado fazendo girar a região R envolvida pelo ramo direito da hipérbole $1521x^2 - 225y^2 = 342.225$ e as retas $x = 0$, $y = -h/2$ e $y = h/2$ em torno do eixo y .
- (a) Determine o volume da torre.
 (b) Determine a área da superfície lateral da torre.

47-49 Aplique uma rotação aos eixos coordenados para remover o termo em xy e então identifique a cônica.

47. $x^2 + y^2 - 3xy - 3 = 0$
 48. $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4 = 0$
 49. $4\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}xy + \sqrt{5}y^2 + 5x - 10y = 0$
 50. Aplique uma rotação aos eixos coordenados para mostrar que o gráfico de
- $$17x^2 - 312xy + 108y^2 + 1080x - 1440y + 4500 = 0$$
- é uma hipérbole. Em seguida, encontre seus vértices, focos e assíntotas.
51. Em cada parte: (i) identifique o gráfico polar como uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole; (ii) indique se a diretriz está acima, abaixo, à esquerda ou à direita do pólo; e (iii) determine a distância do pólo à diretriz.
- (a) $r = \frac{1}{3 + \cos \theta}$ (b) $r = \frac{1}{1 - 3 \cos \theta}$
 (c) $r = \frac{1}{3(1 + \sin \theta)}$ (d) $r = \frac{3}{1 - \sin \theta}$

52-53 Determine uma equação nas coordenadas xy para a seção cônica que satisfaça as condições dadas.

52. (a) Elipse com excentricidade $e = \frac{2}{7}$ e extremos do eixo menor nos pontos $(0, \pm 3)$.
 (b) Parábola com vértice na origem, foco sobre o eixo y e diretriz passando no ponto $(7, 4)$.
 (c) Hipérbole que tem os mesmos focos que a elipse $3x^2 + 16y^2 = 48$ e assíntotas $y = \pm 2x/3$.
53. (a) Elipse com centro $(-3, 2)$, vértice $(2, 2)$ e excentricidade $e = \frac{4}{5}$.
 (b) Parábola com foco $(-2, -2)$ e vértice $(-2, 0)$.
 (c) Hipérbole com vértice $(-1, 7)$ e assíntotas $y - 5 = \pm 8(x + 1)$.
54. Use as equações paramétricas $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ para mostrar que a circunferência C de uma elipse com semi-eixo maior a e excentricidade e é

$$C = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u} \, du$$

55. Use a regra de Simpson ou a capacidade de integração numérica de um recurso gráfico para aproximar a circunferência da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, a partir da integral obtida no Exercício 54.
56. (a) Calcule a excentricidade da órbita terrestre, dado que a razão da distância entre o centro da Terra e o centro do Sol no periélio pela distância entre os centros no afélio é de $\frac{59}{61}$.
 (b) Determine a distância entre o centro da Terra e o centro do Sol no periélio, dado que o valor médio das distâncias do periélio e do afélio é de 93 milhões de milhas.
 (c) Use o resultado do Exercício 54 e a regra de Simpson ou a capacidade de integração numérica de um recurso computacional gráfico para aproximar a distância que a Terra viaja em um ano (uma revolução em torno do Sol).

EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Colisão com Cometa

A Terra está em uma galeria de tiro ao alvo cósmico de cometas e asteróides. Embora seja pequena a probabilidade de que em qualquer ano dado a Terra seja atingida por um cometa ou por um asteróide, as conseqüências de tal colisão são tão catastróficas que a comunidade internacional está agora começando a rastrear **objetos próximos à Terra (NEOs)**. A tarefa do leitor como parte da equipe de rastreamento internacional NEO, é calcular a órbita de chegada dos cometas e dos asteróides, determinar com que possibilidade eles chegarão a se chocar com a Terra, e fornecer uma notificação se houver perigo de uma colisão ou de uma aproximação perigosa.

No momento em que a Terra está no afélio (o ponto mais afastado do Sol), sua equipe de rastreamento de objetos próximos à Terra recebe do Laboratório de Propulsão a Jato da NASA na Caltech a informação de que um cometa anteriormente desconhecido (designação Rogue 2000) está movendo-se violenta e rapidamente em direção à Terra. Você transmite imediatamente uma solicitação à NASA sobre os parâmetros orbitais e as posições correntes da Terra e do Rogue 2000 e recebe o seguinte relatório:

PARÂMETROS ORBITAIS	
TERRA	ROGUE 2000
Excentricidade: $e_1 = 0,017$	Excentricidade: $e_2 = 0,98$
Semi-eixo maior: $a_1 = 1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$	Semi-eixo maior: $a_2 = 5 \text{ AU} = 7,48 \times 10^8 \text{ km}$
Período: $T_1 = 1 \text{ ano}$	Período: $T_2 = 5\sqrt{5} \text{ anos}$

INFORMAÇÃO DA POSIÇÃO INICIAL	
Os eixos maiores da Terra e do Rogue 2000 coincidem.	
Os afélios da Terra e do Rogue 2000 estão no mesmo lado do Sol.	
Ângulo polar inicial da Terra: $\theta = 0$ radianos.	
Ângulo polar inicial do Rogue 2000: $\theta = 0,45$ radianos.	

A Estratégia do Cálculo

Como a preocupação imediata é uma possível colisão na interseção A da Figura 1, sua equipe monta o seguinte plano:

- Passo 1** Determinar as equações polares da Terra e do Rogue 2000.
- Passo 2** Determinar as coordenadas polares da interseção A.
- Passo 3** Determinar quanto tempo levará a Terra para atingir a interseção A.
- Passo 4** Determinar onde o Rogue 2000 estará quando a Terra atingir a interseção A.
- Passo 5** Determinar quão distante Rogue 2000 estará da Terra quando essa estiver na interseção A.

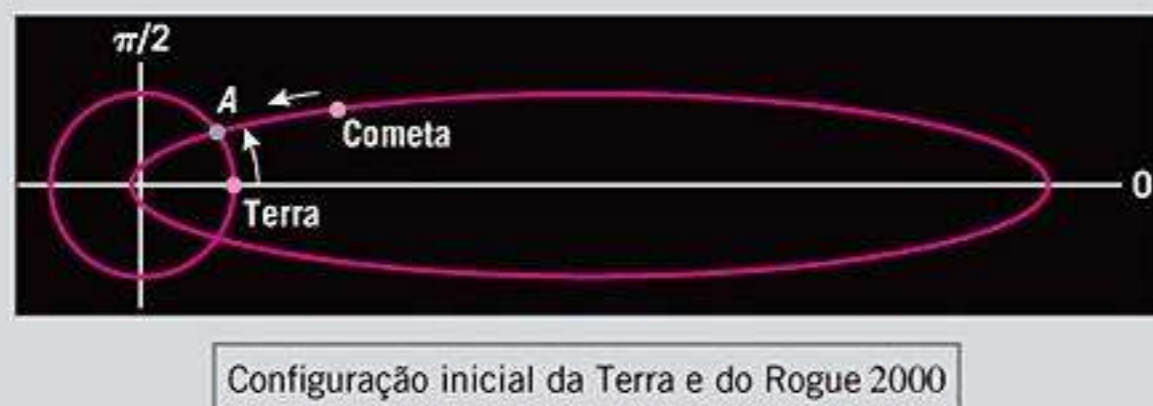


Figura 1

Equações Polares das Órbitas

Exercício 1 Escreva a equação polar na forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

para as órbitas da Terra e do Rogue 2000, usando unidades UA para r .

Exercício 2 Use um recurso gráfico para gerar as duas órbitas na mesma tela.

Interseção das Órbitas

O segundo passo do plano de cálculo de sua equipe é determinar as coordenadas polares da interseção A na Figura 1.

Exercício 3 Para simplificar, sejam $k_1 = a_1(1 - e_1^2)$ e $k_2 = a_2(1 - e_2^2)$ e use as equações polares obtidas no Exercício 1 para mostrar que o ângulo θ na interseção A satisfaz a equação

$$\cos \theta = \frac{k_1 - k_2}{k_1 e_2 - k_2 e_1}$$

Exercício 4 Use o resultado do Exercício 3 e a capacidade de cálculo da função inversa do cosseno de sua calculadora para mostrar que o ângulo θ na interseção A na Figura 1 é $\theta = 0,607$ radianos.

Exercício 5 Use o resultado do Exercício 4 e uma das equações polares obtidas no Exercício 1 para mostrar que se r estiver em unidades UA, então as coordenadas polares da interseção A são $(r, \theta) = (1,014; 0,607)$.

Tempo Necessário para a Terra Atingir a Interseção A

De acordo com a segunda lei de Kepler (ver 11.6.3), a reta radial do centro do Sol ao centro de um objeto orbitando-o varre áreas iguais em tempos iguais. Assim, se t for o tempo que a reta radial leva para varrer um “setor elíptico” de um certo ângulo inicial θ_i a um ângulo final θ_f (Figura 2), e se T for o período do objeto (o tempo necessário para completar uma revolução), então

$$\frac{t}{T} = \frac{\text{área do “setor elíptico”}}{\text{área da elipse inteira}} \quad (1)$$

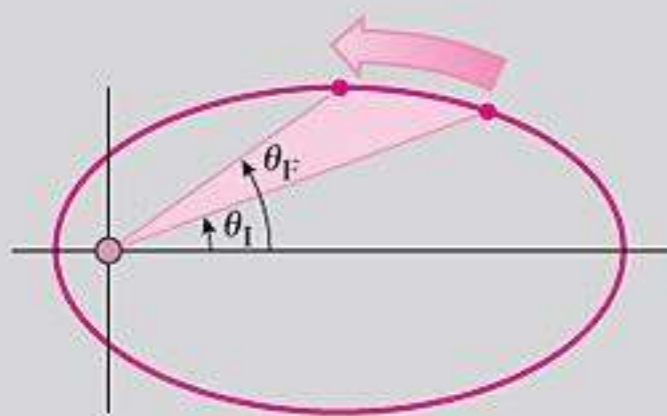


Figura 2

Exercício 6 Use a Fórmula (1) para mostrar que

$$t = \frac{T \int_{\theta_i}^{\theta_f} r^2 d\theta}{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} \quad (2)$$

.....
Exercício 7 Use uma calculadora com capacidade de integração numérica, a Fórmula (2) e a equação polar para a órbita da Terra obtida no Exercício 1 para determinar o tempo t (em anos) que é necessário para a Terra mover-se de sua posição inicial até a interseção A.

Posição do Rogue 2000 Quando a Terra Estiver na Interseção A

O quarto passo na estratégia de cálculo de sua equipe é determinar a posição do Rogue 2000 quando a Terra atingir a interseção A.

.....
Exercício 8 Durante o tempo que leva para a Terra mover-se de sua posição inicial à interseção A, o ângulo polar de Rogue 2000 variará do seu valor inicial $\theta_1 = 0,45$ radianos para algum valor final θ_f que sobrou para ser determinado. Aplique a Fórmula (2) usando o dado orbital para o Rogue 2000 e o tempo t obtido no Exercício 7 para mostrar que θ_f satisfaz a equação

$$\int_{0,45}^{\theta_f} \left[\frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 - e_2 \cos \theta} \right]^2 d\theta = \frac{2t\pi a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2}}{5\sqrt{5}} \quad (3)$$

Sua equipe está agora frente a frente com o problema de resolver a Equação (3) para um limite superior θ_f desconhecido. Alguns membros da equipe planejam utilizar um CAS para realizar a integração, alguns planejam usar tabelas de integração e ainda outros membros planejam calcular manualmente, fazendo a substituição $u = \text{tg}(\theta/2)$ e aplicando as fórmulas em (5) da Seção 8.6 do Volume 1.

Exercício 9

- (a) Calcule a integral em (3) usando um CAS ou calculando manualmente.
 (b) Use a capacidade de encontrar raízes de uma calculadora para determinar o ângulo polar do Rogue 2000 quando a Terra estiver na interseção A.

Calculando a Distância Crítica

É tarefa de sua equipe de rastreamento emitir uma notificação para várias agências governamentais sobre qualquer asteróide ou cometa que esteja a menos de 4 milhões de quilômetros da Terra em uma interseção orbital. (Esta distância é cerca de 10 vezes a distância entre a Terra e a Lua.) Assim, o passo final no plano da sua equipe é calcular a distância entre a Terra e o Rogue 2000 quando a Terra estiver na interseção A, e então determinar se uma notificação deverá ser emitida.

.....
Exercício 10 Use a equação polar do Rogue 2000 obtida no Exercício 1 e o resultado do Exercício 9(b) para determinar as coordenadas polares do Rogue 2000 com r em unidades UA quando a Terra estiver na interseção A.

.....
Exercício 11 Use a fórmula da distância do Exercício 73(a) da Seção 11.1 para calcular a distância entre a Terra e o Rogue 2000 em unidades UA quando a Terra estiver na interseção A, e então use o fator de conversão $1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$ para determinar se uma notificação governamental deverá ser emitida.

Nota: Uma das aproximações mais perigosas na história recente ocorreu em 30 de outubro de 1937, quando o asteróide Hermes passou a menos de 900.000 km da Terra; mais recentemente, em 14 de julho de 1968, o asteróide Ícaro passou a menos de 23.000.000 km da Terra.

.....
Módulo por Mary Ann Connors, USMA, West Point, e Howard Anton, Drexel University



O que se vetores enfurecidos girarem em torno de sua cabeça adormecida e tomarem forma. Nunca há a necessidade de temer a violência da tempestade abstrata do pobre mundo.

—Robert Penn Warren
Poeta

Neste capítulo, discutiremos sistemas de coordenadas retangulares em três dimensões e estudaremos a Geometria Analítica de retas, planos e outras superfícies básicas. O segundo tema deste capítulo é o estudo de vetores. Estes são os objetos matemáticos que os físicos e engenheiros usam para estudar forças, deslocamentos e velocidades de objetos que se movem ao longo de caminhos curvilíneos. Mais geralmente, os vetores são usados para representar quaisquer entidades físicas que, para sua descrição completa, envolvam tanto uma magnitude quanto uma direção e sentido. Introduziremos várias operações algébricas sobre vetores e aplicaremos essas operações em problemas que envolvam força, trabalho e tendências rotacionais em duas e três dimensões. Finalmente, discutiremos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, que são apropriados para problemas que envolvam vários tipos de simetrias e também têm aplicações específicas em navegação e na Mecânica Celeste.

Foto: Para descrever completamente o movimento de um barco, precisamos especificar sua velocidade, direção e sentido do movimento em cada instante. Juntos, a velocidade, a direção e o sentido do movimento descrevem uma quantidade “vetorial”. Neste capítulo estudaremos vetores.

12.1 COORDENADAS RETANGULARES NO ESPAÇO; ESFERAS; SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Nesta seção, discutiremos sistemas de coordenadas no espaço tridimensional e alguns fatos básicos a respeito de superfícies em três dimensões.

■ SISTEMAS DE COORDENADAS RETANGULARES

Assim como os pontos do espaço bidimensional podem ser colocados em correspondência bijetora com os pares de números reais usando duas retas coordenadas perpendiculares, também os pontos do espaço tridimensional podem ser colocados em correspondência bijetora com os ternos de números reais usando três retas coordenadas perpendiculares, denominados *eixo x*, *eixo y* e *eixo z*, posicionados de tal forma que suas origens coincidam (Figura 12.1.1). Os três eixos coordenados formam um *sistema de coordenadas retangulares* (ou *sistema de coordenadas cartesianas*). O ponto de interseção dos eixos coordenados é denominado *origem* do sistema de coordenadas.

Os sistemas de coordenadas retangulares no espaço tridimensional se dividem em duas categorias: os sistemas com a *regra da mão esquerda* e os com a *regra da mão direita*. Um sistema com a regra da mão direita tem a seguinte propriedade: quando os dedos da mão direita são fechados de tal modo que se curvam do eixo *x* positivo em direção ao eixo *y* positivo,

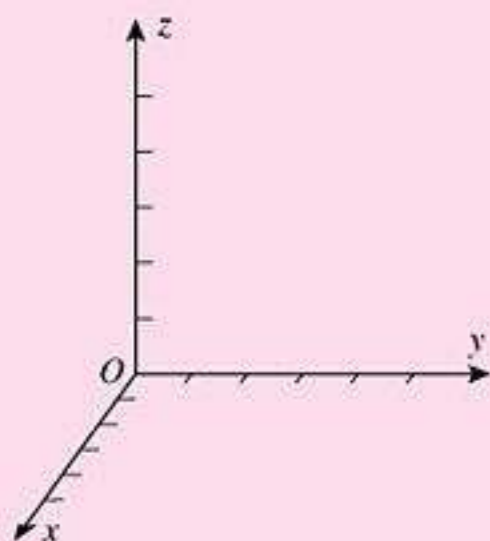


Figura 12.1.1

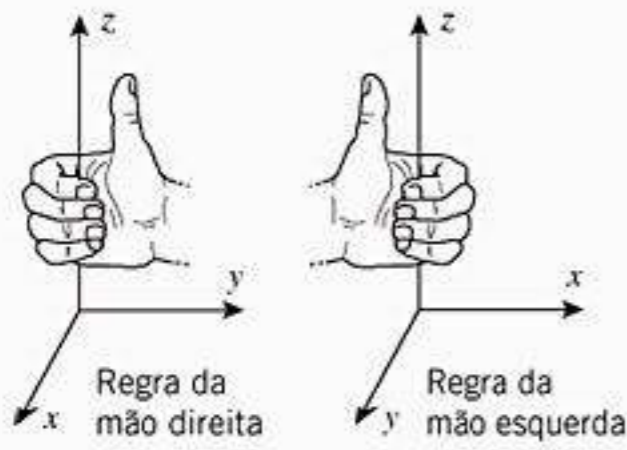


Figura 12.1.2

então o polegar aponta (mais ou menos) na direção do eixo z positivo (Figura 12.1.2). Analogamente para um sistema com a regra da mão esquerda (Figura 12.1.2). Neste livro somente utilizaremos sistemas com a regra da mão direita.

Os eixos coordenados, tomados aos pares, determinam três *planos coordenados*: o *plano xy* , o *plano xz* e o *plano yz* (Figura 12.1.3). A cada ponto P do espaço podemos associar um terço de números reais, passando três planos pelo ponto P paralelos aos planos coordenados e tomando a , b e c como as coordenadas da interseção desses planos com os eixos x , y e z , respectivamente (Figura 12.1.4). Dizemos que a , b e c são as coordenadas x , y e z de P , respectivamente, e denotamos o ponto P por (a, b, c) ou por $P(a, b, c)$. A Figura 12.1.5 mostra os pontos $(4, 5, 6)$ e $(-3, 2, -4)$.

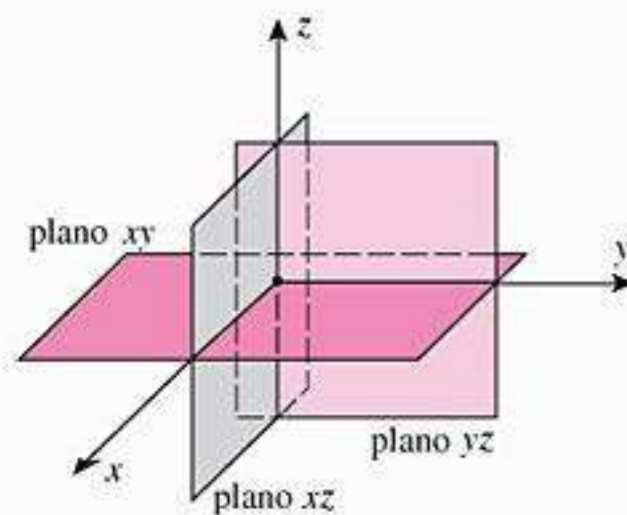


Figura 12.1.3

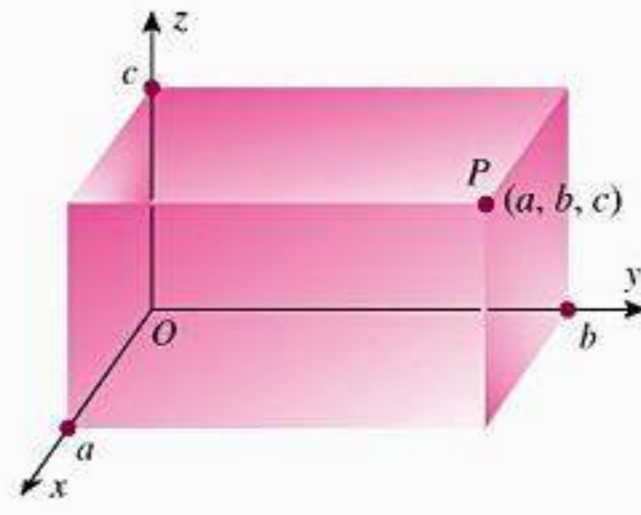


Figura 12.1.4

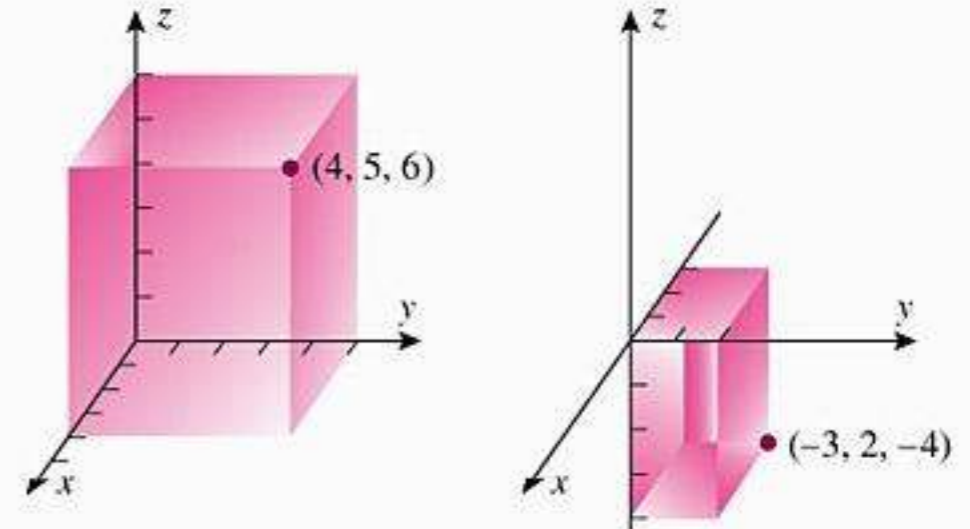


Figura 12.1.5

Assim como os eixos coordenados em um sistema de coordenadas bidimensional dividem o espaço bidimensional em quatro quadrantes, igualmente os planos coordenados em um sistema de coordenadas tridimensional dividem o espaço tridimensional em oito partes, chamadas de *octantes*. O conjunto de pontos com as três coordenadas positivas forma o *primeiro octante*; os octantes restantes não têm uma enumeração padrão.

O leitor deveria ser capaz de visualizar os seguintes fatos sobre sistemas de coordenadas retangulares tridimensionais:

REGIÃO	DESCRIÇÃO
plano xy	Consiste em todos os pontos da forma $(x, y, 0)$
plano xz	Consiste em todos os pontos da forma $(x, 0, z)$
plano yz	Consiste em todos os pontos da forma $(0, y, z)$
eixo x	Consiste em todos os pontos da forma $(x, 0, 0)$
eixo y	Consiste em todos os pontos da forma $(0, y, 0)$
eixo z	Consiste em todos os pontos da forma $(0, 0, z)$

■ DISTÂNCIA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Para deduzir uma fórmula para a distância entre dois pontos no espaço tridimensional, comecemos considerando uma caixa cujos lados medem a , b e c (Figura 12.1.6). O comprimento d da diagonal de uma caixa pode ser obtido aplicando duas vezes o Teorema de Pitágoras: primeiro, para mostrar que uma diagonal da base tem comprimento $\sqrt{a^2 + b^2}$, então novamente para mostrar que o comprimento da diagonal da caixa é

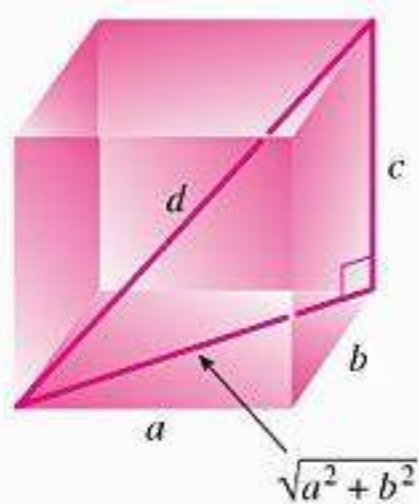


Figura 12.1.6

$$d = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{1}$$

Podemos obter, agora, uma fórmula para a distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ no espaço tridimensional, determinando o comprimento da diagonal de uma caixa que tenha esses pontos como cantos da diagonal (Figura 12.1.7). Os lados de uma tal caixa têm comprimentos

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1| \text{ e } |z_2 - z_1|$$

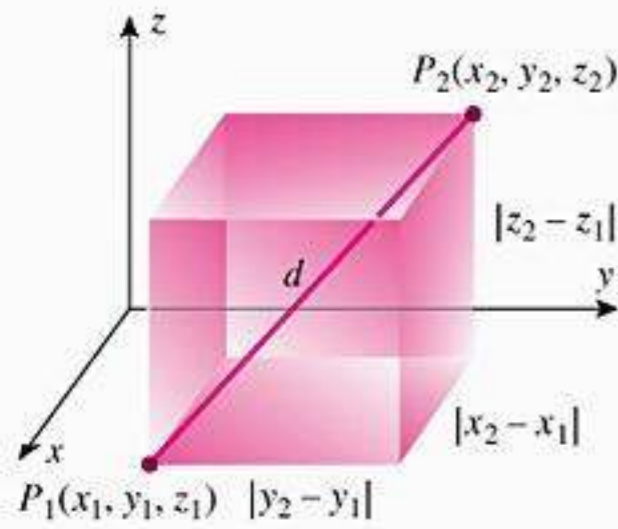


Figura 12.1.7

e, por consequência de (1), a distância d entre os pontos P_1 e P_2 é

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2}$$

(onde omitimos o sinal desnecessário do valor absoluto).

Lembre-se que no espaço bidimensional a distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Desse modo, a fórmula da distância no espaço tridimensional tem a mesma forma que a fórmula no espaço bidimensional, mas tem o terceiro termo para dar conta da dimensão adicional. Veremos que isso é uma ocorrência comum na extensão de fórmulas do espaço bidimensional ao espaço tridimensional.

► **Exemplo 1** Determine a distância d entre os pontos $(2, 3, -1)$ e $(4, -1, 3)$.

Solução Da Fórmula (2)

$$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-1 - 3)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{36} = 6 \blacktriangleleft$$

■ **ESFERAS**

Lembre-se que, em um sistema de coordenadas xy , o conjunto de pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem uma equação em x e y é chamado de *gráfico* da equação. Analogamente, em um sistema de coordenadas xyz , o conjunto de pontos (x, y, z) cujas coordenadas satisfazem uma equação em x, y e z é chamado de *gráfico* da equação. Por exemplo, considere a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \tag{3}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$$

de modo que o gráfico de (3) consiste em todos os pontos que estão a uma distância igual a 5 unidades da origem. Assim, o gráfico desta equação é uma esfera de raio 5 centrada na origem (Figura 12.1.8).

Em geral, a esfera com centro (x_0, y_0, z_0) e raio r consiste naqueles pontos (x, y, z) cujas coordenadas satisfazem

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

ou, de modo equivalente,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{4}$$

Essa é chamada a *equação padrão da esfera* com centro (x_0, y_0, z_0) e raio r . Alguns exemplos são dados na tabela seguinte.

EQUAÇÃO	GRÁFICO
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$	Esfera com centro $(3, 2, 1)$ e raio 3
$(x + 1)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 5$	Esfera com centro $(-1, 0, -4)$ e raio $\sqrt{5}$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	Esfera com centro $(0, 0, 0)$ e raio 1

Se os termos em (4) são elevados ao quadrado e reagrupados, então a equação resultante tem a forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{5}$$

Lembre-se que no espaço bidimensional a equação padrão do círculo com centro (x_0, y_0) e raio r é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Comparando isso com (4), vemos que a equação padrão de uma esfera no espaço tridimensional tem a mesma forma que a equação padrão de um círculo no espaço bidimensional, mas com um termo adicional para dar conta da terceira coordenada.

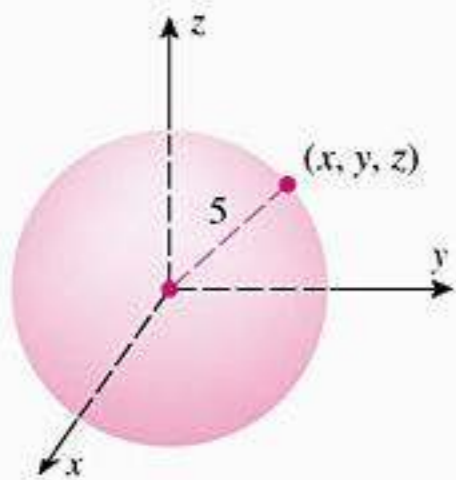


Figura 12.1.8

O exemplo seguinte mostra como o centro e o raio de uma esfera que está expressa nessa forma podem ser obtidos completando os quadrados.

► **Exemplo 2** Determine o centro e o raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$$

Solução Podemos colocar a equação na forma (4) completando os quadrados:

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 + 8z) &= -17 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) &= -17 + 21 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 &= 4 \end{aligned}$$

que é a equação da esfera com centro $(1, 2, -4)$ e raio 2. ◀

Em geral, completando os quadrados em (5), resulta uma equação da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$$

Se $k > 0$, então o gráfico dessa equação é uma esfera com centro (x_0, y_0, z_0) e raio \sqrt{k} . Se $k = 0$, então a esfera tem raio zero e portanto o gráfico é o único ponto (x_0, y_0, z_0) . Se $k < 0$, a equação não é satisfeita por quaisquer valores de x , y e z (por quê?), logo não há gráfico.

12.1.1 TEOREMA Uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

representa uma esfera, um ponto ou não possui gráfico.

■ **SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS**

Embora seja natural fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço bidimensional e de equações com três variáveis no espaço tridimensional, é possível também fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço tridimensional. Por exemplo, o gráfico da equação $y = x^2$ em um sistema coordenado xy é uma parábola; contudo, podemos escrever essa equação como $y = x^2 + 0z$ e indagar sobre o seu gráfico no sistema de coordenadas xyz . Para obter este gráfico, precisamos observar somente que a equação $y = x^2$ não impõe qualquer restrição sobre z . Assim, se encontrarmos valores x e y que satisfizerem esta equação, então os pontos de coordenadas (x, y, z) satisfarão também a equação para valores *arbitrários* de z . Geometricamente, o ponto (x, y, z) situa-se na reta vertical pelo ponto $(x, y, 0)$ no plano xy , o que significa que podemos obter o gráfico de $y = x^2$ em um sistema de coordenadas xyz fazendo, primeiro, o gráfico da equação no plano xy e, então, transladando este gráfico paralelamente ao eixo z para obter o gráfico inteiro (Figura 12.1.9).

O processo de gerar uma superfície transladando uma curva plana paralelamente a alguma reta é chamado de *extrusão*, e as superfícies que são geradas por extrusão são chamadas *superfícies cilíndricas*. Um exemplo familiar é a superfície de um cilindro circular reto, a qual pode ser gerada transladando um círculo paralelamente ao eixo do cilindro. O teorema seguinte fornece informações básicas sobre como fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço tridimensional.

12.1.2 TEOREMA Uma equação que contém apenas duas das variáveis x , y e z representa uma superfície cilíndrica em um sistema de coordenadas xyz . A superfície pode ser obtida fazendo-se o gráfico da equação no plano coordenado das duas variáveis que aparecem na equação e, então, transladando este gráfico paralelamente ao eixo da variável que não aparece na equação.

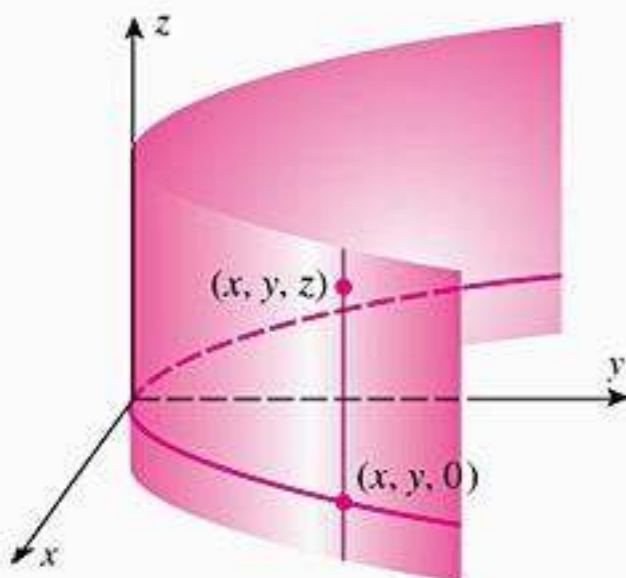


Figura 12.1.9

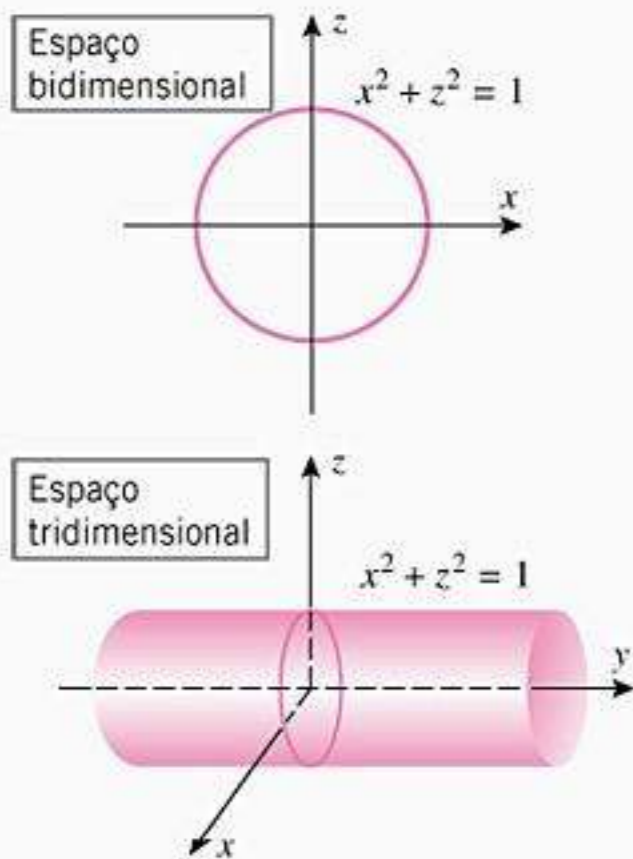


Figura 12.1.10

Num sistema de coordenadas xy , o gráfico da equação $x = 1$ é uma reta paralela ao eixo y . O que é o gráfico dessa equação num sistema de coordenadas xyz ?

► **Exemplo 3** Esboce o gráfico de $x^2 + z^2 = 1$ no espaço tridimensional.

Solução Uma vez que y não aparece nessa equação, o gráfico é uma superfície cilíndrica gerada por extrusão paralelamente ao eixo y . No plano xz , o gráfico da equação $x^2 + z^2 = 1$ é um círculo (Figura 12.1.10). Assim, no espaço tridimensional o gráfico é um cilindro circular reto ao longo do eixo y . ◀

► **Exemplo 4** Esboce o gráfico de $z = \text{sen } y$ no espaço tridimensional.

Solução (Ver Figura 12.1.11) ◀

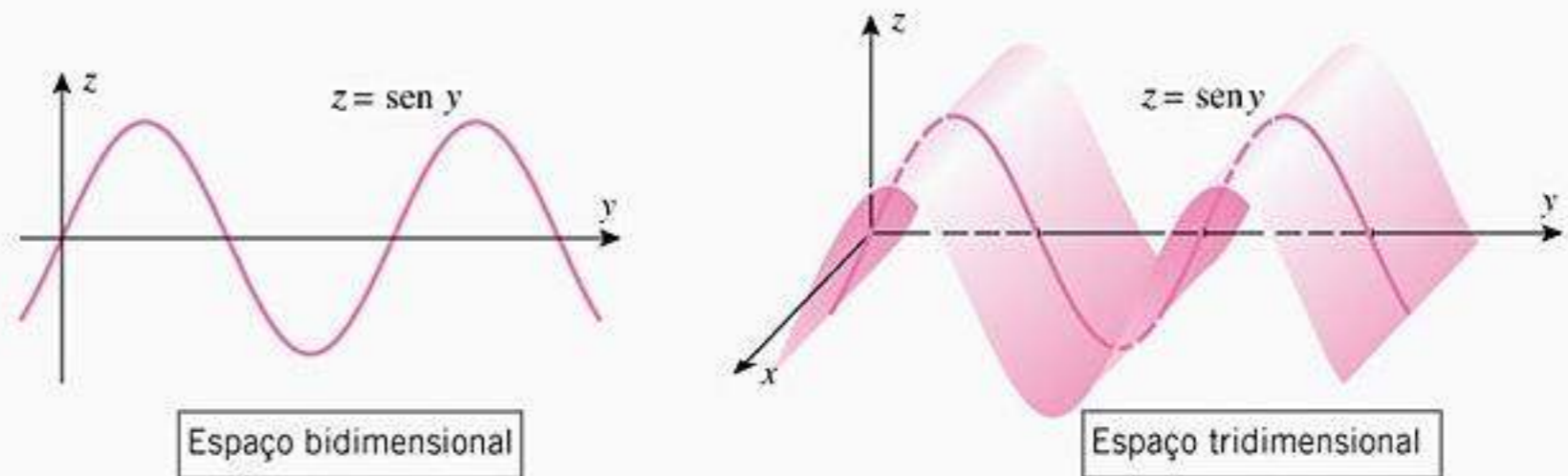


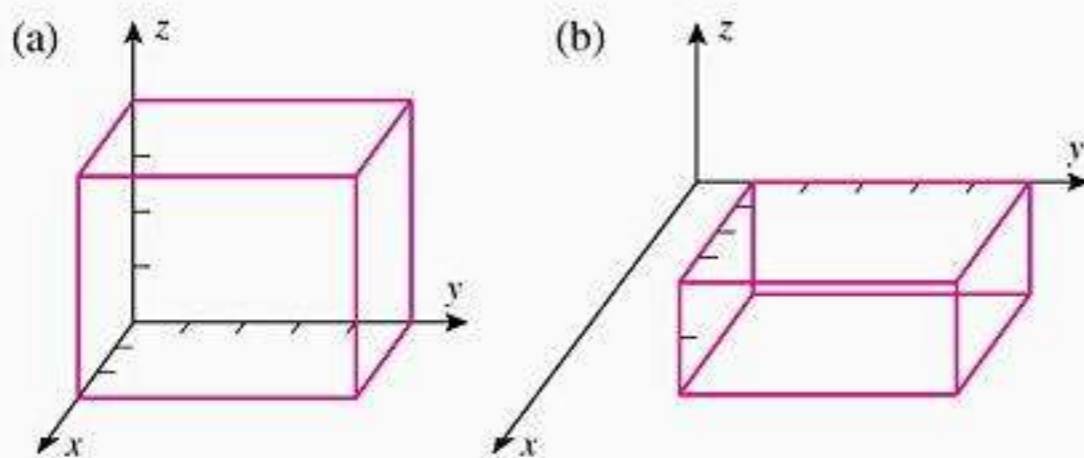
Figura 12.1.11

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.1** (Ver página 792 para respostas.)

- A distância entre os pontos $(1, -2, 0)$ e $(4, 0, 5)$ é _____.
- O gráfico de $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$ é _____ de raio _____ centrada em _____.
- A menor distância do ponto $(4, 0, 5)$ à esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 36$ é _____.
- Seja S o gráfico de $x^2 + z^2 + 6z = 16$ no espaço tridimensional.
 - A interseção de S com o plano xz é um círculo de centro _____ e raio _____.
 - A interseção de S com o plano xy é o par de retas $x = \underline{\hspace{2cm}}$ e $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - A interseção de S com o plano yz é o par de retas $z = \underline{\hspace{2cm}}$ e $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 12.1 Recurso Gráfico

- Em cada parte, determine as coordenadas dos oito cantos da caixa.



- Um cubo de lado 4 tem seu centro geométrico na origem e suas faces paralelas aos planos coordenados. Esboce o cubo e dê as coordenadas dos cantos.

ENFOCANDO CONCEITOS

- Suponha que uma caixa tenha suas faces paralelas aos planos coordenados e os pontos $(4, 2, -2)$ e $(-6, 1, 1)$ sejam extremos de uma diagonal. Esboce a caixa e dê as coordenadas dos seis cantos restantes.
- Suponha que uma caixa tenha suas faces paralelas aos planos coordenados e os pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sejam extremos de uma diagonal.

- Determine as coordenadas dos seis cantos restantes.
- Mostre que o ponto médio do segmento de reta unindo (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) é

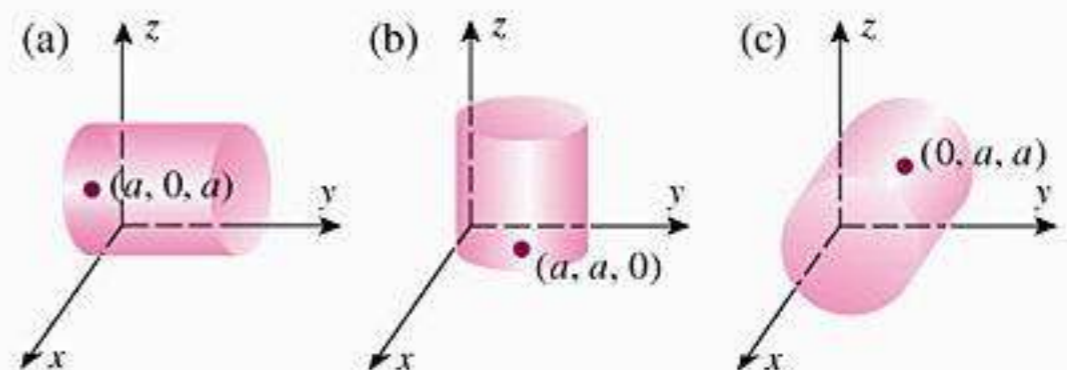
$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right)$$

[Sugestão: aplique o Teorema G. 2 do Apêndice G da Internet a três arestas convenientes da caixa.]

5. Interprete o gráfico de $x = 1$ nos contextos
 (a) da reta numérica (b) do espaço bidimensional
 (c) do espaço tridimensional.
6. Considere os pontos $P(3, 1, 0)$ e $Q(1, 4, 4)$.
 (a) Esboce o triângulo de vértices P , Q e $(1, 4, 0)$. Sem calcular distâncias, explique por que esse triângulo é retângulo e então aplique o Teorema de Pitágoras duas vezes para encontrar a distância de P a Q .
 (b) Repita a parte (a) usando os pontos P , Q e $(3, 4, 0)$.
 (c) Repita a parte (a) usando os pontos P , Q e $(1, 1, 4)$.
7. Determine o centro e o raio da esfera que tem $(1, -2, 4)$ e $(3, 4, -12)$ como extremos de um diâmetro. [Ver Exercício 4.]
8. Mostre que $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ e $(2, 4, 5)$ são vértices de um triângulo equilátero.
9. (a) Mostre que $(2, 1, 6)$, $(4, 7, 9)$ e $(8, 5, -6)$ são vértices de um triângulo retângulo.
 (b) Que vértice está no ângulo reto?
 (c) Determine a área do triângulo.
10. Determine a distância do ponto $(-5, 2, -3)$ ao
 (a) plano xy (b) plano xz (c) plano yz
 (d) eixo x (e) eixo y (f) eixo z
11. Em cada parte, determine a equação padrão da esfera que satisfaça as condições dadas.
 (a) Centro $(1, 0, -1)$; diâmetro = 8.
 (b) Centro $(-1, 3, 2)$ e passa pela origem.
 (c) Um diâmetro cujos extremos sejam $(-1, 2, 1)$ e $(0, 2, 3)$.
12. Determine as equações de duas esferas que estejam centradas na origem e sejam tangentes à esfera de raio 1 centrado em $(3, -2, 4)$.
13. Em cada parte, determine uma equação da esfera com centro $(2, -1, -3)$ e que satisfaça a condição dada
 (a) Tangente ao plano xy .
 (b) Tangente ao plano xz .
 (c) Tangente ao plano yz .
14. (a) Determine uma equação da esfera inscrita no cubo centrado no ponto $(-2, 1, 3)$ e de lados de comprimento 1 paralelos aos planos coordenados.
 (b) Determine uma equação da esfera que está circunscrita ao cubo na parte (a).
15. Uma esfera está centrada num ponto do primeiro octante e é tangente a cada um dos três planos coordenados. Mostre que o centro dessa esfera é um ponto da forma (r, r, r) , onde r é o raio da esfera.
16. Uma esfera está centrada num ponto do primeiro octante e é tangente a cada um dos três planos coordenados. A distância da origem à esfera é de $3 - \sqrt{3}$ unidades. Encontre uma equação para a esfera.

17-22 Descreva a superfície cuja equação é dada.

17. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$
20. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$
22. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$
23. Em cada parte, esboce a parte da superfície que está situada no primeiro octante.
 (a) $y = x$ (b) $y = z$ (c) $x = z$
24. Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
 (a) $x = 1$ (b) $y = 1$ (c) $z = 1$
25. Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $y^2 + z^2 = 25$ (c) $x^2 + z^2 = 25$
26. Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
 (a) $y = x^2$ (b) $z = x^2$ (c) $y = z^2$
27. Em cada parte, escreva uma equação para a superfície.
 (a) O plano que contém o eixo x e o ponto $(0, 1, 2)$.
 (b) O plano que contém o eixo y e o ponto $(1, 0, 2)$.
 (c) O cilindro circular reto que tem raio 1 e está centrado sobre a reta paralela ao eixo z que passa no ponto $(1, 1, 0)$.
 (d) O cilindro circular reto que tem raio 1 e está centrado sobre a reta paralela ao eixo y que passa no ponto $(1, 0, 1)$.
28. Determine as equações para os seguintes cilindros circulares retos. Cada cilindro tem raio a e é "tangente" a dois planos coordenados.



29-38 Esboce a superfície no espaço tridimensional.

29. $y = \sin x$ 30. $y = e^x$
31. $z = 1 - y^2$ 32. $z = \cos x$
33. $2x + z = 3$ 34. $2x + 3y = 6$
35. $4x^2 + 9z^2 = 36$ 36. $z = \sqrt{3 - x}$
37. $y^2 - 4z^2 = 4$ 38. $yz = 1$
39. Use um recurso gráfico para gerar a curva $y = x^3 / (1 + x^2)$ no plano xy e então use o gráfico para ajudar a esboçar a superfície $z = y^3 / (1 + y^2)$ no espaço tridimensional.
40. Use um recurso gráfico para gerar a curva $y = x / (1 + x^4)$ no plano xy e então use o gráfico para ajudar a esboçar a superfície $z = y / (1 + y^4)$ no espaço tridimensional.

41. Se um besouro andar sobre a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$$

quão perto e quão afastado poderá ficar da origem?

42. Descreva o conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas satisfaçam a desigualdade
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8z \leq 8$
- .

43. Descreva o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas satisfaçam a desigualdade
- $y^2 + z^2 + 6y - 4z > 3$
- .

44. A distância entre um ponto
- $P(x, y, z)$
- e o ponto
- $A(1, -2, 0)$
- é duas vezes a distância entre
- P
- e o ponto
- $B(0, 1, 1)$
- . Mostre que o conjunto de todos esses pontos constitui uma esfera, e determine o centro e o raio da esfera.

45. Conforme mostrado na figura abaixo, uma bola de boliche de raio
- R
- é colocada dentro de uma caixa, grande o suficiente para contê-la exatamente; para ser transportada é calçada em cada canto da caixa por esferas de isopor. Encontre o raio da maior esfera de isopor que pode ser usada. [Sugestão: Tome a origem de um sistema cartesiano de coordenadas num canto da caixa com eixos coordenados ao longo das arestas.]

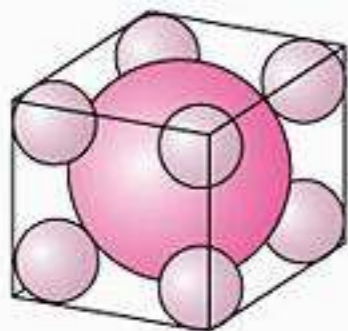


Figura Ex-45

46. Considere a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

e seja $K = G^2 + H^2 + I^2 - 4J$.

- (a) Prove que a equação representa uma esfera se $K > 0$, um ponto se $K = 0$ e não tem gráfico se $K < 0$.
 (b) No caso em que $K > 0$, determine o centro e o raio da esfera.

47. (a) A figura em anexo mostra uma superfície de revolução que foi gerada fazendo girar a curva $y = f(x)$ no plano xy em torno do eixo x . Mostre que a equação dessa superfície é $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$. [Sugestão: cada ponto sobre a curva traça um círculo quando é girado em torno do eixo x .]
 (b) Determine uma equação da superfície de revolução que é gerada fazendo girar a curva $y = e^x$ no plano xy em torno do eixo x .
 (c) Mostre que o elipsóide $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ é uma superfície de revolução em torno do eixo x determinando uma curva $y = f(x)$ no plano xy que gere a superfície.

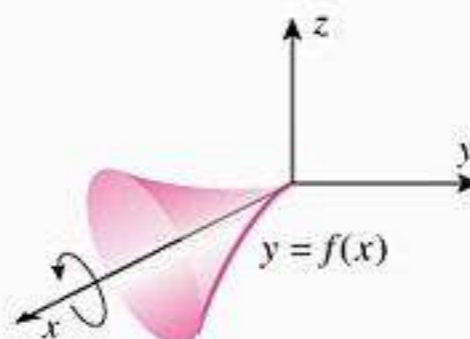


Figura Ex-47

48. Em cada parte, use a idéia do Exercício 47(a) para deduzir uma fórmula para a superfície de revolução dada.
 (a) A superfície gerada fazendo girar a curva $x = f(y)$ no plano xy em torno do eixo y .
 (b) A superfície gerada fazendo girar a curva $y = f(z)$ no plano yz em torno do eixo z .
 (c) A superfície gerada fazendo girar a curva $z = f(x)$ no plano xz em torno do eixo x .
 49. Mostre que, para todos os valores de θ e ϕ , o ponto $(a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$ situa-se sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.1

1. $\sqrt{38}$ 2. uma esfera; 4; (3, 2, -1) 3. $\sqrt{38} - 6$ 4. (a) (0, 0, -3); 5 (b) 4; -4 (c) 2; -8

12.2 VETORES

Muitas grandezas físicas, tais como a área, o comprimento, a massa e a temperatura, são descritas inteiramente sendo dada a magnitude da grandeza. Essas grandezas são denominadas “escalares”. Outras grandezas físicas, denominadas “vetores”, não estão determinadas inteiramente enquanto não sejam especificados não só a magnitude mas também a direção e o sentido. Por exemplo, os ventos são, geralmente, descritos por sua velocidade, direção e sentido, digamos, um vento de 70 km/h do Nordeste. Juntos, a velocidade, a direção e o sentido do vento formam uma quantidade chamada simplesmente de velocidade do vento. Outros exemplos de vetores são a força e o deslocamento. Nesta seção, desenvolveremos as propriedades matemáticas básicas dos vetores.

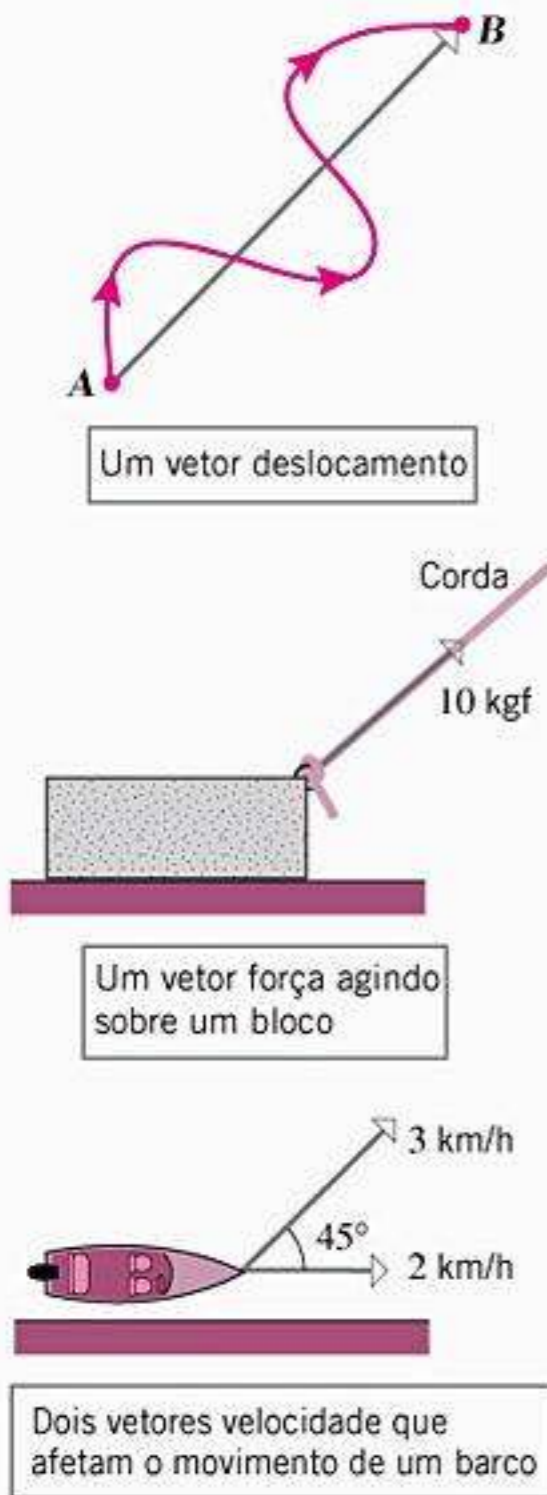


Figura 12.2.1

■ VETORES NA FÍSICA E ENGENHARIA

Uma partícula que se move ao longo de uma reta pode mover-se apenas em dois sentidos, portanto o sentido do movimento pode ser descrito tomando um dos sentidos como sendo positivo e o outro como sendo negativo. Desse modo, o *deslocamento* ou a *variação da posição* de um ponto pode ser descrito por um número real com sinal. Por exemplo, um deslocamento de 3 (= +3) descreve uma variação da posição de 3 unidades no sentido positivo, enquanto que um deslocamento de -3 descreve uma variação da posição de 3 unidades no sentido negativo. Entretanto, para uma partícula que se move no espaço bi ou tridimensional, um sinal de mais ou menos não é suficiente para especificar a direção e o sentido do movimento, sendo necessários outros métodos. Um método é utilizar uma seta, denominada **vetor**, que aponte na direção e sentido do movimento e cujo comprimento represente a distância do ponto inicial até o ponto final da seta; esse vetor é denominado **vetor deslocamento** do movimento. Por exemplo, a primeira parte da Figura 12.2.1 mostra o vetor deslocamento de uma partícula que se move do ponto A ao ponto B ao longo de um caminho curvilíneo. Note que o comprimento da seta descreve a distância entre os pontos inicial e final e não a verdadeira distância percorrida pela partícula.

As setas não se limitam apenas a descrever deslocamentos, podendo ser usadas para descrever quaisquer grandezas físicas que envolvam tanto magnitude quanto direção e sentido. Dois exemplos importantes são forças e velocidades. Por exemplo, a seta da segunda parte da Figura 12.2.1 mostra um vetor força de 10 kgf agindo numa certa direção e sentido sobre um bloco e as setas da terceira parte daquela figura mostram os vetores velocidade de um barco, cujo motor o impulsiona a 2 km/h paralelamente ao litoral e o vento que age num ângulo de 45° com o litoral. A intuição sugere que os dois vetores velocidade serão combinados para formar alguma velocidade líquida para o barco a um certo ângulo com o litoral. Assim, nosso primeiro objetivo nesta seção será definir matematicamente as operações com vetores que possam ser usadas na determinação do efeito combinado de vetores.

■ VETORES DO PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO

No espaço bi e tridimensional, os vetores podem ser representados geometricamente por setas: a direção e sentido da seta especificam a direção e sentido do vetor e o comprimento da seta descreve a magnitude do vetor. A cauda da seta indica o **ponto inicial** do vetor e a ponta da seta indica o **ponto final** do vetor. Denotaremos os vetores com letras minúsculas em negrito, tais como **a**, **k**, **v**, **w** e **x**. Quando discutirmos vetores, estaremos nos referindo aos números reais como **escalares**. Os escalares serão denotados por letras minúsculas em itálico, tais como *a*, *k*, *v*, *w* e *x*. Dois vetores **v** e **w** são considerados **iguais** (ou então, **equivalentes**) se tiverem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, caso em que escrevemos **v = w**. Geometricamente, dois vetores são iguais se forem translações um do outro; assim, os três vetores da Figura 12.2.2a são iguais, mesmo que estejam em posições diferentes.

Como os vetores não são afetados por translação, o ponto inicial de um vetor **v** pode ser movido para qualquer ponto conveniente A através de uma translação apropriada. Se o ponto inicial de **v** for A e o ponto final for B, então escreveremos **v = \vec{AB}** quando quisermos enfatizar esses pontos inicial e final (Figura 12.2.2b). Se os pontos inicial e final de um vetor coincidirem, o vetor terá comprimento nulo; esse vetor é denominado **vetor nulo** ou **vetor zero** e denotado por **0**. Ao vetor zero não estão associados quaisquer direção e sentido, motivo pelo qual podemos convencionar que, dependendo do problema, o vetor nulo tem a direção e o sentido que for mais conveniente.

Há várias operações algébricas que são efetuadas com vetores, todas originadas na Física. Começaremos com a adição de vetores.

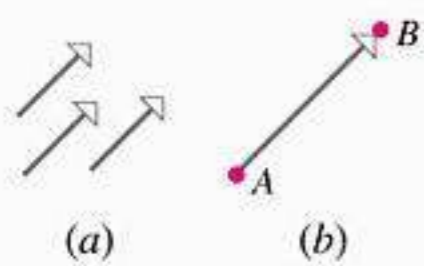


Figura 12.2.2

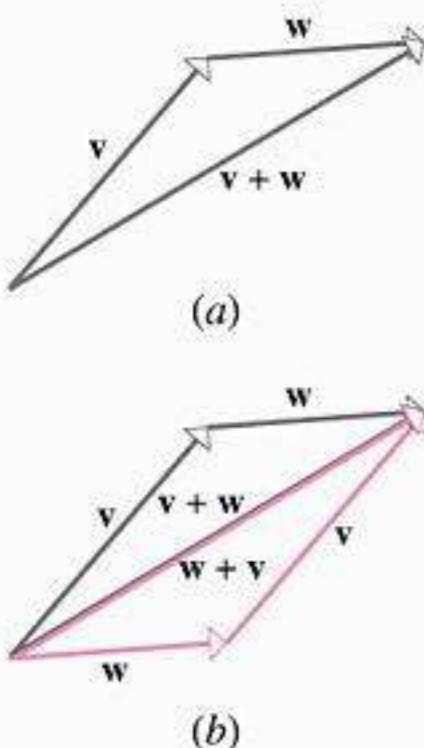


Figura 12.2.3

12.2.1 DEFINIÇÃO Se **v** e **w** forem vetores, então a **soma** **v + w** é o vetor do ponto inicial de **v** ao ponto final de **w** quando os vetores estiverem posicionados de tal forma que o ponto inicial de **w** é o ponto final de **v** (Figura 12.2.3a).

Na Figura 12.2.3b, construímos duas somas, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (flecha mais escura) e $\mathbf{w} + \mathbf{v}$ (flecha mais clara). É evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

e que a soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por \mathbf{v} e \mathbf{w} , quando estes vetores estiverem posicionados de tal forma que tenham o mesmo ponto inicial.

Como os pontos inicial e final de $\mathbf{0}$ coincidem, segue que

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

12.2.2 DEFINIÇÃO Se \mathbf{v} for um vetor não-nulo e k um número real não-nulo (um escalar), então o *múltiplo escalar* $k\mathbf{v}$ é definido como sendo o vetor cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de \mathbf{v} , cuja direção é a mesma de \mathbf{v} e cujo sentido é o mesmo de \mathbf{v} se $k > 0$ e o oposto a \mathbf{v} se $k < 0$. Definimos $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A Figura 12.2.4 mostra a relação geométrica entre um vetor \mathbf{v} e vários múltiplos escalares dele. Observe que se k e \mathbf{v} forem não-nulos, então os vetores \mathbf{v} e $k\mathbf{v}$ situam-se na mesma reta se seus pontos iniciais coincidirem e, caso contrário, em retas paralelas ou coincidentes. Assim, dizemos que \mathbf{v} e $k\mathbf{v}$ são *vetores paralelos*. Observe, também, que o vetor $(-1)\mathbf{v}$ tem o mesmo comprimento de \mathbf{v} , porém com sentido oposto. Dizemos que $(-1)\mathbf{v}$ é o *negativo* de \mathbf{v} , que denotamos por $-\mathbf{v}$ (Figura 12.2.5). Em particular, $-\mathbf{0} = (-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

A subtração de vetores é definida em termos da adição e da multiplicação escalar por

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

A diferença $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ pode ser obtida geometricamente, construindo primeiro o vetor $-\mathbf{w}$ e, então, somando \mathbf{v} e $-\mathbf{w}$, pelo método do paralelogramo (Figura 12.2.6a). Contudo, se \mathbf{v} e \mathbf{w} forem posicionados de tal forma que os pontos iniciais coincidam, então $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ pode ser formado mais diretamente, como mostra a Figura 12.2.6b, traçando o vetor do ponto final de \mathbf{w} (segundo termo) até o ponto final de \mathbf{v} (o primeiro termo). No caso especial em que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, os pontos finais dos vetores coincidem, logo a sua diferença é $\mathbf{0}$; isto é,

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

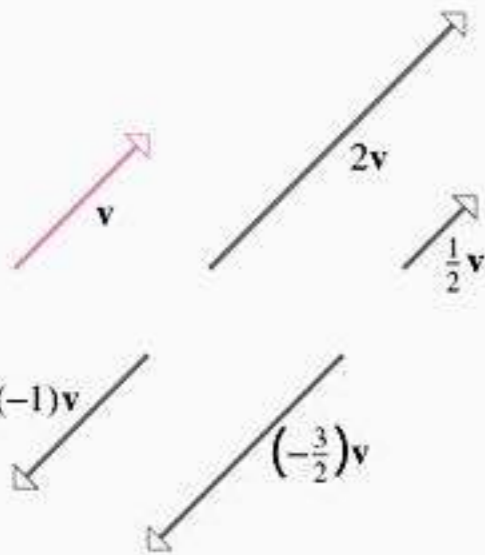


Figura 12.2.4

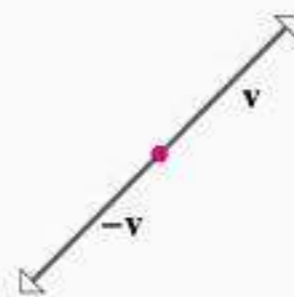


Figura 12.2.5

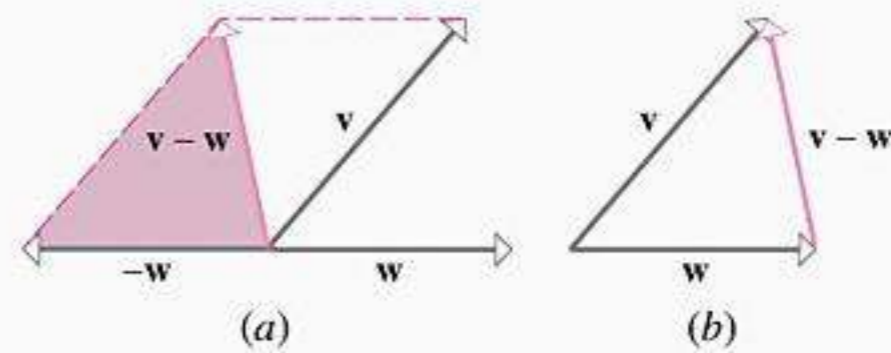


Figura 12.2.6

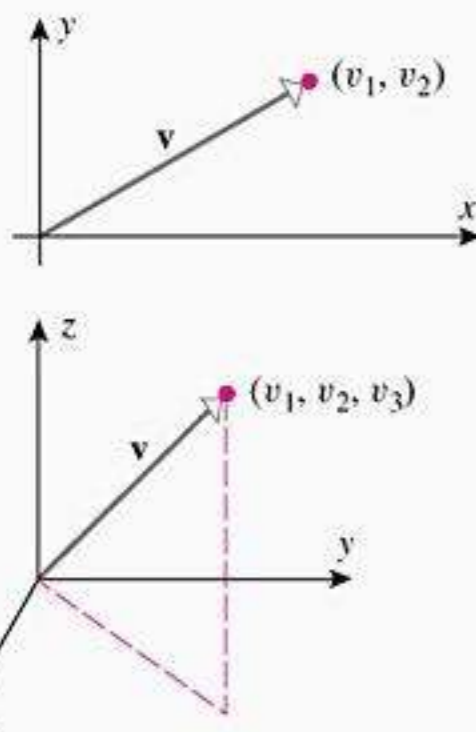


Figura 12.2.7

VETORES EM SISTEMAS DE COORDENADAS

Os problemas envolvendo vetores são, freqüentemente, melhor resolvidos introduzindo um sistema de coordenadas retangulares. Se um vetor \mathbf{v} está posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então seu ponto final terá as coordenadas da forma (v_1, v_2) ou (v_1, v_2, v_3) , dependendo se estiver no espaço bidimensional ou no espaço tridimensional (Figura 12.2.7). Chamaremos essas coordenadas de *componentes* de \mathbf{v} e escreveremos \mathbf{v} em termos de componentes como

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

↑

Espaço bidimensional

↑

Espaço tridimensional

Em particular, os vetores zero nos espaços bi e tridimensional são

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

respectivamente.

Os componentes fornecem uma maneira simples de identificar vetores equivalentes. Por exemplo, considere os vetores $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$, no espaço bidimensional. Se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, então os vetores têm o mesmo comprimento, direção e sentido, e isso significa que seus pontos finais coincidem quando seus pontos iniciais são colocados na origem. Segue que $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$, portanto mostramos que os vetores equivalentes têm os mesmos componentes. Reciprocamente, se $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$, então os pontos finais dos vetores coincidem quando os seus pontos iniciais estiverem localizados na origem. Segue que os vetores têm o mesmo comprimento, direção e sentido, portanto mostramos que vetores com os mesmos componentes são equivalentes. Um argumento análogo é válido no espaço tridimensional, de modo que temos o resultado seguinte.

12.2.3 TEOREMA *Dois vetores são equivalentes se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais.*

Por exemplo,

$$\langle a, b, c \rangle = \langle 1, -4, 2 \rangle$$

se e somente se $a = 1, b = -4$ e $c = 2$.

■ **OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM VETORES**

O próximo teorema mostra como usar componentes para efetuar operações algébricas com vetores.

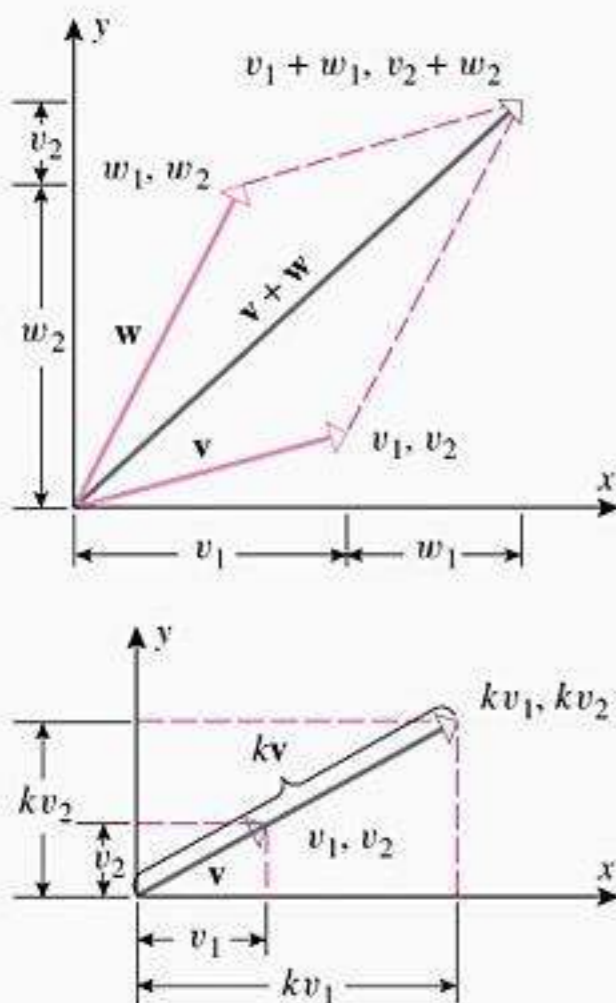


Figura 12.2.8

12.2.4 TEOREMA *Se $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ forem vetores no espaço bidimensional e k for um escalar qualquer, então*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \tag{1}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2 \rangle \tag{2}$$

$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2 \rangle \tag{3}$$

Analogamente, se $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional e k for um escalar qualquer, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle \tag{4}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3 \rangle \tag{5}$$

$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2, kv_3 \rangle \tag{6}$$

Não provaremos esse teorema. Contudo, (1) e (3) deveriam ser evidentes a partir da Figura 12.2.8. Figuras análogas no espaço tridimensional podem ser usadas para motivar (4) e (6). As Fórmulas (2) e (5) podem ser obtidas escrevendo $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$.

► **Exemplo 1** Se $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 1 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 3, 5, -4 \rangle$ então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle -2, 0, 1 \rangle + \langle 3, 5, -4 \rangle = \langle 1, 5, -3 \rangle$$

$$3\mathbf{v} = \langle -6, 0, 3 \rangle$$

$$-\mathbf{w} = \langle -3, -5, 4 \rangle$$

$$\mathbf{w} - 2\mathbf{v} = \langle 3, 5, -4 \rangle - \langle -4, 0, 2 \rangle = \langle 7, 5, -6 \rangle \blacktriangleleft$$

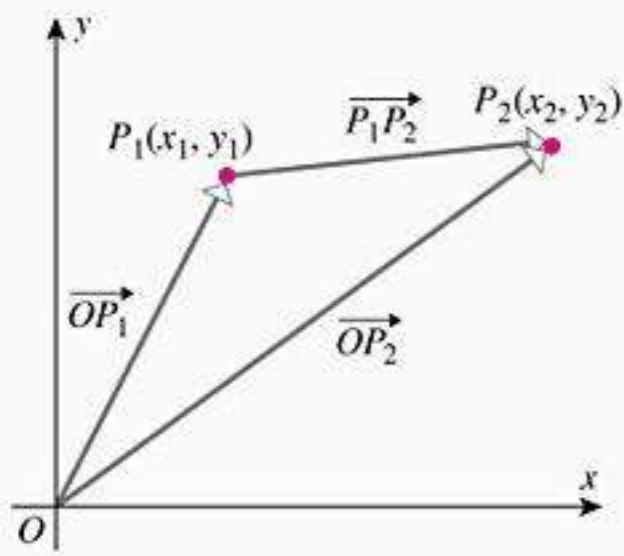


Figura 12.2.9

■ **VETORES COM PONTO INICIAL NÃO NA ORIGEM**

Lembre-se que definimos os componentes de um vetor como as coordenadas de seu ponto final, quando o ponto inicial estiver na origem. Consideraremos agora o problema de encontrar os componentes de um vetor cujo ponto inicial não esteja na origem. Para sermos específicos, suponha que $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sejam pontos no espaço bidimensional e que estejamos interessados em encontrar os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Conforme ilustrado na Figura 12.2.9, podemos escrever esse vetor como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2, y_2 \rangle - \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

Assim, mostramos que os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ podem ser obtidos pela subtração das coordenadas de seu ponto inicial das coordenadas de seu ponto final. Contas análogas valem no espaço tridimensional, de modo que estabelecem o resultado seguinte.

12.2.5 TEOREMA Se $\overrightarrow{P_1P_2}$ for um vetor no espaço bidimensional com ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$, então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \tag{7}$$

Analogamente, se $\overrightarrow{P_1P_2}$ for um vetor no espaço tridimensional com ponto inicial $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2, z_2)$, então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \tag{8}$$

► **Exemplo 2** No espaço bidimensional, o vetor de $P_1(1, 3)$ a $P_2(4, -2)$ é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 4 - 1, -2 - 3 \rangle = \langle 3, -5 \rangle$$

e no espaço tridimensional, o vetor de $A(0, -2, 5)$ a $B(3, 4, -1)$ é

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - 0, 4 - (-2), -1 - 5 \rangle = \langle 3, 6, -6 \rangle \blacktriangleleft$$

■ **REGRAS DA ARITMÉTICA VETORIAL**

O seguinte teorema mostra que muitas das regras familiares da aritmética comum também são válidas na aritmética vetorial.

12.2.6 TEOREMA Para quaisquer vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} e quaisquer escalares a e b , as seguintes relações são válidas:

- (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- (d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- (e) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
- (f) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- (g) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
- (h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Segue da parte (b) do Teorema 12.2.6 que a expressão

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

não é ambígua, uma vez que resulta o mesmo vetor, independentemente da maneira em que os termos são agrupados.

Os resultados neste teorema podem ser provados algebricamente usando componentes ou geometricamente tratando os vetores como setas. Provaremos a parte (b) das duas maneiras e deixaremos o restante das provas como exercícios.

Observe que na Figura 12.2.10 os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} estão colocados um após o outro, e que a soma

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

é o vetor do ponto inicial de \mathbf{u} (a primeira parcela) ao ponto final de \mathbf{w} (a última parcela). Isso também vale para quatro ou mais vetores (Figura 12.2.11).

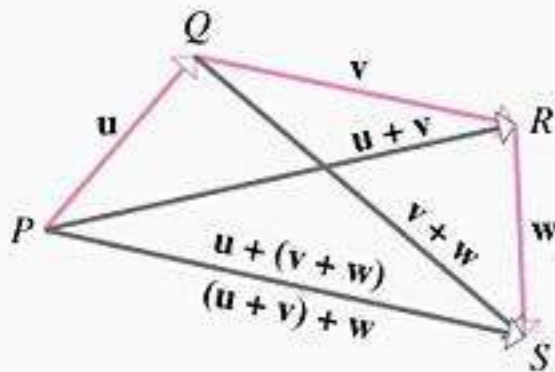


Figura 12.2.10

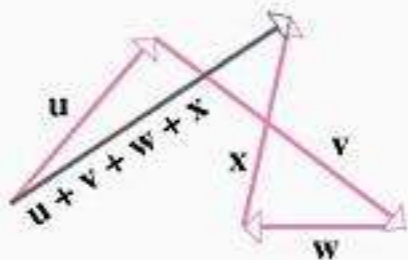


Figura 12.2.11

DEMONSTRAÇÃO (b) (Algebraica no espaço bidimensional) Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$. Então

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= (\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle) + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle \\ &= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO (b) (Geométrica) Sejam \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} representados por \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{QR} e \overrightarrow{RS} , conforme mostrado na Figura 12.2.10. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \overrightarrow{QS} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{PS} \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \overrightarrow{PR} \quad \text{e} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{PS} \end{aligned}$$

Por consequência,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

■ NORMA DE UM VETOR

A distância entre os pontos inicial e final de um vetor \mathbf{v} é chamada de **comprimento**, **norma** ou **magnitude** de \mathbf{v} e é denotada por $\|\mathbf{v}\|$. Essa distância não muda se o vetor for transladado, portanto, para propósitos de cálculo da norma, podemos supor que o vetor esteja posicionado com seu ponto inicial na origem (Figura 12.2.12). Isso torna evidente que a norma de um vetor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ no espaço bidimensional é dada por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{9}$$

e a norma de um vetor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ no espaço tridimensional é dada por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{10}$$

Exemplo 3 Determine a norma de $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$, $10\mathbf{v} = \langle -20, 30 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 2, 3, 6 \rangle$.

Solução De (9) e (10)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \|10\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-20)^2 + 30^2} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \\ \|\mathbf{w}\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Observe que $\|10\mathbf{v}\| = 10\|\mathbf{v}\|$ no Exemplo 3. Isso é consistente com a Definição 12.2.2, que estipulou que o comprimento de $k\mathbf{v}$ deve ser $|k|$ vezes o comprimento de \mathbf{v} ; isto é,

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| \tag{11}$$

Assim, por exemplo

$$\begin{aligned} \|3\mathbf{v}\| &= |3|\|\mathbf{v}\| = 3\|\mathbf{v}\| \\ \|-2\mathbf{v}\| &= |-2|\|\mathbf{v}\| = 2\|\mathbf{v}\| \\ \|\mathbf{-v}\| &= \|-1\mathbf{v}\| = |-1|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Isso se aplica tanto a vetores no espaço bi quanto tridimensional.

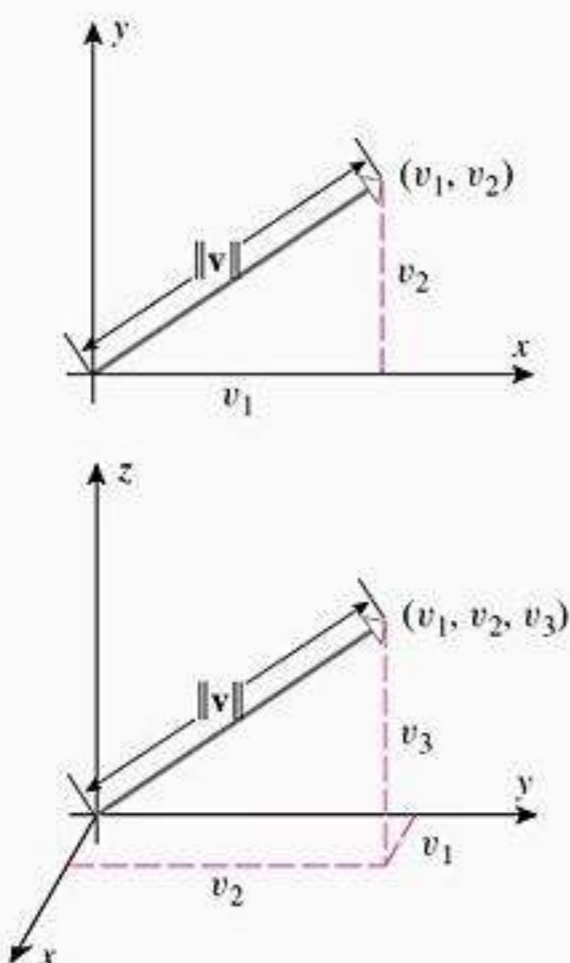


Figura 12.2.12

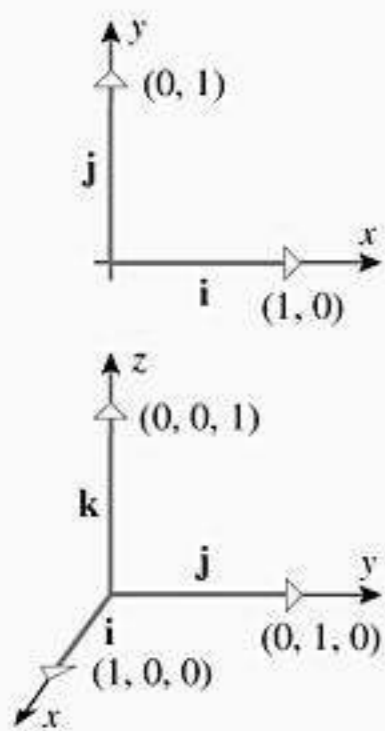


Figura 12.2.13

■ VETORES UNITÁRIOS

Um vetor de comprimento 1 é denominado *vetor unitário*. Num sistema de coordenadas xy , os vetores unitários ao longo dos eixos x e y são denotados por \mathbf{i} e \mathbf{j} , respectivamente e, num sistema de coordenadas xyz , os vetores unitários ao longo dos eixos x , y e z são denotados por \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , respectivamente (Figura 12.2.13). Desse modo,

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Espaço bidimensional

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Espaço tridimensional

Todo vetor no espaço bidimensional pode ser expresso de maneira única em termos de \mathbf{i} e \mathbf{j} , enquanto que no espaço tridimensional pode ser expresso de maneira única em termos de \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , como segue:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, 0 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle = v_1 \langle 1, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + v_3 \langle 0, 0, 1 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

As duas notações para vetores ilustradas no Exemplo 4 são completamente intercambiáveis, sendo a escolha uma questão de conveniência ou de preferência pessoal.

► Exemplo 4

ESPAÇO BIDIMENSIONAL	ESPAÇO TRIDIMENSIONAL
$\langle 2, 3 \rangle = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$	$\langle 2, -3, 4 \rangle = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
$\langle -4, 0 \rangle = -4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = -4\mathbf{i}$	$\langle 0, 3, 0 \rangle = 3\mathbf{j}$
$\langle 0, 0 \rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$
$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$	$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$5(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$	$2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + 4(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\ 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\ = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$	$\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\ = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$
$\ v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}\ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	$\ v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}\ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

■ NORMALIZANDO UM VETOR

Um problema comum nas aplicações é encontrar um vetor unitário \mathbf{u} que tenha a mesma direção e sentido de algum vetor \mathbf{v} não-nulo dado. Isso pode ser feito multiplicando-se \mathbf{v} pelo recíproco de seu comprimento; isto é,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que o vetor \mathbf{v} : a direção e o sentido são os mesmos, pois $k = 1/\|\mathbf{v}\|$ é um escalar positivo, e o comprimento é 1, pois

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

O processo de multiplicação de um vetor \mathbf{v} pelo recíproco de seu comprimento para obter um vetor unitário com a mesma direção e sentido é chamado de *normalização* de \mathbf{v} .

► Exemplo 5 Determine o vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução O vetor \mathbf{v} tem o comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

portanto, o vetor unitário \mathbf{u} na mesma direção e sentido de \mathbf{v} é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitos recursos computacionais podem realizar operações vetoriais e alguns têm embutidas operações de norma e normalização. Se a sua calculadora tiver estas capacidades, use-a para verificar os cálculos nos Exemplos 1, 3 e 5.

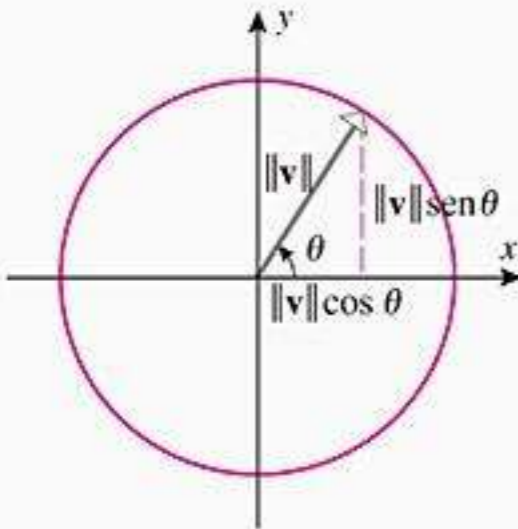


Figura 12.2.14

■ **VETORES DETERMINADOS POR COMPRIMENTO E ÂNGULO**

Se \mathbf{v} for um vetor não-nulo com o seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas xy , e se θ for o ângulo entre o eixo x positivo e a reta radial através de \mathbf{v} , então o componente x de \mathbf{v} pode ser escrito como $\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, enquanto que $\|\mathbf{v}\|\sin\theta$ é o componente y (Figura 12.2.14); portanto, \mathbf{v} pode ser expresso na forma trigonométrica como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \sin\theta \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\sin\theta\mathbf{j} \quad (12)$$

No caso especial de um vetor unitário \mathbf{u} , isso simplifica para

$$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \quad (13)$$

► **Exemplo 6**

- (a) Determine o vetor de comprimento 2 que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo x positivo.
- (b) Determine o ângulo que o vetor $\mathbf{v} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ forma com o eixo x positivo.

Solução (a) De (12)

$$\mathbf{v} = 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

Solução (b) Vamos normalizar \mathbf{v} , usar (13) para encontrar $\sin\theta$ e $\cos\theta$ e então usar esses valores para encontrar θ . Normalizando \mathbf{v} obtém-se

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

Assim, $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ e $\sin\theta = 1/2$, donde concluímos que $\theta = 5\pi/6$. ◀

■ **VETORES DETERMINADOS POR COMPRIMENTO E UM VETOR NA MESMA DIREÇÃO E SENTIDO**

É um problema comum em aplicações que a direção e o sentido nos espaços bi ou tridimensional sejam determinados por algum vetor unitário \mathbf{u} e que queiramos encontrar os componentes do vetor \mathbf{v} que tenha a mesma direção e sentido que \mathbf{u} e algum comprimento especificado $\|\mathbf{v}\|$. Isso pode ser feito expressando \mathbf{v} como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} \quad \boxed{\text{v é igual a seu comprimento vezes um vetor unitário na mesma direção e sentido}}$$

e então observando os componentes de $\|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

► **Exemplo 7** A Figura 12.2.15 mostra um vetor \mathbf{v} de comprimento $\sqrt{5}$ que se estende ao longo da reta passando por A e B . Encontre os componentes de \mathbf{v} .

Solução Vamos encontrar, primeiro, os componentes do vetor \overrightarrow{AB} , então normalizamos este vetor para obter um vetor unitário na direção de \mathbf{v} e depois multiplicamos este vetor unitário por $\|\mathbf{v}\|$ para obter o vetor \mathbf{v} . Os cálculos são os seguintes:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2, 5, 0 \rangle - \langle 0, 0, 4 \rangle = \langle 2, 5, -4 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \left\langle \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right) = \sqrt{5} \left\langle \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right\rangle \quad \blacktriangleleft$$

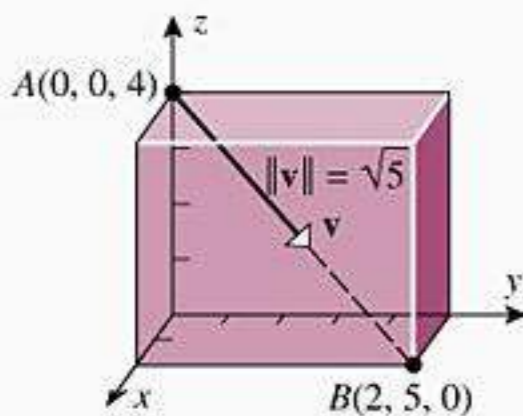


Figura 12.2.15

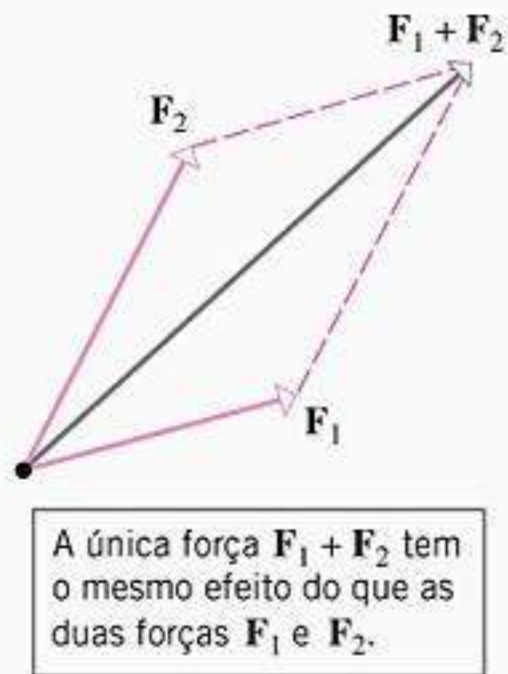


Figura 12.2.16

■ RESULTANTE DE DUAS FORÇAS CONCORRENTES

O efeito que uma força exerce sobre um objeto depende da magnitude, da direção e do sentido da força e do ponto na qual foi aplicada. Assim, as forças são consideradas como sendo grandezas vetoriais e, de fato, as operações algébricas com vetores que definimos nesta seção têm sua origem no estudo das forças. Por exemplo, é um fato da Física que se duas forças F_1 e F_2 forem aplicadas em um mesmo ponto de um objeto, então as duas forças têm o mesmo efeito sobre o objeto do que a única força $F_1 + F_2$ aplicada naquele ponto (Figura 12.2.16). Os físicos e engenheiros denominam $F_1 + F_2$ a **resultante** de F_1 e F_2 e dizem que as forças F_1 e F_2 são **concorrentes** para indicar que elas foram aplicadas no mesmo ponto.

Em muitas aplicações, são conhecidas as magnitudes de duas forças concorrentes e o ângulo entre elas e o problema é o de encontrar a magnitude, direção e sentido da resultante. Por exemplo, de acordo com a Figura 12.2.17, vamos supor que sejam conhecidas as magnitudes das forças F_1 e F_2 e o ângulo ϕ entre elas, e que estejamos interessados em encontrar a magnitude da resultante $F_1 + F_2$ e o ângulo α que a resultante faz com a força F_1 . Isso pode ser resolvido por métodos trigonométricos baseados nas leis dos senos e dos cossenos. Para isso, lembre-se que a lei dos senos aplicada ao triângulo da Figura 12.2.18 afirma que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

e a lei dos cossenos implica que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

De acordo com a Figura 12.2.19, e usando o fato de que $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, tem-se a partir da lei dos cossenos que

$$\|F_1 + F_2\|^2 = \|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + 2\|F_1\|\|F_2\|\cos \phi \tag{14}$$

Além disso, segue da lei dos senos que

$$\frac{\|F_2\|}{\text{sen } \alpha} = \frac{\|F_1 + F_2\|}{\text{sen}(\pi - \phi)}$$

o que, com a ajuda da identidade $\text{sen}(\pi - \phi) = \text{sen } \phi$, pode ser expresso como

$$\text{sen } \alpha = \frac{\|F_2\|}{\|F_1 + F_2\|} \text{sen } \phi \tag{15}$$

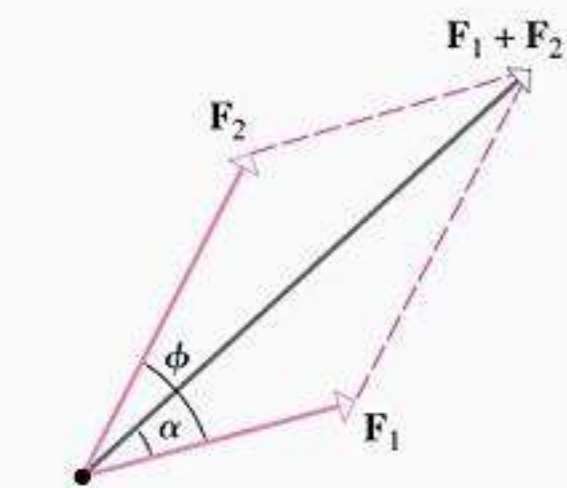


Figura 12.2.17

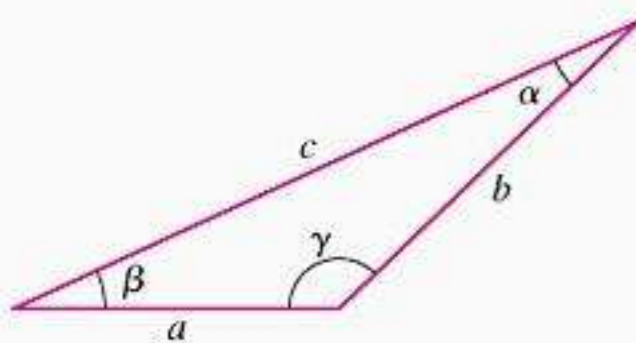


Figura 12.2.18

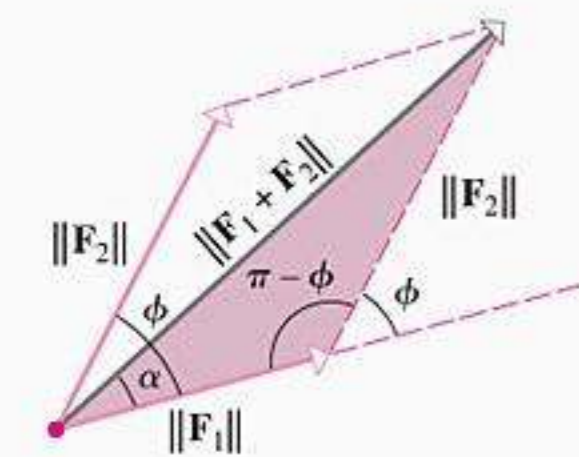


Figura 12.2.19

► **Exemplo 8** Suponha que duas forças sejam aplicadas numa argola conforme a Figura 12.2.20. Determine a magnitude da resultante e o ângulo θ que ela faz com o eixo x positivo.

Solução É dado que $\|F_1\| = 200$ N e $\|F_2\| = 300$ N e que o ângulo entre os vetores F_1 e F_2 é $\phi = 40^\circ$. Assim, segue de (14) que a magnitude da resultante é

$$\begin{aligned} \|F_1 + F_2\| &= \sqrt{\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + 2\|F_1\|\|F_2\|\cos \phi} \\ &= \sqrt{(200)^2 + (300)^2 + 2(200)(300)\cos 40^\circ} \\ &\approx 471 \text{ N} \end{aligned}$$

Além disso, segue de (15) que o ângulo α entre F_1 e a resultante é

$$\alpha = \text{arc sen} \left(\frac{\|F_2\|}{\|F_1 + F_2\|} \text{sen } \phi \right) \approx \text{arc sen} \left(\frac{300}{471} \text{sen } 40^\circ \right) \approx 24,2^\circ$$

Assim, o ângulo θ que a resultante faz com o eixo x positivo é

$$\theta = \alpha + 30^\circ \approx 24,2^\circ + 30^\circ = 54,2^\circ$$

(Figura 12.2.21) ◀

A resultante de três ou mais forças concorrentes pode ser determinada trabalhando em pares. Por exemplo, a resultante de três forças concorrentes pode ser determinada descobrindo a resultante de quaisquer duas das três forças e, então, descobrindo a resultante daquela resultante com a terceira força.

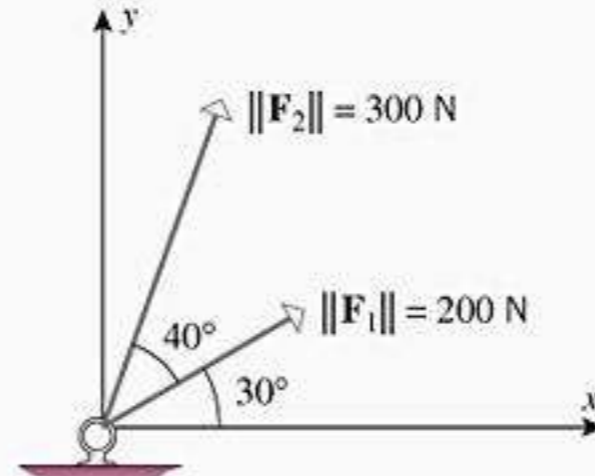


Figura 12.2.20

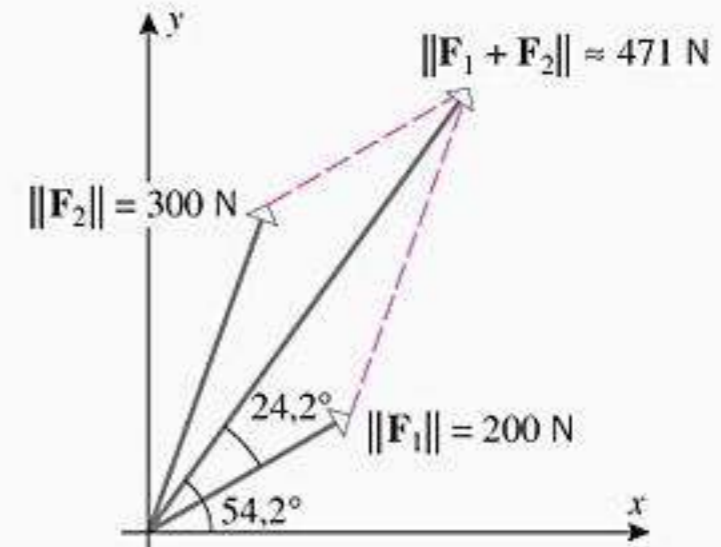


Figura 12.2.21

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.2 (Ver página 804 para respostas.)

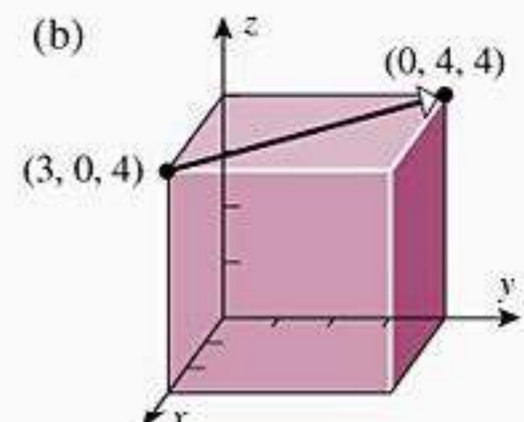
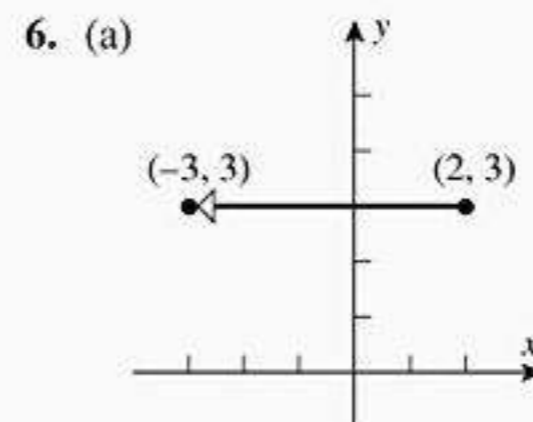
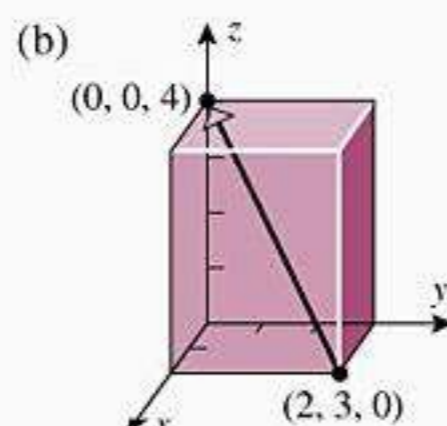
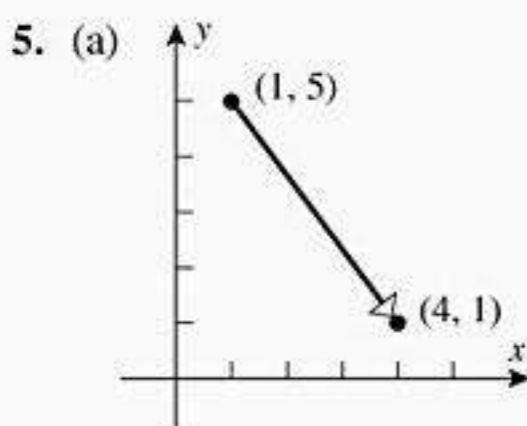
- Se $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 7 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 4, 10, -5 \rangle$, então
 - $\|\mathbf{v}\| =$ _____
 - $\mathbf{v} + \mathbf{w} =$ _____
 - $\mathbf{v} - \mathbf{w} =$ _____
 - $2\mathbf{v} =$ _____.
- O vetor unitário na direção e sentido de $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 7 \rangle$ é _____.
- O vetor unitário do espaço bidimensional que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x positivo é _____.
- Considere os pontos $A(3, 4, 0)$ e $B(0, 0, 5)$.
 - $\overrightarrow{AB} =$ _____
 - Se \mathbf{v} for um vetor com mesma direção e sentido que \overrightarrow{AB} e de comprimento igual a $\sqrt{2}$, então $\mathbf{v} =$ _____.

EXERCÍCIOS 12.2

1-4 Esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem.

- $\langle 2, 5 \rangle$
 - $\langle -5, -4 \rangle$
 - $\langle 2, 0 \rangle$
 - $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
 - $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 - $-6\mathbf{j}$
- $\langle -3, 7 \rangle$
 - $\langle 6, -2 \rangle$
 - $\langle 0, -8 \rangle$
 - $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
 - $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
 - $4\mathbf{i}$
- $\langle 1, -2, 2 \rangle$
 - $\langle 2, 2, -1 \rangle$
 - $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
 - $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\langle -1, 3, 2 \rangle$
 - $\langle 3, 4, 2 \rangle$
 - $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5-6 Determine os componentes do vetor e esboce um vetor equivalente com seu ponto inicial na origem.



7-8 Determine os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

- $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$
 - $P_1(7, -2), P_2(0, 0)$
 - $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$
- $P_1(-6, -2), P_2(-4, -1)$
 - $P_1(0, 0, 0), P_2(-1, 6, 1)$
 - $P_1(4, 1, -3), P_2(9, 1, -3)$
- Determine o ponto final de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ se o ponto inicial for $(1, -2)$.
 - Determine o ponto inicial de $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 2 \rangle$ se o ponto final for $(5, 0, -1)$.
- Determine o ponto final de $\mathbf{v} = \langle 7, 6 \rangle$ se o ponto inicial for $(2, -1)$.

- (b) Determine o ponto final de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ se o ponto inicial for $(-2, 1, 4)$.

11-12 Efetue as operações indicadas com os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} .

11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{j}$
 (a) $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ (b) $6\mathbf{u} + 4\mathbf{w}$
 (c) $-\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ (d) $4(3\mathbf{u} + \mathbf{v})$
 (e) $-8(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + 2\mathbf{u}$ (f) $3\mathbf{w} - (\mathbf{v} - \mathbf{w})$
12. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, 1, 3 \rangle$
 (a) $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ (b) $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ (c) $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$
 (d) $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$ (e) $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$ (f) $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

13-14 Determine a norma de \mathbf{v} .

13. (a) $\mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$ (b) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
 (c) $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 4 \rangle$ (d) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
14. (a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$ (b) $\mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{7}\mathbf{j}$
 (c) $\mathbf{v} = \langle 0, -3, 0 \rangle$ (d) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
15. Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine
 (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
 (c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{v}\|$ (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
 (e) $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w} \right\|$
16. É possível ter $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores não-nulos? Justifique sua conclusão geometricamente.

17-18 Determine os vetores unitários que satisfaçam as condições dadas.

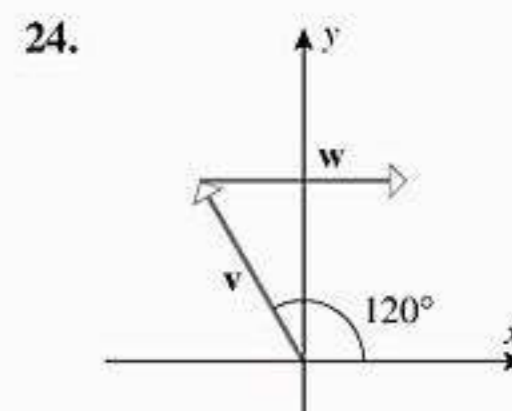
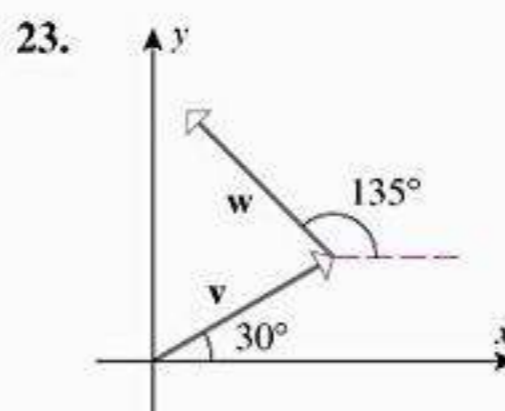
17. (a) Mesma direção e sentido que $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
 (b) Sentido oposto a $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
 (c) Mesma direção e sentido que o vetor do ponto $A(-1, 0, 2)$ até o ponto $B(3, 1, 1)$.
18. (a) Sentido oposto a $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.
 (b) Mesma direção e sentido que $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
 (c) Mesma direção e sentido que o vetor do ponto $A(-3, 2)$ até o ponto $B(1, -1)$.

19-20 Determine os vetores que satisfaçam as condições dadas.

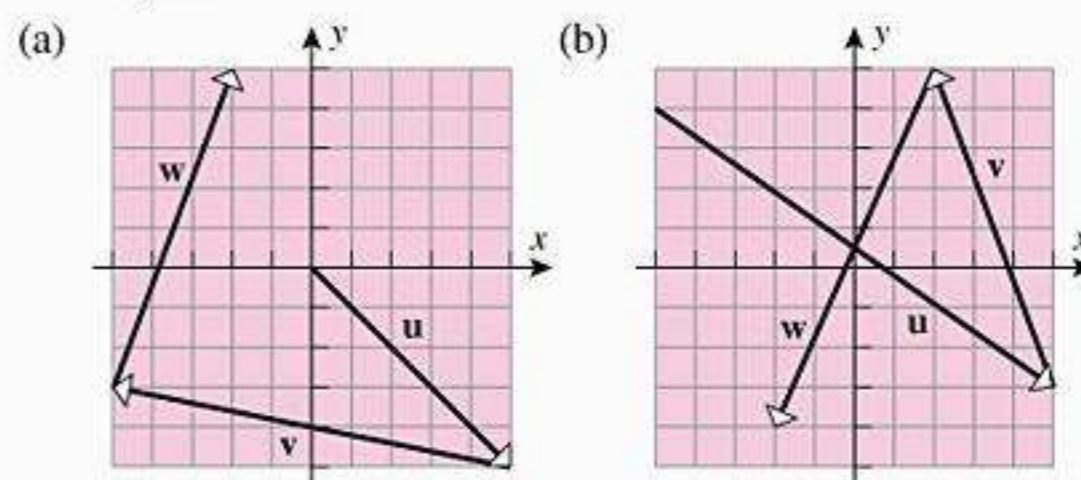
19. (a) Sentido oposto a $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$ e a metade do tamanho de \mathbf{v} .
 (b) Comprimento $\sqrt{17}$ e o mesmo sentido e direção que $\mathbf{v} = \langle 7, 0, -6 \rangle$
20. (a) Mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e três vezes o comprimento de \mathbf{v} .
 (b) Comprimento 2, direção igual e sentido oposto a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
21. Em cada parte, determine a forma em componentes do vetor \mathbf{v} no espaço bidimensional que tenha o comprimento dado e faça o ângulo θ dado com o eixo x positivo.
 (a) $\|\mathbf{v}\| = 3$; $\theta = \pi/4$ (b) $\|\mathbf{v}\| = 2$; $\theta = 90^\circ$
 (c) $\|\mathbf{v}\| = 5$; $\theta = 120^\circ$ (d) $\|\mathbf{v}\| = 1$; $\theta = \pi$

22. Determine a forma em componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ no espaço bidimensional, dado que $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\|\mathbf{w}\| = 1$, \mathbf{v} faz um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo e \mathbf{w} faz um ângulo de $3\pi/4$ com o eixo x positivo.

23-24 Determine a forma em componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, dado que \mathbf{v} e \mathbf{w} são vetores unitários.



25. Em cada parte, esboce o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e expresse-o em forma de componentes.

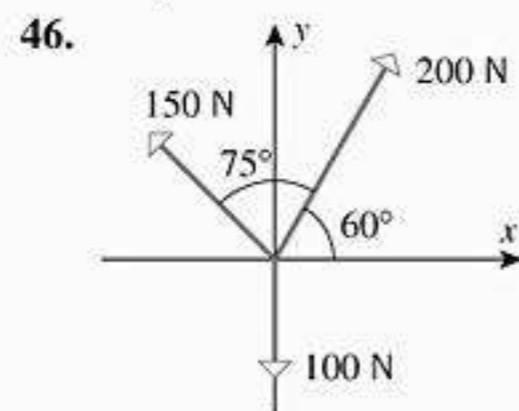
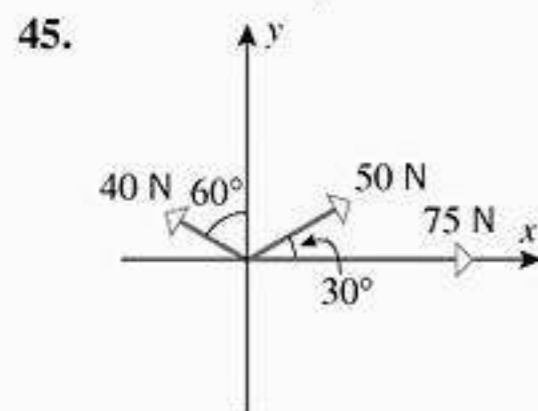
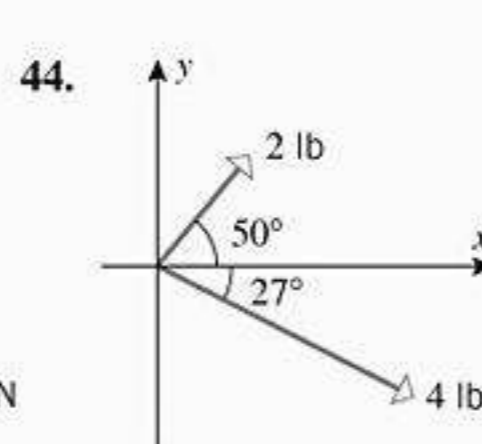
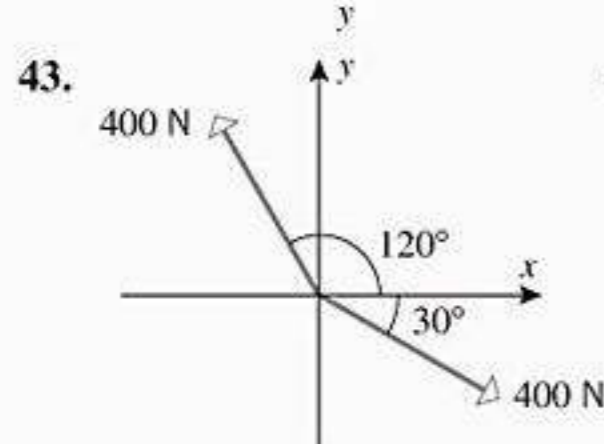
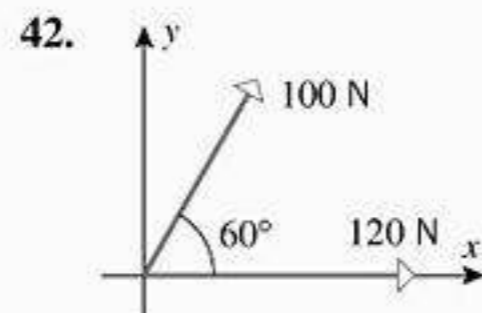
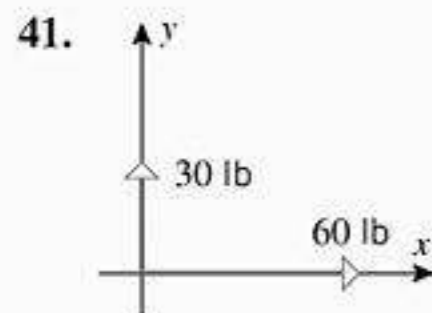


26. Em cada parte do Exercício 25, esboce o vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e expresse-o em forma de componentes.
27. Sejam $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 4, -1 \rangle$. Determine o vetor \mathbf{x} que satisfaça $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.
28. Sejam $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 3, 4 \rangle$. Determine o vetor \mathbf{x} que satisfaça $\mathbf{u} - 2\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{w} + 3\mathbf{v}$.
29. Determine \mathbf{u} e \mathbf{v} se $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $3\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
30. Determine \mathbf{u} e \mathbf{v} se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$ e $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$.
31. Use vetores para determinar o comprimento das diagonais do paralelogramo que tem lados adjacentes $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.
32. Use vetores para determinar o quarto vértice de um paralelogramo, três dos quais são $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(2, 4)$. [Nota: há mais de uma resposta.]
33. (a) Dado que $\|\mathbf{v}\| = 3$, determine todos os valores de k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.
 (b) Dado que $k = -2$ e $\|k\mathbf{v}\| = 6$, determine $\|\mathbf{v}\|$.
34. O que sabemos sobre k e \mathbf{v} se $\|k\mathbf{v}\| = 0$?
35. Em cada parte, determine dois vetores unitários no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
 (a) Paralelo à reta $y = 3x + 2$.
 (b) Paralela à reta $x + y = 4$.
 (c) Perpendicular à reta $y = -5x + 1$.
36. Em cada parte, determine dois vetores unitários no espaço tridimensional que satisfaçam a condição dada.
 (a) Perpendicular ao plano xy .
 (b) Perpendicular ao plano xz .
 (c) Perpendicular ao plano yz .

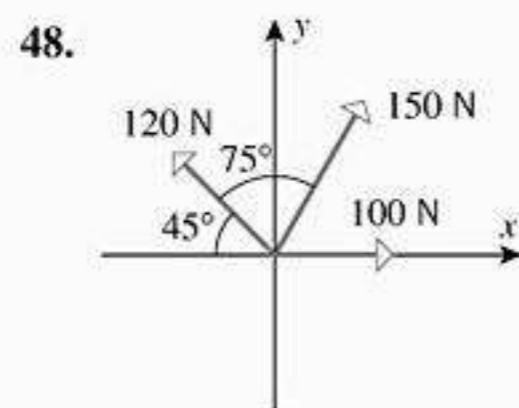
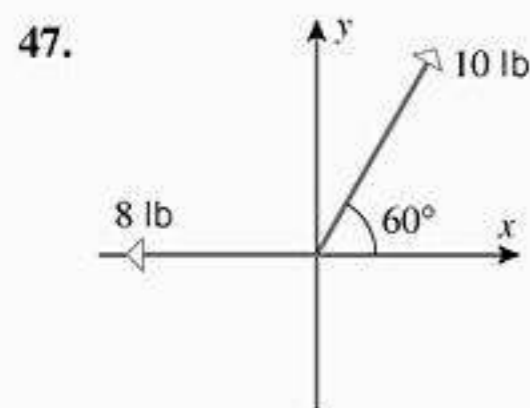
ENFOCANDO CONCEITOS

37. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ um vetor arbitrário. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
 (a) $\|\mathbf{r}\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r}\| \leq 1$ (c) $\|\mathbf{r}\| > 1$.
38. Sejam $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
 (a) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \leq 1$ (c) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| > 1$.
39. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ um vetor arbitrário. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) no espaço tridimensional que satisfaçam a condição dada.
 (a) $\|\mathbf{r}\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r}\| \leq 1$ (c) $\|\mathbf{r}\| > 1$.
40. Sejam $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ e $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$. Supondo que $k > \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$ descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) para os quais $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\| = k$.

41-46 Determine a magnitude da força resultante e o ângulo que ela faz com o eixo x positivo.



47-48 Diz-se que uma partícula está em *equilíbrio estático* se a resultante de todas as forças aplicadas nela for zero. Nestes exercícios, determine a força \mathbf{F} que deve ser aplicada no ponto para produzir o equilíbrio estático. Descreva \mathbf{F} especificando sua magnitude e o ângulo que ela faz com o eixo x positivo.



49. A figura abaixo mostra um sinal de tráfego de 250 lb sustentado por dois cabos flexíveis. As magnitudes das forças que os cabos aplicam na argola são chamadas de *tensões* nos cabos. Encontre as tensões nos cabos se o sinal de tráfego estiver em equilíbrio estático (definido acima do Exercício 47).

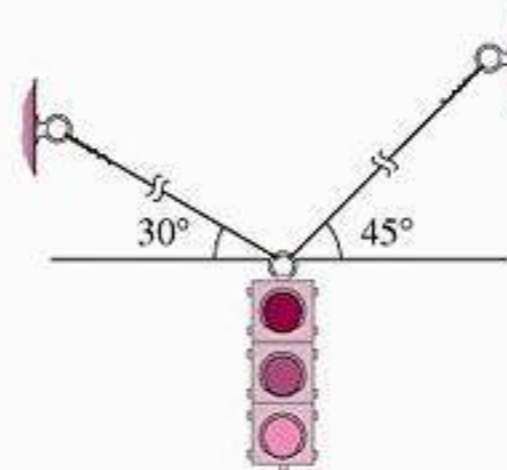


Figura Ex-49

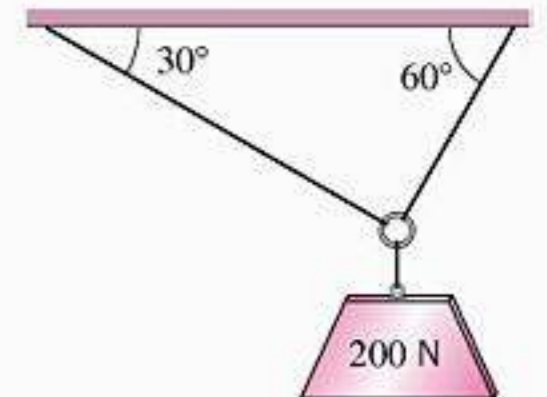


Figura Ex-50

50. Determine as tensões nos cabos mostrados na figura abaixo se o bloco estiver em equilíbrio estático (ver Exercício 49).

51. Diz-se que um vetor \mathbf{w} é uma *combinação linear* dos vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 se \mathbf{w} puder ser expresso como $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, onde c_1 e c_2 são escalares.

- (a) Determine escalares c_1 e c_2 para expressar o vetor $4\mathbf{j}$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
 (b) Mostre que o vetor $\langle 3, 5 \rangle$ não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, -3 \rangle$ e $\mathbf{v}_2 = \langle -2, 6 \rangle$.

52. Diz-se que um vetor \mathbf{w} é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 se \mathbf{w} puder ser expresso como $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, onde c_1, c_2 e c_3 são escalares.

- (a) Determine escalares c_1, c_2 e c_3 para expressar $\langle -1, 1, 5 \rangle$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{v}_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$ e $\mathbf{v}_3 = \langle 0, 1, 1 \rangle$.
 (b) Mostre que o vetor $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

53. Use um teorema da Geometria Plana para mostrar que se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores no espaço bi ou tridimensional, então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

que é chamada de *desigualdade triangular para vetores*. Dê alguns exemplos para ilustrar essa desigualdade.

54. Prove algebricamente as partes (a), (b) e (e) do Teorema 12.2.6 no espaço bidimensional.

55. Prove algebricamente as partes (d), (g) e (h) do Teorema 12.2.6 no espaço bidimensional.

56. Prove geometricamente a parte (f) do Teorema 12.2.6.

ENFOCANDO CONCEITOS

57. Use vetores para provar que o segmento de reta que une o ponto médio de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade do comprimento do terceiro lado.

58. Use vetores para provar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.2

1. (a) $\sqrt{59}$ (b) $\langle 7, 9, 2 \rangle$ (c) $\langle -1, -11, 12 \rangle$ (d) $\langle 6, -2, 14 \rangle$ 2. $\frac{1}{\sqrt{59}}\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{59}}, -\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}} \right\rangle$ 3. $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$
 4. (a) $\langle -3, -4, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left\langle -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1 \right\rangle$

12.3 PRODUTO ESCALAR; PROJEÇÕES

Na última seção, definimos três operações com vetores – adição, subtração e multiplicação por escalar. Na multiplicação por escalar, um vetor é multiplicado por um escalar e o resultado é um vetor. Nesta seção, definiremos um novo tipo de multiplicação na qual dois vetores são multiplicados para produzir um escalar. Essa operação de multiplicação tem muitos usos, alguns dos quais também discutiremos nesta seção.

■ DEFINIÇÃO DO PRODUTO ESCALAR

12.3.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ forem vetores no espaço bidimensional, então o *produto escalar* de \mathbf{u} e \mathbf{v} é escrito como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Analogamente, se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então seu produto escalar é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Em palavras, o produto escalar de dois vetores é formado pela multiplicação de seus componentes correspondentes e pela soma dos produtos resultantes. Note que o produto escalar de dois vetores é um escalar.

► Exemplo 1

$$\langle 3, 5 \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle = 3(-1) + 5(2) = 7$$

$$\langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -3, 2 \rangle = 2(-3) + 3(2) = 0$$

$$\langle 1, -3, 4 \rangle \cdot \langle 1, 5, 2 \rangle = 1(1) + (-3)(5) + 4(2) = -6$$

Aqui estão os mesmos cálculos expressos de outra maneira:

$$(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 3(-1) + 5(2) = 7$$

$$(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2(-3) + 3(2) = 0$$

$$(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 1(1) + (-3)(5) + 4(2) = -6 \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitos recursos computacionais têm à disposição a operação produto escalar. Se sua calculadora tiver esta capacidade, use-a para verificar os cálculos do Exemplo 1.

Observe a diferença entre os dois zeros que aparecem na parte (e) do Teorema 12.3.2 – o zero no lado esquerdo é o *vetor zero* (em negrito), enquanto que o zero no lado direito é o *escalar zero* (tipo fino).

■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO ESCALAR

O teorema seguinte fornece algumas das propriedades algébricas básicas do produto escalar.

12.3.2 TEOREMA Se \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} forem vetores no espaço bi ou tridimensional e a for um escalar, então

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(c) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

(d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

(e) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$

Provaremos as partes (c) e (d) para os vetores no espaço tridimensional e deixaremos algumas outras partes como exercícios.

DEMONSTRAÇÃO (c) Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então

$$a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = a(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (au_1)v_1 + (au_2)v_2 + (au_3)v_3 = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

Analogamente, $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

DEMONSTRAÇÃO (d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|\mathbf{v}\|^2$. ■

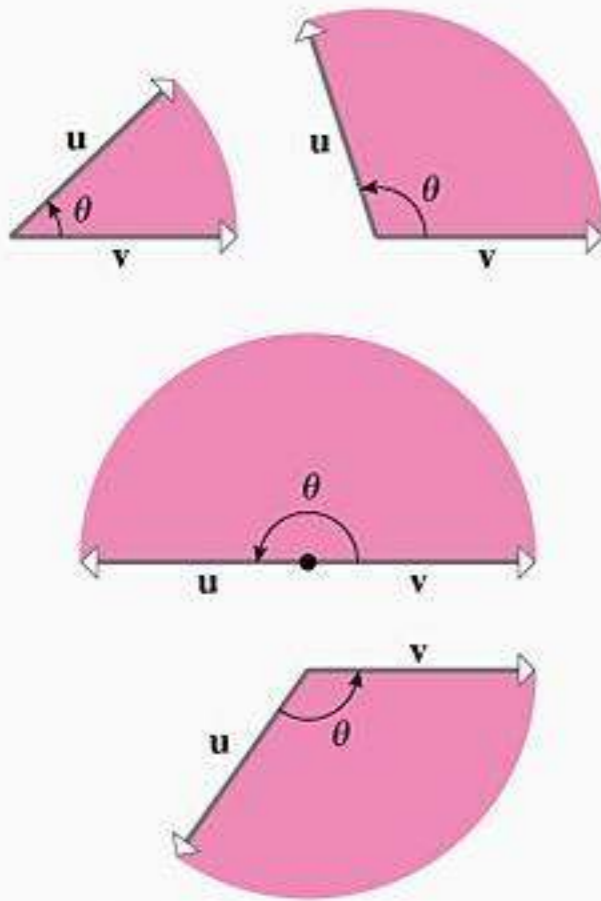
A seguinte forma alternativa da fórmula na parte (d) do Teorema 12.3.2 fornece uma maneira útil de expressar a norma de um vetor em termos de um produto escalar:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (1)$$

■ ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Suponha que \mathbf{u} e \mathbf{v} sejam vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional que estejam posicionados de modo que seus pontos iniciais coincidam. Definimos o **ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v}** como sendo o ângulo θ determinado pelos vetores que satisfaz a condição $0 \leq \theta \leq \pi$ (Figura 12.3.1). No espaço bidimensional, θ é o menor ângulo no sentido anti-horário que um dos vetores pode ser girado até se alinhar com o outro.

O próximo teorema fornece uma maneira de calcular o ângulo entre dois vetores a partir de seus componentes.



θ é o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Figura 12.3.1

12.3.3 TEOREMA Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e se θ for o ângulo entre eles, então

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (2)$$

DEMONSTRAÇÃO Suponha que os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ estejam posicionados para formar três lados de um triângulo, como mostrado na Figura 12.3.2. Segue da lei dos cossenos que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \quad (3)$$

Usando as propriedades do produto escalar do Teorema 12.3.2, podemos reescrever o lado esquerdo desta equação como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

Substituindo de volta em (3), temos

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

que podemos simplificar e reescrever como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Finalmente, dividindo ambos os lados desta equação por $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, obtemos (2). ■

► **Exemplo 2** Determine o ângulo entre o vetor $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e

- (a) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (c) $\mathbf{z} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

Solução (a)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{-11}{(3)(7)} = -\frac{11}{21}$$

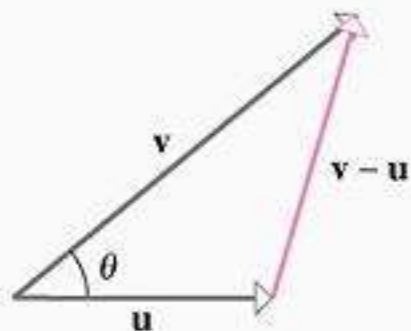


Figura 12.3.2

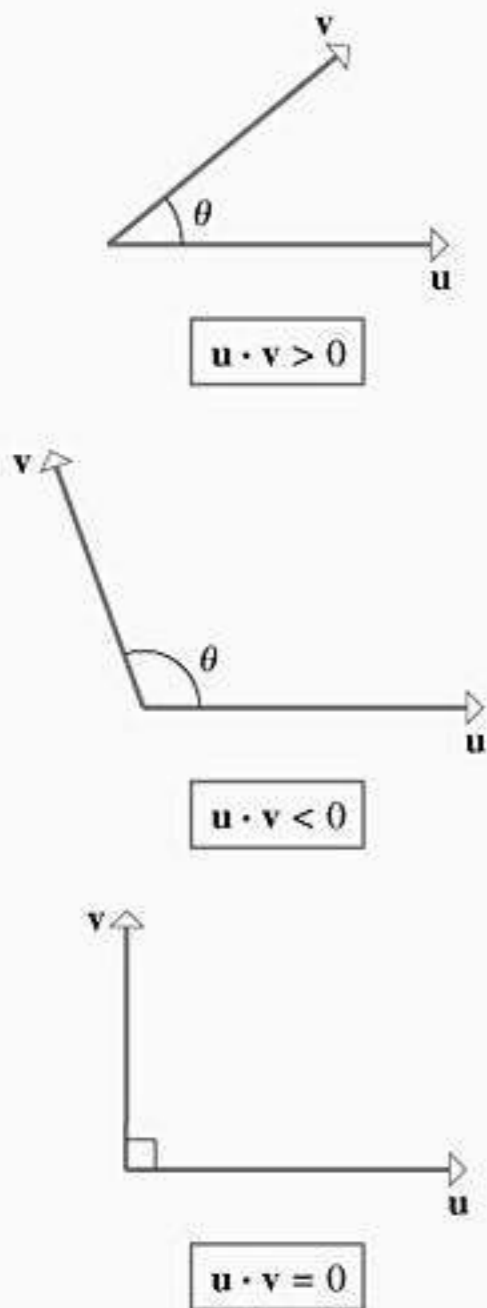


Figura 12.3.3

Assim,

$$\theta = \arccos\left(-\frac{11}{21}\right) \approx 2,12 \text{ radianos} \approx 121,6^\circ$$

Solução (b)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{0}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = 0$$

Desse modo, $\theta = \pi/2$, o que significa que os vetores são perpendiculares.

Solução (c)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{z}\|} = \frac{-27}{(3)(9)} = -1$$

Logo, $\theta = \pi$, o que significa que os vetores têm sentidos opostos. Observe que poderíamos ter visto isso sem calcular θ , uma vez que $\mathbf{z} = -3\mathbf{u}$. ◀

■ INTERPRETANDO O SINAL DO PRODUTO ESCALAR

É freqüentemente conveniente expressar a Fórmula (2) como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{4}$$

que dá o produto escalar de \mathbf{u} e \mathbf{v} em termos dos comprimentos desses vetores e do ângulo entre eles. Uma vez que \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores não-nulos, essa versão da fórmula torna claro que o sinal de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é o mesmo que o sinal de $\cos \theta$. Assim, do produto escalar podemos deduzir se o ângulo entre os dois vetores é agudo, obtuso ou se os vetores são perpendiculares (Figura 12.3.3).

Os termos "perpendicular", "ortogonal" e "normal" são comumente usados para descrever os objetos geométricos que se encontram em ângulo reto. Por consistência, diremos que dois vetores são *ortogonais*, um vetor é *normal* a um plano e dois planos são *perpendiculares*. Além disso, embora o vetor zero não tenha um ângulo bem definido com os outros vetores, vamos considerar $\mathbf{0}$ ortogonal a *todos* os vetores. Esta convenção permite-nos dizer que \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores ortogonais se e somente se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e torna a Fórmula (4) válida se \mathbf{u} ou \mathbf{v} (ou ambos) forem nulos.

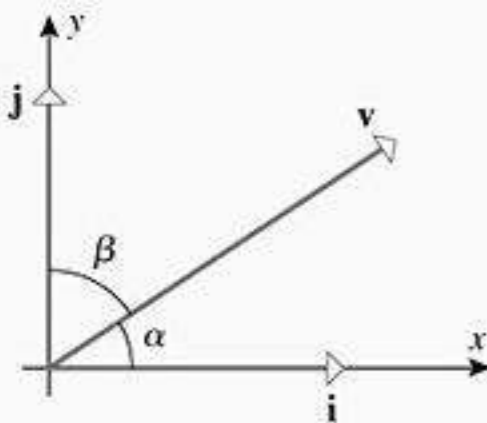


Figura 12.3.4

■ ÂNGULOS DIRETORES

Em um sistema de coordenadas xy , a direção e o sentido de um vetor não-nulo \mathbf{v} ficam completamente determinados pelos ângulos α e β entre \mathbf{v} e os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} (Figura 12.3.4) e num sistema de coordenadas xyz a direção e o sentido ficam completamente determinados pelos ângulos α , β e γ entre \mathbf{v} e os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} (Figura 12.3.5). Em ambos espaços bi e tridimensional, os ângulos entre um vetor \mathbf{v} e os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são chamados de *ângulos diretores* de \mathbf{v} , e os cossenos destes ângulos são chamados de *cossenos diretores* de \mathbf{v} . As fórmulas para os cossenos diretores de um vetor podem ser obtidas a partir da Fórmula (2). Por exemplo, se $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$, então

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{i}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{j}\|} = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Assim temos o resultado seguinte.

12.3.4 TEOREMA Os cossenos diretores de um vetor não-nulo $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ são

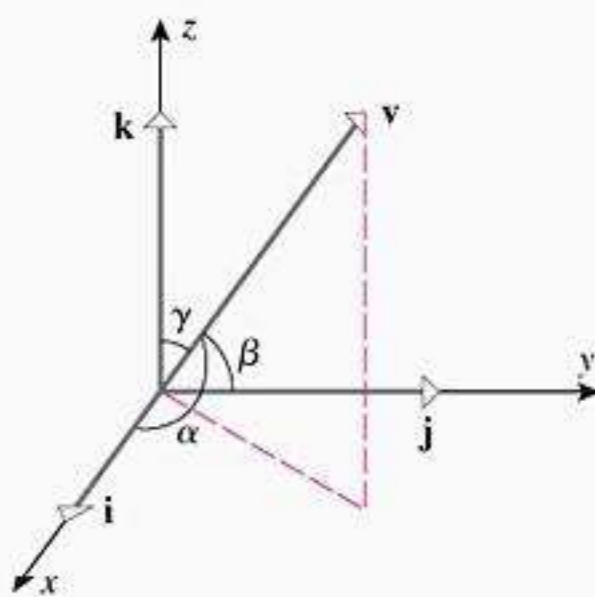
$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$


Figura 12.3.5

Os cossenos diretores de um vetor $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ podem ser calculados normalizando \mathbf{v} e observando os componentes de $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, pois

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{k} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

Deixamos como exercício para o leitor mostrar que os cossenos diretores de um vetor satisfazem a equação

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \tag{5}$$

► **Exemplo 3** Determine os cossenos diretores do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e os ângulos diretores aproximados até o grau mais próximo.

Solução Vamos, primeiro, normalizar o vetor \mathbf{v} e, então, obter seus componentes. Temos que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, logo $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Assim,

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}$$

Com a ajuda de um recurso computacional, obtemos

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71^\circ, \quad \beta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 132^\circ, \quad \gamma = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Determine o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Suponha que o cubo tenha lado a e introduza um sistema de coordenadas como na Figura 12.3.6. Neste sistema de coordenadas, o vetor

$$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$$

é a diagonal do cubo e os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} estão ao longo das arestas. Por simetria, a diagonal forma ângulos iguais com cada lado, portanto é suficiente encontrar o ângulo entre \mathbf{d} e \mathbf{i} (o ângulo diretor α). Assim,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{d}\|\|\mathbf{i}\|} = \frac{a}{\|\mathbf{d}\|} = \frac{a}{\sqrt{3a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e, portanto,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,955 \text{ rad} \approx 54,7^\circ \blacktriangleleft$$

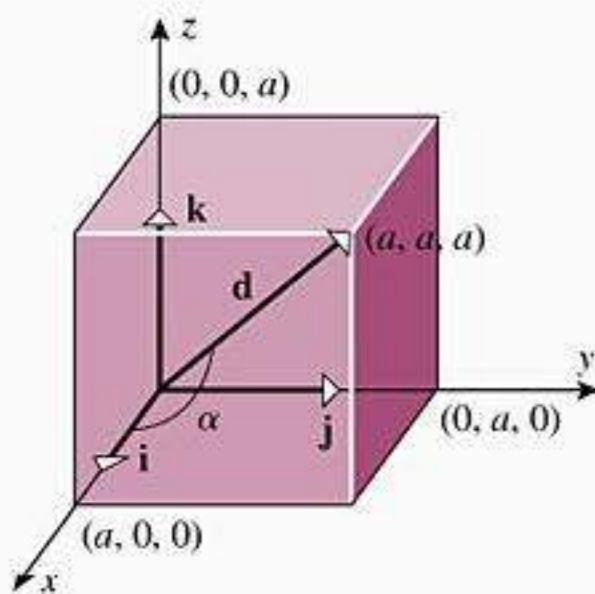
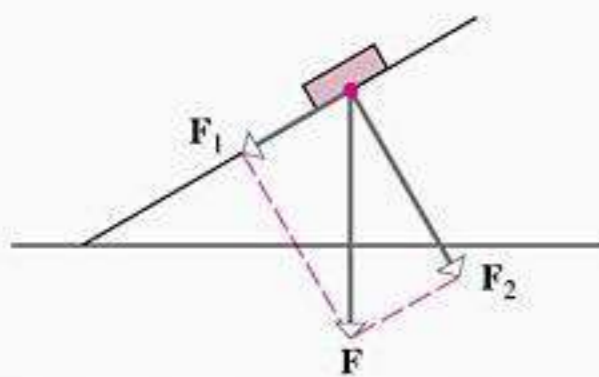


Figura 12.3.6



A força da gravidade puxa o bloco contra a rampa e ao longo da rampa para baixo.

Figura 12.3.7

■ **DECOMPOSIÇÃO DE VETORES EM SEUS COMPONENTES ORTOGONAIS**

Em muitas aplicações, é desejável “decompor” um vetor numa soma de dois vetores ortogonais com direções convenientemente especificadas. Por exemplo, a Figura 12.3.7 mostra um bloco sobre um plano inclinado. A força \mathbf{F} dirigida para baixo que a gravidade exerce sobre o bloco pode ser decomposta na soma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

na qual a força \mathbf{F}_1 é paralela à rampa e a força \mathbf{F}_2 é perpendicular à rampa. As forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são úteis, pois \mathbf{F}_1 é a força que puxa o bloco *ao longo* da rampa e \mathbf{F}_2 é a força que o bloco exerce *contra* a rampa.

Assim, o nosso próximo objetivo é desenvolver um procedimento computacional para decompor um vetor em uma soma de vetores ortogonais. Com esta finalidade, sejam \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 dois vetores *unitários* ortogonais no espaço bidimensional e suponha que desejemos expressar um dado vetor \mathbf{v} como uma soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

na qual \mathbf{w}_1 é um múltiplo escalar de \mathbf{e}_1 e \mathbf{w}_2 é um múltiplo escalar de \mathbf{e}_2 (Figura 12.3.8a); isto é, queremos encontrar escalares k_1 e k_2 tais que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 \tag{6}$$

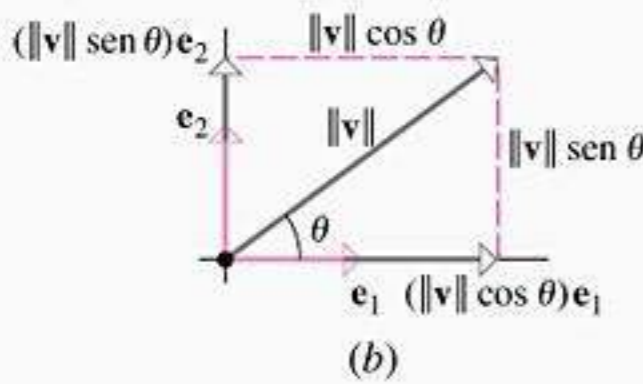
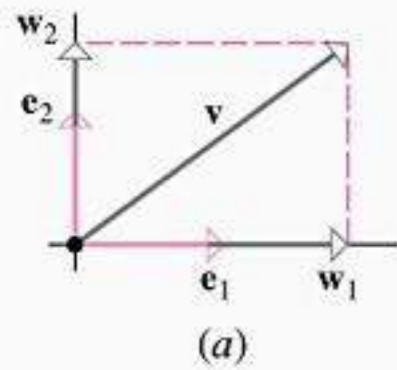


Figura 12.3.8

Podemos encontrar k_1 tomando o produto escalar de \mathbf{v} com \mathbf{e}_1 . Isso dá

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 &= (k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= k_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + k_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \\ &= k_1 \|\mathbf{e}_1\|^2 + 0 = k_1 \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = (k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = k_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + k_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = 0 + k_2 \|\mathbf{e}_2\|^2 = k_2$$

Substituindo essas expressões para k_1 e k_2 em (6) obtemos

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 \tag{7}$$

Nessa fórmula, chamamos $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$ e $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2$ de **componentes vetoriais** de \mathbf{v} ao longo de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , respectivamente, e chamamos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2$ de **componentes escalares** de \mathbf{v} ao longo de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , respectivamente. Se θ denotar o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{e}_1 , então os componentes escalares de \mathbf{v} podem ser escritos na forma trigonométrica como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = \|\mathbf{v}\| \sin \theta \tag{8}$$

(Figura 12.3.8b). Além disso, os componentes vetoriais de \mathbf{v} podem ser expressos como

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 = (\|\mathbf{v}\| \cos \theta) \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = (\|\mathbf{v}\| \sin \theta) \mathbf{e}_2 \tag{9}$$

e a decomposição (6) pode ser expressa como

$$\mathbf{v} = (\|\mathbf{v}\| \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\|\mathbf{v}\| \sin \theta) \mathbf{e}_2 \tag{10}$$

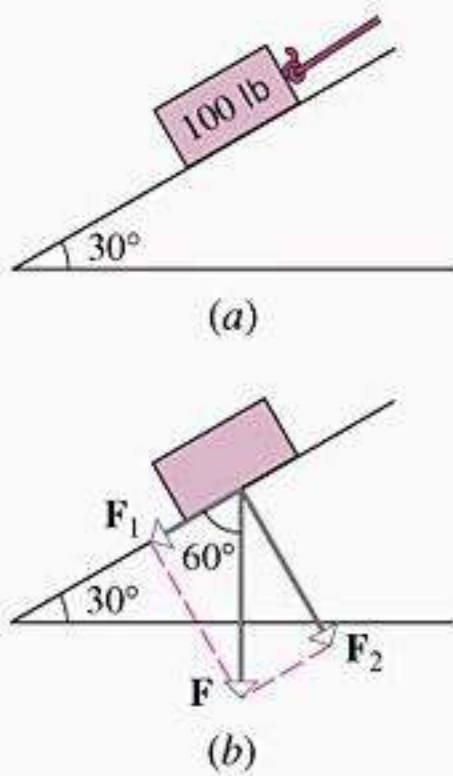


Figura 12.3.9

► **Exemplo 5** Uma corda é amarrada num bloco de 100 lb sobre uma rampa que tem uma inclinação de 30° em relação ao solo (Figura 12.3.9a). Qual é a força que o bloco exerce contra a rampa, e qual é a força que deve ser aplicada à corda na direção paralela à rampa para evitar que o bloco deslize? (Suponha que a rampa seja lisa, isto é, não há força de atrito.)

Solução Seja \mathbf{F} a força para baixo devida à gravidade sobre o bloco (assim $\|\mathbf{F}\| = 100$ lb) e sejam \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 os componentes vetoriais de \mathbf{F} paralelos e perpendiculares à rampa (conforme mostra a Figura 12.3.9b). Os comprimentos de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são

$$\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}\| \cos 60^\circ = 100 \left(\frac{1}{2} \right) = 50 \text{ lb}$$

$$\|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}\| \sin 60^\circ = 100 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 86,6 \text{ lb}$$

Assim, o bloco exerce uma força de aproximadamente 86,6 lb contra a rampa e se requer uma força de 50 lb para evitar que o bloco deslize rampa abaixo. ◀

■ **PROJEÇÕES ORTOGONAIS**

Os componentes vetoriais do vetor \mathbf{v} ao longo de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 em (7) são também chamados de **projeções ortogonais** de \mathbf{v} sobre \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 e, comumente, denotados por

$$\text{proj}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \text{proj}_{\mathbf{e}_2} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2$$

Em geral, se \mathbf{e} for um vetor unitário, então definimos a **projeção ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{e}** como sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \tag{11}$$

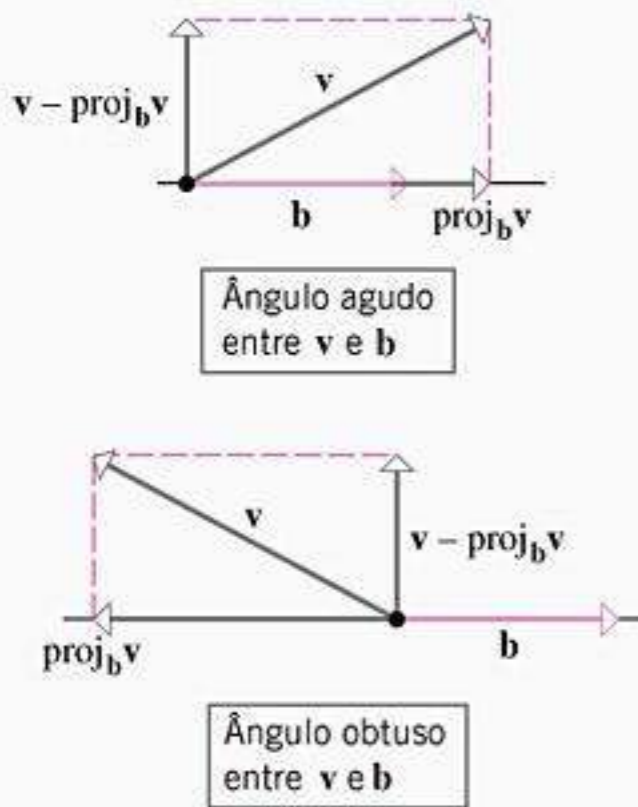


Figura 12.3.10

A projeção ortogonal de \mathbf{v} sobre um vetor arbitrário não-nulo \mathbf{b} pode ser obtida normalizando \mathbf{b} e, então, aplicando a Fórmula (11); isto é,

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right) \left(\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

o que pode ser reescrito como

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \tag{12}$$

Geometricamente, se \mathbf{b} e \mathbf{v} tiverem um ponto inicial comum, então $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v}$ é o vetor determinado quando a perpendicular é baixada do ponto final de \mathbf{v} sobre a reta que passa por \mathbf{b} (ilustrado na Figura 12.3.10 em dois casos). Além disso, é evidente da Figura 12.3.10 que se subtrairmos a $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v}$ de \mathbf{v} , então o vetor resultante

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v}$$

será ortogonal a \mathbf{b} ; vamos chamá-lo de *componente vetorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{b}* .

Exemplo 6 Determine a projeção ortogonal de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e então encontre o componente vetorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{b} .

Solução Temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2 + 2 + 0 = 4$$

$$\|\mathbf{b}\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

Assim, a projeção ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{b} é

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{4}{8} (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

e o componente vetorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{b} é

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k}$$

Esses resultados estão de acordo com a Figura 12.3.11. ◀

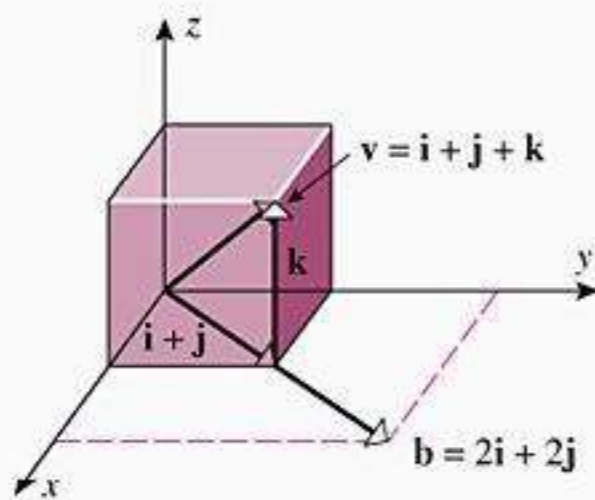


Figura 12.3.11

TRABALHO

Na Seção 7.7 do Volume 1, discutimos o trabalho realizado por uma força constante agindo sobre um objeto que se move sobre uma linha reta. Definimos o trabalho W realizado sobre um objeto por uma força de magnitude constante F agindo na direção do movimento por uma distância d como sendo

$$W = Fd = \text{força} \times \text{distância} \tag{13}$$

Se denotarmos por \mathbf{F} o vetor força de magnitude $\|\mathbf{F}\| = F$ agindo na direção do movimento, então podemos escrever (13) como

$$W = \|\mathbf{F}\|d$$

Além disso, supondo que o objeto se mova ao longo de uma reta de um ponto P a um ponto Q , então $d = \|\overrightarrow{PQ}\|$, de modo que o trabalho pode ser expresso inteiramente na forma vetorial como

$$W = \|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

(Figura 12.3.12a). O vetor \overrightarrow{PQ} é chamado de *vetor deslocamento* do objeto. No caso em que a força \mathbf{F} é constante e não está na direção do movimento, mas faz um ângulo θ com o vetor deslocamento, *definimos* o trabalho W realizado por \mathbf{F} como sendo

$$W = (\|\mathbf{F}\| \cos \theta) \|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \tag{14}$$

(Figura 12.3.12b).

Note que, na Fórmula (14), a quantidade $\|\mathbf{F}\| \cos \theta$ é o componente escalar da força ao longo do vetor deslocamento. Assim, no caso em que $\cos \theta > 0$, uma força de magnitude $\|\mathbf{F}\|$ agindo em um ângulo θ realiza o mesmo trabalho que uma força de magnitude $\|\mathbf{F}\| \cos \theta$ agindo na direção do movimento.

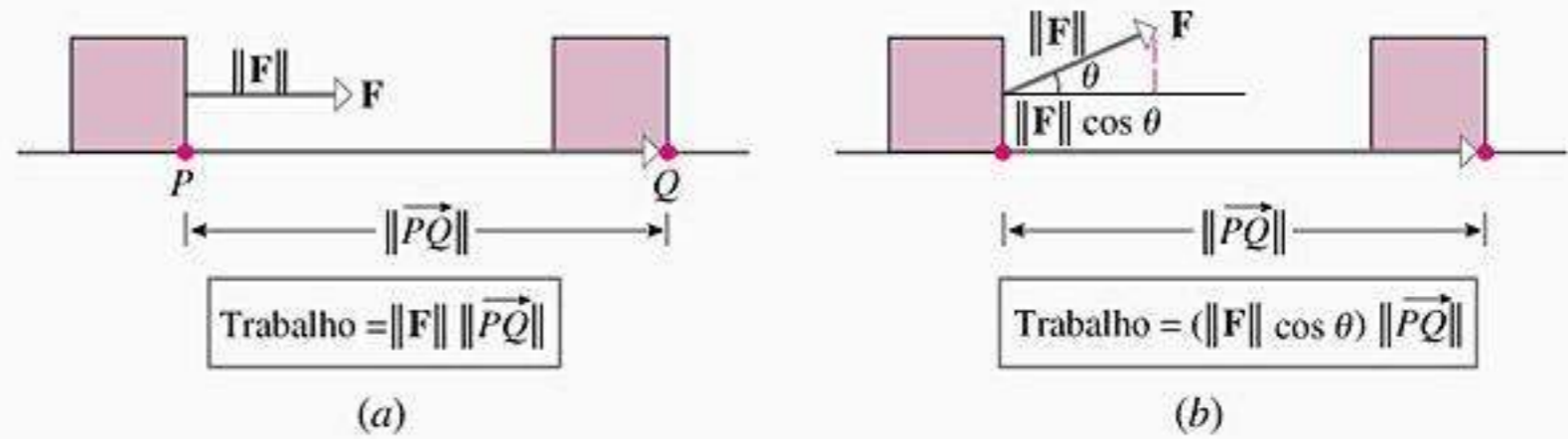


Figura 12.3.12

Exemplo 7 Um carrinho é puxado horizontalmente por meio de uma força constante de 10 lb na direção do cabo e a um ângulo de 60° com a horizontal. Qual é o trabalho realizado para mover o carrinho ao longo de 50 pés?

Solução Introduzimos um sistema de coordenadas xy de tal forma que o vagão mova-se de $P(0, 0)$ a $Q(50, 0)$ ao longo do eixo x (Figura 12.3.13). Nesse sistema de coordenadas

$$\vec{PQ} = 50\mathbf{i}$$

e

$$\mathbf{F} = (10 \cos 60^\circ)\mathbf{i} + (10 \sin 60^\circ)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} + 5\sqrt{3}\mathbf{j}$$

de modo que o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \vec{PQ} = (5\mathbf{i} + 5\sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (50\mathbf{i}) = 250 \text{ (pés-lb)} \blacktriangleleft$$

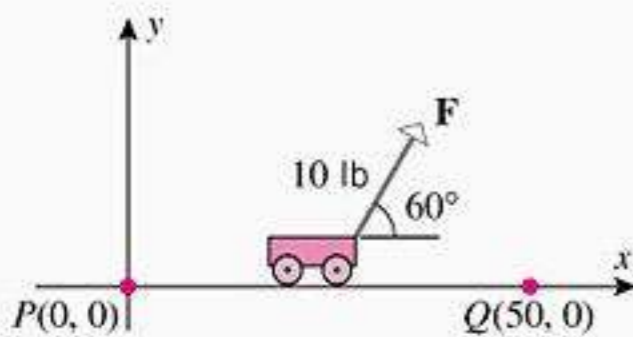


Figura 12.3.13

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.3 (Ver página 813 para respostas.)

- $\langle 3, 1, -2 \rangle \cdot \langle 6, 0, 5 \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} sejam vetores no espaço tridimensional tais que $\|\mathbf{u}\| = 5$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -3$.
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{w}) = \underline{\hspace{2cm}}$
- Para os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do exercício precedente, se o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} for $\pi/3$, então $\|\mathbf{v}\| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Os cossenos diretores de $\langle 2, -1, 3 \rangle$ são $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\cos \beta = \underline{\hspace{2cm}}$ e $\cos \gamma = \underline{\hspace{2cm}}$.
- A projeção ortogonal de $\mathbf{v} = 10\mathbf{i}$ sobre $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ é $\underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 12.3 Recurso Gráfico CAS

- Em cada parte, determine o produto escalar dos vetores e o cosseno do ângulo entre eles.
 - $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
 - $\mathbf{u} = \langle -7, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1 \rangle$
 - $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2, -5 \rangle$
- Em cada parte, use a informação dada para encontrar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
 - $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é $\pi/6$.
 - $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$, o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é 135° .
- Em cada parte, determine se \mathbf{u} e \mathbf{v} fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou se são ortogonais.
 - $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$

- $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 0, 0 \rangle$
- $\mathbf{u} = \langle 4, 1, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 0, 2 \rangle$

ENFOCANDO CONCEITOS

- O triângulo no espaço tridimensional com vértices $(-1, 2, 3)$, $(2, -2, 0)$ e $(3, 1, -4)$ tem um ângulo obtuso? Justifique sua resposta.
- A figura a seguir mostra oito vetores que estão espaçados igualmente em torno de um círculo de raio 1. Determine o produto escalar de \mathbf{v}_0 com cada um dos outros sete vetores.
- A figura a seguir mostra seis vetores que estão igualmente espaçados em torno de um círculo de raio 5. Determine o produto escalar de \mathbf{v}_0 com cada um dos outros cinco vetores.

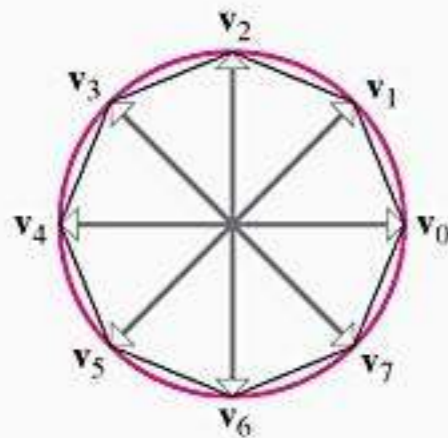


Figura Ex-5

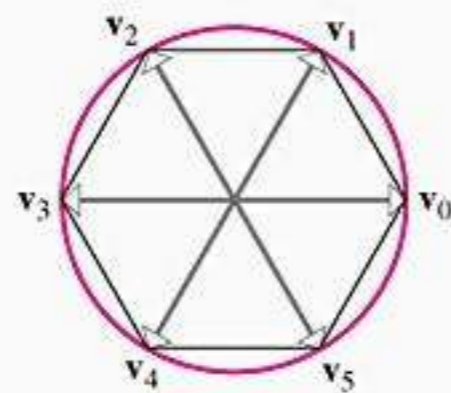


Figura Ex-6

7. (a) Use vetores para mostrar que $A(2, -1, 1)$, $B(3, 2, -1)$ e $C(7, 0, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?
 (b) Use vetores para encontrar os ângulos interiores do triângulo com vértices $(-1, 0)$, $(2, -1)$ e $(1, 4)$. Dê os ângulos até o grau mais próximo.
8. (a) Mostre que se $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ for um vetor no espaço bidimensional, então os vetores
- $$\mathbf{v}_1 = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$$
- são ambos ortogonais a \mathbf{v} .
 (b) Use o resultado da parte (a) para determinar dois vetores unitários que sejam ortogonais ao vetor $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Esboce os vetores \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
9. Explique por que cada uma das seguintes expressões não faz sentido.
- (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
 (c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (d) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
10. É verdadeiro ou falso? Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Justifique sua conclusão.

11. Verifique as partes (b) e (c) do Teorema 12.3.2 para os vetores $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $a = -5$.
12. Sejam $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -2)$ e $\mathbf{w} = (6, 0)$. Determine
- (a) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (b) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}\|$
 (c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
13. Determine r tal que o vetor do ponto $A(1, -1, 3)$ ao ponto $B(3, 0, 5)$ seja perpendicular ao vetor que parte de A ao ponto $P(r, r, r)$.
14. Determine dois vetores unitários no espaço bidimensional que façam um ângulo de 45° com $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

15-16 Determine os cossenos diretores de \mathbf{v} e confirme que eles satisfazem a Equação (5). Então, use os cossenos diretores para aproximar os ângulos diretores até o grau mais próximo.

15. (a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (b) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 16. (a) $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. Mostre que os cossenos diretores de um vetor satisfazem
- $$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

18. Sejam θ e λ os ângulos mostrados na figura abaixo. Mostre que os cossenos diretores de \mathbf{v} podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \lambda \cos \theta \\ \cos \beta &= \cos \lambda \sin \theta \\ \cos \gamma &= \sin \lambda \end{aligned}$$

[Sugestão: expresse \mathbf{v} em forma de componentes e normalize.]

19. A figura abaixo mostra um cubo.
- (a) Determine o ângulo entre os vetores \mathbf{d} e \mathbf{u} até o grau mais próximo.
 (b) Faça uma conjectura sobre o ângulo entre os vetores \mathbf{d} e \mathbf{v} e confirme sua conjectura calculando o ângulo.

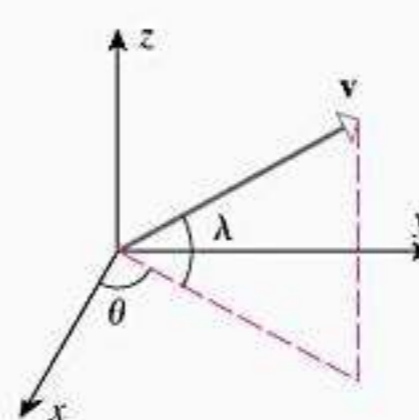


Figura Ex-18

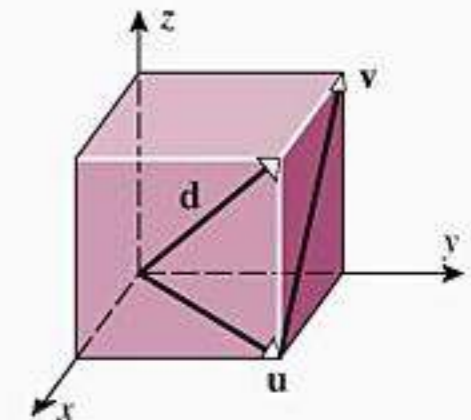


Figura Ex-19

20. Mostre que os vetores não-nulos \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são ortogonais se e somente se seus cossenos diretores satisfazem
- $$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

21. Use o resultado do Exercício 18 para determinar os ângulos diretores do vetor mostrado na figura abaixo até o grau mais próximo.

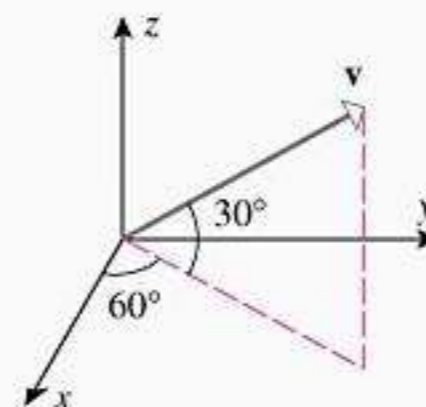


Figura Ex-21

22. Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.
23. Determine, até o grau mais próximo, os ângulos que uma diagonal de uma caixa com dimensões 10 cm por 15 cm por 25 cm faz com as arestas da caixa.
24. Em cada parte, determine o componente vetorial de \mathbf{v} ao longo de \mathbf{b} e o componente vetorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{b} . Então, esboce os vetores \mathbf{v} , $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{v}$.
- (a) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
 (b) $\mathbf{v} = (4, 5)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$
 (c) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
25. Em cada parte, determine o componente vetorial de \mathbf{v} ao longo de \mathbf{b} e o componente vetorial de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{b} .
- (a) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{v} = (4, -1, 7)$, $\mathbf{b} = (2, 3, -6)$

26-27 Expresse o vetor \mathbf{v} como a soma de um vetor paralelo a \mathbf{b} e um vetor ortogonal a \mathbf{b} .

26. (a) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
 (b) $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
27. (a) $\mathbf{v} = \langle -3, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1 \rangle$
 (b) $\mathbf{v} = \langle -2, 1, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -2, 1 \rangle$
 (c) $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -2, 5 \rangle$

28. Se L for uma reta no espaço bi ou tridimensional que passa pelos pontos A e B , então a distância de um ponto P à reta L é igual ao comprimento do componente do vetor \vec{AP} que é ortogonal ao vetor \vec{AB} (ver figura abaixo). Use esse resultado para determinar a distância entre o ponto $P(1,0)$ e a reta que passa por $A(2, -3)$ e $B(5,1)$.

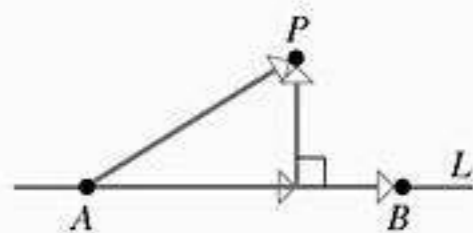


Figura Ex-28

29. Use o método do Exercício 28 para determinar a distância do ponto $P(-3, 1, 2)$ à reta que passa pelos pontos $A(1, 1, 0)$ e $B(-2, 3, -4)$.
30. Conforme mostrado na figura abaixo, uma criança com uma massa de 34 kg repousa sobre um escorregador liso (sem atrito), que está inclinado em um ângulo de 45° com o chão. Quanta força a criança exerce sobre o escorregador, e quanta força deve ser aplicada na direção de \mathbf{P} para evitar que a criança deslize do escorregador para baixo? Tome a aceleração devido à gravidade como $9,8 \text{ m/s}^2$.
31. Para a criança do Exercício 30, quanta força deve ser aplicada na direção e no sentido de \mathbf{Q} (mostrado na figura abaixo) para evitar que a criança deslize para baixo no escorregador?

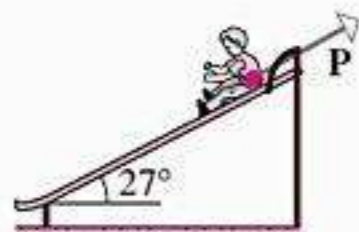


Figura Ex-30

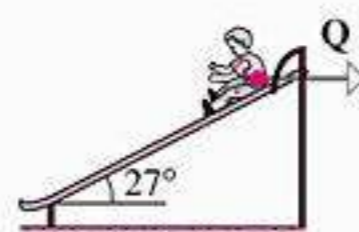


Figura Ex-31

32. Um bloco pesando 300 lb está suspenso pelos cabos A e B , conforme mostrado na figura a seguir. Determine as forças que o bloco exerce ao longo dos cabos.
33. Um bloco pesando 100 N está suspenso pelos cabos A e B , conforme mostra a figura a seguir.
- (a) Use um recurso gráfico computacional para fazer o gráfico das forças que o bloco exerce ao longo dos cabos A e B como funções da "depressão" d .
- (b) Aumentar a depressão cresce ou decresce forças sobre os cabos?
- (c) Quanta depressão é necessária se os cabos não puderem suportar forças em excesso de 150 N?

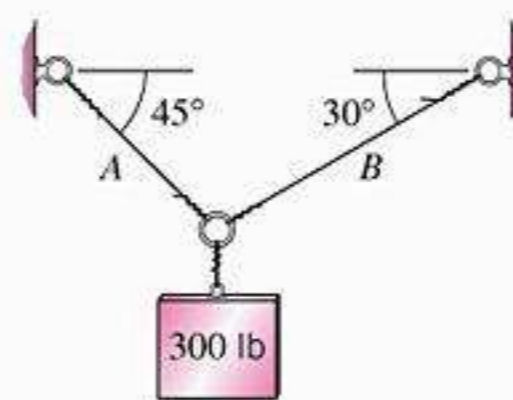


Figura Ex-32

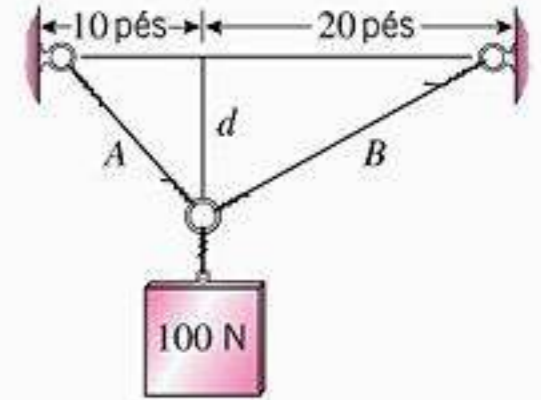


Figura Ex-33

34. Determine o trabalho realizado pela força $\mathbf{F} = -3\mathbf{j}$ (libras) aplicada a um ponto que se move sobre uma reta de $(1, 3)$ a $(4, 7)$. Suponha que a distância seja medida em pés.
35. Uma força de $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ newtons é aplicada a um ponto que se move uma distância de 15 metros na direção e sentido do vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Quanto trabalho foi realizado?
36. Um barco viaja 100 metros exatamente para o norte enquanto o vento exerce uma força de 500 newtons em direção ao nordeste. Quanto trabalho o vento faz?
37. Uma caixa é arrastada ao longo do chão por uma corda que aplica uma força de 50 lb em um ângulo de 60° com o chão. Quanto trabalho é realizado para movimentar a caixa 15 pés?
38. Conforme mostrado na figura abaixo, uma força de 250 N é aplicada num barco em um ângulo de 38° com o eixo x positivo. Qual é a força \mathbf{F} que deveria ser aplicada no barco para produzir uma força resultante de 1000 N agindo na direção x positiva? Enuncie sua resposta dando a magnitude da força e o ângulo com o eixo x positivo até o grau mais próximo.

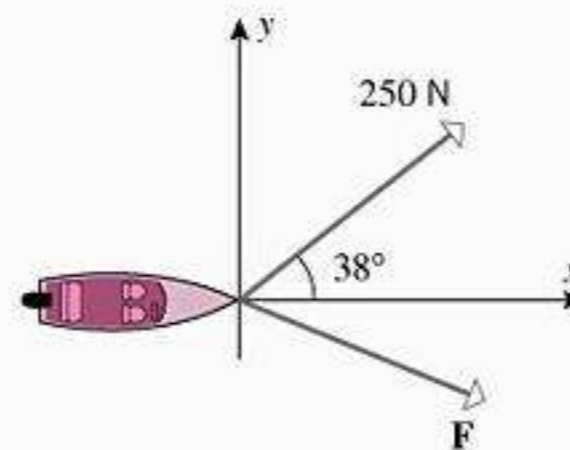


Figura Ex-38

ENFOCANDO CONCEITOS

39. Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} lados adjacentes de um paralelogramo. Use vetores para provar que as diagonais do paralelogramo são perpendiculares se os lados forem de comprimentos iguais.
40. Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} lados adjacentes de um paralelogramo. Use vetores para provar que o paralelogramo é um retângulo se as diagonais tiverem os mesmos comprimentos.
41. Prove que
- $$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$
- e interprete o resultado geometricamente, transladando-o para um teorema sobre paralelogramos.
42. Prove: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

43. Mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 forem vetores não-nulos mutuamente perpendiculares no espaço tridimensional, e se um vetor \mathbf{v} no espaço tridimensional for expresso como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

então os escalares c_1, c_2 e c_3 são dados pelas fórmulas

$$c_i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i) / \|\mathbf{v}_i\|^2, \quad i = 1, 2, 3$$

44. Mostre que os três vetores

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

são mutuamente perpendiculares e então use o resultado do Exercício 43 para determinar os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

45. Para cada x em $(-\infty, +\infty)$, sejam $\mathbf{u}(x)$ o vetor que vai da origem ao ponto $P(x, y)$ sobre a curva $y = x^2 + 1$ e $\mathbf{v}(x)$ o vetor que vai da origem ao ponto $Q(x, y)$ sobre a reta $y = -x - 1$.

- (a) Use um CAS para determinar, até o grau mais próximo, o ângulo mínimo entre $\mathbf{u}(x)$ e $\mathbf{v}(x)$ para x em $(-\infty, +\infty)$.
- (b) Determine se existem valores reais de x para os quais $\mathbf{u}(x)$ e $\mathbf{v}(x)$ sejam ortogonais.

46. Seja \mathbf{u} um vetor unitário no plano xy de um sistema de coordenadas xyz e seja \mathbf{v} um vetor unitário no plano yz . Sejam θ_1 o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{i} , θ_2 o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{k} e seja θ o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} .

- (a) Mostre que $\cos \theta = \pm \sin \theta_1 \sin \theta_2$.
- (b) Determine θ se θ for agudo e $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$.
- (c) Use um CAS para determinar, até o grau mais próximo, os valores máximo e mínimo de θ se θ for agudo e $\theta_2 = 2\theta_1$.

47. Prove as partes (b) e (e) do Teorema 12.3.2 para vetores no espaço tridimensional.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.3

1. 8 2. (a) 25 (b) 7 (c) 10 (d) -6 3. $\frac{14}{5}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}$ 5. $9\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

12.4 PRODUTO VETORIAL

Em muitas aplicações de vetores na Matemática, na Física e na Engenharia, existe a necessidade de determinar um vetor que seja ortogonal a dois vetores dados. Nesta seção, discutiremos um novo tipo de multiplicação de vetores que pode ser usada para esse fim.

DETERMINANTES

Alguns dos conceitos que desenvolveremos nesta seção exigem idéias básicas sobre **determinantes**, que são funções que associam valores numéricos a arranjos quadrados de números. Por exemplo, se a_1, a_2, b_1 e b_2 forem números reais, então definimos um **determinante** 2×2 por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1}$$

O propósito das flechas é ajudar a lembrar a fórmula – o determinante é o produto das entradas da flecha que vai para a direita menos o produto das entradas da flecha que vai para a esquerda. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-2)(4) = 15 + 8 = 23$$

Um **determinante** 3×3 é definido em termos de determinantes 2×2 por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

O lado direito desta fórmula é facilmente lembrado notando que a_1, a_2 e a_3 são as entradas na primeira “linha” do lado esquerdo e os determinantes 2×2 do lado direito surgem suprimin-

do a primeira linha e uma coluna apropriada do lado esquerdo. O padrão é o seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ = 3(20) + 2(2) - 5(3) = 49$$

Há, também, definições para determinantes 4×4 , 5×5 e ordens maiores, mas não precisaremos delas neste livro. As propriedades dos determinantes são estudadas em um ramo da Matemática chamado *Álgebra Linear*, mas apenas precisaremos das duas propriedades dadas no teorema seguinte.

12.4.1 TEOREMA

- (a) Se duas linhas do arranjo de um determinante são iguais, então o valor do determinante é 0.
- (b) Trocando entre si duas linhas do arranjo de um determinante, multiplica o valor desse determinante por -1 .

Daremos as provas das partes (a) e (b) para determinantes 2×2 e deixaremos as provas para determinantes 3×3 como exercícios.

DEMONSTRAÇÃO (a)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$$

DEMONSTRAÇÃO (b)

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

■ PRODUTO VETORIAL

Agora passamos para o conceito principal desta seção.

12.4.2 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o *produto vetorial* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (3)$$

ou de modo equivalente,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k} \quad (4)$$

Observe que o lado direito da Fórmula (3) tem a mesma forma que o lado direito da Fórmula (2), a diferença sendo a notação e a ordem dos fatores dos três termos. Assim, po-

demos reescrever (3) como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Entretanto, isso é somente um esquema mnemônico e, na verdade, não é um determinante, uma vez que as entradas num determinante são números, não vetores.

► **Exemplo 1** Sejam $\mathbf{u} = \langle 1, 2, -2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$. Determine

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Solução (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

Solução (b) Poderíamos usar o método da parte (a), mas não é realmente necessário efetuar qualquer conta. Precisamos apenas observar que trocando \mathbf{u} com \mathbf{v} trocamos a segunda com a terceira linha em (5), o que, por sua vez, troca entre si as linhas dos determinantes 2×2 em (3). Mas trocando as linhas de um determinante 2×2 invertemos o seu sinal, de modo que o efeito final da troca dos fatores em um produto vetorial é inverter o sinal dos componentes. Assim temos, simplesmente,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 2** Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ para qualquer vetor no espaço tridimensional.

Solução Poderíamos tomar $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ e aplicar o método da parte (a) do Exemplo 1 para mostrar que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Entretanto, o cálculo efetivo é desnecessário. Precisamos somente observar que se os dois fatores no produto vetorial são os mesmos, então cada determinante 2×2 em (3) é zero, pois suas linhas são idênticas. Assim, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ por inspeção. ◀

■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO VETORIAL

Nosso próximo objetivo é estabelecer algumas das propriedades algébricas básicas do produto vetorial. No que segue, é conveniente o leitor não esquecer as diferenças essenciais entre o produto vetorial e o produto escalar:

- O produto vetorial está definido somente para vetores no espaço tridimensional, enquanto que o produto escalar está definido para vetores no espaço bi e tridimensional.
- O produto vetorial de dois vetores é um vetor, enquanto que o produto escalar de dois vetores é um escalar.

As principais propriedades algébricas do produto vetorial estão listadas no teorema a seguir.

Em multiplicações numéricas ordinárias e produtos escalares, a ordem dos fatores não importa, mas no produto vetorial ela é importante. A parte (a) do último teorema mostra que trocando a ordem dos fatores no produto vetorial inverte o sentido do vetor resultante.

12.4.3 TEOREMA Se \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} forem vetores no espaço tridimensional e a for um escalar, então

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- (d) $a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v})$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

As partes (a) e (f) foram tratadas nos Exemplos 1 e 2. As outras provas são deixadas como exercícios.

Os seguintes produtos vetoriais ocorrem tão freqüentemente que é útil familiarizar-se com eles:

$$\begin{matrix} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{matrix} \quad (6)$$

Esses resultados são facilmente obtidos; por exemplo

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Entretanto, em vez de calcular esses produtos vetoriais cada vez que forem utilizados, é melhor usar o diagrama da Figura 12.4.1. Neste diagrama, o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido anti-horário é o próximo vetor a seguir, e o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido horário é o negativo do próximo vetor a seguir.

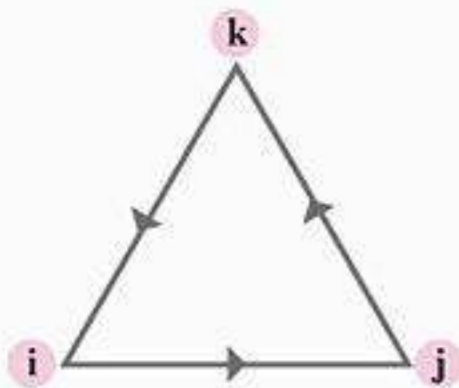


Figura 12.4.1

ATENÇÃO

Podemos escrever um produto de três números reais como uvw , pois a lei associativa $u(vw) = (uv)w$ garante o mesmo valor para o produto, não importa onde os parênteses forem colocados. Contudo, a lei associativa *não* é válida para os produtos vetoriais. Por exemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

e portanto $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$. Assim, não podemos escrever o produto vetorial de três vetores como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, uma vez que esta expressão é ambígua sem parênteses.

■ PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO PRODUTO VETORIAL

O seguinte teorema mostra que o produto vetorial de dois vetores é ortogonal a ambos os fatores.

12.4.4 TEOREMA Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores no espaço tridimensional, então

- (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a \mathbf{u})
- (b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a \mathbf{v})

Demonstraremos a parte (a). A prova da parte (b) é análoga.

DEMONSTRAÇÃO (a) Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então de (4)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \rangle \quad (7)$$

e portanto

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0 \quad \blacksquare$$

► **Exemplo 3** No Exemplo 1, mostramos que o produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de $\mathbf{u} = \langle 1, 2, -2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$ é

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = \langle 2, -7, -6 \rangle$$

O Teorema 12.4.4 garante que esse vetor é ortogonal a \mathbf{u} e \mathbf{v} ; isso é confirmado pelos cálculos

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle 1, 2, -2 \rangle \cdot \langle 2, -7, -6 \rangle = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle 3, 0, 1 \rangle \cdot \langle 2, -7, -6 \rangle = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Pode se provar que se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores não-nulos e não paralelos, então o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ relativo a \mathbf{u} e \mathbf{v} é determinado pela regra da mão direita;* isto é, se os dedos da mão direita estão postos em forma de concha, de tal forma que eles fechem de \mathbf{u} para \mathbf{v} no sentido de rotação que leva \mathbf{u} em \mathbf{v} com menos de 180° , então o polegar irá apontar grosseiramente na direção de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (Figura 12.4.2). Por exemplo, estabelecemos em (6) que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

que está de acordo com a regra da mão direita (verifique).

O teorema a seguir lista mais algumas propriedades geométricas importantes do produto vetorial.

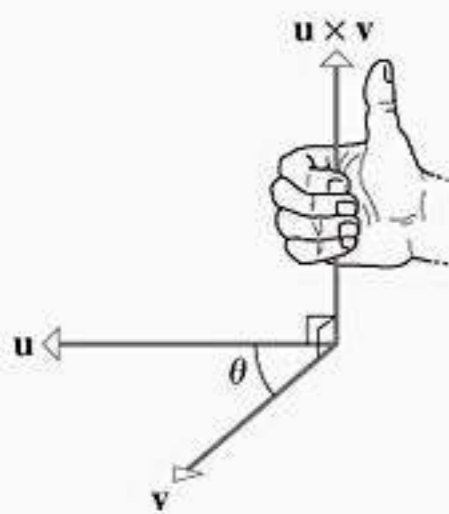


Figura 12.4.2

12.4.5 TEOREMA Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores não-nulos do espaço tridimensional, e seja θ o ângulo entre esses vetores quando estiverem posicionados de tal forma que os seus pontos iniciais coincidam.

(a) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$

(b) A área A do paralelogramo que tem \mathbf{u} e \mathbf{v} como lados adjacentes é

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \quad (8)$$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e somente se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores paralelos, isto é, se e somente se eles forem múltiplos escalares um do outro.

DEMONSTRAÇÃO (a)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \quad \text{Teorema 12.3.3} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2} \\ &= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \quad \text{Ver Fórmula (4).} \end{aligned}$$

* Lembre-se que concordamos em considerar neste livro somente sistemas de coordenadas que satisfaçam a regra da mão direita. Se tivéssemos usado sistemas de coordenadas que satisfaçam a regra da mão esquerda, usaríamos aqui uma "regra da mão esquerda."

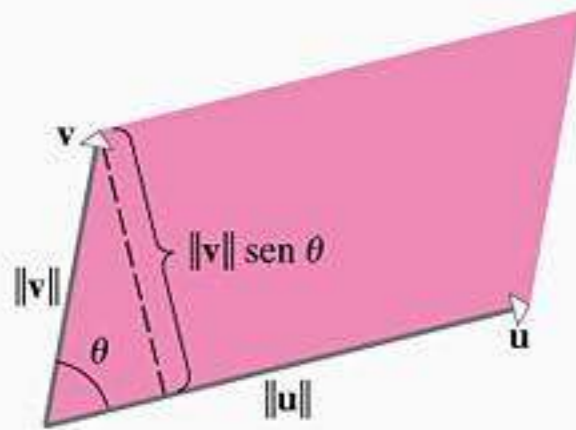


Figura 12.4.3

DEMONSTRAÇÃO (b) Com referência à Figura 12.4.3, o paralelogramo que tenha \mathbf{u} e \mathbf{v} como lados adjacentes pode ser visto como tendo base $\|\mathbf{u}\|$ e altura $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$. Assim, sua área A é

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

DEMONSTRAÇÃO (c) Supondo que \mathbf{u} e \mathbf{v} sejam vetores não-nulos, segue da parte (a) que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se, e somente se, $\sin \theta = 0$; isso é verdadeiro se, e somente se, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (uma vez que $0 \leq \theta \leq \pi$). Geometricamente, isso significa que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se, e somente se, \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores paralelos. ■

► **Exemplo 4** Determine a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ e $P_3(0, 4, 3)$.

Solução A área A do triângulo é a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 12.4.4). Mas $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -3, -2, 2 \rangle$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = \langle -2, 2, 3 \rangle$, logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \langle -10, 5, -10 \rangle$$

(verifique) e conseqüentemente

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{15}{2} \blacktriangleleft$$

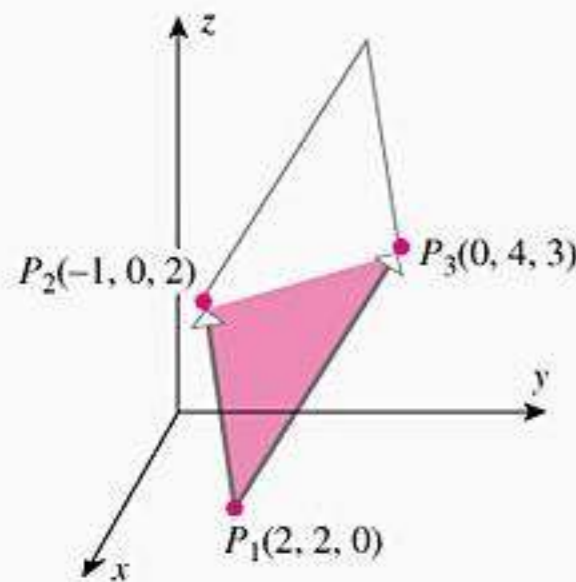


Figura 12.4.4

■ **PRODUTO MISTO**

Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o número

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado de *produto misto* de \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Não é necessário calcular o produto escalar e o vetorial para calcular o produto misto – o valor pode ser obtido diretamente da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

cuja validade pode ser vista escrevendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

► **Exemplo 5** Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solução

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 49 \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitas calculadoras estão munidas das operações produto vetorial e determinante. Se você tiver uma calculadora que tenha essa capacidade, use-a para conferir as contas dos Exemplos 1 e 5.

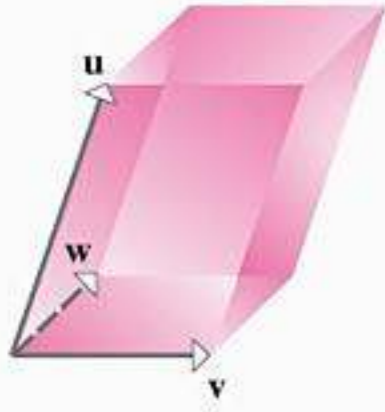


Figura 12.4.5

Segue da Fórmula (10) que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

O + ocorre quando \mathbf{u} faz um ângulo agudo com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e o - quando ele faz um ângulo obtuso.

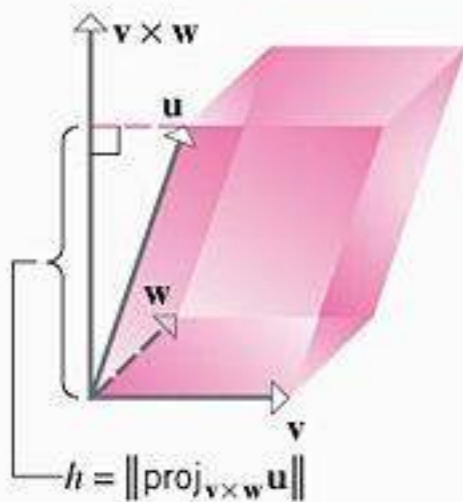


Figura 12.4.6

Uma boa maneira de lembrar da Fórmula (11) é observar que a segunda expressão nessa fórmula pode ser obtida da primeira deixando fixos os símbolos do produto escalar, do vetorial e os parênteses, movendo-se para a direita os dois primeiros vetores e trazendo-se o terceiro vetor para a primeira posição. O mesmo procedimento produz a terceira expressão a partir da segunda e a primeira expressão a partir da terceira (verifique).

■ PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO PRODUTO MISTO

Se \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} forem vetores não-nulos no espaço tridimensional que estão posicionados de forma tal que os pontos iniciais coincidam, então esses vetores formam lados adjacentes de um paralelepípedo (Figura 12.4.5). O teorema seguinte estabelece uma relação entre o volume deste paralelepípedo e o produto misto de seus lados.

12.4.6 TEOREMA *Sejam \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores não-nulos no espaço tridimensional.*

(a) *O volume V do paralelepípedo que tem \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} como arestas adjacentes é*

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \tag{10}$$

(b) *$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ se, e somente se, \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} estiverem situados no mesmo plano.*

DEMONSTRAÇÃO (a) Em referência à Figura 12.4.6, vamos considerar a base do paralelepípedo com \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} como lados adjacentes como sendo o paralelogramo determinado por \mathbf{v} e \mathbf{w} . Assim, a área da base é $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ e a altura h do paralelepípedo (mostrado na figura) é o comprimento da projeção ortogonal de \mathbf{u} sobre o vetor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Por conseqüência, da Fórmula (12) da Seção 12.3 temos

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Agora segue que o volume do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base})(\text{altura}) = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| h = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

DEMONSTRAÇÃO (b) Os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} situam-se no mesmo plano se, e somente se, o paralelepípedo com esses vetores como lados adjacentes tiver volume zero (por quê?). Assim, da parte (a) os vetores situam-se no mesmo plano se, e somente se, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. ■

■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO MISTO

Observamos anteriormente, nesta seção, que a expressão $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ deve ser evitada, pois é ambígua sem parênteses. Entretanto, a expressão $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ não é ambígua – significa $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ e não $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, porque não podemos fazer o produto vetorial de um escalar com um vetor. Analogamente, a expressão $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ deve significar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ e não $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. Desse modo, numa expressão da forma $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ou $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, o produto vetorial é feito primeiro e depois o produto escalar.

Uma vez que trocando entre si duas linhas de um determinante, o seu valor fica multiplicado por -1 , fazendo-se duas trocas de linhas num determinante não afeta o seu valor. Assim sendo, segue que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \tag{11}$$

uma vez que os determinantes 3×3 que foram usados para calcular esses produtos mistos podem ser obtidos um do outro fazendo duas mudanças de linhas (verifique).

Outra fórmula útil pode ser obtida reescrevendo a primeira igualdade em (11) como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

e, então, omitindo os parênteses supérfluos para obter

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{12}$$

Em palavras, essa fórmula afirma que o produto escalar e vetorial no produto misto podem ser trocados (desde que os fatores sejam agrupados apropriadamente).

■ OS PRODUTOS ESCALAR E VETORIAL SÃO INDEPENDENTES DAS COORDENADAS

Nas Definições 12.3.1 e 12.4.2, definimos o produto escalar e o vetorial de dois vetores em termos dos componentes daqueles vetores em um sistema de coordenadas. Assim, é teoricamente possível que mudando o sistema de coordenadas poderia mudar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ou $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, uma vez que os componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas que foi escolhido. Entretanto, as relações

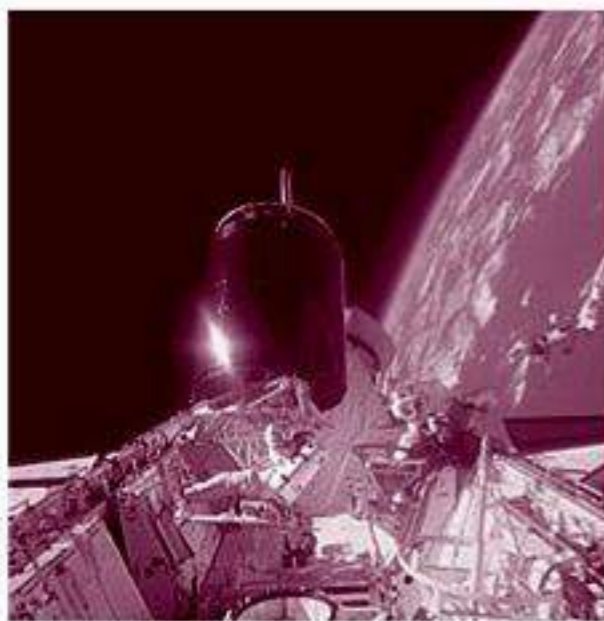
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{13}$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \tag{14}$$

que foram obtidas nos Teoremas 12.3.3 e 12.4.5 mostram que esse não é o caso. A Fórmula (13) mostra que o valor de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ depende apenas do comprimento dos vetores e o ângulo entre eles – e não depende do sistema de coordenadas. Analogamente, a Fórmula (14), em combinação com a regra da mão direita e com o Teorema 12.4.4, mostra que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ não depende do sistema de coordenadas (enquanto se mantenha a regra da mão direita). Esses fatos são importantes em aplicações, pois eles nos permitem escolher qualquer sistema de coordenadas conveniente para resolver um problema com plena confiança de que a escolha não afetará as computações que envolvam produtos escalares ou vetoriais.

■ MOMENTOS E MOVIMENTO ROTACIONAL NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Os produtos vetoriais desempenham um papel importante na descrição do movimento rotacional no espaço tridimensional. Por exemplo, suponha que um astronauta em uma missão para consertar um satélite no espaço aplique uma força \mathbf{F} em um ponto Q sobre a superfície de um satélite esférico. Se a força for dirigida ao longo de uma reta que passa pelo centro P do satélite, então a segunda lei do movimento de Newton implica que a força acelerará o satélite na direção e sentido de \mathbf{F} . Entretanto, se o astronauta aplicar a mesma força a um ângulo θ com o vetor \vec{PQ} , então \mathbf{F} tende a causar uma rotação bem como uma aceleração na direção e sentido de \mathbf{F} . Para ver por que isso ocorre, vamos decompor \mathbf{F} na soma de componentes ortogonais $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, onde \mathbf{F}_1 é a projeção ortogonal de \mathbf{F} sobre o vetor \vec{PQ} e \mathbf{F}_2 é o componente de \mathbf{F} ortogonal a \vec{PQ} (Figura 12.4.7). Uma vez que a força \mathbf{F}_1 age ao longo da reta que passa pelo centro do satélite, contribui para a aceleração linear do satélite, mas não causa nenhuma rotação. No entanto, a força \mathbf{F}_2 é tangente ao círculo em torno do satélite no plano de \mathbf{F} e \vec{PQ} , assim ela causa a rotação do satélite em torno do eixo que é perpendicular a este plano.



Astronautas usam ferramentas que foram projetadas para limitar forças que provocariam movimentos rotacionais indesejados a um satélite.

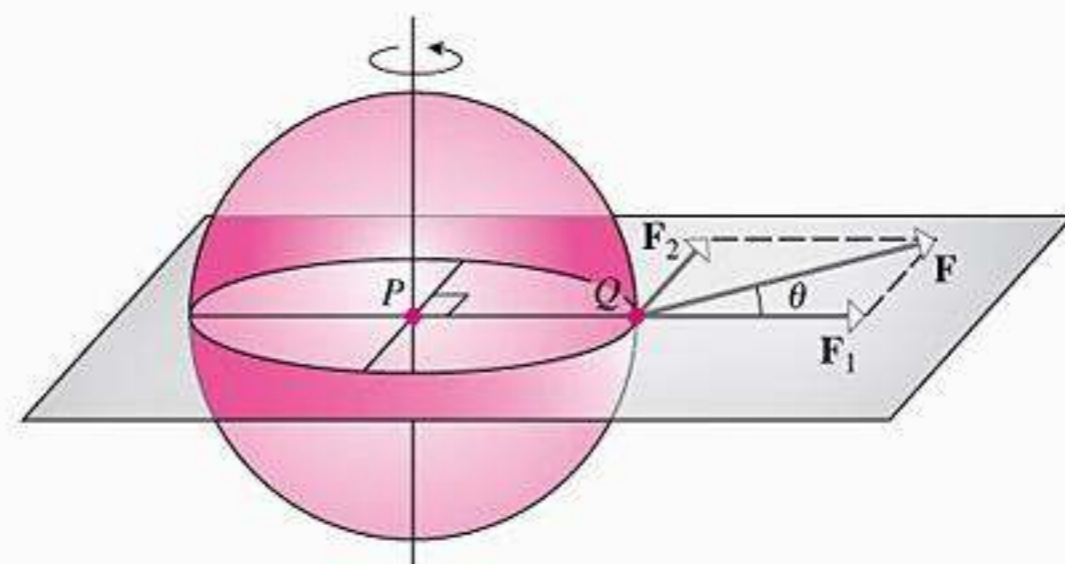


Figura 12.4.7

Você sabe de sua própria experiência que a “tendência” para a rotação em torno de um eixo depende tanto do tamanho da força quanto de quão longe do eixo ela for aplicada. Por exemplo, é mais fácil fechar um porta empurrando-a perto da fechadura do que aplicar a mesma força perto das dobradiças. Assim, a tendência de rotação do satélite pode ser medida por

$$\|\vec{PQ}\| \|\mathbf{F}_2\| \tag{15}$$

a distância do centro \times a magnitude da força

Entretanto, $\|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}\| \sin \theta$, logo podemos reescrever (15) como

$$\|\vec{PQ}\| \|\mathbf{F}\| \sin \theta = \|\vec{PQ} \times \mathbf{F}\|$$

Isso é chamado de **momento escalar** ou **torque** de \mathbf{F} sobre o ponto P . Os momentos escalares têm unidades de força vezes a distância – libra-pé ou newton-metro, por exemplo. O vetor $\vec{PQ} \times \mathbf{F}$ é chamado de **momento vetorial** ou **vetor torque** de \mathbf{F} sobre P .

Lembrando que a direção e o sentido de $\vec{PQ} \times \mathbf{F}$ são determinados pela regra da mão direita, segue que a direção da rotação em torno de P que resulta aplicando a força \mathbf{F} no ponto Q é anti-horária olhando de cima para baixo no eixo de $\vec{PQ} \times \mathbf{F}$ (Figura 12.4.7). Assim, o momento vetorial $\vec{PQ} \times \mathbf{F}$ capta a informação essencial sobre o efeito rotacional da força – a magnitude do produto vetorial fornece o momento escalar da força, e o vetor do produto vetorial fornece o eixo e direção da rotação.

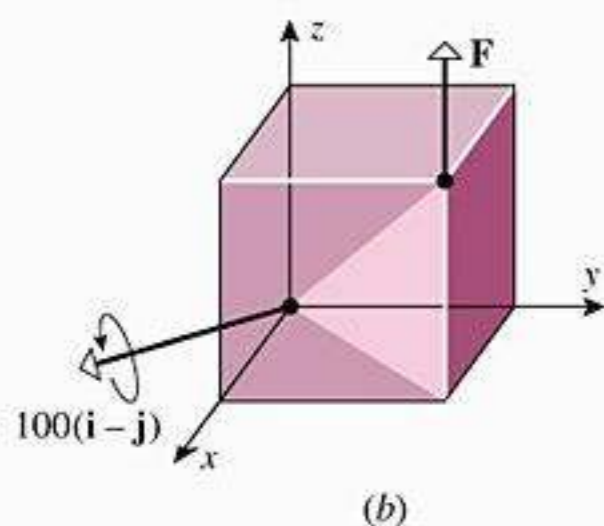
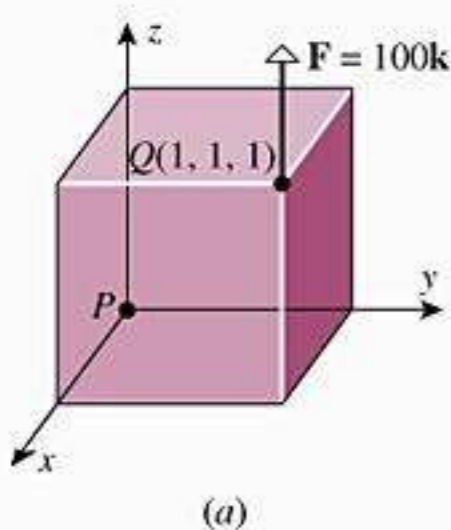


Figura 12.4.8

► **Exemplo 6** A Figura 12.4.8a mostra a força \mathbf{F} de 100 N aplicada na direção z positiva, no ponto $Q(1, 1, 1)$ de um cubo, cujos lados têm 1 m de comprimento. Admitindo que o cubo esteja livre para rodar em torno do ponto $P(0,0,0)$ (a origem), determine o momento escalar da força sobre P e descreva a direção da rotação.

Solução O vetor força é $\mathbf{F} = 100\mathbf{k}$ e o vetor de P a Q é $\vec{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, logo o momento vetorial de \mathbf{F} sobre P é

$$\vec{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$$

Assim, o momento escalar de \mathbf{F} sobre P é $\|100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\| = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ N}\cdot\text{m}$ e a direção da rotação é anti-horária olhando ao longo do vetor $100\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 100(\mathbf{i} - \mathbf{j})$, em direção a seu ponto inicial (Figura 12.4.8b). ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.4** (Ver página 823 para respostas.)

- (a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\langle 1, 2, 0 \rangle \times \langle 3, 0, 4 \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$
- Suponha que \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} sejam vetores no espaço tridimensional tais que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle 2, 7, 3 \rangle$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \langle -5, 4, 0 \rangle$.
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\mathbf{u} \times (2\mathbf{w}) = \underline{\hspace{2cm}}$
- Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
 - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - O paralelepípedo de lados adjacentes \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} tem volume $V = \underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 12.4 [C] CAS

- (a) Use um determinante para determinar o produto vetorial $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 (b) Verifique sua resposta da parte (a) reescrevendo o produto vetorial como $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$ e calculando cada termo.
 - Em cada parte, use os dois métodos do Exercício 1 para determinar
 - $\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 - $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
- 3-6** Determine $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e verifique que é ortogonal a ambos \mathbf{u} e \mathbf{v} .

 - $\mathbf{u} = \langle 1, 2, -3 \rangle$; $\mathbf{v} = \langle -4, 1, 2 \rangle$
 - $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. $\mathbf{u} = \langle 0, 1, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -4 \rangle$
 6. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
 7. Sejam $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 7 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 1, 4, 5 \rangle$. Determine
 (a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
 (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

- C** 8. Use um CAS ou uma calculadora que possa calcular determinantes ou produtos vetoriais para resolver o Exercício 7.
 9. Determine os cossenos diretores de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} na figura abaixo.

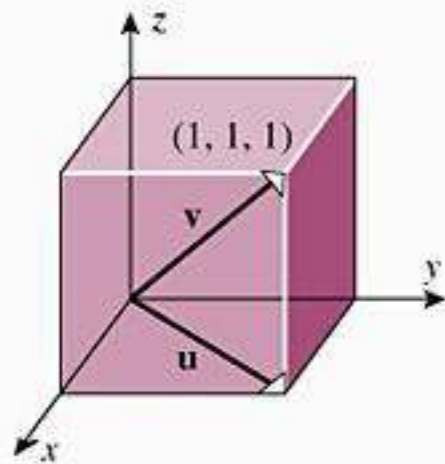


Figura Ex-9

10. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a ambos
 $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.
 11. Determine dois vetores unitários que sejam perpendiculares ao plano determinado pelos pontos $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ e $C(-1, 1, 0)$.
 12. Determine dois vetores unitários que sejam paralelos ao plano yz e perpendiculares ao vetor $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

13-14 Determine a área do paralelogramo que tem \mathbf{u} e \mathbf{v} como lados adjacentes.

13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 14. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

15-16 Determine a área do triângulo de vértices P , Q e R .

15. $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$ e $R(3, 5, 1)$
 16. $P(2, 0, -3)$, $Q(1, 4, 5)$ e $R(7, 2, 9)$

17-20 Determine $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

17. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 18. $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -4, 1, -3 \rangle$
 19. $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -3, 1 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 4, 0, 1 \rangle$
 20. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

21-22 Use um produto misto para determinar o volume do paralelepípedo que tem \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} como arestas adjacentes.

21. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 2, 2, -4 \rangle$
 22. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 23. Em cada parte, use um produto misto para determinar se os vetores situam-se no mesmo plano.
 (a) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 5, -4, 0 \rangle$
 (b) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
 (c) $\mathbf{u} = \langle 4, -8, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 3, -4, 12 \rangle$.

24. Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Determine
 (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$
 (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
 (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$
 25. Considere o paralelepípedo com as arestas adjacentes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

- (a) Encontre o volume.
 (b) Encontre a área da face determinada por \mathbf{u} e \mathbf{w} .
 (c) Encontre o ângulo entre \mathbf{u} e o plano contendo a face determinada por \mathbf{v} e \mathbf{w} .
 26. Mostre que no espaço tridimensional a distância d de um ponto P à reta L que passa pelos pontos A e B pode ser expressa como

$$d = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

27. Use o resultado do Exercício 26 para determinar a distância entre o ponto P e a reta que passa pelos pontos A e B .
 (a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$
 (b) $P(4, 3)$, $A(2, 1)$, $B(0, 2)$
 28. É um teorema da Geometria sólida que o volume de um tetraedro é $\frac{1}{3}$ (área da base) \cdot (altura). Use esse resultado para provar que o volume de um tetraedro cujas arestas sejam os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} é $\frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.
 29. Use o resultado do Exercício 28 para determinar o volume do tetraedro com vértices.

$$P(-1, 2, 0), Q(2, 1, 3), R(1, 0, 1), S(3, -2, 3)$$

30. Seja θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
 (a) Use o produto escalar para determinar $\cos \theta$.
 (b) Use o produto vetorial para determinar $\sin \theta$.
 (c) Confirme que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

ENFOCANDO CONCEITOS

31. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos no espaço tridimensional. Explique por que a reta que passa por A e B deve intersectar a reta que passa por C e D se $\vec{AB} \times \vec{CD} \neq \mathbf{0}$ e $\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \times \vec{CD}) = 0$.
 32. Sejam A, B e C três pontos não-colineares no espaço tridimensional. Descreva o conjunto de todos os pontos P que satisfaçam a equação vetorial $\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0$.
 33. O que pode ser dito sobre o ângulo entre os vetores não-nulos \mathbf{u} e \mathbf{v} se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$?
 34. Mostre que se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores no espaço tridimensional, então

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

[Nota: este resultado, às vezes, é chamado de *identidade de Lagrange*.]

35. A figura abaixo mostra uma força \mathbf{F} de 10 lb aplicada na direção y positivo ao ponto $Q(1, 1, 1)$ de um cubo cujos lados têm um comprimento de 1 pé. Em cada parte, determine o momento escalar de \mathbf{F} sobre o ponto P , e descreva a direção de rotação, se houver, se o cubo estiver livre para rodar em torno de P .

- (a) P é o ponto $(0, 0, 0)$ (b) P é o ponto $(1, 0, 0)$
 (c) P é o ponto $(1, 0, 1)$

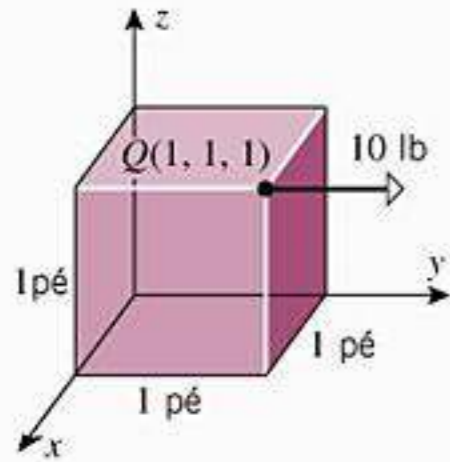


Figura Ex-35

36. A figura abaixo mostra uma força \mathbf{F} de 1000 N aplicada no canto de uma caixa.

- (a) Determine o momento escalar de \mathbf{F} sobre o ponto P .
 (b) Determine os ângulos diretores do momento vetorial de \mathbf{F} sobre o ponto P até o grau mais próximo.

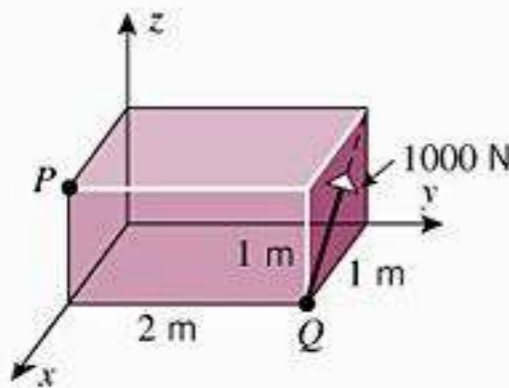


Figura Ex-36

37. Conforme mostrado na figura abaixo, uma força de 200 N é aplicada em um ângulo de 18° no ponto próximo da ponta de uma chave inglesa. Encontre o momento escalar da força sobre o centro do parafuso. [Trate isso como um problema a duas dimensões.]

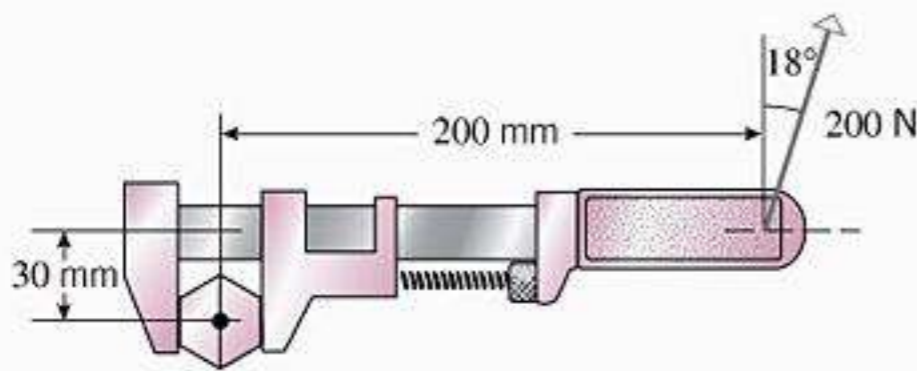


Figura Ex-37

38. Prove as partes (b) e (c) do Teorema 12.4.3.
 39. Prove as partes (d) e (e) do Teorema 12.4.3.
 40. Prove a parte (b) do Teorema 12.4.1 para determinantes 3×3 . [Dê a prova para as duas primeiras linhas.] Então use (b) para provar (a).

ENFOCANDO CONCEITOS

41. As expressões da forma

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

são chamadas de *produtos vetoriais triplos*. Pode-se provar com algum esforço que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

Essas expressões podem ser resumidas com a seguinte regra mnemônica:

Produto vetorial triplo = (de fora \cdot o remoto)adjacente
 – (de fora \cdot adjacente)remoto

Tente descobrir o significado nesta regra de “de fora”, “remoto” e “adjacente” e, então, use a regra para encontrar os dois produtos vetoriais triplos dos vetores

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

42. (a) Use o resultado do Exercício 41 para mostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ situa-se no mesmo plano que \mathbf{v} e \mathbf{w} e que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ situa-se no mesmo plano que \mathbf{u} e \mathbf{v} .
 (b) Use um argumento geométrico para justificar os resultados da parte (a).

43. Em cada parte, use o resultado do Exercício 41 para provar a identidade vetorial.

- (a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}$
 (b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

44. Prove: se \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} situam-se no mesmo plano quando posicionados com um ponto inicial comum, então

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

C 45. Use um CAS para aproximar a área mínima de um triângulo se dois de seus vértices estão em $(2, -1, 0)$ e $(3, 2, 2)$ e o terceiro vértice está sobre a curva $y = \ln x$ no plano xy .

46. Se uma força \mathbf{F} for aplicada a um objeto no ponto Q , então a reta que passa por Q paralela a \mathbf{F} é chamada a *linha de ação* da força. Definimos o momento vetorial de \mathbf{F} sobre o ponto P como sendo $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$. Mostre que se Q' for qualquer ponto sobre a linha de ação de \mathbf{F} , então $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \overrightarrow{PQ'} \times \mathbf{F}$; isto é, não é essencial usar o ponto de aplicação para calcular o momento vetorial – serve qualquer ponto sobre a linha de ação. [Sugestão: escreva $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$ e use as propriedades do produto vetorial.]

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.4

1. (a) 7 (b) 0 2. $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 3. (a) $(0, 0, 0)$ (b) $(-2, -7, -3)$ (c) $(-3, 11, 3)$ (d) $(-10, 8, 0)$ 4. (a) -58 (b) 58.

12.5 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE RETAS

Nesta seção, discutiremos equações paramétricas de retas nos espaços bi e tridimensionais. No espaço tridimensional, as equações paramétricas de retas são especialmente importantes, pois fornecem, quase sempre, a forma mais conveniente de representação algébrica de retas.

RETAS DETERMINADAS POR UM PONTO E UM VETOR

Uma reta no espaço bi ou tridimensional pode ser determinada de maneira única especificando um ponto da reta e um vetor não-nulo paralelo à reta (Figura 12.5.1). Por exemplo, considere uma reta L do espaço tridimensional que passe pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e seja paralela ao vetor não-nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Então L consiste precisamente naqueles pontos $P(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a \mathbf{v} (Figura 12.5.2). Em outras palavras, o ponto $P(x, y, z)$ está na reta L se, e somente se, $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de \mathbf{v} , digamos

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle ta, tb, tc \rangle$$

o que implica que

$$x - x_0 = ta, \quad y - y_0 = tb, \quad z - z_0 = tc$$

Assim, L pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

Uma descrição análoga aplica-se a retas no espaço bidimensional. Resumimos essas descrições no seguinte teorema:

12.5.1 TEOREMA

(a) A reta no espaço bidimensional que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor não-nulo $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ tem equações paramétricas

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt \tag{1}$$

(b) A reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor não-nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ tem equações paramétricas

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \tag{2}$$

Embora não esteja explicitado, entenda-se nas Equações (1) e (2) que $-\infty < t < +\infty$, o que reflete o fato de que retas se estendem indefinidamente.

► **Exemplo 1** Encontre equações paramétricas da reta que passa

- (a) por $(4, 2)$ e é paralela a $\mathbf{v} = \langle -1, 5 \rangle$;
- (b) por $(1, 2, -3)$ e é paralela a $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$;
- (c) pela origem do espaço tridimensional e é paralela a $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$.

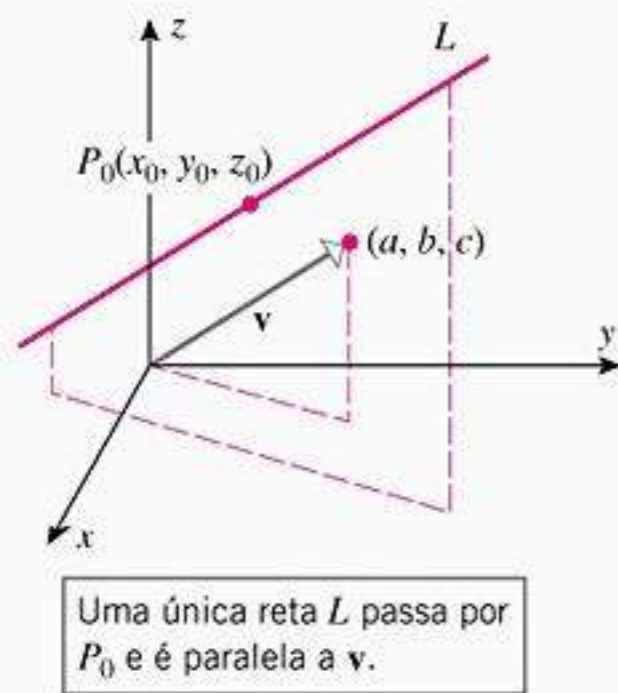
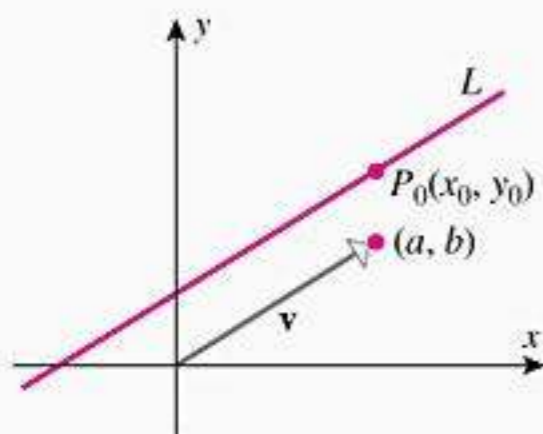


Figura 12.5.1

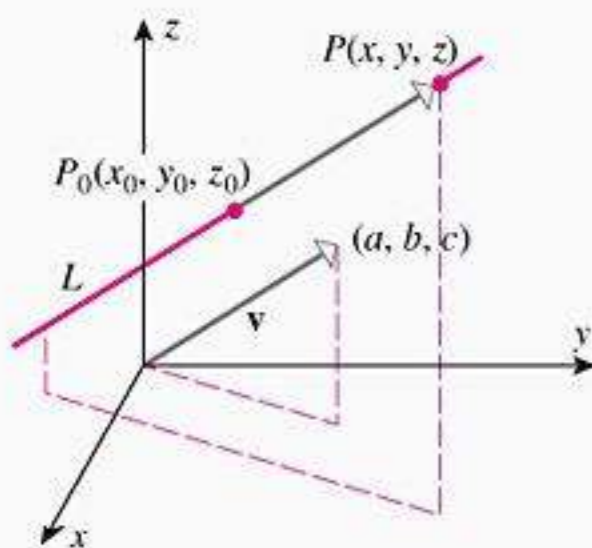


Figura 12.5.2

Solução (a) Por (1), com $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $a = -1$ e $b = 5$, obtemos

$$x = 4 - t, \quad y = 2 + 5t$$

Solução (b) Por (2), obtemos

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t$$

Solução (c) Por (2), com $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, obtemos

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t \quad \blacktriangleleft$$

► Exemplo 2

- (a) Encontre equações paramétricas da reta L que passa pelos pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.
 (b) Em que ponto essa reta intersecta o plano xy ?

Solução (a) O vetor $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, -4, 8 \rangle$ é paralelo a L e o ponto $P_1(2, 4, -1)$ está em L , de modo que, por (2), L tem equações paramétricas

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \quad (3)$$

Se tivéssemos utilizado P_2 como o ponto de L em vez de P_1 , teríamos obtido as equações

$$x = 5 + 3t, \quad y = -4t, \quad z = 7 + 8t$$

Embora essas equações pareçam diferentes das obtidas usando P_1 , os dois conjuntos de equações realmente são equivalentes, no sentido de que ambos geram a mesma reta L quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$. Para ver isso, observe que se t_1 fornecer um ponto

$$(x, y, z) = (2 + 3t_1, 4 - 4t_1, -1 + 8t_1)$$

de L usando o primeiro conjunto de equações, então $t_2 = t_1 - 1$ dará o *mesmo* ponto

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (5 + 3t_2, -4t_2, 7 + 8t_2) \\ &= (5 + 3(t_1 - 1), -4(t_1 - 1), 7 + 8(t_1 - 1)) \\ &= (2 + 3t_1, 4 - 4t_1, -1 + 8t_1) \end{aligned}$$

de L usando o segundo conjunto de equações. Reciprocamente, se t_2 fornecer um ponto de L usando o segundo conjunto de equações, então $t_1 = t_2 + 1$ fornecerá o mesmo ponto usando o primeiro conjunto.

Solução (b) Segue de (3) na parte (a) que a reta intersecta o plano xy no ponto em que $z = -1 + 8t = 0$, ou seja, com $t = \frac{1}{8}$. Substituindo esse valor de t em (3), obtemos o ponto de interseção $(x, y, z) = (\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0)$. \blacktriangleleft

► Exemplo 3 Sejam L_1 e L_2 as retas

$$\begin{aligned} L_1: x &= 1 + 4t, & y &= 5 - 4t, & z &= -1 + 5t \\ L_2: x &= 2 + 8t, & y &= 4 - 3t, & z &= 5 + t \end{aligned}$$

- (a) As retas são paralelas?
 (b) As retas se intersectam?

Solução (a) A reta L_1 é paralela ao vetor $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e a reta L_2 é paralela ao vetor $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Esses vetores não são paralelos, uma vez que nenhum é um múltiplo escalar do outro. Desse modo, as retas não são paralelas.

Solução (b) Para L_1 e L_2 intersectar em algum ponto (x_0, y_0, z_0) , essas coordenadas teriam que satisfazer as equações de ambas as retas. Em outras palavras, teriam que existir valores t_1 e t_2 para os parâmetros tais que

$$x_0 = 1 + 4t_1, \quad y_0 = 5 - 4t_1, \quad z_0 = -1 + 5t_1$$

e

$$x_0 = 2 + 8t_2, \quad y_0 = 4 - 3t_2, \quad z_0 = 5 + t_2$$

Isso leva a três condições em t_1 e t_2 ,

$$\begin{aligned} 1 + 4t_1 &= 2 + 8t_2 \\ 5 - 4t_1 &= 4 - 3t_2 \\ -1 + 5t_1 &= 5 + t_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Assim, as retas intersectam se houver valores de t_1 e t_2 que satisfaçam todas as três equações, e as retas não intersectam se não houver tais valores. O leitor deve estar familiarizado com os métodos para resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Porém, este é um sistema de três equações lineares com duas incógnitas. Para determinar se este sistema tem solução, resolveremos as duas primeiras equações para t_1 e t_2 e, então, verificamos se esses valores satisfazem a terceira equação.

Resolveremos as duas primeiras equações pelo método de eliminação. Podemos eliminar a incógnita t_1 somando as equações. Disso resulta a equação

$$6 = 6 + 5t_2$$

da qual obtemos $t_2 = 0$. Podemos encontrar t_1 substituindo este valor de t_2 ou na primeira equação ou na segunda. Disso resulta $t_1 = \frac{1}{4}$. Entretanto, os valores $t_1 = \frac{1}{4}$ e $t_2 = 0$ não satisfazem a terceira equação em (4), logo as retas não intersectam. ◀

Dois retas no espaço tridimensional que não sejam paralelas e não intersectem (como as do Exemplo 3) são chamadas retas **reversas**. Conforme ilustrado na Figura 12.5.3, quaisquer duas retas reversas situam-se em planos paralelos.

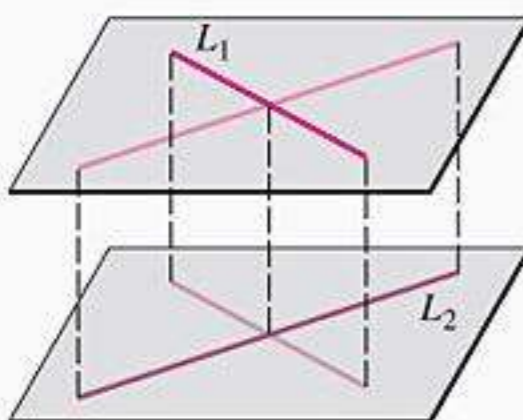
■ SEGMENTOS DE RETAS

Às vezes, não estamos interessados na reta inteira, mas mais exatamente em algum *segmento* de uma reta. As equações paramétricas de um segmento de reta podem ser obtidas determinando as equações paramétricas para a reta inteira e então restringindo o parâmetro apropriadamente de modo que seja gerado somente o segmento desejado.

► **Exemplo 4** Determine as equações paramétricas para o segmento de reta que une os pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

Solução Do Exemplo 2, a reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 tem as equações paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = 4 - 4t$, $z = -1 + 8t$. Com essas equações, o ponto P_1 corresponde a $t = 0$ e P_2 a $t = 1$. Assim, o segmento de reta que une P_1 e P_2 é dado por

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \blacktriangleleft$$



Os planos paralelos contendo retas reversas L_1 e L_2 podem ser determinados trasladando cada reta até que intersecte a outra.

Figura 12.5.3

■ EQUAÇÕES VETORIAIS DAS RETAS

Agora, mostraremos como a notação vetorial pode ser usada para expressar as equações paramétricas de uma reta mais compactamente. Como dois vetores são iguais se e somente se seus componentes forem iguais, (1) e (2) podem ser escritos na forma vetorial como

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_0 + at, y_0 + bt \rangle \\ \langle x, y, z \rangle &= \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle \end{aligned}$$

ou, de modo equivalente, como

$$\langle x, y \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle + t \langle a, b \rangle \tag{5}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle \tag{6}$$

Para a equação no espaço bidimensional, definimos os vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}_0 e \mathbf{v} como

$$\mathbf{r} = \langle x, y \rangle, \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle a, b \rangle \tag{7}$$

e para a equação no espaço tridimensional, definimo-los como

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle, \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (5) e (6), respectivamente, obtém-se a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{9}$$

em ambos casos. Chamaremos essa equação de *equação vetorial da reta* no espaço bi ou tridimensional. Nessa equação, \mathbf{v} é um vetor não-nulo paralelo à reta e \mathbf{r}_0 é um vetor cujas componentes são as coordenadas de um ponto da reta.

Podemos interpretar a Equação (9) geometricamente posicionando os vetores \mathbf{r}_0 e \mathbf{v} com seus pontos iniciais na origem e o vetor $t\mathbf{v}$ com seu ponto inicial em P_0 (Figura 12.5.4). O vetor $t\mathbf{v}$ é um múltiplo escalar de \mathbf{v} e, portanto, é paralelo a \mathbf{v} e L . Além disso, uma vez que o ponto inicial de $t\mathbf{v}$ é o ponto P_0 em L , este vetor, de fato, está em L ; portanto, o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ pode ser interpretado como o vetor que parte da origem a um ponto em L . Quando o parâmetro t varia de 0 a $+\infty$, o ponto final de \mathbf{r} descreve a parte de L que se estende de P_0 na direção de \mathbf{v} , e quando t varia de 0 a $-\infty$, o ponto final de \mathbf{r} descreve a parte de L que se estende de P_0 no sentido oposto a \mathbf{v} . Assim, a reta inteira é traçada quando t varia sobre o intervalo $(-\infty, +\infty)$, sendo traçada na direção e sentido de \mathbf{v} quando t cresce.

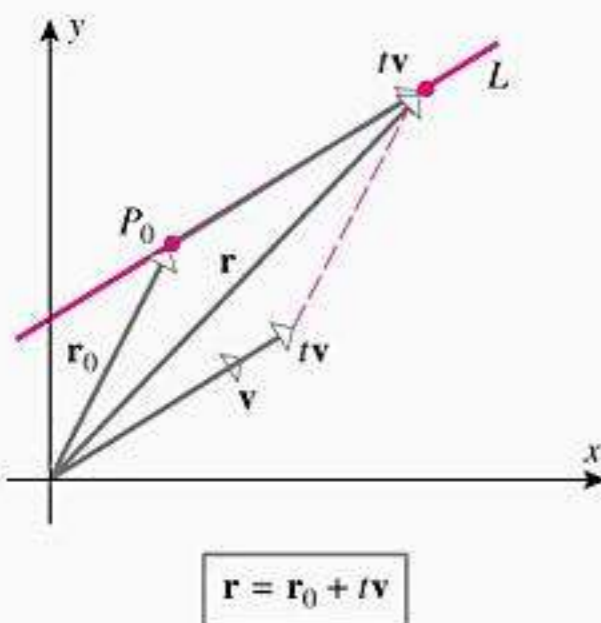


Figura 12.5.4

► **Exemplo 5** A equação

$$\langle x, y, z \rangle = \langle -1, 0, 2 \rangle + t \langle 1, 5, -4 \rangle$$

é da forma (9) com

$$\mathbf{r}_0 = \langle -1, 0, 2 \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \langle 1, 5, -4 \rangle$$

Desse modo, a equação representa a reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto $(-1, 0, 2)$ e é paralela ao vetor $\langle 1, 5, -4 \rangle$. ◀

► **Exemplo 6** Determine uma equação da reta no espaço tridimensional que passa pelos pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

Solução O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, -4, 8 \rangle$$

é paralelo à reta, logo pode ser usado como vetor \mathbf{v} em (9). Para \mathbf{r}_0 podemos usar o vetor que vai da origem a P_1 ou o vetor que vai da origem a P_2 . Usando o primeiro, obtém-se

$$\mathbf{r}_0 = \langle 2, 4, -1 \rangle$$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa em P_1 e P_2 é

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 2, 4, -1 \rangle + t\langle 3, -4, 8 \rangle$$

Caso necessário, podemos expressar a reta parametricamente igualando os correspondentes componentes dos dois lados dessa equação vetorial, e nesse caso obtemos as equações paramétricas do Exemplo 2 (verifique). ◀

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.5 (Ver página 830 para respostas.)

- Seja L a reta que passa por $(2, 5)$ e que é paralela a $\mathbf{v} = \langle 3, -1 \rangle$.
 - Equações paramétricas de L são
 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$
 - Uma equação vetorial de L é $\langle x, y \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Equações paramétricas da reta que passa por $(5, 3, 7)$ e é paralela à reta $x = 3 - t, y = 2, z = 8 + 4t$ são
 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}, z = \underline{\hspace{2cm}}$
- Equações paramétricas do segmento de reta ligando os pontos $(3, 0, 11)$ e $(2, 6, 7)$ são
 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}, z = \underline{\hspace{2cm}}$ (_____)
- A reta que passa pelos pontos $(-3, 8, -4)$ e $(1, 0, 8)$ intersecta o plano yz no ponto _____.

EXERCÍCIOS 12.5  Recurso Gráfico  CAS

- Determine equações paramétricas das retas que passam pelo canto do quadrado unitário mostradas na parte (a) da figura abaixo.
 - Determine equações paramétricas das retas que passam pelo canto do cubo unitário mostradas na parte (b) da figura abaixo.

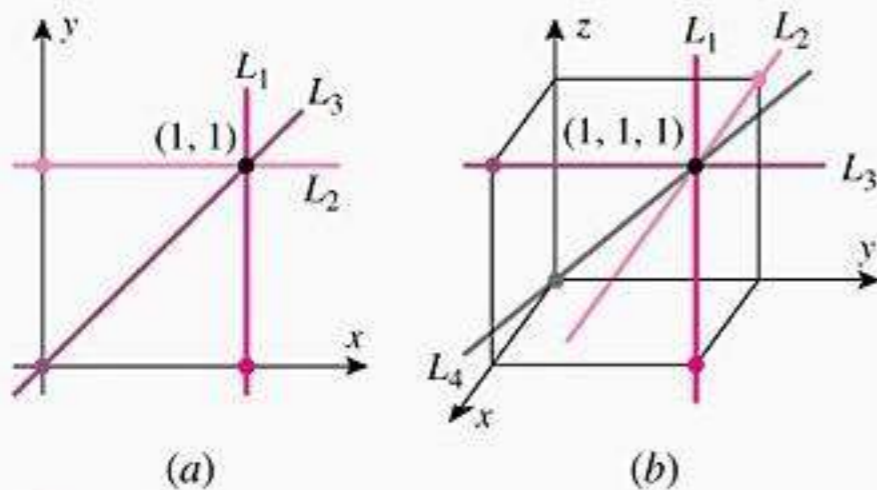


Figura Ex-1

- Determine equações paramétricas dos segmentos de reta do quadrado unitário mostrados na parte (a) da figura abaixo.
 - Determine as equações paramétricas dos segmentos de reta no cubo unitário, mostrados na parte (b) da figura abaixo.

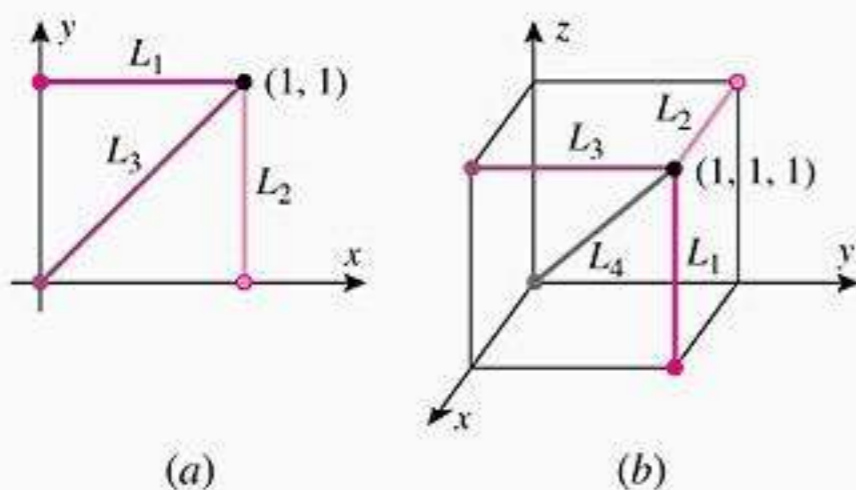


Figura Ex-2

3-4 Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 e também para o segmento de reta ligando esses pontos.

- $P_1(3, -2), P_2(5, 1)$
 - $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$
- $P_1(0, 1), P_2(-3, -4)$
 - $P_1(-1, 3, 5), P_2(-1, 3, 2)$

5-6 Obtenha equações paramétricas para a reta cuja equação vetorial é dada.

- $\langle x, y \rangle = \langle 2, -3 \rangle + t\langle 1, -4 \rangle$
 - $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{k} + t(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
- $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
 - $\langle x, y, z \rangle = \langle -1, 0, 2 \rangle + t\langle -1, 3, 0 \rangle$

7-8 Sem fazer contas, obtenha um ponto P da reta e um vetor \mathbf{v} paralelo à reta.

- $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) + t(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$
 - $\langle x, y, z \rangle = \langle -1, 2, 4 \rangle + t\langle 5, 7, -8 \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle -1, 5 \rangle + t\langle 2, 3 \rangle$
 - $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + t\mathbf{j}$

9-10 Expresse as equações paramétricas dadas da reta na forma vetorial usando a notação com $\langle \cdot \rangle$ e também usando a notação $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

- $x = -3 + t, y = 4 + 5t$
 - $x = 2 - t, y = -3 + 5t, z = t$
- $x = t, y = -2 + t$
 - $x = 1 + t, y = -7 + 3t, z = 4 - 5t$

11-18 Obtenha equações paramétricas da reta que satisfaz as condições dadas.

11. A reta que passa por $(-5, 2)$ e é paralela a $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
12. A reta que passa por $(0, 3)$ e é paralela à reta $x = -5 + t$, $y = 1 - 2t$.
13. A reta que é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, -4)$.
14. A reta que é tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(-2, 4)$.
15. A reta que passa por $(-1, 2, 4)$ e é paralela a $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
16. A reta que passa por $(2, -1, 5)$ e é paralela a $\langle -1, 2, 7 \rangle$.
17. A reta que passa por $(-2, 0, 5)$ e é paralela à reta $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$.
18. A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = t$, $y = -1 + t$, $z = 2$.
19. Em que ponto a reta $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$ intersecta
(a) o eixo x (b) o eixo y (c) a parábola $y = x^2$?
20. Em que ponto a reta $\langle x, y \rangle = \langle 4t, 3t \rangle$ intersecta o círculo $x^2 + y^2 = 25$?

21-22 Encontre as interseções das retas com o plano xy , o plano xz e o plano yz .

21. $x = -2$, $y = 4 + 2t$, $z = -3 + t$
22. $x = -1 + 2t$, $y = 3 + t$, $z = 4 - t$
23. Em que ponto a reta $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, $z = 2t$ intersecta o cilindro $x^2 + y^2 = 16$?
24. Em que ponto a reta $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = -1 + 2t$ intersecta o plano $2y + 3z = 6$?

25-26 Mostre que as retas L_1 e L_2 intersectam e determine seu ponto de interseção.

25. $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$
 $L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$
26. $L_1: x + 1 = 4t, y - 3 = t, z - 1 = 0$
 $L_2: x + 13 = 12t, y - 1 = 6t, z - 2 = 3t$

27-28 Mostre que as retas L_1 e L_2 são reversas.

27. $L_1: x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$
 $L_2: x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$
28. $L_1: x = 2 + 8t, y = 6 - 8t, z = 10t$
 $L_2: x = 3 + 8t, y = 5 - 3t, z = 6 + t$

29-30 Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas.

29. $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t$
 $L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$
30. $L_1: x = 5 + 3t, y = 4 - 2t, z = -2 + 3t$
 $L_2: x = -1 + 9t, y = 5 - 6t, z = 3 + 8t$

31-32 Determine se os pontos P_1 e P_2 e P_3 situam-se na mesma reta.

31. $P_1(6, 9, 7)$, $P_2(9, 2, 0)$, $P_3(0, -5, -3)$
32. $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(3, -4, -3)$, $P_3(4, -6, -5)$

33-34 Mostre que as retas L_1 e L_2 são iguais.

33. $L_1: x = 3 - t, y = 1 + 2t$
 $L_2: x = -1 + 3t, y = 9 - 6t$
34. $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$
 $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle -1, 2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$ e depois esboce os seis vetores $\mathbf{r}_0 \pm \mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 \pm 2\mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 \pm 3\mathbf{v}$. Trace a reta $L: x = -1 + t, y = 2 + t$ e descreva a relação entre L e os vetores esboçados. Qual é a equação vetorial de L ?
36. Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle 0, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 1 \rangle$ e depois esboce os vetores $\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 + 2\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}_0 + 3\mathbf{v}$. Trace a reta $L: x = t, y = 2, z = 1 + t$ e descreva a relação entre L e os vetores esboçados. Qual é a equação vetorial de L ?
37. Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle -2, 0 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 3 \rangle$ e depois esboce os vetores

$$\frac{1}{3}\mathbf{r}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_1, \quad \frac{1}{2}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_1, \quad \frac{2}{3}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{r}_1$$

Trace o segmento de reta $(1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$ ($0 \leq t \leq 1$). Se n for um inteiro positivo, qual é a posição do ponto desse segmento de reta que corresponde a $t = 1/n$, relativamente aos pontos $(-2, 0)$ e $(1, 3)$?

38. Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle 2, 0, 4 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 4, 0 \rangle$ e depois esboce os vetores

$$\frac{1}{4}\mathbf{r}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{r}_1, \quad \frac{1}{2}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_1, \quad \frac{3}{4}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{4}\mathbf{r}_1$$

Trace o segmento de reta $(1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$ ($0 \leq t \leq 1$). Se n for um inteiro positivo, qual é a posição do ponto desse segmento de reta que corresponde a $t = 1/n$, relativamente aos pontos $(2, 0, 4)$ e $(0, 4, 0)$?

39-40 Descreva o segmento de reta representado pela equação vetorial.

39. $\langle x, y \rangle = \langle 1, 0 \rangle + t\langle -2, 3 \rangle \quad (0 \leq t \leq 2)$
40. $\langle x, y, z \rangle = \langle -2, 1, 4 \rangle + t\langle 3, 0, -1 \rangle \quad (0 \leq t \leq 3)$
41. Determine o ponto do segmento que une $P_1(3, 6)$ e $P_2(8, -4)$ que está a $\frac{2}{3}$ do caminho de P_1 a P_2 .
42. Determine o ponto do segmento que une $P_1(1, 4, -3)$ e $P_2(1, 5, -1)$ que está a $\frac{2}{3}$ do caminho de P_1 a P_2 .

43-44 Use o método do Exercício 28 da Seção 12.3 para determinar a distância do ponto P à reta L e então confira sua resposta usando o método do Exercício 26 da Seção 12.4.

43. $P(-2, 1, 1)$
 $L: x = 3 - t, y = t, z = 1 + 2t$

44. $P(1, 4, -3)$
 $L: x = 2 + t, y = -1 - t, z = 3t$

45-46 Determine a distância entre as retas L_1 e L_2 e a equação paramétrica da reta que as contém.

45. $L_1: x = 2 - t, y = 2t, z = 1 + t$
 $L_2: x = 1 + 2t, y = 3 - 4t, z = 5 - 2t$

46. $L_1: x = 2t, y = 3 + 4t, z = 2 - t$
 $L_2: x = 1 + 3t, y = t, z = -9t$

47. a) Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e pelo ponto (x_1, y_1, z_1) .
 b) Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto (x_1, y_1, z_1) e é paralela à reta $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$.

48. Se a L a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralela a $\mathbf{r} = \langle a, b, c \rangle$, então a, b e c são números reais não nulos tais que x, y, z situados na reta L obedecem a

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas equações são chamadas **equações simétricas** da reta L , recebem uma representação paramétrica e L .

49. a) Determine a reta que contém o ponto $(1, -3, 5)$ e é paralela à

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{4} = z - 5$$

[ver Exercício 48]

b) Determine a equação paramétrica da reta que é paralela à

50. Determine a reta L_1 e L_2 que contém o ponto $(1, -3, 5)$ e é paralela à

$$L_1: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} = \frac{z + 1}{2}$$

$$L_2: \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 4}{2}$$

[ver Exercício 48]

- a) L_1 e L_2 são paralelas. Perímetro da região.
 b) Determine a equação paramétrica da L_1 e L_2 .
 c) L_1 e L_2 são coplanares. Afirmação, em que caso.

51. Se as retas L_1 e L_2 são coplanares, determine a equação paramétrica da reta que as contém.
 $L_1: x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 4 - 2t$
 $L_2: x = 9 + t, y = 5 + 3t, z = -4 - t$

- a) Determine a distância entre as retas L_1 e L_2 e a equação paramétrica da reta que as contém.
 b) Determine, até grau máximo, o ângulo entre as retas L_1 e L_2 em seu ponto de interseção.
 c) Determine a equação paramétrica da reta que é perpendicular a L_1 e L_2 e que passa pelo ponto de interseção.

52. Se as retas L_1 e L_2 são coplanares, determine a equação paramétrica da reta que as contém.
 $L_1: x = 4t, y = 1 - 2t, z = 2 + 2t$
 $L_2: x = 1 + t, y = 1 - t, z = -1 + 4t$

- a) Determine a distância entre as retas L_1 e L_2 e a equação paramétrica da reta que as contém.
 b) Determine, até grau máximo, o ângulo entre as retas L_1 e L_2 em seu ponto de interseção.
 c) Determine a equação paramétrica da reta que é perpendicular a L_1 e L_2 e que passa pelo ponto de interseção.

53-54 Determine a equação paramétrica da reta que contém o ponto P e é perpendicular à reta L em um ângulo reto e determine a distância entre P e L .

53. $P(0, 2, 1)$
 $L: x = 2t, y = 1 - t, z = 2 + t$

54. $P(3, 1, -2)$
 $L: x = -2 + 2t, y = 4 + 2t, z = 2 + t$

55. Determine a equação paramétrica da reta que contém o ponto P e é perpendicular à reta L em um ângulo reto e determine a distância entre P e L .
 $P(4, 1, 2)$ e $L: x = 4 - t, y = 1 + 2t, z = 2 + t$

e, determine o ângulo entre as retas L e L' em seu ponto de interseção.
 $L': x = t, y = 1 + t, z = 1 + 2t$

Sua distância em centímetros e em metros.

- a) Determine a distância entre as retas L e L' em seu ponto de interseção.
 b) Faça um gráfico para as retas L e L' e determine a distância entre as retas L e L' em seu ponto de interseção.
 c) Faça um gráfico para as retas L e L' e determine a distância entre as retas L e L' em seu ponto de interseção.
 Quanto ficam as retas L e L' em seu ponto de interseção?

56. Sua temperatura T em um ponto (x, y, z) da reta $x = t, y = 1 + t, z = 3 - 2t$ e a $T = 25x^2yz$ é um sólido. Sua temperatura máxima na parte da reta que está entre os pontos xz e xy .

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.5

1. a) $2 + 3t, 5 - t$ b) $\langle 2, 5 \rangle + t\langle 3, -1 \rangle$ 2. $5 - t, 3, 7 + 4t$ 3. $3 - t, t, 11 - 4t, 0 \leq t \leq 1$ 4. $0, 2, 5$

12.6 PLANOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Nesta seção, usaremos vetores para deduzir equações de planos no espaço tridimensional e, então, usaremos essas equações para resolver vários problemas geométricos.

■ PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

O gráfico da equação $x = a$ no sistema de coordenadas xyz consiste em todos os pontos da forma (a, y, z) , onde y e z são arbitrários. Um desses pontos é $(a, 0, 0)$ e todos os outros estão no plano que passa por esse ponto e é paralelo ao plano yz (Figura 12.6.1). Analogamente, o gráfico de $y = b$ é o plano que passa por $(0, b, 0)$ e é paralelo ao plano xz e o gráfico de $z = c$ é o plano que passa por $(0, 0, c)$ e é paralelo ao plano xy .

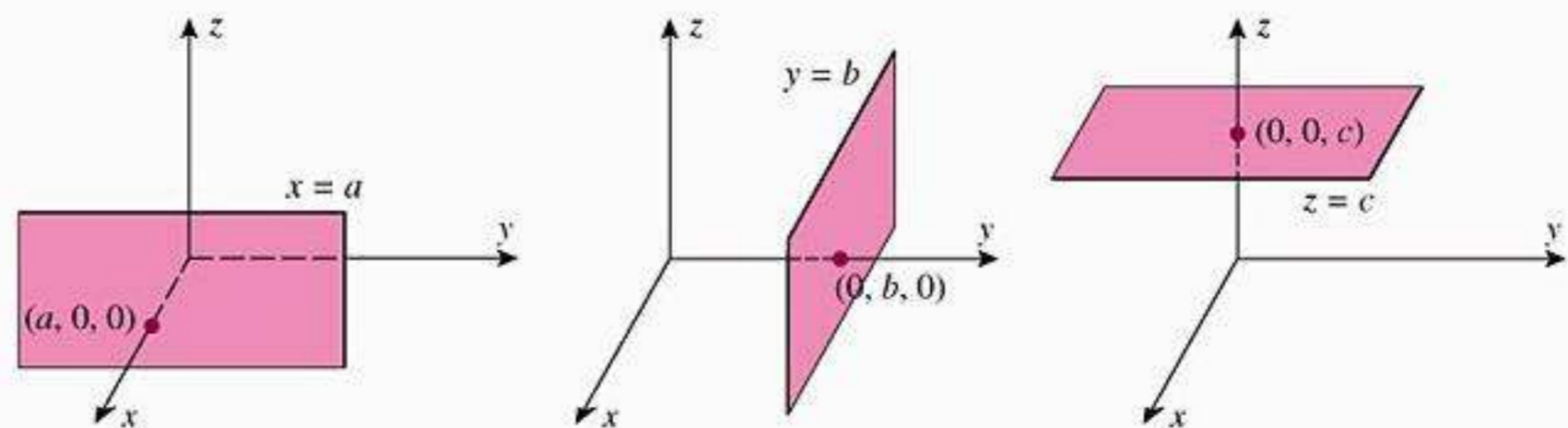


Figura 12.6.1

■ PLANOS DETERMINADOS POR UM PONTO E UM VETOR NORMAL

Um plano no espaço tridimensional pode ser determinado de modo único especificando um ponto no plano e um vetor perpendicular ao plano (Figura 12.6.2). Um vetor perpendicular a um plano é chamado de *normal* ao plano.

Suponha que queiramos determinar uma equação do plano que passa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e que seja perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. Definimos os vetores \mathbf{r}_0 e \mathbf{r} como

$$\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$$

Deve ser evidente a partir da Figura 12.6.3 que o plano consiste precisamente nos pontos $P(x, y, z)$ para os quais o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é ortogonal a \mathbf{n} ; ou, expresso como uma equação,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{1}$$

Se preferirmos, podemos expressar essa equação vetorial em termos dos componentes como

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0 \tag{2}$$

da qual obtemos

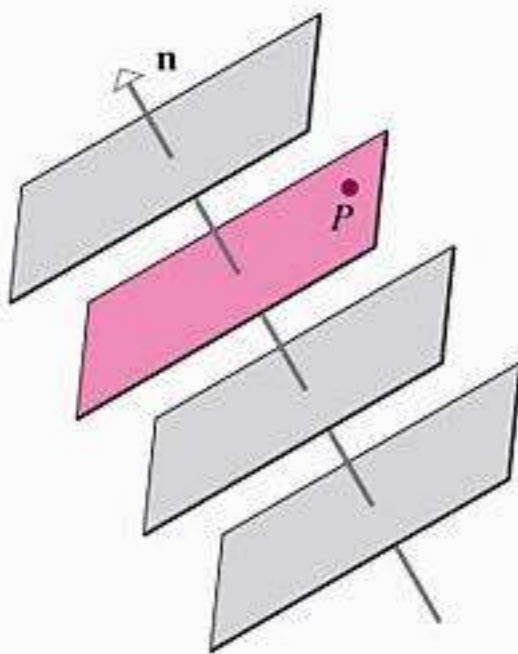
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

Essa é chamada a *forma ponto-normal* da equação de um plano. As Fórmulas (1) e (2) são as versões vetoriais dessa fórmula.

► **Exemplo 1** Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $(3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle 4, 2, -5 \rangle$.

Solução De (3), uma forma ponto-normal da equação é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0 \tag{4}$$



O plano azul é determinado de modo único pelo ponto P e pelo vetor \mathbf{n} perpendicular ao plano.

Figura 12.6.2

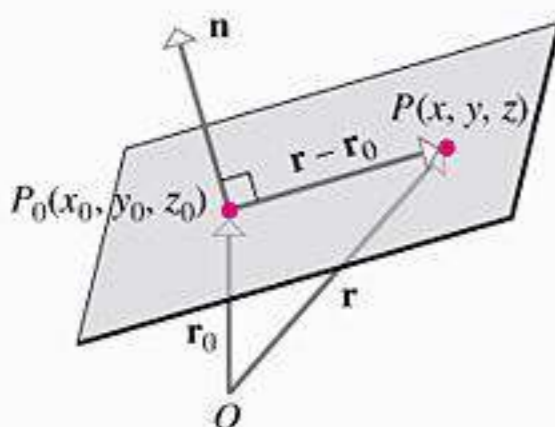


Figura 12.6.3

O que a Equação (1) representa se $\mathbf{n} = \langle a, b \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ são vetores no plano xy do espaço bidimensional? Faça uma figura.

Se preferirmos, essa equação pode ser escrita na forma vetorial como

$$\langle 4, 2, -5 \rangle \cdot \langle x - 3, y + 1, z - 7 \rangle = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Observe que se efetuarmos a multiplicação indicada em (3) e simplificarmos, obteremos uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (5)$$

Por exemplo, a Equação (4) do Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

O teorema a seguir mostra que toda equação da forma (5) representa um plano no espaço tridimensional.

12.6.1 TEOREMA Se a, b, c e d forem constantes e se a, b e c não forem todas nulas, então o gráfico da equação

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (6)$$

é um plano que tem o vetor $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ como normal.

DEMONSTRAÇÃO Como a, b e c não são todas nulas, há, no mínimo, um ponto (x_0, y_0, z_0) cujas coordenadas satisfaçam a Equação (6). Por exemplo, se $a \neq 0$, então um tal ponto é $(-d/a, 0, 0)$ e analogamente se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ (verifique). Assim, seja (x_0, y_0, z_0) um ponto qualquer cujas coordenadas satisfaçam (6); isto é,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Subtraindo essa equação de (6) obtemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é a forma ponto-normal de um plano com normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. ■

A Equação (6) é denominada de *forma geral* da equação de um plano.

► **Exemplo 2** Determine se os planos

$$3x - 4y + 5z = 0 \quad \text{e} \quad -6x + 8y - 10z - 4 = 0$$

são paralelos.

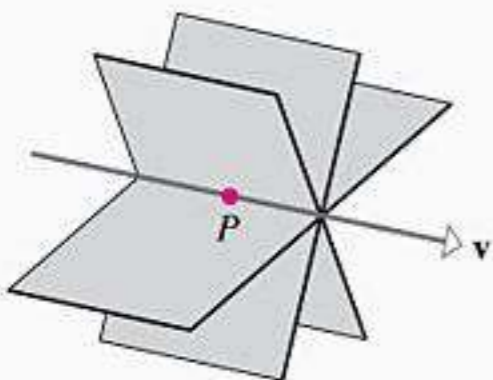
Solução É claro que, geometricamente, dois planos são paralelos se e somente se suas normais forem vetores paralelos. Uma normal para o primeiro plano é

$$\mathbf{n}_1 = \langle 3, -4, 5 \rangle$$

e uma normal para o segundo plano é

$$\mathbf{n}_2 = \langle -6, 8, -10 \rangle$$

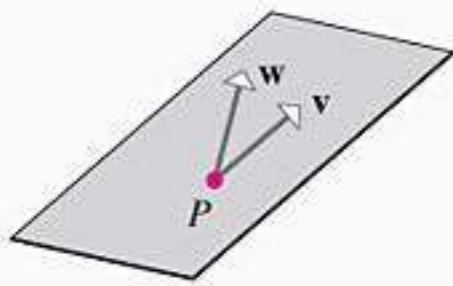
Como \mathbf{n}_2 é um múltiplo escalar de \mathbf{n}_1 , as normais são paralelas e, portanto, os planos são paralelos. ◀



Há uma infinidade de planos contendo P e paralelos a \mathbf{v} .

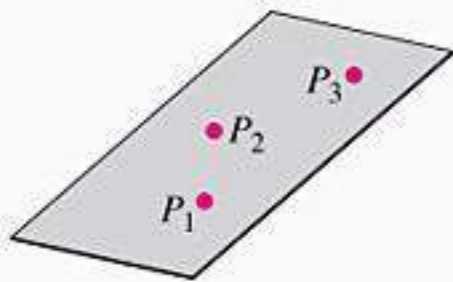
Figura 12.6.4

Vimos que um plano único é determinado por um ponto no plano e um vetor não-nulo normal ao plano. Em contrapartida, um plano não é determinado por um ponto no plano e um vetor não-nulo *paralelo* ao plano (Figura 12.6.4). Contudo, um plano único é determinado por um ponto no plano e dois vetores não-paralelos que sejam paralelos ao plano



Há um único plano que passa por P que é paralelo a v e w.

Figura 12.6.5



Há um único plano que passa por três pontos não-colineares.

Figura 12.6.6

(Figura 12.6.5). Um plano único é determinado também por três pontos não-colineares que se situem no plano (Figura 12.6.6).

► **Exemplo 3** Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ e $P_3(3, -1, 2)$.

Solução Como os pontos P_1, P_2 e P_3 situam-se no plano, os vetores $\vec{P_1P_2} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ e $\vec{P_1P_3} = \langle 2, -3, 3 \rangle$ são paralelos ao plano. Portanto,

$$\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

é normal ao plano, uma vez que é perpendicular a $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$. Usando esta normal e o ponto $P_1(1, 2, -1)$ no plano, obtemos a forma ponto-normal

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$9x + y - 5z - 16 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Determine se a reta

$$x = 3 + 8t, \quad y = 4 + 5t, \quad z = -3 - t$$

é paralela ao plano $x - 3y + 5z = 12$.

Solução O vetor $\mathbf{v} = \langle 8, 5, -1 \rangle$ é paralelo à reta e o vetor $\mathbf{n} = \langle 1, -3, 5 \rangle$ é normal ao plano. Para a reta e o plano serem paralelos, os vetores \mathbf{v} e \mathbf{n} devem ser ortogonais. Mas isso não acontece, uma vez que o produto escalar

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (8)(1) + (5)(-3) + (-1)(5) = -12$$

é não-nulo. Assim, a reta e o plano não são paralelos. ◀

► **Exemplo 5** Encontre o ponto de interseção da reta e do plano do Exemplo 4.

Solução Se tomarmos (x_0, y_0, z_0) como sendo o ponto de interseção, então as coordenadas desse ponto satisfazem a equação do plano e as equações paramétricas da reta. Assim,

$$x_0 - 3y_0 + 5z_0 = 12 \tag{7}$$

e para algum valor de t , digamos $t = t_0$,

$$x_0 = 3 + 8t_0, \quad y_0 = 4 + 5t_0, \quad z_0 = -3 - t_0 \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7) resulta

$$(3 + 8t_0) - 3(4 + 5t_0) + 5(-3 - t_0) = 12$$

Resolvendo para t_0 , obtemos $t_0 = -3$ e substituindo esse valor em (8), obtemos

$$(x_0, y_0, z_0) = (-21, -11, 0) \quad \blacktriangleleft$$

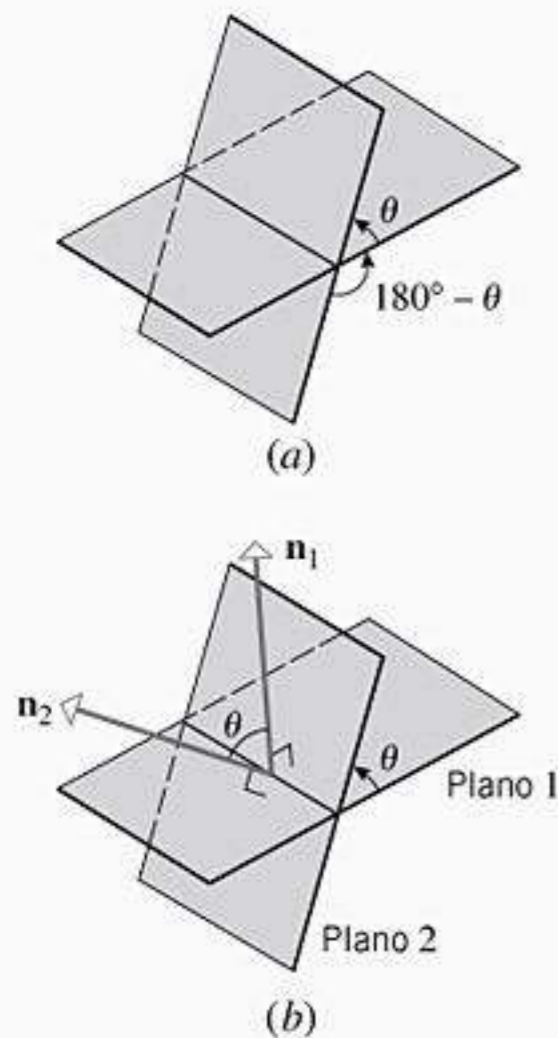


Figura 12.6.7

■ PLANOS CONCORRENTES

Dois planos distintos concorrentes determinam dois ângulos positivos de interseção – um ângulo (agudo) θ que satisfaz a condição $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e o suplementar desse ângulo (Figura 12.6.7a). Se \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 forem normais aos planos, então dependendo do sentido de \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 , o ângulo θ é ou o ângulo entre \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 ou entre \mathbf{n}_1 e $-\mathbf{n}_2$ (Figura 12.6.7b). Em ambos os casos, do Teorema 12.3.3 resulta a seguinte fórmula para o ângulo agudo θ entre os planos:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} \tag{9}$$

► **Exemplo 6** Determine o ângulo agudo da interseção dos planos

$$2x - 4y + 4z = 7 \quad \text{e} \quad 6x + 2y - 3z = 2$$

Solução Das equações dadas resultam as normais $\mathbf{n}_1 = \langle 2, -4, 4 \rangle$ e $\mathbf{n}_2 = \langle 6, 2, -3 \rangle$. Desse modo, da Fórmula (9) resulta

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} = \frac{|-8|}{\sqrt{36}\sqrt{49}} = \frac{4}{21}$$

da qual obtemos

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right) \approx 79^\circ \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 7** Encontre uma equação para a reta L de interseção dos planos no Exemplo 6.

Solução Primeiro calculamos $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \langle 2, -4, 4 \rangle \times \langle 6, 2, -3 \rangle = \langle 4, 30, 28 \rangle$. Como \mathbf{v} é ortogonal a \mathbf{n}_1 , é paralelo ao primeiro plano e como \mathbf{v} é ortogonal a \mathbf{n}_2 , é paralelo ao segundo plano. Portanto, \mathbf{v} é paralelo a L , que é a interseção dos dois planos. Para encontrar um ponto de L , observe que L deve intersectar o plano xy , ou seja, $z = 0$, pois $\mathbf{v} \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = 28 \neq 0$. Substituindo $z = 0$ na equação de ambos planos, obtemos

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ 6x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

com solução $x = 1, y = -1$. Assim, $P(1, -1, 0)$ é um ponto de L . Uma equação vetorial de L é

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 1, -1, 0 \rangle + t \langle 4, 30, 28 \rangle \blacktriangleleft$$

■ PROBLEMAS DE DISTÂNCIA ENVOLVENDO PLANOS

A seguir, consideraremos três “problemas de distância” básicos no espaço tridimensional:

- Determinar a distância entre um ponto e um plano.
- Determinar a distância entre dois planos paralelos.
- Determinar a distância entre duas retas reversas.

Os três problemas estão relacionados. Se pudermos determinar a distância entre um ponto e um plano, então poderemos determinar a distância entre planos paralelos calculando a distância entre um dos planos e um ponto arbitrário P_0 do outro plano (Figura 12.6.8a). Além disso, podemos determinar a distância entre duas retas reversas calculando a distância entre os planos paralelos que as contêm (Figura 12.6.8b).

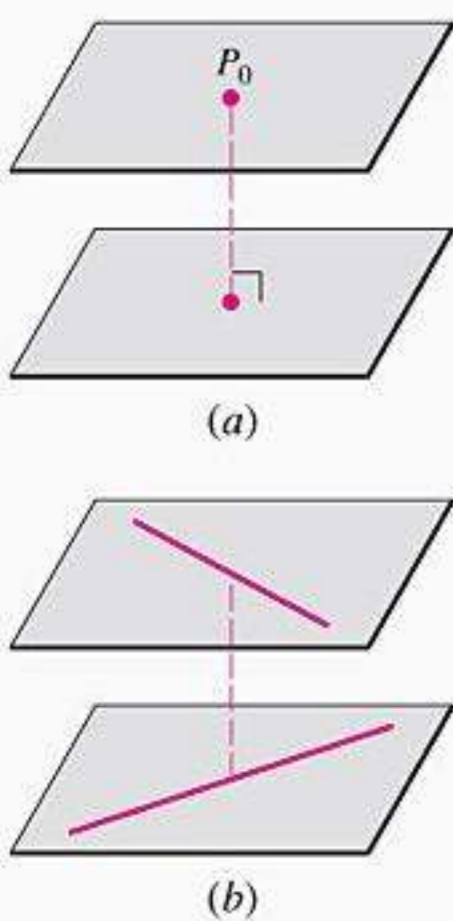


Figura 12.6.8

12.6.2 TEOREMA A distância D entre um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o plano de equação geral $ax + by + cz + d = 0$ é dada por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (10)$$

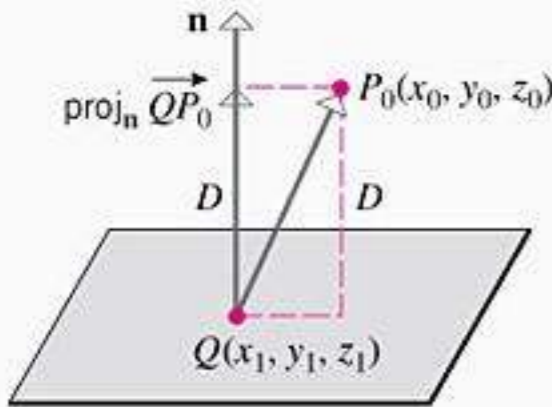


Figura 12.6.9

DEMONSTRAÇÃO Tome $Q(x_1, y_1, z_1)$ como um ponto qualquer do plano e posicione a normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ de tal modo que seu ponto inicial esteja em Q . Conforme ilustrado na Figura 12.6.9, a distância D é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre \mathbf{n} . Dessa forma, por (12) da Seção 12.3,

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_0}\| = \left\| \frac{\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \right\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2} \|\mathbf{n}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Mas

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP_0} &= \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle \\ \overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (11)$$

Como o ponto $Q(x_1, y_1, z_1)$ situa-se no plano, suas coordenadas satisfazem a equação do plano; isto é,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ou

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substituindo essa expressão em (11) resulta (10). ■

► **Exemplo 8** Determine a distância D entre o ponto $(1, -4, -3)$ e o plano

$$2x - 3y + 6z = -1$$

Solução A Fórmula (10) requer que o plano seja reescrito na forma $ax + by + cz + d = 0$. Desse modo, reescrevemos a equação do plano dado como

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

da qual obtemos $a = 2, b = -3, c = 6$ e $d = 1$. Substituindo esses valores e as coordenadas do ponto dado em (10), obtemos

$$D = \frac{|(2)(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 9** Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos, tendo em vista que seus vetores normais $\langle 1, 2, -2 \rangle$ e $\langle 2, 4, -4 \rangle$ são vetores paralelos. Determine a distância entre esses planos.

Existe um análogo da Fórmula(10) no espaço bidimensional que pode ser usada para calcular a distância entre um ponto a uma reta (ver Exercício 50).

Solução Para determinar a distância D entre os planos, podemos escolher um ponto arbitrário em um dos planos e calcular a sua distância ao outro plano. Pondo $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ neste plano. De (10), a distância de P_0 ao plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|(2)(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 10** Mostrou-se no Exemplo 3 da Seção 12.5 que as retas

$$L_1: x = 1 + 4t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -1 + 5t$$

$$L_2: x = 2 + 8t, \quad y = 4 - 3t, \quad z = 5 + t$$

são reversas. Determine a distâncias entre elas.

Solução Denotemos por P_1 e P_2 dois planos paralelos contendo L_1 e L_2 , respectivamente (Figura 4.6.10). Para determinar a distância D entre L_1 e L_2 , calcularemos a distância de um ponto em P_1 ao plano P_2 . Uma vez que L_1 situa-se no plano P_1 , podemos determinar um ponto em P_1 determinando um ponto sobre a reta L_1 ; podemos fazer isso substituindo qualquer valor conveniente de t nas equações paramétricas de L_1 . A escolha mais simples é $t = 0$, da qual resulta o ponto $Q_1(1, 5, -1)$.

O próximo passo é determinar uma equação para o plano P_2 . Para fazer isso, observe que o vetor $\mathbf{u}_1 = \langle 4, -4, 5 \rangle$ é paralelo à reta L_1 e, por conseguinte, também paralelo aos planos P_1 e P_2 . Analogamente, $\mathbf{u}_2 = \langle 8, -3, 1 \rangle$ é paralelo à reta L_2 e portanto paralelo a P_1 e P_2 . Portanto, o produto vetorial

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$$

é normal a P_1 e P_2 . Usando esta normal e o ponto $Q_2(2, 4, 5)$, encontrado colocando $t = 0$ na equação de L_2 , obtemos uma equação para P_2 :

$$11(x - 2) + 36(y - 4) + 20(z - 5) = 0$$

ou

$$11x + 36y + 20z - 266 = 0$$

A distância entre $Q_1(1, 5, -1)$ e esse plano é

$$D = \frac{|(11)(1) + (36)(5) + (20)(-1) - 266|}{\sqrt{11^2 + 36^2 + 20^2}} = \frac{95}{\sqrt{1817}}$$

que também é a distância entre L_1 e L_2 . ◀

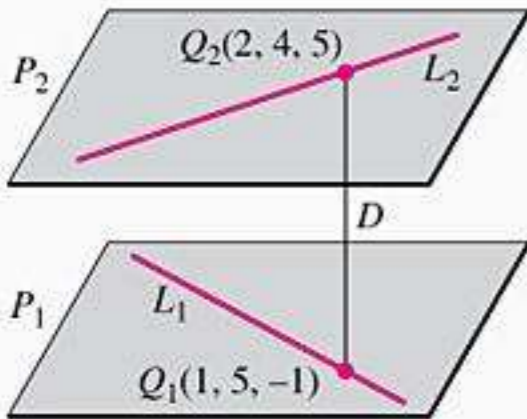


Figura 12.6.10

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.6** (Ver página 839 para respostas.)

1. A forma ponto-normal da equação do plano por $(0, 3, 5)$ e perpendicular a $\langle -4, 1, 7 \rangle$ é _____.
2. Um vetor normal ao plano $4x - 2y + 7z - 11 = 0$ é _____.
3. Um vetor normal ao plano que passa pelos pontos $(2, 5, 1)$, $(3, 7, 0)$ e $(2, 5, 2)$ é _____.
4. O ângulo agudo da interseção dos planos $x + y - 2z = 5$ e $3y - 4z = 6$ é _____.
5. A distância entre o ponto $(9, 8, 3)$ e o plano $x + y - 2z = 5$ é _____.

EXERCÍCIOS 12.6

- Determine a equação do plano que contém os pontos P_1, P_2 e P_3 e a área da projeção deste plano no plano xy e a área da projeção no plano xz . O comprimento das arestas é 3, 4, 5 e a caixa é mostrada na figura abaixo.
- Determine a equação do plano que contém os pontos P_1, P_2 e P_3 e a área da projeção deste plano no plano xy e a área da projeção no plano xz . O comprimento das arestas é x_0, y_0, z_0 e a caixa é mostrada na figura abaixo.

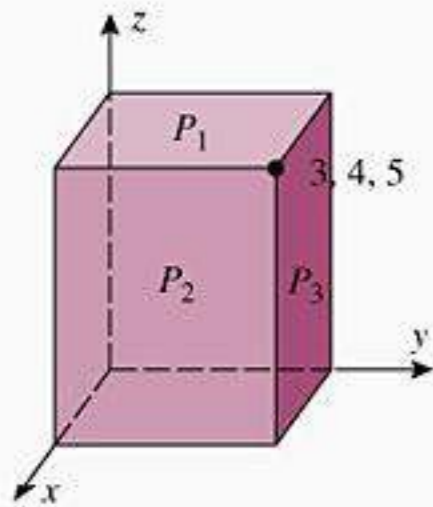


Figura Ex-1

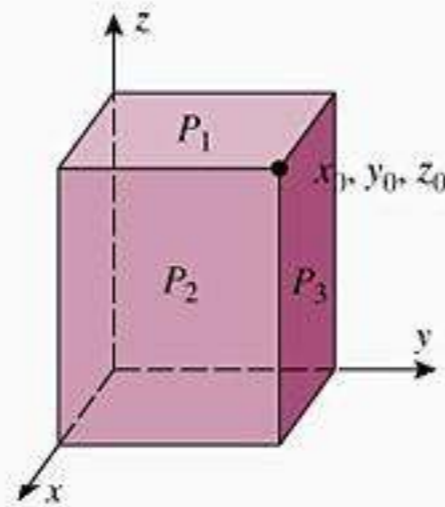
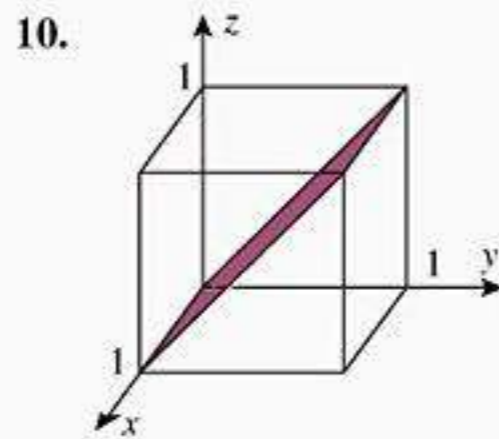
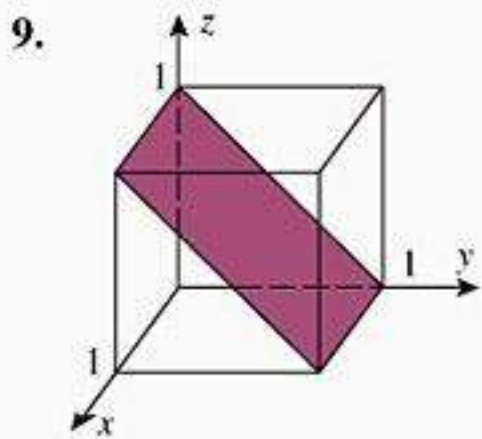
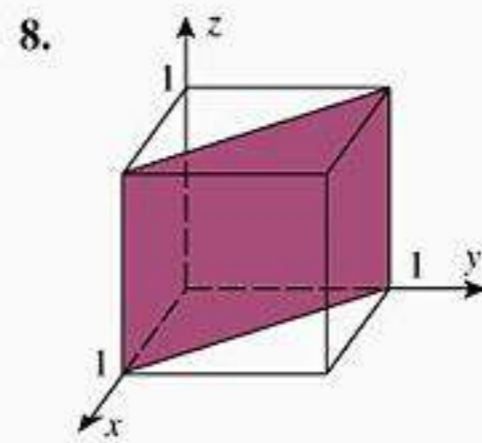
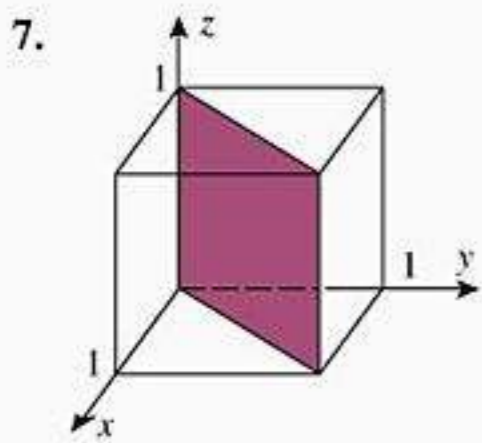


Figura Ex-2

3-6 Determine uma equação do plano que contém o ponto P e tem como normal um vetor \mathbf{n} .

- $P(2, 1)$ $\mathbf{n} = \langle 1, 4, 2 \rangle$
- $P(-1, -1, 2)$ $\mathbf{n} = \langle -1, 7, \dots \rangle$
- $P(1, 0, 0)$ $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$
- $P(0, 0, 0)$ $\mathbf{n} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

7-10 Determine uma equação do plano que contém o triângulo na figura.



11-12 Determine uma equação do plano que contém os pontos P_1, P_2 e P_3 .

- $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, 2, 3)$ e $P_3(1, 0, -1)$
- $P_1(3, 2, 1)$, $P_2(2, 1, -1)$ e $P_3(-1, 3, 2)$

13-14 Determine o plano que contém a reta e o ponto, e verifique se a reta é paralela ou perpendicular ao plano.

- $2x - 8y - z - 2 = 0$
 $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
 - $3x - 2y + z = 1$
 $4x + 5y - 2z = 4$
 - $x - y + 3z - 2 = 0$
 $2x + z = 1$
- $3x - 2y + z = 4$
 $x - 4y + 3z = 7$
 - $y = 4x - 2z + 3$
 $x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$
 - $x + 4y + 7z = 3$
 $5x - 3y + z = 0$

15-16 Determine a reta que contém o ponto e é paralela ao plano, e verifique se a reta é paralela ou perpendicular ao plano.

- $x = 4 + 2t$, $y = -t$, $z = -1 - 4t$
 $3x + 2y + z - 7 = 0$
 - $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$
 $x - y + 2z = 5$
 - $x = -1 + 2t$, $y = 4 + t$, $z = 1 - t$
 $4x + 2y - 2z = 7$
- $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - 3t$
 $2x + 2y - 5 = 0$
 - $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = -t$
 $x - 3y + 3z = 1$
 - $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$
 $x + y + z = 1$

17-18 Determine a reta que é perpendicular ao plano e passe pelo ponto, e determine a distância do ponto ao plano.

- $x = t$, $y = t$, $z = t$
 $3x - 2y + z - 5 = 0$
 - $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = t$
 $2x + y + z = 1$
- $x = 3t$, $y = 5t$, $z = -t$
 $2x - y + z + 1 = 0$
 - $x = 1 + t$, $y = -1 + 3t$, $z = 2 + 4t$
 $x - y + 4z = 7$

19-20 Determine o ângulo entre os planos e verifique se são paralelos ou perpendiculares.

- $x = 0$ e $2x - y + z - 4 = 0$
- $x + 2y - 2z = 5$ e $x - 3y + 2z = 8$

21-30 Determine uma equação do plano que contém a reta e é perpendicular ao plano.

21. O plano pela origem que é paralelo ao plano $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
22. O plano que contém a reta $x = -2 + 3t, y = 4 + 2t, z = 3 - t$ e é perpendicular ao plano $x - 2y + z = 5$.
23. O plano que passa pelo ponto $(-1, 4, 2)$ e que contém a reta de interseção dos planos $4x - y + z - 2 = 0$ e $2x + y - 2z - 3 = 0$.
24. O plano que passa por $(-1, 4, -3)$ e é perpendicular à reta $x - 2 = t, y + 3 = 2t, z = -t$.
25. O plano que passa por $(1, 2, -1)$ e é perpendicular à reta de interseção dos planos $2x + y + z = 2$ e $x + 2y + z = 3$.
26. O plano que passa pelos pontos $P_1(-2, 1, 4), P_2(1, 0, 3)$ que é perpendicular ao plano $4x - y + 3z = 2$.
27. O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, -5)$ que é perpendicular aos planos $2x - y + z = 1$ e $x + y - 2z = 3$.
28. O plano que contém o ponto $(2, 0, 3)$ e a reta $x = -1 + t, y = t, z = -4 + 2t$.
29. O plano cujos pontos são equidistantes de $(2, -1, 1)$ e $(3, 1, 5)$.
30. O plano que contém a reta $x = 3t, y = 1 + t, z = 2t$ e é paralelo à interseção dos planos $2x - y + z = 0$ e $y + z + 1 = 0$.
31. Determine equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(5, 0, -2)$ e que é paralela aos planos $x - 4y + 2z = 0$ e $2x + 3y - z + 1 = 0$.

32. Seja L a reta $x = 3t + 1, y = -5t, z = t$.
 - (a) Mostre que L está no plano $2x + y - z = 2$.
 - (b) Mostre que L é paralela ao plano $x + y + 2z = 0$. A reta está acima, abaixo ou exatamente no plano?

33. Mostre que as retas

$$\begin{aligned} x &= -2 + t, & y &= 3 + 2t, & z &= 4 - t \\ x &= 3 - t, & y &= 4 - 2t, & z &= t \end{aligned}$$

são paralelas e obtenha uma equação do plano que elas determinam.

34. Mostre que as retas

$$\begin{aligned} L_1: x + 1 &= 4t, & y - 3 &= t, & z - 1 &= 0 \\ L_2: x + 13 &= 12t, & y - 1 &= 6t, & z - 2 &= 3t \end{aligned}$$

intersectam e obtenha uma equação do plano que elas determinam.

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Os pontos $(1, 0, -1), (0, 2, 3), (-2, 1, 1)$ e $(4, 2, 3)$ estão no mesmo plano? Justifique sua resposta de duas formas diferentes.
36. Mostre que se a, b e c são não-nulas, então o plano cujos cortes com os eixos coordenados são $x = a, y = b$ e $z = c$ é dado pela equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

37. Se L for uma reta no espaço tridimensional, L estará necessariamente em algum plano vertical? Explique.

38. Se L for uma reta no espaço tridimensional, L estará necessariamente em algum plano horizontal? Explique.

39-40 Obtenha equações paramétricas da reta de interseção dos planos.

$$\begin{aligned} 39. \quad & -2x + 3y + 7z + 2 = 0 & 40. \quad & 3x - 5y + 2z = 0 \\ & x + 2y - 3z + 5 = 0 & & z = 0 \end{aligned}$$

41-42 Determine a distância entre o ponto e o plano.

41. $(1, -2, 3); 2x - 2y + z = 4$
42. $(0, 1, 5); 3x + 6y - 2z - 5 = 0$

43-44 Determine a distância entre os planos paralelos dados.

$$\begin{aligned} 43. \quad & -2x + y + z = 0 & 44. \quad & x + y + z = 1 \\ & 6x - 3y - 3z - 5 = 0 & & x + y + z = -1 \end{aligned}$$

45-46 Determine a distância entre as retas reversas dadas.

$$\begin{aligned} 45. \quad & x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t \\ & x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 46. \quad & x = 3 - t, y = 4 + 4t, z = 1 + 2t \\ & x = t, y = 3, z = 2t \end{aligned}$$

47. Determine uma equação da esfera com centro $(2, 1, -3)$ que é tangente ao plano $x - 3y + 2z = 4$.
48. Localize o ponto de interseção do plano $2x + y - z = 0$ com a reta que passa por $(3, 1, 0)$ que é perpendicular ao plano.
49. Mostre que a reta $x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -t$ e o plano $2x - 2y - 2z + 3 = 0$ são paralelos e determine a distância entre eles.

ENFOCANDO CONCEITOS

50. As Fórmulas (1), (2), (3), (5) e (10), que aplicam-se a planos no espaço tridimensional, têm versões análogas para retas no espaço bidimensional.

- (a) Desenhe um análogo da Figura 12.6.3 no espaço bidimensional para ilustrar que a equação da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle a, b \rangle$ pode ser expressa como

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

onde $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$.

- (b) Mostre que a equação vetorial da parte (a) pode ser expressa como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Isso é chamado a *forma ponto-normal de uma reta*.

- (c) Usando a prova do Teorema 12.6.1 como guia, mostre que se a e b não forem ambas nulas, então o gráfico da equação

$$ax + by + c = 0$$

é uma reta que tem $\mathbf{n} = \langle a, b \rangle$ como uma normal.

- (d) Usando a prova do Teorema 12.6.2 como guia, mostre que a distância D entre um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a reta $ax + by + c = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- (e) Use a fórmula da parte (d) para determinar a distância entre o ponto $P(-3, 5)$ e a reta $y = -2x + 1$.

51. (a) Mostre que a distância D entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$

é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- (b) Use a fórmula da parte (a) para resolver o Exercício 43.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.6

1. $-4x + (y - 3) + 7(z - 5) = 0$ 2. $\langle 4, -2, 7 \rangle$ 3. $\langle 2, -1, 0 \rangle$ 4. $\arccos \frac{11}{5\sqrt{6}} \approx 26^\circ$ 5. $\sqrt{6}$

12.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Nesta seção, estudaremos uma importante classe de superfícies que são os análogos tridimensionais das seções cônicas.

TRAÇO DE SUPERFÍCIE

Embora a forma geral de uma curva no espaço bidimensional possa ser obtida plotando os pontos, este método não é geralmente útil para superfícies no espaço tridimensional, pois requer demasiados pontos. É mais comum construir a forma de uma superfície com entrelaçamento de *malhas de curvas*, que são curvas obtidas cortando-se a superfície por planos adequadamente escolhidos. Por exemplo, a Figura 12.7.1, gerada por um CAS, mostra o gráfico de $z = x^3 - 3xy^2$ obtido com uma combinação de malhas de curvas e colorização para produzir detalhes da superfície. Essa superfície é chamada de “sela de macaco”, pois um macaco sentado na superfície tem lugar para suas duas pernas e o rabo.

A curva da malha que resulta quando uma superfície for cortada por um plano é chamada de *traço* da superfície no plano (Figura 12.7.2). Normalmente, as superfícies são formadas a partir de traços em planos paralelos aos planos coordenados, de modo que começaremos mostrando como as equações de tais superfícies podem ser obtidas. Para isso, consideremos a superfície

$$z = x^2 + y^2 \tag{1}$$

mostrada na Figura 12.7.3a.

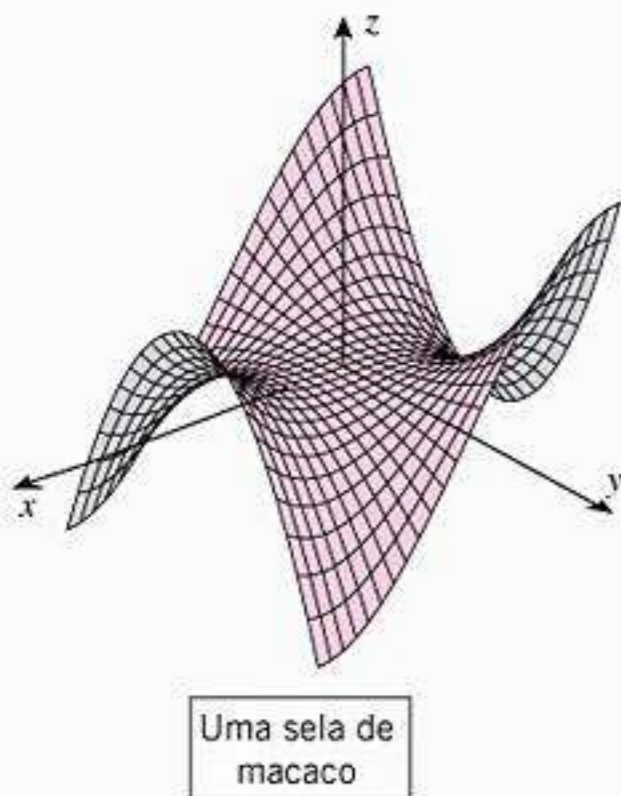


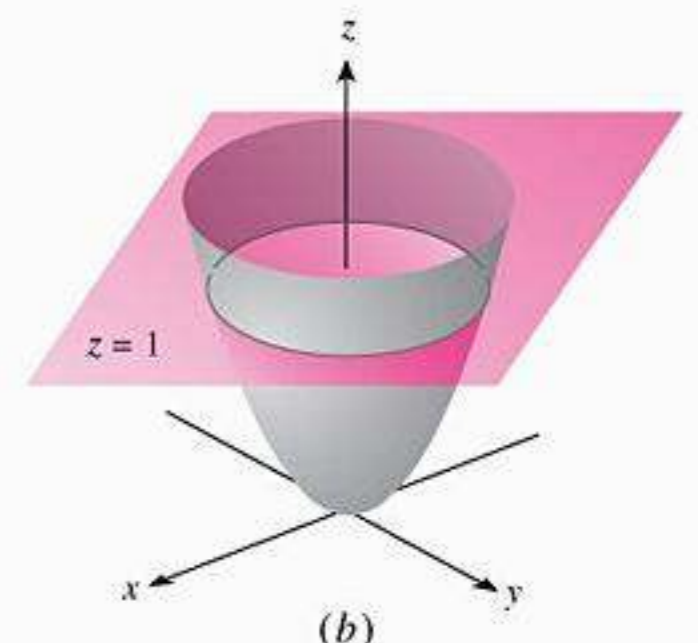
Figura 12.7.1



Figura 12.7.2



Figura 12.7.2



A parte com parênteses da Equação (2) é um lembrete de que a coordenada z de todos os pontos sobre o traço é $z = 1$. Isso necessita ser afirmado explicitamente, pois z não aparece na equação $x^2 + y^2 = 1$.

O procedimento básico para encontrar a equação de um traço é substituir a equação do plano na equação da superfície. Por exemplo, para encontrar o traço da superfície $z = x^2 + y^2$ no plano $z = 1$, substituímos $z = 1$ em (1), obtendo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (z = 1) \tag{2}$$

Isso é um círculo de raio 1 centrado no ponto $(0, 0, 1)$ (Figura 12.7.3b).

A Figura 12.7.4a sugere que os traços de (1) no plano que são paralelos e estão acima do plano xy formam uma família de círculos que estão centrados no eixo z e cujos raios crescem com z . Para confirmar isso, consideremos o traço em um plano geral $z = k$ que é paralelo ao plano xy . A equação do traço é

$$x^2 + y^2 = k \quad (z = k)$$

Se $k \geq 0$, então o traço é um círculo de raio \sqrt{k} centrado no ponto $(0, 0, k)$. Em particular, se $k = 0$, então o raio é zero, logo o traço no plano xy é o único ponto $(0, 0, 0)$. Assim, para valores não-negativos de k os traços paralelos ao plano xy formam uma família de círculos, centrados no eixo z , cujos raios iniciam em zero e crescem com k . Isto confirma a nossa conjectura. Se $k < 0$, então a equação $x^2 + y^2 = k$ não tem gráfico, o que significa que não há traço.

Vamos examinar os traços de (1) em planos paralelos ao plano yz . Tais planos têm equações da forma $x = k$, logo substituímos isso em (1) para obter

$$z = k^2 + y^2 \quad (x = k)$$

que podemos reescrever como

$$z - k^2 = y^2 \quad (x = k) \tag{3}$$

Por simplicidade, vamos começar com o caso em que $k = 0$ (o traço no plano yz), caso em que o traço tem a equação

$$z = y^2 \quad (x = 0)$$

O leitor deve reconhecer que isso é uma parábola que tem seu vértice na origem, é aberta na direção z positiva e é simétrica em relação ao eixo z (a Figura 12.7.4b mostra uma vista bidimensional). O leitor também deve reconhecer que o termo $-k^2$ em (3) tem o efeito de transladar a parábola $z = y^2$ na direção z positiva, de modo que o novo vértice fica em $(k, 0, k^2)$. Assim, os traços paralelos ao plano yz formam uma família de parábolas cujos vértices movem-se para cima quando k^2 cresce. Isso é consistente com a Figura 12.7.4c. Analogamente, os traços nos planos paralelos ao plano xz têm equações da forma

$$z - k^2 = x^2 \quad (y = k)$$

que novamente é uma família de parábolas cujos vértices movem-se para cima quando k^2 cresce (Figura 12.7.4d).

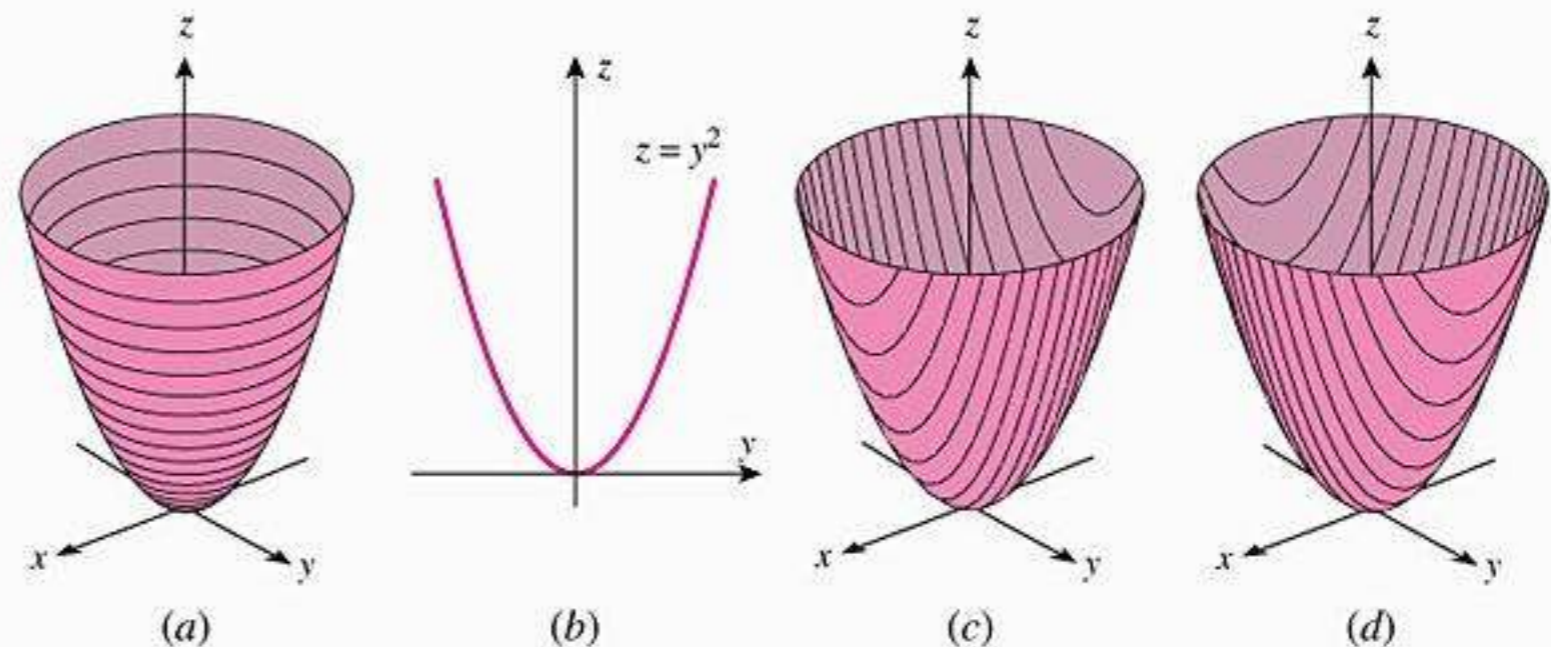


Figura 12.7.4

■ AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Na discussão da Fórmula (2) da Seção 11.5, observamos que uma equação de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma seção cônica (possivelmente degenerada). A equação análoga em um sistema de coordenadas xyz é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (4)$$

que é chamada *equação de segundo grau em x, y e z* . Os gráficos de tais equações são denominados *superfícies quádricas* ou, simplesmente, *quádricas*.

Seis tipos comuns de superfícies quádricas são mostrados na Tabela 12.7.1 – *elipsóides, hiperbolóides de uma folha, hiperbolóides de duas folhas, cones elípticos, parabolóides elípticos e parabolóides hiperbólicos*. (Supõe-se que as constantes a, b e c que aparecem nas equações na tabela sejam positivas.) Observe que nenhuma das superfícies quádricas na tabela tem os termos com produto misto em suas equações. Isso ocorre devido às suas orientações em relação aos eixos coordenados. Posteriormente, nesta seção, discutiremos outras possíveis orientações que produzem equações das superfícies quádricas sem termos com produto misto. No caso especial em que as seções transversais elípticas de um cone elíptico ou de um parabolóide elíptico são círculos, são usados os termos *cone circular* e *parabolóide circular*.

■ TÉCNICAS PARA FAZER GRÁFICOS DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Para gráficos precisos de superfícies quádricas, se faz necessário o uso de um recurso gráfico computacional. Entretanto, a técnica que discutiremos agora pode ser usada para gerar esboços grosseiros dessas superfícies que são úteis para vários fins.

Um esboço grosseiro de um elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (5)$$

pode ser obtido plotando, primeiro, as interseções com os eixos coordenados, então esboçando os traços elípticos nos planos coordenados, e depois esboçando a superfície usando os traços elípticos como guia. O Exemplo 1 ilustra essa técnica.

► Exemplo 1 Esboce o elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad (6)$$

Solução Os cortes com o eixo x podem ser obtidos tomando $y = 0$ e $z = 0$ em (6). Disso resulta $x = \pm 2$. Analogamente, os cortes com o eixo y são $y = \pm 4$ e os cortes com o eixo z são $z = \pm 3$. Desses cortes obtemos os traços elípticos e o esboço do elipsóide da Figura 12.7.5. ◀

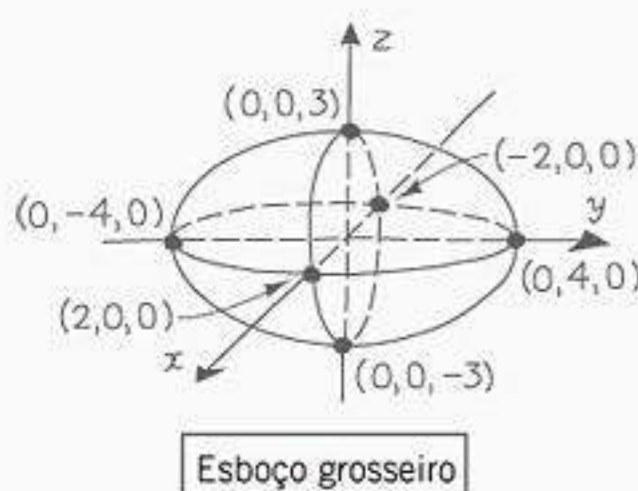


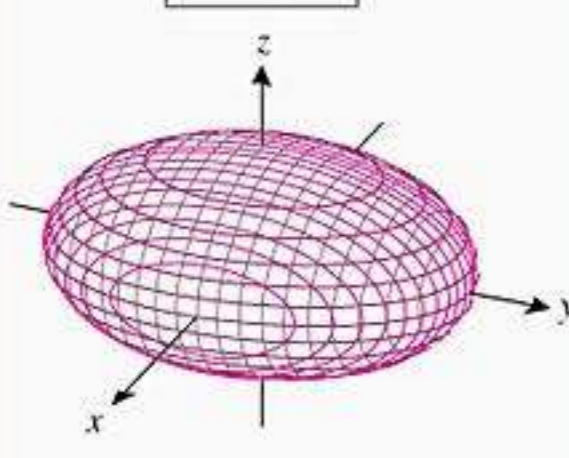
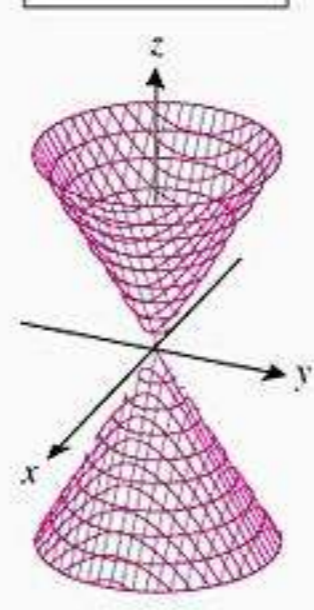
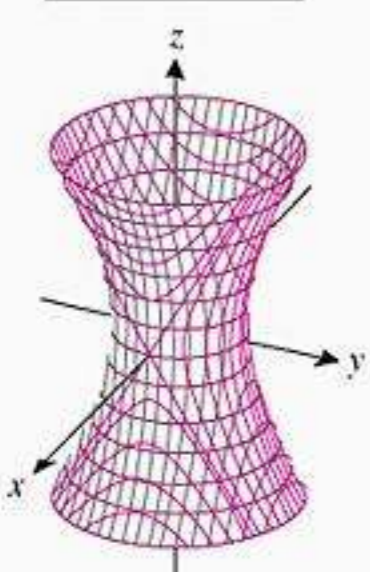
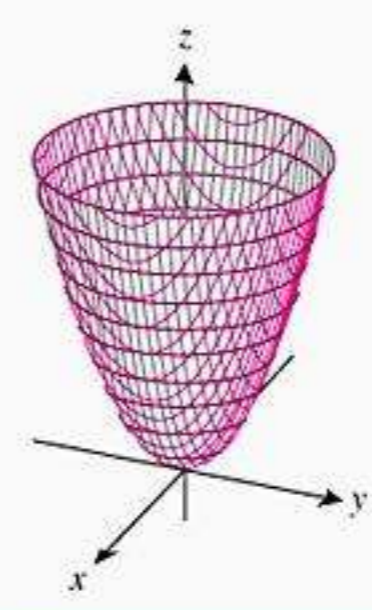
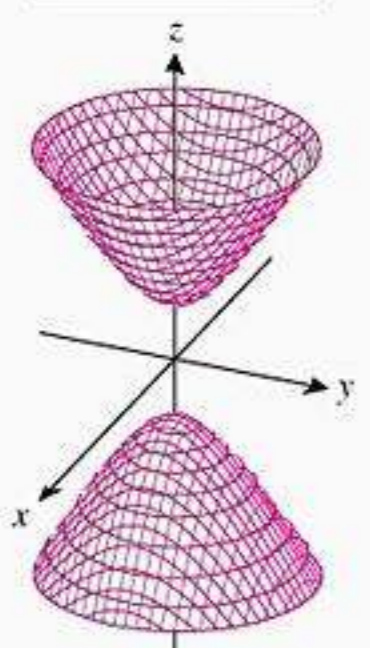
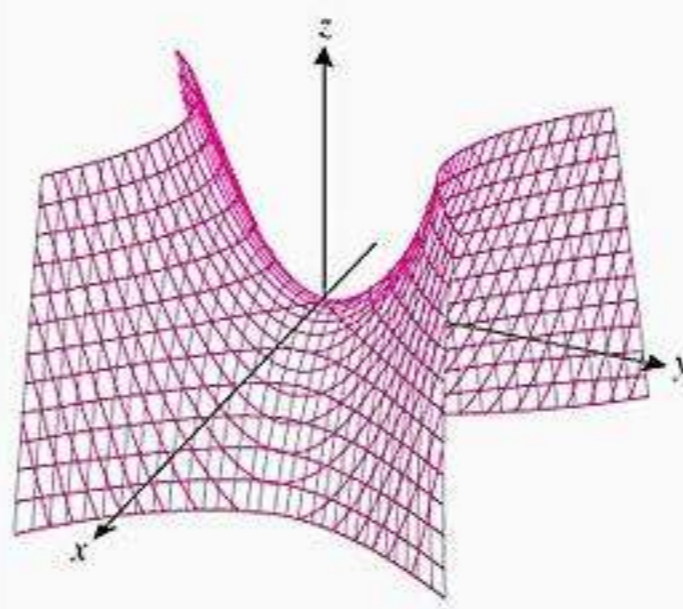
Figura 12.7.5

Um esboço grosseiro de um hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (7)$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, o traço elíptico no plano xy , então os traços elípticos nos planos $z = \pm c$ e, depois, as curvas hiperbólicas que unem os extremos dos eixos dessas elipses. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

Tabela 12.7.1

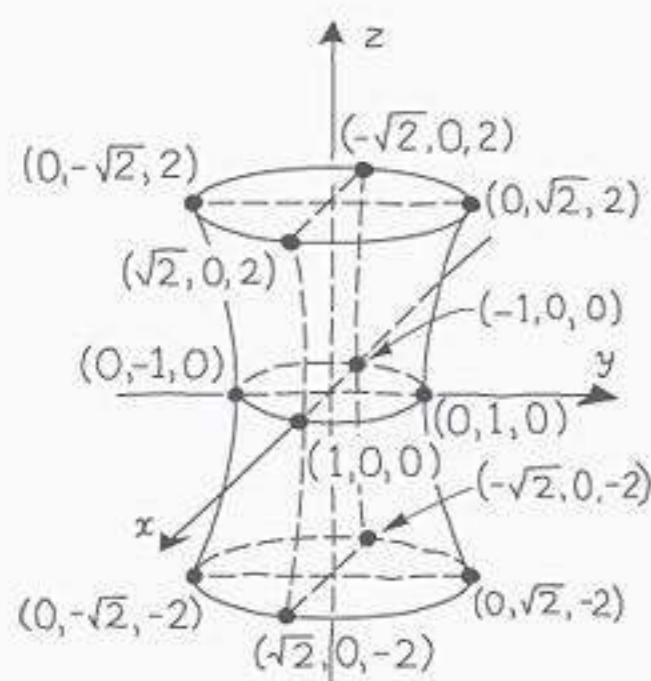
SUPERFÍCIE	EQUAÇÃO	SUPERFÍCIE	EQUAÇÃO
<p>ELIPSÓIDE</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Os traços nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que intersectam a superfície em mais de um ponto.</p>	<p>CONE ELÍPTICO</p> 	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se intersectam na origem. Os traços em planos paralelos a esses são hipérbolas.</p>
<p>HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérbolas, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos cortes com os eixos x e y. Nesses pontos, os traços são pares de retas concorrentes.</p>	<p>PARABOLÓIDE ELÍPTICO</p> 	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas.</p>
<p>HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS</p> 	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que intersectam a superfície em mais do que um ponto os traços são elipses. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são hipérbolas.</p>	<p>PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO</p> 	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <p>O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérbolas. As hipérbolas acima do plano xy abrem-se na direção y e as abaixo na direção x. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas.</p>

► **Exemplo 2** Esboce o gráfico do hiperbolóide de uma folha

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \quad (8)$$

Solução O traço no plano xy , obtido tomando $z = 0$ em (8), é

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (z = 0)$$



Esboço grosseiro

Figura 12.7.6

que é um círculo de raio 1 centrado no eixo z . Os traços nos planos $z = 2$ e $z = -2$, obtidos tomando $z = \pm 2$ em (8), são dados por

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (z = \pm 2)$$

que são círculos de raio $\sqrt{2}$ centrados no eixo z . Unindo esses círculos por traços hiperbólicos nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 12.7.6. ◀

Um esboço grosseiro do hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (9)$$

pode ser obtido plotando, primeiro, as interseções com o eixo z , depois esboçando os traços elípticos nos planos $z = \pm 2c$ e, então, esboçando os traços hiperbólicos que conectam as interseções com o eixo z e os extremos dos eixos das elipses. (Não é essencial usar os planos $z = \pm 2c$, mas essas são boas escolhas, uma vez que elas simplificam ligeiramente os cálculos e dão um espaçamento certo para um bom esboço.) O próximo exemplo ilustra essa técnica.

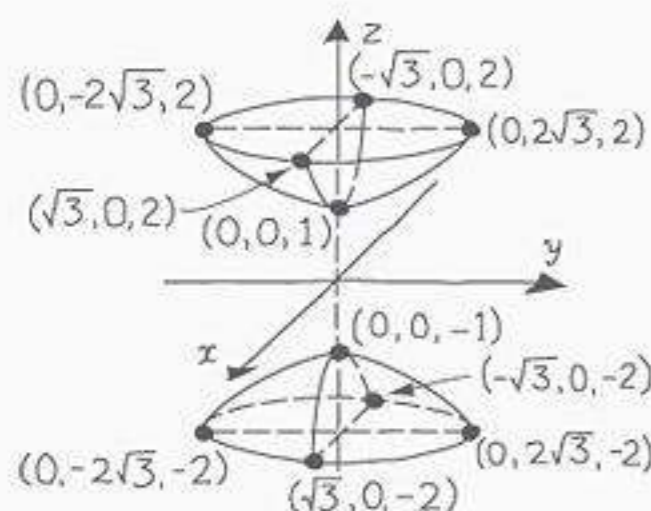
► **Exemplo 3** Esboce o gráfico do hiperbolóide de duas folhas

$$z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (10)$$

Solução Os cortes com o eixo z , obtidos tomando $x = 0$ e $y = 0$ em (10), são $z = \pm 1$. Os traços nos planos $z = 2$ e $z = -2$, obtidos tomando $z = \pm 2$ em (10), são dados por

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad (z = \pm 2)$$

Esboçando essas elipses e os traços hiperbólicos nos planos coordenados, obtemos a Figura 12.7.7. ◀



Esboço grosseiro

Figura 12.7.7

Um esboço grosseiro do cone elíptico

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0) \quad (11)$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, os traços elípticos nos planos $z = \pm 1$ e, então, esboçando os traços lineares que conectam os extremos dos eixos das elipses. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

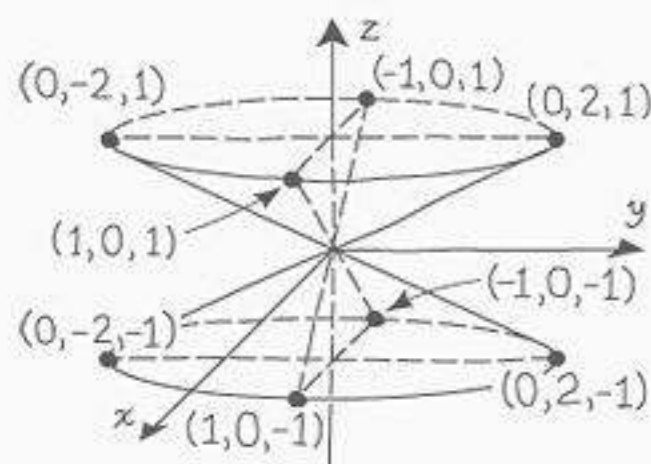
► **Exemplo 4** Esboce o gráfico do cone elíptico

$$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} \quad (12)$$

Solução Os traços de (12) nos planos $z = \pm 1$ são dados por

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (z = \pm 1)$$

Esboçando essas elipses e os traços lineares nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 12.7.8. ◀



Esboço grosseiro

Figura 12.7.8

Nos casos especiais de (11) e (13) em que $a = b$, os traços paralelos ao plano xy são círculos. Nesses casos, chamamos (11) de um *cone circular* e (13) de um *parabolóide circular*.

Um esboço grosseiro do parabolóide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0) \tag{13}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, o traço elíptico no plano $z = 1$ e, então, esboçando os traços parabólicos nos planos coordenados verticais para conectar a origem com os extremos dos eixos da elipse. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

► **Exemplo 5** Esboce o gráfico do parabolóide elíptico

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \tag{14}$$

Solução O traço de (14) no plano $z = 1$ é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (z = 1)$$

Esboçando essa elipse e os traços parabólicos nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 12.7.9. ◀

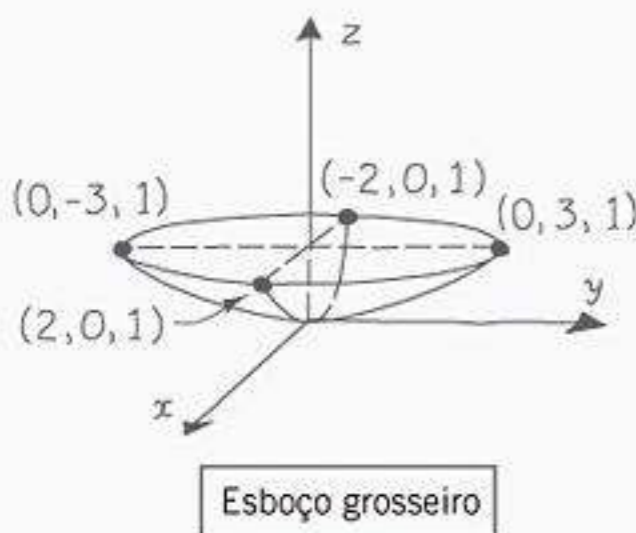


Figura 12.7.9

Um esboço grosseiro do parabolóide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (a > 0, b > 0) \tag{15}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, os dois traços parabólicos que passam pela origem (um no plano $x = 0$ e o outro no plano $y = 0$). Depois que os traços parabólicos estiverem desenhados, esboce os traços hiperbólicos nos planos $z = \pm 1$ e, então, preencha qualquer aresta que esteja faltando. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

► **Exemplo 6** Esboce o gráfico do parabolóide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \tag{16}$$

Solução Pondo $x = 0$ em (16), obtemos

$$z = \frac{y^2}{4} \quad (x = 0)$$

que é uma parábola no plano yz com vértice na origem abrindo na direção z positiva (pois $z \geq 0$) e, pondo $y = 0$, obtemos

$$z = -\frac{x^2}{9} \quad (y = 0)$$

que é uma parábola no plano xz com vértice na origem abrindo na direção z negativa.

O traço no plano $z = 1$ é

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad (z = 1)$$

que é uma hipérbole que se abre ao longo de uma reta paralela ao eixo y (verifique) e o traço no plano $z = -1$ é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (z = -1)$$

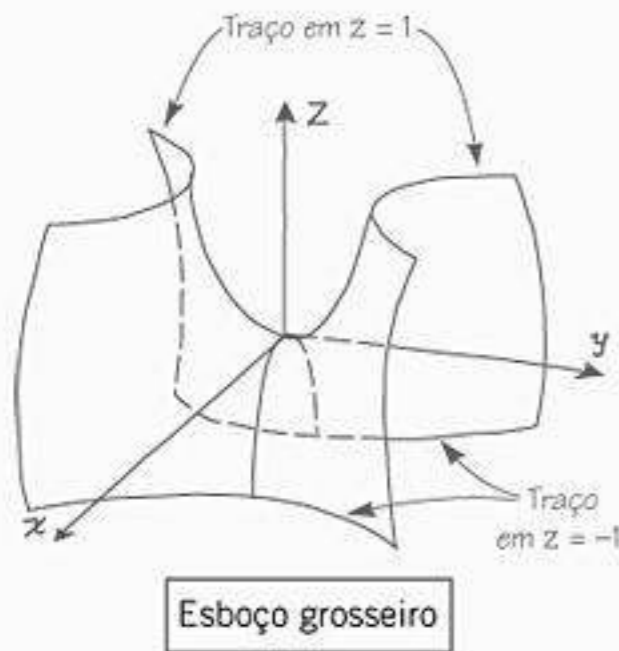
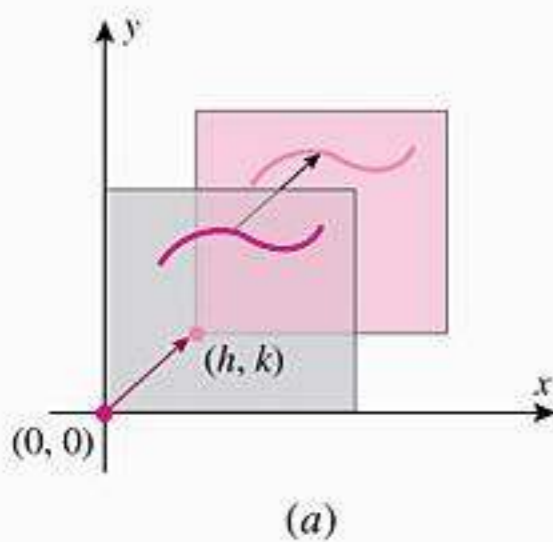


Figura 12.7.10

que é uma hipérbole que se abre ao longo de uma reta paralela ao eixo x . Combinando todas as informações acima nos leva a esboçar a Figura 12.7.10. ◀

O parabolóide hiperbólico da Figura 12.7.10 tem um comportamento interessante na origem – o traço no plano xz tem um máximo relativo em $(0, 0, 0)$ e o traço no plano yz tem um mínimo relativo em $(0, 0, 0)$. Assim, um besouro andando sobre a superfície pode considerar a origem como o ponto mais alto se percorrer um caminho, ou pode considerar a origem como o ponto mais baixo se percorrer outro caminho. Um ponto com esta propriedade é comumente chamado de *ponto de sela* ou *ponto de minimax*.

A Figura 12.7.11 mostra duas versões do parabolóide hiperbólico do Exemplo 6 geradas por computador. A primeira versão, que está muito próxima do esboço rudimentar na Figura 12.7.10, tem cortes no topo e na base que são traços hiperbólicos paralelos ao plano xy . Na segunda versão, o topo horizontal tem cortes omitidos; isso ajuda a enfatizar os traços parabólicos paralelos ao plano xz .



(a)

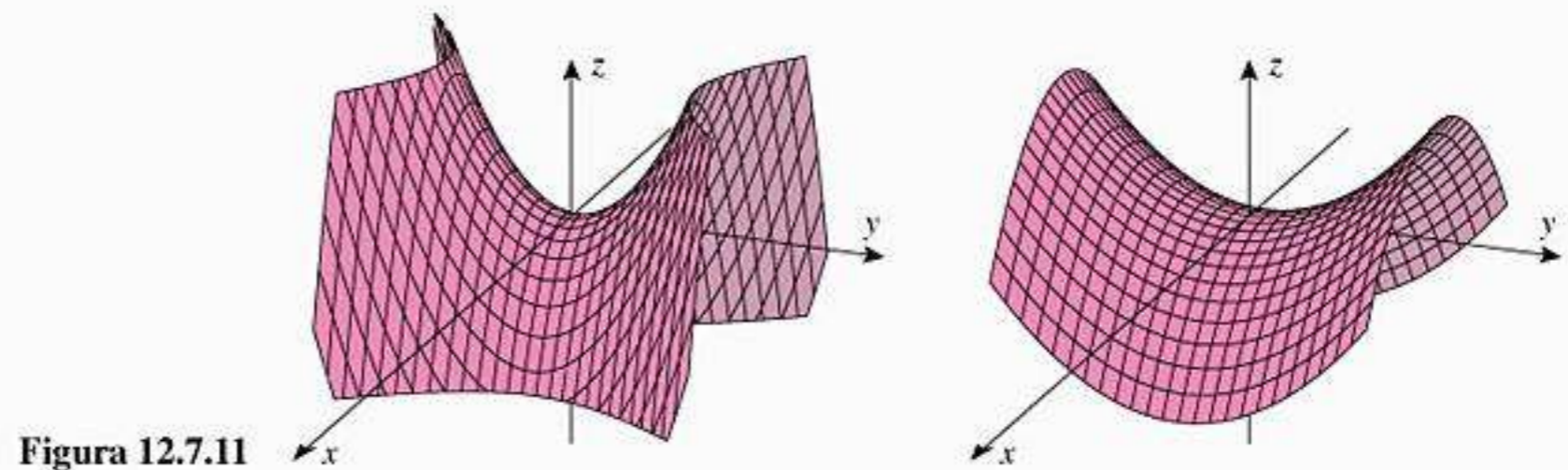
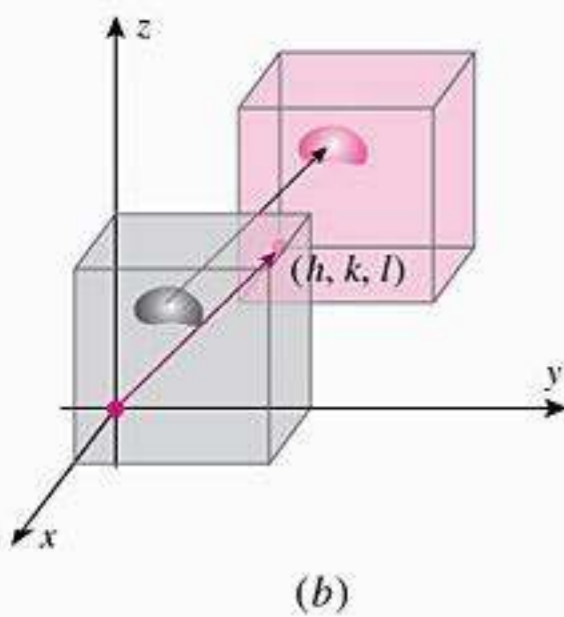


Figura 12.7.11



(b)

Figura 12.7.12

■ TRANSLAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Na Seção 11.4, vimos que uma cônica no sistema de coordenadas xy pode ser transladada substituindo $x - h$ em x e $y - k$ em y em sua equação. Para entender como isso funciona, considere os eixos xy como fixos e considere o plano como uma folha transparente de plástico na qual são desenhados todos os gráficos. Quando as coordenadas dos pontos são modificadas substituindo $(x - h, y - k)$ no lugar de (x, y) , o efeito geométrico é transladar a folha de plástico (e, portanto, todas as curvas), de tal modo que o ponto sobre o plástico que estava inicialmente em $(0, 0)$ acaba sendo movido para o ponto (h, k) (ver Figura 12.7.12a).

Para o análogo no espaço tridimensional, considere os eixos xyz como fixos e considere o espaço tridimensional como um bloco transparente de plástico no qual estão embutidas todas as superfícies. Quando as coordenadas dos pontos são modificadas substituindo $(x - h, y - k, z - l)$ no lugar de (x, y, z) , o efeito geométrico é transladar o bloco de plástico (e, portanto, todas as superfícies) de tal modo que o ponto no bloco de plástico que estava inicialmente em $(0, 0, 0)$ acaba sendo movido para o ponto (h, k, l) (ver Figura 12.7.12b).

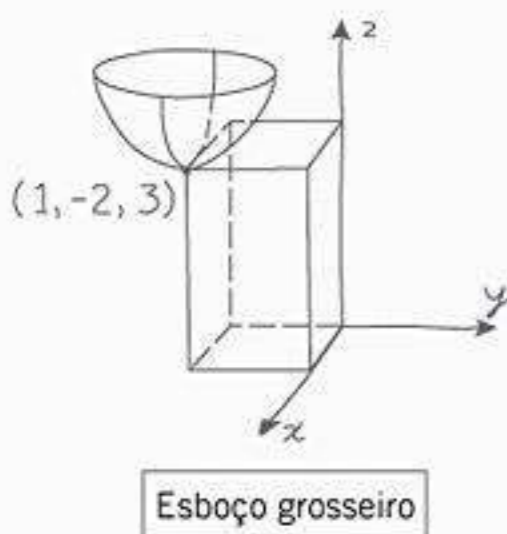


Figura 12.7.13

► **Exemplo 7** Descreva a superfície $z = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 3$.

Solução A equação pode ser reescrita como

$$z - 3 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$$

Essa superfície é o parabolóide obtido pela translação do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

da Figura 12.7.3 de tal modo que o novo “vértice” esteja no ponto $(1, -2, 3)$. Um esboço grosseiro desse parabolóide está mostrado na Figura 12.7.13. ◀

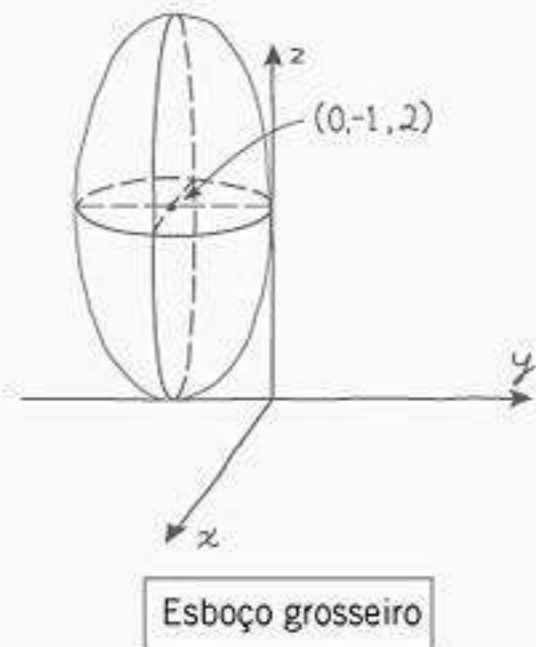


Figura 12.7.14

Na Figura 12.7.14 a seção transversal no plano yz é mostrada como sendo tangente a ambos os eixos y e z . Confirme que isso está correto.

► **Exemplo 8** Descreva a superfície

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8y - 4z = -4$$

Solução Completando os quadrados, obtemos

$$4x^2 + 4(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = -4 + 4 + 4$$

ou

$$x^2 + (y + 1)^2 + \frac{(z - 2)^2}{4} = 1$$

Assim, a superfície é o elipsóide que resulta quando o elipsóide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

é transladado de tal modo que o novo “centro” esteja no ponto $(0, -1, 2)$. Um esboço grosseiro desse elipsóide é mostrado na Figura 12.7.14. ◀

■ REFLEXÕES DE SUPERFÍCIES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Lembre-se que, num sistema de coordenadas xy , um ponto (x, y) é refletido pelo eixo x se y for substituído por $-y$ e é refletido pelo eixo y se x for substituído por $-x$. Em um sistema de coordenadas xyz , um ponto (x, y, z) é refletido pelo plano xy se z for substituído por $-z$, é refletido pelo plano yz se x for substituído por $-x$ e é refletido pelo plano xz se y for substituído por $-y$ (Figura 12.7.15). Segue que *substituir uma variável pelo seu negativo na equação de uma superfície faz com que a superfície seja refletida por um plano coordenado*.

Lembre-se, também, que em um sistema de coordenadas xy um ponto (x, y) é refletido pela reta $y = x$ se x e y forem trocados. Entretanto, em um sistema de coordenadas xyz , trocando x e y reflete o ponto (x, y, z) pelo plano $y = x$ (Figura 12.7.16). Analogamente, trocando x e z reflete o ponto pelo plano $x = z$ e trocando y e z reflete pelo plano $y = z$. Assim, segue que *trocando duas variáveis na equação de uma superfície reflete a superfície por um plano que faz um ângulo de 45° com dois dos planos coordenados*.

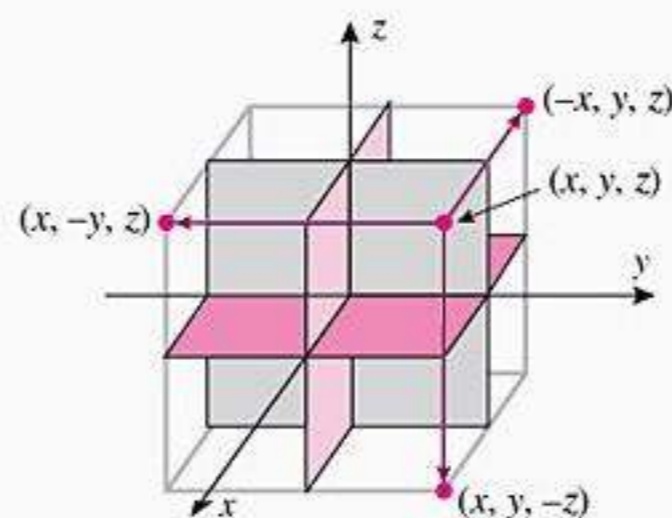


Figura 12.7.15

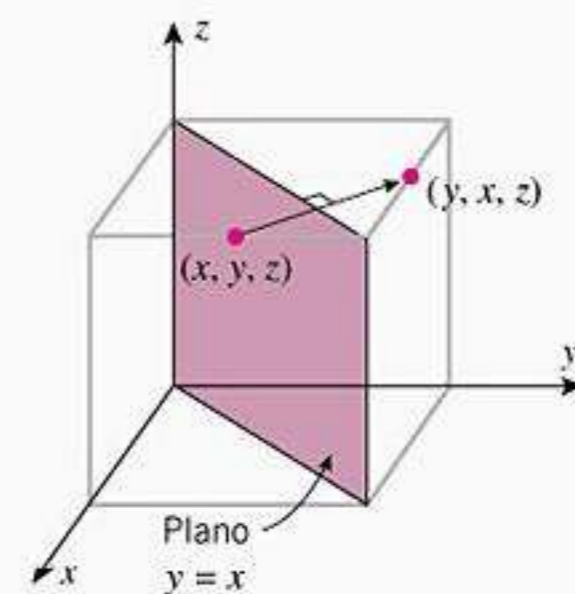


Figura 12.7.16

► **Exemplo 9** Descreva as superfícies

(a) $y^2 = x^2 + z^2$ (b) $z = -(x^2 + y^2)$

Solução (a) O gráfico da equação $y^2 = x^2 + z^2$ resulta da troca de y e z na equação $z^2 = x^2 + y^2$. Assim, o gráfico da equação $y^2 = x^2 + z^2$ pode ser obtido refletindo o gráfico de $z^2 = x^2 + y^2$ pelo plano $y = z$. Como o gráfico $z^2 = x^2 + y^2$ é um cone circular que se abre ao longo do eixo

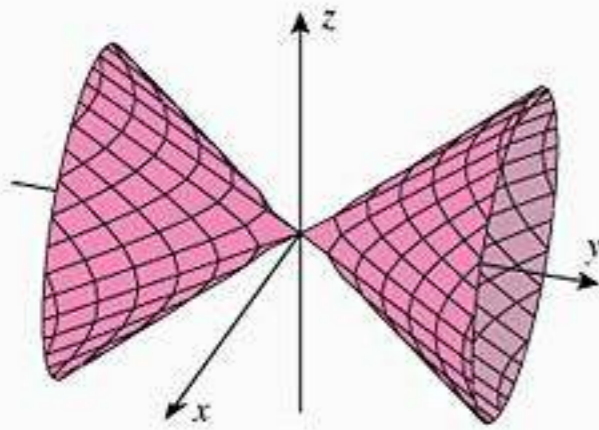


Figura 12.7.17

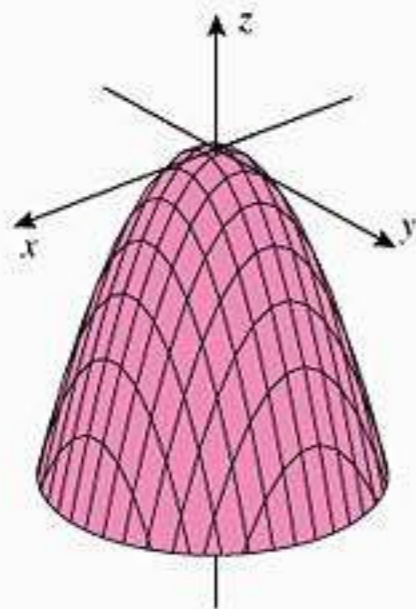


Figura 12.7.18

z (ver Tabela 12.7.1), segue que o gráfico de $y^2 = x^2 + z^2$ é um cone circular que se abre ao longo do eixo y (Figura 12.7.17).

Solução (b) O gráfico da equação $z = -(x^2 + y^2)$ pode ser escrito como $-z = x^2 + y^2$, o que pode ser obtido substituindo z por $-z$ na equação $z = x^2 + y^2$. Como o gráfico de $z = x^2 + y^2$ é um parabolóide circular que se abre na direção z positiva (ver Tabela 12.7.1), segue que o gráfico de $z = -(x^2 + y^2)$ é um parabolóide circular que se abre na direção z negativa (Figura 12.7.18). ◀

■ **UMA TÉCNICA PARA IDENTIFICAR SUPERFÍCIES QUÁDRICAS**

As equações das superfícies quádricas da Tabela 12.7.1 têm certas características que tornam possível identificar as superfícies quádricas que são deduzidas dessas equações por reflexões. Essas características identificatórias, que estão mostradas na Tabela 12.7.2, são baseadas em escrever a equação da superfície quádrica de tal forma que todos os termos variáveis estejam no lado esquerdo da equação e que haja um 1 ou um 0 no lado direito. Quando há um 1 no lado direito, a superfície é um elipsóide, um hiperbolóide de uma folha, ou um hiperbolóide de duas folhas, e quando há um 0 no lado direito a superfície é um cone elíptico, um parabolóide elíptico ou um parabolóide hiperbólico. Dentro do grupo com um 1 no lado direito, os elipsóides não têm nenhum sinal de menos, os hiperbolóides de uma folha têm um sinal de menos, e os hiperbolóides de duas folhas têm dois sinais de menos. Dentro do grupo com um 0 no lado direito, os cones elípticos não têm termo linear, os parabolóides elípticos têm um termo linear e dois termos quadráticos com o mesmo sinal, e os parabolóides hiperbólicos têm um termo linear e dois termos quadráticos com sinais opostos. Essas características não mudam quando a superfície é refletida por um plano coordenado ou por planos da forma $x = y$, $x = z$ ou $y = z$, desse modo tornando possível identificar a superfície quádrica refletida a partir da forma de sua equação.

Tabela 12.7.2

EQUAÇÃO	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$z^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$z - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 0$
CARACTERÍSTICA	Nenhum sinal de menos	Um sinal de menos	Dois sinais de menos	Nenhum termo linear	Um termo linear; dois termos quadráticos com o mesmo sinal	Um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos
CLASSIFICAÇÃO	Elipsóide	Hiperbolóide de uma folha	Hiperbolóide de duas folhas	Cone elíptico	Parabolóide elíptico	Parabolóide hiperbólico

► **Exemplo 10** Identifique as superfícies

(a) $3x^2 - 4y^2 + 12z^2 + 12 = 0$ (b) $4x^2 - 4y + z^2 = 0$

Solução (a) A equação pode ser reescrita como

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$$

Essa equação tem um 1 no lado direito e dois termos negativos no lado esquerdo, logo seu gráfico é um hiperbolóide de duas folhas.

Solução (b) A equação tem um termo linear e dois termos quadráticos com o mesmo sinal, logo seu gráfico é um parabolóide elíptico. ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.7 (Ver página 850 para respostas.)

- Para a superfície $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
 - $x=0$
 - $y=0$
 - $z=1$
- Para a superfície $4x^2 + z^2 - y^2 = 9$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
 - $x=0$
 - $y=0$
 - $z=1$
- Para a superfície $4x^2 + y^2 - z = 0$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
 - $x=0$
 - $y=0$
 - $z=1$
- Classifique cada superfície como elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, cone elíptico, parabolóide elíptico ou parabolóide hiperbólico.
 - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - z = 0$
 - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$
 - $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} + z = 0$
 - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1$
 - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 0$
 - $z^2 - \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

EXERCÍCIOS 12.7

1-2 Identifique a superfície quádrlica como um elipsóide, um hiperbolóide de uma folha, um hiperbolóide de duas folhas, um cone elíptico, um parabolóide elíptico ou um parabolóide hiperbólico, associando a equação com uma das formas dadas na Tabela 12.7.1. Forneça os valores de a , b e c em cada caso.

- $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 - $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 - $4z = x^2 + 4y^2$
 - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
- $6x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12$
 - $y^2 - x^2 - z = 0$
 - $9x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$
 - $4x^2 + y^2 - 4z^2 = -4$
 - $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$
 - $12z^2 - 3x^2 = 4y^2$
- Obtenha uma equação e esboce a superfície que resulta quando o parabolóide circular $z = x^2 + y^2$ for refletido pelo plano
 - $z=0$
 - $x=0$
 - $y=0$
 - $y=x$
 - $x=z$
 - $y=z$
- Obtenha uma equação e esboce a superfície que resulta quando o hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ for refletido pelo plano
 - $z=0$
 - $x=0$
 - $y=0$
 - $y=x$
 - $x=z$
 - $y=z$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 5.** As equações dadas representam superfícies quádrlicas cujas orientações são diferentes daquelas da Tabela 12.7.1. Em cada parte, identifique a superfície quádrlica e dê uma descrição verbal de sua orientação (por exemplo, um cone elíptico que se abre ao longo do eixo z ou um parabolóide hiperbólico assentado no eixo y).

- $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
- $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
- $y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$
- $y = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$

- 6.** Para cada superfície do Exercício 5, obtenha a equação da superfície que resulta se a superfície dada for refletida pelo plano xz e esta superfície, então, for refletida pelo plano $z=0$.

7-8 Determine as equações dos traços nos planos coordenados e esboce os traços em um sistema de coordenadas xyz . [Sugestão: se encontrar problemas ao esboçar um traço diretamente em três dimensões, comece um esboço em duas dimensões colocando o plano coordenado no plano do papel; depois, transfira o esboço para três dimensões.]

- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$
 - $z = x^2 + 4y^2$
 - $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$
- $y^2 + 9z^2 = x$
 - $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
 - $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$

9-10 Nesses exercícios, os traços das superfícies nos planos são seções cônicas. Em cada parte, obtenha uma equação do traço e afirme se é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

- $4x^2 + y^2 + z^2 = 4; y=1$
 - $4x^2 + y^2 + z^2 = 4; x=\frac{1}{2}$
 - $9x^2 - y^2 - z^2 = 16; x=2$
 - $9x^2 - y^2 - z^2 = 16; z=2$
 - $z = 9x^2 + 4y^2; y=2$
 - $z = 9x^2 + 4y^2; z=4$
- $9x^2 - y^2 + 4z^2 = 9; x=2$
 - $9x^2 - y^2 + 4z^2 = 9; y=4$
 - $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0; y=1$
 - $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0; z=1$
 - $z = x^2 - 4y^2; x=1$
 - $z = x^2 - 4y^2; z=4$

11-22 Identifique e esboce a superfície quádrlica.

- | | |
|--|---|
| 11. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ | 12. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ |
| 13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ | 14. $x^2 + y^2 - z^2 = 9$ |
| 15. $4z^2 = x^2 + 4y^2$ | 16. $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 = 0$ |
| 17. $9z^2 - 4y^2 - 9x^2 = 36$ | 18. $y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ |
| 19. $z = y^2 - x^2$ | 20. $16z = y^2 - x^2$ |
| 21. $4z = x^2 + 2y^2$ | 22. $z - 3x^2 - 3y^2 = 0$ |

23-28 As equações dadas representam uma superfície quádrlica, cuja orientação é diferente daquela da Tabela 12.7.1. Identifique e esboce a superfície.

- | | |
|---|------------------------------|
| 23. $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$ | 24. $x - y^2 - 4z^2 = 0$ |
| 25. $2y^2 - x^2 + 2z^2 = 8$ | 26. $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 9$ |
| 27. $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ | 28. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 16$ |

29-32 Esboce a superfície.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ | 30. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ |
| 31. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ | 32. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ |

33-36 Identifique a superfície e faça um esboço grosseiro que mostre sua posição e orientação.

33. $z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9$
 34. $4x^2 - y^2 + 16(z - 2)^2 = 100$
 35. $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 18x + 2y + 16z = 10$
 36. $z^2 = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4z$

37-38 Nesses exercícios use o elipsóide $4x^2 + 9y^2 + 18z^2 = 72$.

37. (a) Obtenha uma equação do traço elíptico no plano $z = \sqrt{2}$.
 (b) Obtenha o comprimento dos eixos maior e menor da elipse da parte (a).
 (c) Obtenha as coordenadas dos focos da elipse da parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da elipse da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.
38. (a) Obtenha o traço elíptico no plano $x = 3$.
 (b) Obtenha o comprimento dos eixos maior e menor da elipse da parte (a).
 (c) Obtenha as coordenadas dos focos da elipse na parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da elipse da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

39-42 Esses exercícios referem-se ao parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$.

39. (a) Obtenha uma equação do traço hiperbólico no plano $z = 4$.
 (b) Obtenha os vértices da hipérbole da parte (a).
 (c) Obtenha os focos da hipérbole da parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da hipérbole da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.
40. (a) Obtenha uma equação do hiperbólico no plano $z = -4$.
 (b) Obtenha os vértices da hipérbole da parte (a).
 (c) Obtenha os focos da hipérbole da parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da hipérbole da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.
41. (a) Obtenha uma equação do traço parabólico no plano $x = 2$.
 (b) Obtenha o vértice da parábola da parte (a).
 (c) Obtenha o foco da parábola da parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da parábola da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.
42. (a) Obtenha uma equação do traço parabólico no plano $y = 2$.
 (b) Obtenha o vértice da parábola da parte (a).
 (c) Obtenha o foco da parábola da parte (a).
 (d) Descreva a orientação do eixo focal da parábola da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

43-44 Esboce a região englobada pelas superfícies e descreva sua curva de interseção.

43. Os parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$
 44. O parabolóide hiperbólico $x^2 = y^2 + z$ e o elíptico $x^2 = 4 - 2y^2 - 2z$.

45-46 Obtenha uma equação para a superfície gerada fazendo girar a curva em torno do eixo y .

45. $y = 4x^2$ ($z = 0$) 46. $y = 2x$ ($z = 0$)

47. Determine uma equação da superfície consistindo em todos os pontos $P(x, y, z)$ que estão equidistantes do ponto $(0, 0, 1)$ e do plano $z = -1$. Identifique a superfície.
48. Determine uma equação da superfície consistindo em todos os pontos $P(x, y, z)$ que estão duas vezes mais afastados do plano $z = -1$ que do ponto $(0, 0, 1)$. Identifique a superfície.
49. Se uma esfera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

de raio a for comprimida na direção z , então a superfície resultante, chamada de *esferóide oblato*, tem uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde $c < a$. Mostre que o esferóide oblato tem um traço circular de raio a no plano xy e um traço elíptico no plano xz com eixo maior de comprimento $2a$ ao longo do eixo x e eixo menor de comprimento $2c$ ao longo do eixo z .

50. A rotação da Terra causa um achatamento nos pólos, portanto sua forma é freqüentemente modelada como um esferóide oblato em vez de uma esfera (ver Exercício 49 para terminologia). Um dos modelos usados pelos satélites de posicionamento global é o *Sistema Geodésico Mundial de 1984* (WGS-84), que trata a Terra como uma esfera oblata, cujo raio equatorial é 6378,1370 km e cujo raio polar (a distância do centro da Terra aos pólos) é 6356,5231 km. Use o modelo WGS-84 para encontrar uma equação para a superfície da Terra, em relação ao sistema de coordenadas mostrado na figura a seguir.

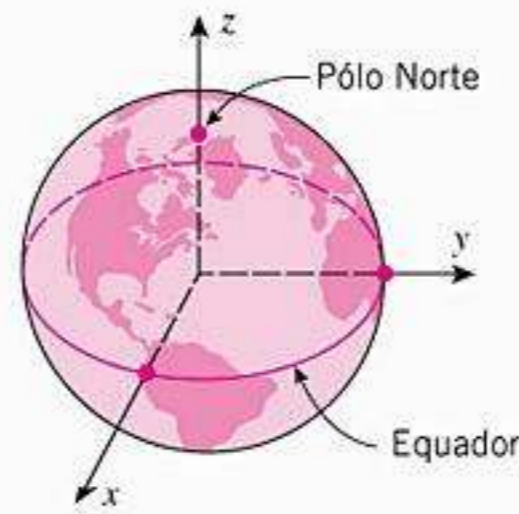


Figura Ex-50

51. Use o método do fatiamento para mostrar que $\frac{4}{3}\pi abc$ o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.7

1. (a) elipse (b) elipse (c) elipse 2. (a) hipérbole (b) elipse (c) hipérbole 3. (a) parábola (b) parábola (c) elipse
 4. (a) parabolóide elíptico (b) elipsóide (c) parabolóide hiperbólico (d) hiperbolóide de uma folha (e) cone elíptico
 (f) hiperbolóide de duas folhas

12.8 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Nesta seção, discutiremos dois novos tipos de sistemas de coordenadas no espaço tridimensional que são freqüentemente mais úteis que o sistema de coordenadas retangulares no estudo de superfícies com simetrias. Esses novos sistemas de coordenadas têm também importantes aplicações na navegação, na Astronomia e no estudo do movimento rotacional em torno de um eixo.

■ SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

São necessárias três coordenadas para estabelecer a localização de um ponto no espaço tridimensional. Já havíamos visto isso em coordenadas retangulares. Contudo, a Figura 12.8.1 mostra duas outras possibilidades: a parte (a) da figura mostra as *coordenadas retangulares* (x, y, z) de um ponto P , a parte (b) mostra as *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) de P e a parte (c) mostra as *coordenadas esféricas* (ρ, θ, ϕ) de P . Em um sistema de coordenadas retangulares, as coordenadas podem ser quaisquer números reais, mas no sistema de coordenadas cilíndricas e esféricas há restrições sobre os valores admissíveis das coordenadas (conforme indicado na Figura 12.8.1).

■ SUPERFÍCIES CONSTANTES

Em coordenadas retangulares, as superfícies representadas por equações da forma

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

onde x_0, y_0 e z_0 são constantes, são planos paralelos ao plano yz , ao plano xz e ao plano xy , respectivamente (Figura 12.8.2). Em coordenadas cilíndricas, as superfícies representadas por equações da forma

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

onde r_0, θ_0 e z_0 são constantes, estão mostradas na Figura 12.8.3:

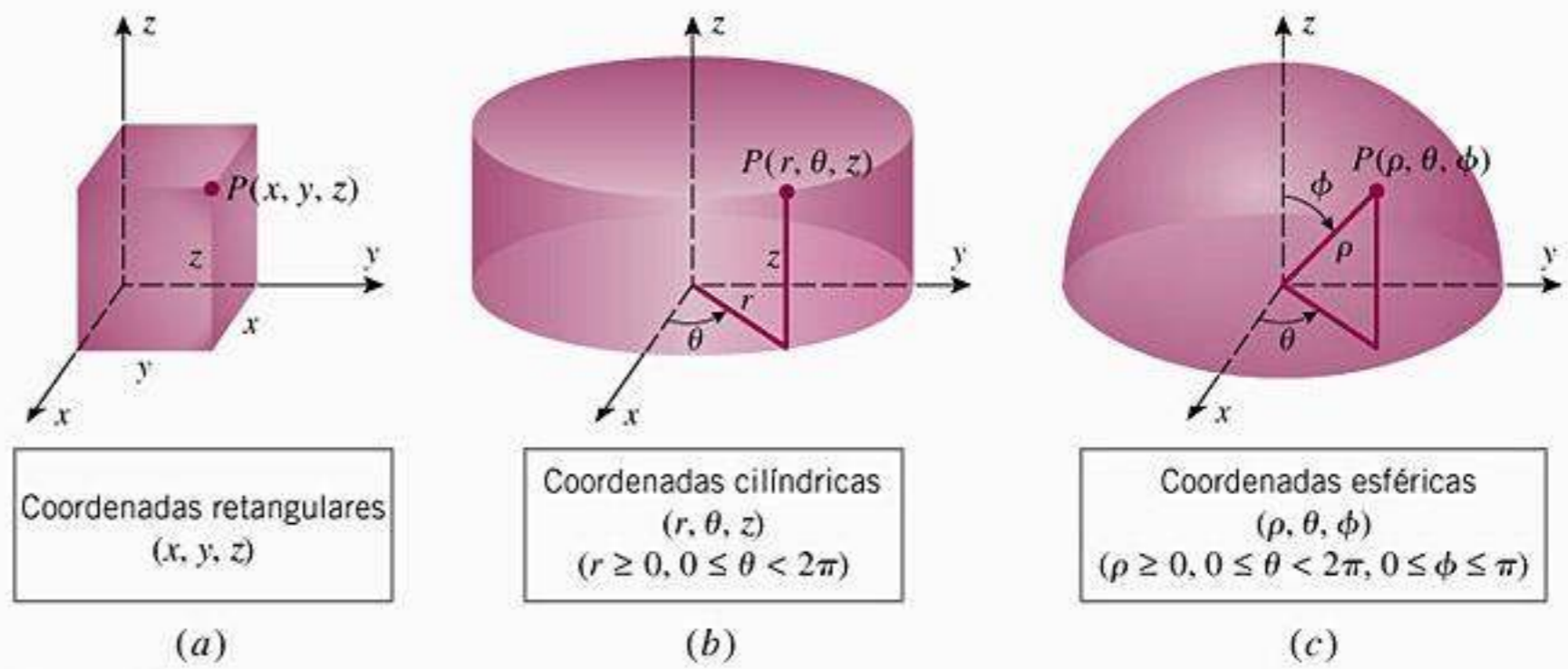


Figura 12.8.1

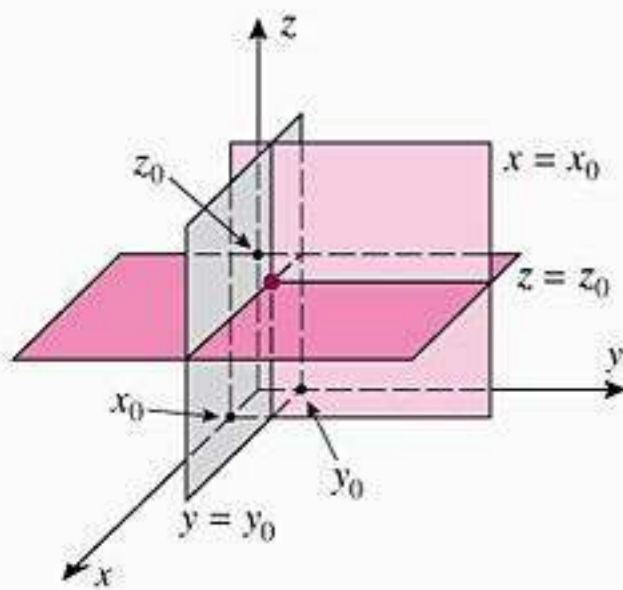


Figura 12.8.2

- A superfície $r = r_0$ é um cilindro circular reto de raio r_0 centrado no eixo z . Em cada ponto (r, θ, z) desse cilindro, r tem o valor r_0 , mas θ e z não têm restrições, exceto a restrição geral $0 \leq \theta < 2\pi$.
- A superfície $\theta = \theta_0$ é um semiplano colado no eixo z e formando um ângulo θ_0 com o eixo x positivo. Em cada ponto (r, θ, z) dessa superfície, θ tem o valor θ_0 , mas r e z não têm nenhuma restrição, exceto a restrição geral $r \geq 0$.
- A superfície $z = z_0$ é um plano horizontal. Em cada ponto (r, θ, z) desse plano, z tem o valor z_0 , mas r e θ têm somente as restrições gerais.

Em coordenadas esféricas, as superfícies representadas por equações da forma

$$\rho = \rho_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \text{e} \quad \phi = \phi_0$$

onde ρ_0, θ_0 e ϕ_0 são constantes, estão mostradas na Figura 12.8.4:

- A superfície $\rho = \rho_0$ consiste em todos os pontos cuja distância ρ da origem é ρ_0 . Supondo ρ_0 não-negativo, isso é uma esfera de raio ρ_0 centrada na origem.
- Como nas coordenadas cilíndricas, a superfície $\theta = \theta_0$ é um semiplano colado no eixo z formando um ângulo θ_0 com o eixo x positivo.
- A superfície $\phi = \phi_0$ consiste em todos os pontos dos quais um segmento de reta até a origem forma um ângulo ϕ_0 com o eixo z positivo. Dependendo de $0 < \phi_0 < \pi/2$ ou $\pi/2 < \phi_0 < \pi$, isso será a folha de um cone abrindo-se para cima ou para baixo. (Se $\phi_0 = \pi/2$, então o cone é plano e a superfície é o plano xy .)

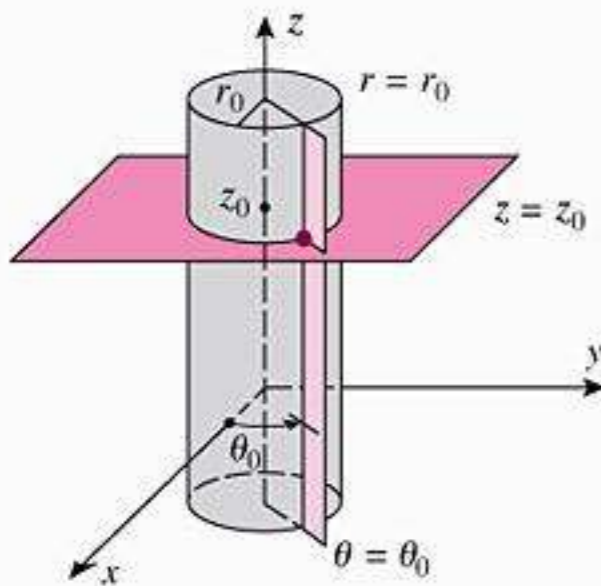


Figura 12.8.3

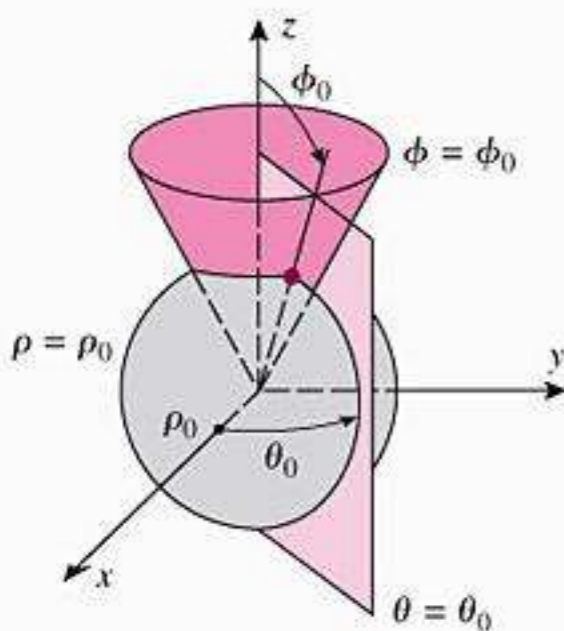


Figura 12.8.4

■ CONVERTENDO COORDENADAS

Da mesma forma que convertemos entre coordenadas retangulares e polares no espaço bidimensional, precisaremos converter entre coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas no espaço tridimensional. A Tabela 12.8.1 dá fórmulas para fazer essas conversões.

Os diagramas da Figura 12.8.5 ajudam a entender como foram deduzidas as fórmulas na Tabela 12.8.1. Por exemplo, a parte (a) da figura mostra que convertendo entre coordenadas retangulares (x, y, z) e coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , podemos interpretar (r, θ) como coordenadas polares de (x, y) . Assim, as fórmulas de conversão de polares para retangulares e de retangulares para polares (1) e (2), respectivamente, da Seção 11.1 fornecem a fórmula de conversão entre coordenadas retangulares e cilíndricas na tabela.

Tabela 12.8.1

CONVERSÃO	FÓRMULAS	RESTRICÇÕES	
Cilíndricas para retangulares Retangulares para cilíndricas	$(r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$ $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$	$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg } \theta = y/x, \quad z = z$	$r \geq 0, \rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq \phi \leq \pi$
Esféricas para cilíndricas Cilíndricas para esféricas	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, z)$ $(r, \theta, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi$ $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \text{tg } \phi = r/z$	
Esféricas para retangulares Retangulares para esféricas	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$ $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{tg } \theta = y/x, \quad \cos \phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	

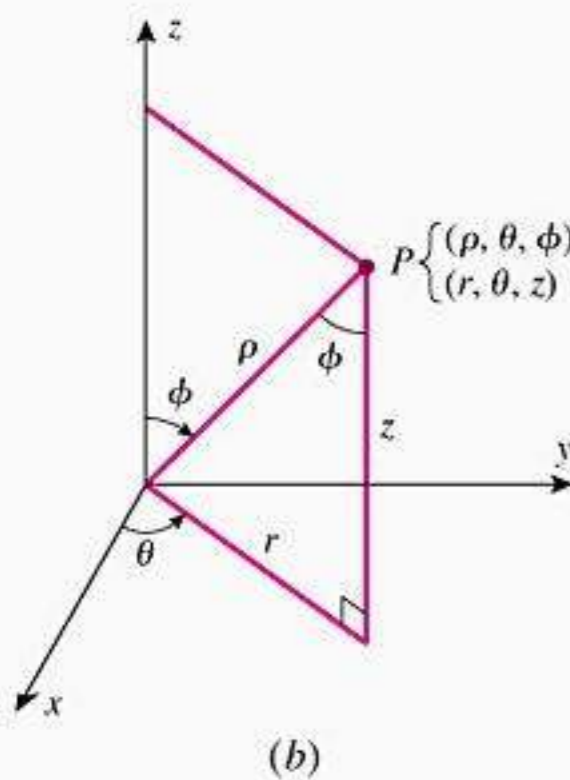
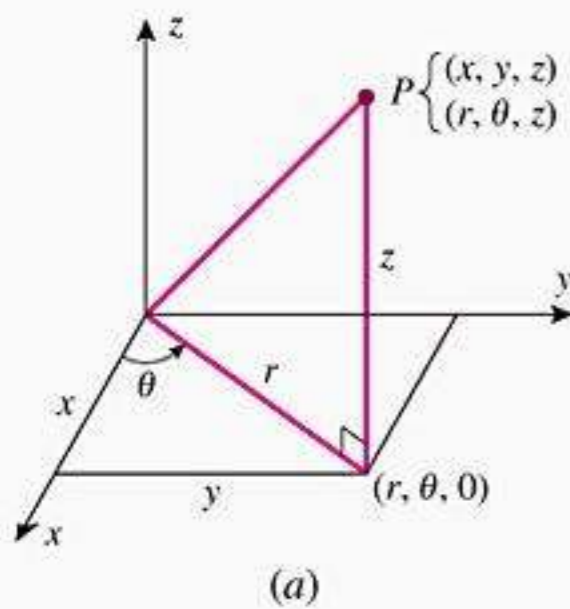


Figura 12.8.5

A parte (b) da Figura 12.8.5 sugere que as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de um ponto P podem ser convertidas em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) pelas fórmulas de conversão.

$$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{1}$$

Além disso, uma vez que as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de P podem ser convertidas em coordenadas retangulares (x, y, z) pela fórmula de conversão

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \tag{2}$$

podemos obter fórmulas de conversão direta das coordenadas esféricas para as coordenadas retangulares substituindo (1) em (2). Isso resulta em

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{3}$$

As outras fórmulas de conversão da Tabela 12.8.1 são deixadas como exercícios.

► Exemplo 1

(a) Determine as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas cilíndricas

$$(r, \theta, z) = (4, \pi/3, -3)$$

(b) Determine as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas esféricas

$$(\rho, \theta, \phi) = (4, \pi/3, \pi/4)$$

Solução (a) Aplicando a fórmula de conversão de cilíndricas para retangulares da Tabela 12.8.1,

$$x = r \cos \theta = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2, \quad y = r \sin \theta = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}, \quad z = -3$$

Assim, as coordenadas retangulares do ponto são $(x, y, z) = (2, 2\sqrt{3}, -3)$ (Figura 12.8.6).

Solução (b) Aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares da Tabela 12.8.1,

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 4 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 4 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{6}$$

$$z = \rho \cos \phi = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

As coordenadas retangulares do ponto são $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ (Figura 12.8.7). ◀

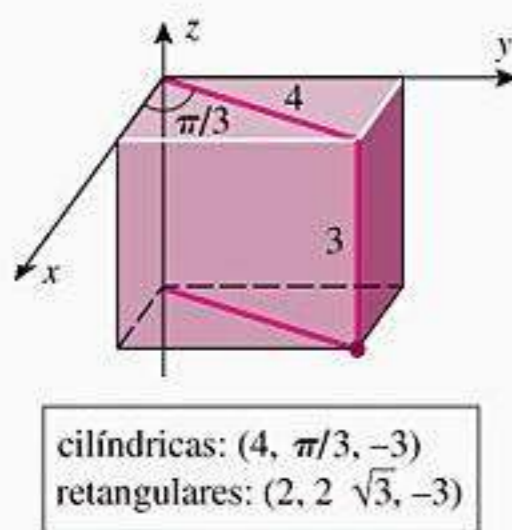


Figura 12.8.6

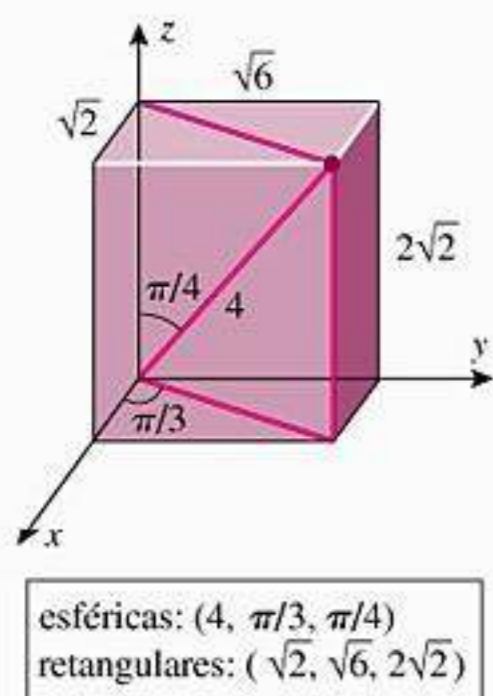


Figura 12.8.7

Como devemos escolher θ se $x = 0$?
 Como devemos escolher θ se $y = 0$?

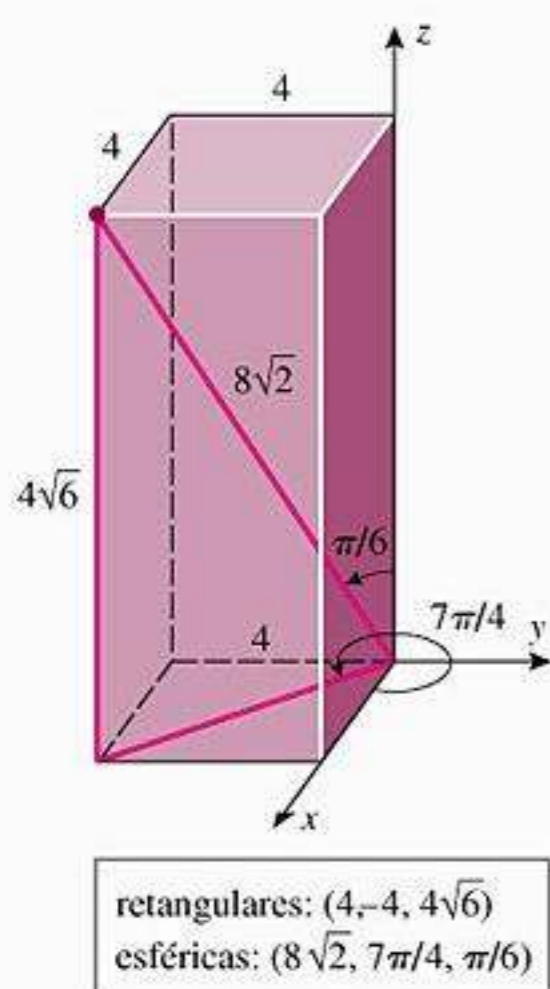


Figura 12.8.8

Como o intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ cobre dois períodos da função tangente, a fórmula de conversão $\text{tg } \theta = y/x$ não determina completamente θ . Quando convertemos de coordenadas retangulares para cilíndricas ou esféricas, é evidente pelas partes (b) e (c) da Figura 12.8.1 que deveríamos escolher θ de tal modo que

$$0 < \theta < \pi \quad \text{se } y > 0 \quad \text{e} \quad \pi < \theta < 2\pi \quad \text{se } y < 0$$

Isso está ilustrado no próximo exemplo.

► **Exemplo 2** Determine as coordenadas esféricas do ponto com coordenadas retangulares.

$$(x, y, z) = (4, -4, 4\sqrt{6})$$

Solução Da fórmula de conversão de retangulares para esféricas da Tabela 12.8.1, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{16 + 16 + 96} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \\ \text{tg } \theta &= \frac{y}{x} = -1 \\ \cos \phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Da restrição $0 \leq \theta < 2\pi$ e do valor calculado de $\text{tg } \theta$, as possibilidades para θ são $\theta = 3\pi/4$ e $\theta = 7\pi/4$. Contudo, o ponto dado tem uma coordenada y negativa, logo devemos ter $\theta = 7\pi/4$. Além disso, da restrição $0 \leq \phi \leq \pi$ e do valor calculado de $\cos \phi$, a única possibilidade para ϕ é $\phi = \pi/6$. Assim, as coordenadas esféricas do ponto são $(\rho, \theta, \phi) = (8\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/6)$ (Figura 12.8.8). ◀

■ **EQUAÇÕES DE SUPERFÍCIES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS**

As superfícies de revolução em torno do eixo z de um sistema de coordenadas retangulares têm, geralmente, equações mais simples nas coordenadas cilíndricas do que nas coordenadas retangulares, e as equações de superfícies com simetria em torno da origem são geralmente mais simples nas coordenadas esféricas do que nas coordenadas retangulares. Por exemplo, considere a folha superior do cone circular cuja equação em coordenadas retangulares é

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(Tabela 12.8.2). A equação correspondente nas coordenadas cilíndricas pode ser obtida a partir da fórmula de conversão de cilíndricas para retangulares da Tabela 12.8.1. Isso dá

$$z = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2} = |r| = r$$

logo a equação do cone nas coordenadas cilíndricas é $z = r$. Indo além, a equação do cone em coordenadas esféricas pode ser obtida da fórmula de conversão de esféricas para cilíndricas da Tabela 12.8.1. Isso resulta em

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi$$

que, se $\rho \neq 0$, pode ser reescrita como

$$\text{tg } \phi = 1 \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

Geometricamente, isso nos diz que a reta radial que parte da origem para qualquer ponto do cone faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo z .

Tabela 12.8.2

	CONE	CILINDRO	ESFERA	PARABOLÓIDE	HIPERBOLÓIDE
RETANGULARES	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
CILÍNDRICAS	$z = r$	$r = 1$	$z^2 = 1 - r^2$	$z = r^2$	$z^2 = r^2 - 1$
ESFÉRICAS	$\phi = \pi/4$	$\rho = \operatorname{cosec} \phi$	$\rho = 1$	$\rho = \cos \phi \operatorname{cosec}^2 \phi$	$\rho^2 = -\sec 2\phi$

Confirme que estão corretas as equações para o cilindro e o hiperbolóide nas coordenadas esféricas e cilíndricas dadas na Tabela 12.8.2.

► **Exemplo 3** Obtenha as equações do parabolóide $z = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas e esféricas.

Solução Da fórmula de conversão de retangulares para cilíndricas da Tabela 12.8.1 obtém-se

$$z = r^2 \tag{4}$$

que é a equação em coordenadas cilíndricas. Agora, aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para cilíndricas em (4) obtém-se

$$\rho \cos \phi = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$

que podemos reescrever como

$$\rho = \cos \phi \operatorname{cosec}^2 \phi$$

Alternativamente, poderíamos ter obtido esta equação diretamente da equação em coordenadas retangulares, aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares (verifique). ◀

■ **COORDENADAS ESFÉRICAS NA NAVEGAÇÃO**

As coordenadas esféricas estão relacionadas com as coordenadas em longitude e latitude usadas na navegação. Para ver por que, vamos construir um sistema de coordenadas retangulares satisfazendo a regra da mão direita, com a sua origem no centro da Terra, o seu eixo z positivo passando pelo Pólo Norte e o seu eixo x positivo passando pelo meridiano principal (Figura 12.8.9). Supondo a Terra uma esfera de raio $\rho = 4000$ milhas, então cada ponto sobre a Terra tem coordenadas esféricas da forma $(4000, \theta, \phi)$, onde ϕ e θ determinam a latitude e a longitude do ponto. É comum especificar longitudes em graus leste ou oeste do meridiano principal e latitudes em graus norte ou sul do Equador. Porém, o próximo exemplo mostra que é muito simples determinar ϕ e θ a partir de tais dados.



Figura 12.8.9

► **Exemplo 4** A cidade de New Orleans, nos EUA, está localizada a 90° longitude oeste e 30° latitude norte. Determine as coordenadas esféricas e retangulares relativas aos eixos coordenados da Figura 12.8.9. (Suponha que a distância esteja em milhas.)

Solução Uma longitude de 90° oeste corresponde a $\theta = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ ou $\theta = 3\pi/2$ radianos; uma latitude de 30° norte corresponde a $\phi = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ou $\phi = \pi/3$ radianos. Assim, as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de New Orleans são $(4000, 3\pi/2, \pi/3)$.

Para determinar as coordenadas retangulares, aplicamos as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares da Tabela 12.8.1. Assim obtemos

$$x = 4000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{3\pi}{2} = 4000 \frac{\sqrt{3}}{2} (0) = 0 \text{ milhas}$$

$$y = 4000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 4000 \frac{\sqrt{3}}{2} (-1) = -2000\sqrt{3} \text{ milhas}$$

$$z = 4000 \cos \frac{\pi}{3} = 4000 \left(\frac{1}{2}\right) = 2000 \text{ milhas} \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.8 (Ver página 856 para respostas.)

- As fórmulas de conversão de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para coordenadas retangulares (x, y, z) são
 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}, z = \underline{\hspace{2cm}}.$
- As fórmulas de conversão de coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) para coordenadas retangulares (x, y, z) são
 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}, z = \underline{\hspace{2cm}}.$
- As fórmulas de conversão de coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) para coordenadas cilíndricas (r, θ, z) são
 $r = \underline{\hspace{2cm}}, \theta = \underline{\hspace{2cm}}, z = \underline{\hspace{2cm}}.$
- Seja P o ponto do espaço tridimensional de coordenadas retangulares $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.
 (a) As coordenadas cilíndricas de P são $(r, \theta, z) = \underline{\hspace{2cm}}.$
 (b) As coordenadas esféricas de P são $(\rho, \theta, \phi) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- Dê uma equação de uma esfera de raio 5 centrada na origem em coordenadas
 (a) retangulares;
 (b) cilíndricas;
 (c) esféricas.

EXERCÍCIOS 12.8  Recurso Gráfico  CAS

1-2 Converta as coordenadas de retangulares para cilíndricas.

- (a) $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ (b) $(-5, 5, 6)$
 (c) $(0, 2, 0)$ (d) $(4, -4\sqrt{3}, 6)$
- (a) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ (b) $(0, 1, 1)$
 (c) $(-4, 4, -7)$ (d) $(2, -2, -2)$

3-4 Converta as coordenadas de cilíndricas para retangulares.

- (a) $(4, \pi/6, 3)$ (b) $(8, 3\pi/4, -2)$
 (c) $(5, 0, 4)$ (d) $(7, \pi, -9)$
- (a) $(6, 5\pi/3, 7)$ (b) $(1, \pi/2, 0)$
 (c) $(3, \pi/2, 5)$ (d) $(4, \pi/2, -1)$

5-6 Converta as coordenadas de retangulares para esféricas.

- (a) $(1, \sqrt{3}, -2)$ (b) $(1, -1, \sqrt{2})$
 (c) $(0, 3\sqrt{3}, 3)$ (d) $(-5\sqrt{3}, 5, 0)$
- (a) $(4, 4, 4\sqrt{6})$ (b) $(1, -\sqrt{3}, -2)$
 (c) $(2, 0, 0)$ (d) $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

7-8 Converta as coordenadas de esféricas para retangulares.

- (a) $(5, \pi/6, \pi/4)$ (b) $(7, 0, \pi/2)$
 (c) $(1, \pi, 0)$ (d) $(2, 3\pi/2, \pi/2)$


- (a) $(1, 2\pi/3, 3\pi/4)$ (b) $(3, 7\pi/4, 5\pi/6)$
 (c) $(8, \pi/6, \pi/4)$ (d) $(4, \pi/2, \pi/3)$


9-10 Converta as coordenadas de cilíndricas para esféricas.

- (a) $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ (b) $(1, \pi/4, -1)$
 (c) $(2, 3\pi/4, 0)$ (d) $(6, 1, -2\sqrt{3})$
- (a) $(4, 5\pi/6, 4)$ (b) $(2, 0, -2)$
 (c) $(4, \pi/2, 3)$ (d) $(6, \pi, 2)$

11-12 Converta as coordenadas de esféricas para cilíndricas.

- (a) $(5, \pi/4, 2\pi/3)$ (b) $(1, 7\pi/6, \pi)$
 (c) $(3, 0, 0)$ (d) $(4, \pi/6, \pi/2)$
- (a) $(5, \pi/2, 0)$ (b) $(6, 0, 3\pi/4)$
 (c) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, \pi)$ (d) $(5, 2\pi/3, 5\pi/6)$

 **13.** Use um CAS ou uma calculadora programável para estabelecer as fórmulas de conversão da Tabela 12.8.1 e, então, use o CAS ou uma calculadora para resolver os problemas dos Exercícios 1, 3, 5, 7, 9 e 11.

 **14.** Use um CAS ou uma calculadora programável para estabelecer as fórmulas de conversão da Tabela 12.8.1 e, então, use o CAS ou uma calculadora para resolver os problemas dos Exercícios 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

15-22 Uma equação é dada em coordenadas cilíndricas. Expresse a equação em coordenadas retangulares e esboce o gráfico.

15. $r = 3$ 16. $\theta = \pi/4$ 17. $z = r^2$
 18. $z = r \cos \theta$ 19. $r = 4 \sin \theta$ 20. $r = 2 \sec \theta$
 21. $r^2 + z^2 = 1$ 22. $r^2 \cos 2\theta = z$

23-30 Uma equação é dada em coordenadas esféricas. Expresse a equação em coordenadas retangulares e esboce o gráfico.

23. $\rho = 3$ 24. $\theta = \pi/3$ 25. $\phi = \pi/4$
 26. $\rho = 2 \sec \phi$ 27. $\rho = 4 \cos \phi$ 28. $\rho \sin \phi = 1$
 29. $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$ 30. $\rho - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

31-42 Uma equação de uma superfície é dada em coordenadas retangulares. Determine uma equação da superfície em (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

31. $z = 3$ 32. $y = 2$
 33. $z = 3x^2 + 3y^2$ 34. $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$
 35. $x^2 + y^2 = 4$ 36. $x^2 + y^2 - 6y = 0$
 37. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 38. $z^2 = x^2 - y^2$
 39. $2x + 3y + 4z = 1$ 40. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
 41. $x^2 = 16 - z^2$ 42. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

ENFOCANDO CONCEITOS

43-46 Descreva a região no espaço tridimensional que satisfaça as desigualdades dadas.

43. $r^2 \leq z \leq 4$ 44. $0 \leq r \leq 2 \sin \theta, 0 \leq z \leq 3$
 45. $1 \leq \rho \leq 3$ 46. $0 \leq \phi \leq \pi/6, 0 \leq \rho \leq 2$

47. São Petersburgo (antiga Leningrado), Rússia, está localizada a 30° de longitude leste e 60° de latitude norte. Determine suas coordenadas esféricas e retangulares relativas aos eixos coordenados da Figura 12.8.9. Tome milhas como a unidade

de distância e suponha que a Terra seja uma esfera de raio de 4000 milhas.

48. (a) Mostre que a curva de interseção das superfícies $z = \sin \theta$ e $r = a$ (coordenadas cilíndricas) é uma elipse.
 (b) Faça um esboço da superfície $z = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$.
49. A figura abaixo mostra um cilindro circular reto de raio 10 cm, que gira 3 rotações por minuto em torno do eixo z . No instante $t = 0$ s, um besouro no ponto $(0, 10, 0)$ começa a andar diretamente para cima na face do cilindro a uma taxa de 0,5 cm/min.
- (a) Determine as coordenadas cilíndricas do besouro depois de 2 min.
 (b) Determine as coordenadas retangulares do besouro depois de 2 min.
 (c) Determine as coordenadas esféricas do besouro depois de 2 min.

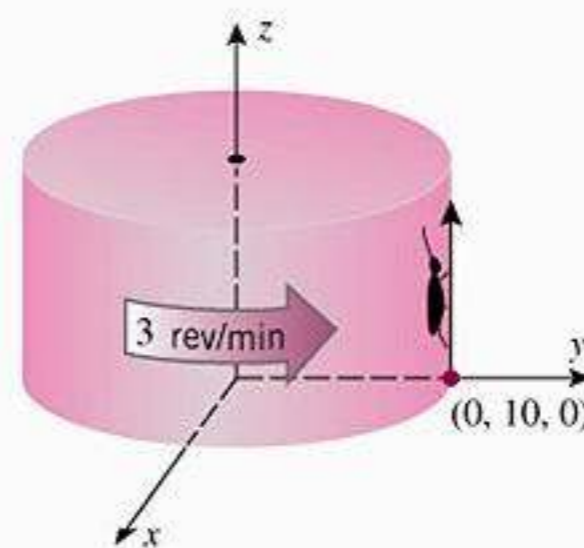


Figura Ex-49

50. Em referência ao Exercício 49, use um recurso gráfico computacional para fazer o gráfico da distância do besouro à origem como uma função do tempo.
51. Um navio ao mar está no ponto A que está a 60° de longitude oeste e 40° de latitude norte. O navio viaja ao ponto B que está a 40° de longitude oeste e 20° de latitude norte. Supondo que a Terra seja uma esfera com raio de 6370 quilômetros, determine a menor distância que o navio pode viajar indo de A para B , dado que a menor distância entre os dois pontos sobre uma esfera está ao longo do arco do círculo máximo que une os pontos. [Sugestão: introduza um sistema de coordenadas xyz como na Figura 12.8.9 e considere o ângulo entre os vetores do centro da Terra aos pontos A e B . Se o termo “círculo máximo” for desconhecido, consulte um dicionário.]

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.8

1. $r \cos \theta; r \sin \theta; z$ 2. $\rho \sin \phi \cos \theta; \rho \sin \phi \sin \theta; \rho \cos \phi$ 3. $\rho \sin \phi; \theta; \rho \cos \theta$
 4. (a) $(2, 7\pi/4, 2\sqrt{3})$ (b) $(4, 7\pi/4, \pi/6)$ 5. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (b) $r^2 + z^2 = 25$ (c) $\rho = 5$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

1. (a) Qual é a diferença entre um vetor e um escalar? Dê um exemplo físico de cada um.
 (b) Como pode ser determinado se dois vetores são ou não ortogonais?
 (c) Como pode ser determinado se dois vetores são ou não paralelos?
 (d) Como pode ser determinado se três vetores com pontos iniciais em comum no espaço tridimensional situam-se no mesmo plano ou não?

2. (a) Esboce vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} para os quais $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ sejam ortogonais.
 (b) Como podem ser usados vetores para determinar se quatro pontos no espaço tridimensional situam-se no mesmo plano?
 (c) Se forças $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}$ e $\mathbf{F}_2 = \mathbf{j}$ forem aplicadas em um ponto no espaço bidimensional, quanta força deve ser aplicada nesse ponto para cancelar o efeito combinado de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 ?
 (d) Escreva uma equação da esfera com centro $(1, -2, 2)$ que passa pela origem.
3. (a) Desenhe uma figura que mostre os ângulos diretores α , β e γ de um vetor.
 (b) Quais são os componentes de um vetor unitário no espaço bidimensional que formam um ângulo de 120° com o vetor \mathbf{i} (duas respostas)?
 (c) Como podem ser usados vetores para determinar se um triângulo com vértices desconhecidos P_1 , P_2 e P_3 tem um ângulo obtuso?
 (d) Verdadeiro ou falso: o produto vetorial de vetores ortogonais unitários é um vetor unitário. Explique o seu raciocínio.
4. (a) Faça uma tabela que mostre todos os possíveis produtos vetoriais dos vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} .
 (b) Dê uma interpretação geométrica de $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.
 (c) Dê uma interpretação geométrica de $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.
 (d) Escreva uma equação do plano que passa pela origem e é perpendicular à reta $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$.
5. Em cada parte, determine uma equação da esfera com centro $(-3, 5, -4)$ e que satisfaça a condição dada.
 (a) Tangente ao plano xy .
 (b) Tangente ao plano xz .
 (c) Tangente ao plano yz .
6. Determine a maior e a menor distância entre o ponto $P(1, 1, 1)$ e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0$$
7. Dados os pontos $P(3, 4)$, $Q(1, 1)$ e $R(5, 2)$, use métodos vetoriais para determinar as coordenadas do quarto vértice do paralelogramo cujos lados adjacentes são \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{QR} .
8. Sejam $\mathbf{u} = \langle 3, 5, -1 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 3 \rangle$. Encontre
 (a) $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ (b) $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$
 (c) $\|\mathbf{u}\|$ (d) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
9. Sejam $\mathbf{a} = c\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determine c tal que
 (a) \mathbf{a} e \mathbf{b} são ortogonais.
 (b) o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é $\pi/4$.
 (c) o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é $\pi/6$.
 (d) \mathbf{a} e \mathbf{b} são paralelos.
10. Sejam $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ e $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$. Descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) para os quais
 (a) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = 0$ (b) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0 = 0$
11. Mostre que se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores unitários e θ é o ângulo entre eles, então $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 2 \sin \frac{1}{2}\theta$.
12. Determine o vetor de comprimento 5 e ângulos diretores $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 135^\circ$.
13. Supondo que a força esteja em libras e a distância em pés, determine o trabalho realizado por uma força constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ agindo sobre uma partícula que se move sobre uma reta que vai de $P(5, 7, 0)$ a $Q(6, 6, 6)$.
14. Supondo que a força esteja em newtons e a distância em metros, determine o trabalho realizado pela resultante das forças constantes $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ agindo sobre uma partícula que se move sobre uma reta que vai de $P(-1, -2, 3)$ a $Q(0, 2, 0)$.
15. (a) Determine a área de um triângulo com vértices $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$ e $C(2, 1, 0)$.
 (b) Use o resultado da parte (a) para determinar o comprimento da altura do vértice C ao lado AB .
16. Verdadeiro ou falso? Explique o seu raciocínio.
 (a) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
 (b) Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
 (c) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
17. Considere os pontos
 $A(1, -1, 2)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-1, -2, 0)$, $D(2, 1, -1)$
 (a) Determine o volume do paralelepípedo que tenha os vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} como arestas adjacentes.
 (b) Determine a distância de D para o plano contendo A , B e C .
18. Suponha que uma força \mathbf{F} com uma magnitude de 9 lb seja aplicada ao conjunto alavanca-haste mostrado na figura abaixo.
 (a) Expresse a força \mathbf{F} na forma de componentes.
 (b) Determine o momento vetorial de \mathbf{F} sobre a origem.

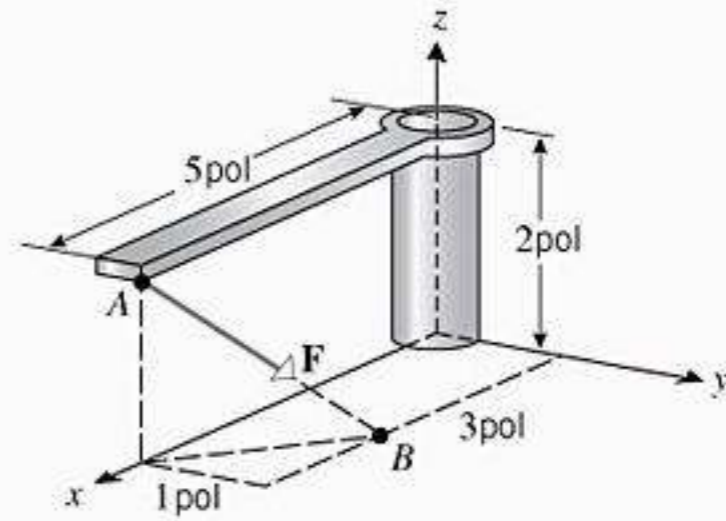


Figura Ex-18

19. Seja P o ponto $(4, 1, 2)$. Encontre equações paramétricas para a reta que passa por P que é paralela ao vetor $\langle 1, -1, 0 \rangle$.
20. (a) Determine as equações paramétricas para a interseção dos planos $2x + y - z = 3$ e $x + 2y + z = 3$.
 (b) Determine o ângulo agudo entre os dois planos.
21. Encontre uma equação do plano que é paralelo ao plano $x + 5y - z + 8 = 0$ e que contém o ponto $(1, 1, 4)$.
22. Encontre uma equação do plano que passa pelo ponto $(4, 3, 0)$ e que é paralelo aos vetores $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
23. Que condição devem satisfazer as constantes para que os planos

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
 sejam paralelos?

24. (a) Liste os seis tipos básicos de superfícies quádricas e descreva seus traços nos planos paralelos aos planos coordenados.
 (b) Dê as coordenadas dos pontos que resultam quando o ponto (x, y, z) é refletido pelo plano $y = x$, pelo plano $y = z$ e pelo plano $x = z$.
 (c) Descreva a interseção das superfícies $r = 5$ e $z = 1$ em coordenadas cilíndricas.
 (d) Descreva a interseção das superfícies $\phi = \pi/4$ e $\theta = 0$ em coordenadas esféricas.
25. Em cada parte, identifique a superfície completando os quadrados.
 (a) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 4z = 0$
 (b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 12z = 0$
 (c) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
26. Em cada parte, expresse a equação em coordenadas cilíndricas e esféricas.
 (a) $x^2 + y^2 = z$ (b) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$
27. Em cada parte, expresse a equação em coordenadas retangulares.
 (a) $z = r^2 \cos 2\theta$ (b) $\rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta = 1$

28-29 Esboce no espaço tridimensional o sólido descrito em coordenadas cilíndricas pelas desigualdades dadas.

28. (a) $1 \leq r \leq 2$ (b) $2 \leq z \leq 3$ (c) $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$
 (d) $1 \leq r \leq 2$, $2 \leq z \leq 3$ e $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$

29. (a) $r^2 + z^2 \leq 4$ (b) $r \leq 1$ (c) $r^2 + z^2 \leq 4$ e $r > 1$

30-31 Esboce no espaço tridimensional o sólido descrito em coordenadas esféricas pelas desigualdades dadas.

30. (a) $0 \leq \rho \leq 2$ (b) $0 \leq \phi \leq \pi/6$
 (c) $0 \leq \rho \leq 2$ e $0 \leq \phi \leq \pi/6$

31. (a) $0 \leq \rho \leq 5$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$
 (b) $0 \leq \phi \leq \pi/3$ e $0 \leq \rho \leq 2 \sec \phi$
 (c) $0 \leq \rho \leq 2$ e $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$

32. Esboce a superfície cuja equação em coordenadas esféricas é $\rho = a(1 - \cos \phi)$. [Sugestão: a superfície tem a forma de uma fruta conhecida.]



FUNÇÕES VETORIAIS

Todo mundo sabe o que é uma curva, até que tenha estudado tanta Matemática a ponto de ficar confuso pelas inúmeras exceções possíveis.

—Felix Klein
Matemático

Neste capítulo, consideraremos funções cujos valores são vetores. Tais funções fornecem uma maneira unificada de estudar curvas paramétricas nos espaços bi e tridimensional e são uma ferramenta básica para a análise do movimento de partículas ao longo de uma trajetória curva. Começaremos desenvolvendo o Cálculo dessas funções vetoriais – mostraremos como diferenciar e integrar tais funções, e desenvolveremos algumas propriedades básicas dessas operações. Aplicaremos, então, essas ferramentas do Cálculo para definir três vetores fundamentais que podem ser usados para descrever características básicas de curvas, tais como tendências de curvatura e torção. Uma vez feito isso, desenvolveremos o conceito de velocidade e aceleração para tais movimentos e aplicaremos esses conceitos para explicar vários fenômenos físicos. Finalmente, usaremos o Cálculo das funções vetoriais para desenvolver princípios básicos da atração gravitacional e deduzir as leis do movimento planetário de Kepler.

Foto: O carrinho de uma montanha russa se move com velocidade de direção, sentido e magnitude variáveis. Neste capítulo, estudaremos esse tipo de movimento.

13.1 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES VETORIAIS

Na Seção 12.5, discutimos equações paramétricas de retas no espaço tridimensional. Nesta seção, discutiremos curvas paramétricas mais gerais nos espaços tridimensional e mostraremos como a notação vetorial pode ser usada para expressar equações paramétricas nos espaços bi e tridimensional em uma forma mais compacta. Isso nos conduzirá a um novo tipo de função, a saber, funções que associam vetores a números reais. Tais funções têm muitas aplicações importantes na Física e na Engenharia.

■ CURVAS PARAMÉTRICAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Lembre-se que na Seção 1.8 do Volume 1 foi visto que se f e g forem funções bem comportadas, então o par de equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1)$$

gera uma curva no espaço bidimensional que é traçada num sentido específico à medida que o parâmetro t cresce. Definimos este sentido como sendo a *orientação* da curva ou a *direção de crescimento do parâmetro* e chamamos a curva junto com a sua orientação de *gráfico* das equações paramétricas ou *curva paramétrica* representada pelas equações. Analogamente, se f , g e h forem três funções bem comportadas, então as equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (2)$$

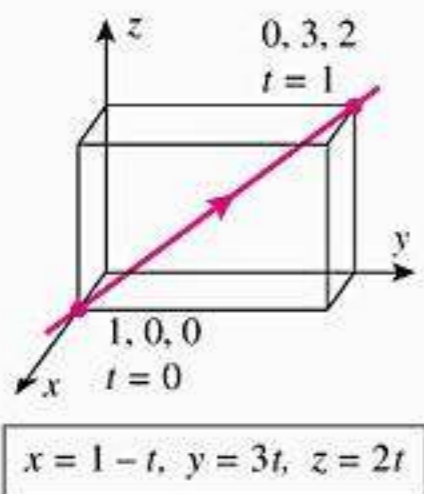


Figura 13.1.1

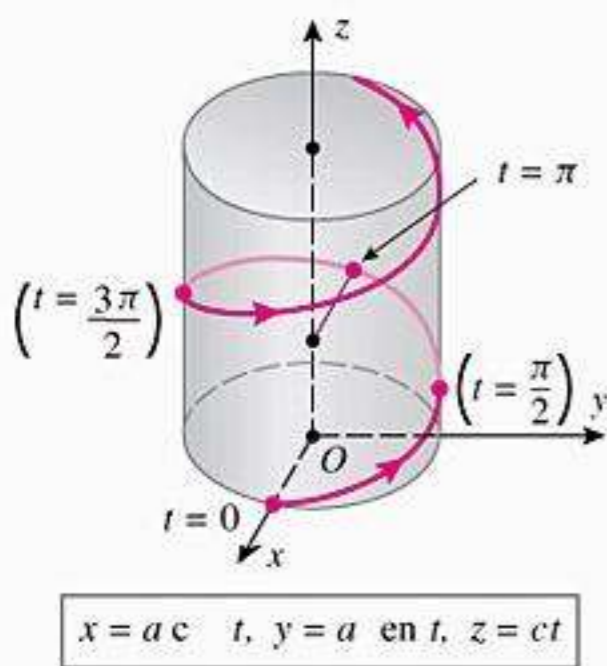
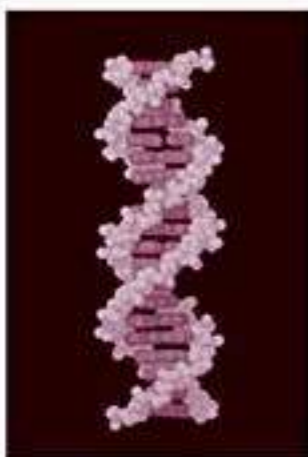


Figura 13.1.2



hélice circular é criada. Em 1953, James Watson e Francis Crick descobriram a natureza helicoidal da estrutura química da molécula de DNA. A hélice é a base da estrutura química da molécula de DNA. Ela é formada por uma cadeia de açúcares e fosfatos, com as bases nitrogenadas ligadas entre si por pontes de hidrogênio.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para gerar a reta no Exemplo 1 e a hélice

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos t, \\ y &= 4 \sin t, & 0 \leq t \leq 3\pi \\ z &= t \end{aligned}$$

mostrada na Figura 13.1.4.

geram uma curva no espaço tridimensional que é traçada num eixo específico à medida que t cresce. Em matemática, esta curva é chamada de **orientação** ou **direção de crescimento do parâmetro** e a curva unitária com a orientação é chamada de **gráfico** da equação paramétrica ou **curva paramétrica**. Se nenhuma restrição é feita sobre o intervalo de t , então t varia no intervalo $-\infty, +\infty$.

► **Exemplo 1** Equação paramétrica

$$x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 2t$$

representam uma reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto $(1, 0, 0)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 3, 2 \rangle$. À medida que t cresce, a reta tem a orientação mostrada na Figura 13.1.1.

► **Exemplo 2** Descrição da curva paramétrica representada pela equação

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct$$

onde a e c são constantes positivas.

Solução À medida que o parâmetro t cresce, também cresce a $z = ct$, logo x, y, z movem-se para cima. Porém, à medida que t cresce, x e y também movem-se em uma trajetória circularmente acima do círculo

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t$$

no plano xy combinando-se e movendo-se para cima e circunferência ao redor de uma curva com formato helicoidal. A hélice circular é chamada de **hélice circular**.

■ **CURVAS PARAMÉTRICAS GERADAS COM TECNOLOGIA**

Recentemente, a curva paramétrica no espaço tridimensional em (x, y, z) é utilizada para gerar uma curva em um computador gráfico. Em particular, a Figura 13.1.3a mostra o gráfico da curva paramétrica chamada de **nó de toro**, que é utilizada para simular o movimento de um objeto em um espaço tridimensional. Entretanto, mesmo o gráfico é utilizado para a visualização de fenômenos físicos e matemáticos. Para representar o movimento de um objeto em um espaço tridimensional, a tecnologia gráfica utiliza a **plotagem em tubos**, como mostrado na Figura 13.1.3b. Este gráfico é chamado de **plotagem em tubos**.

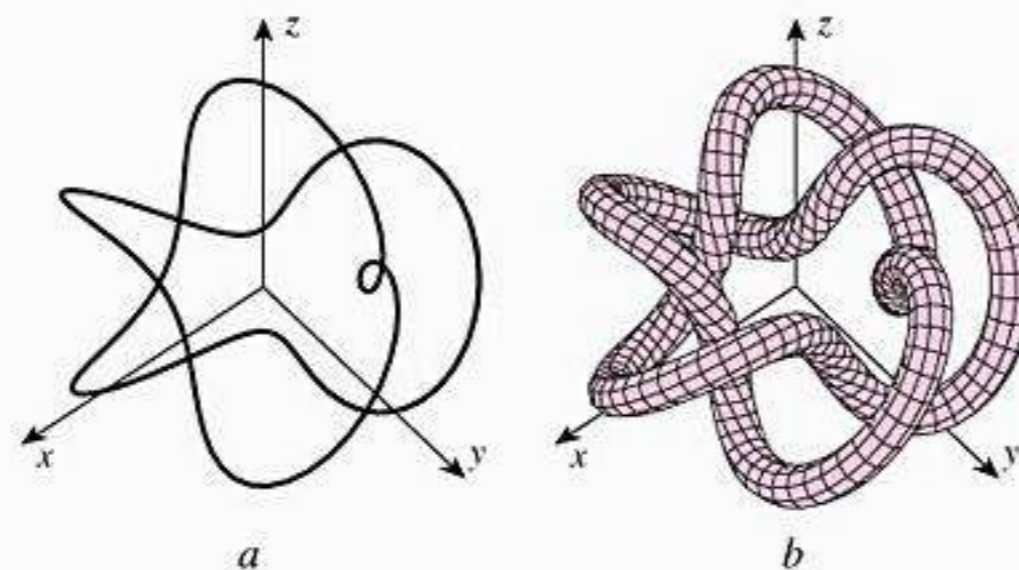


Figura 13.1.3

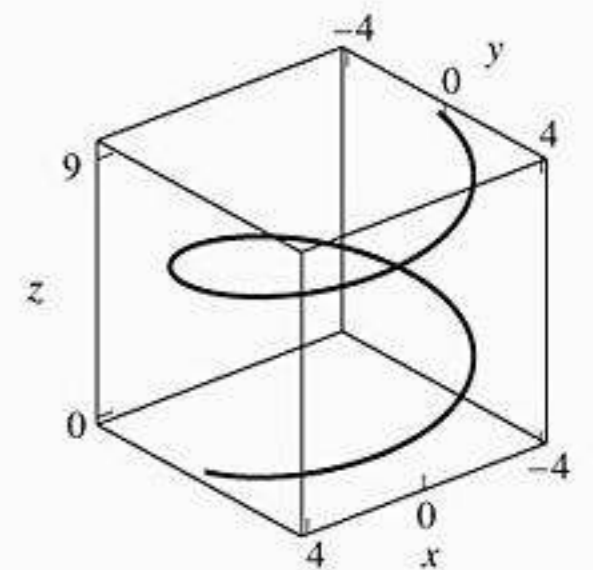
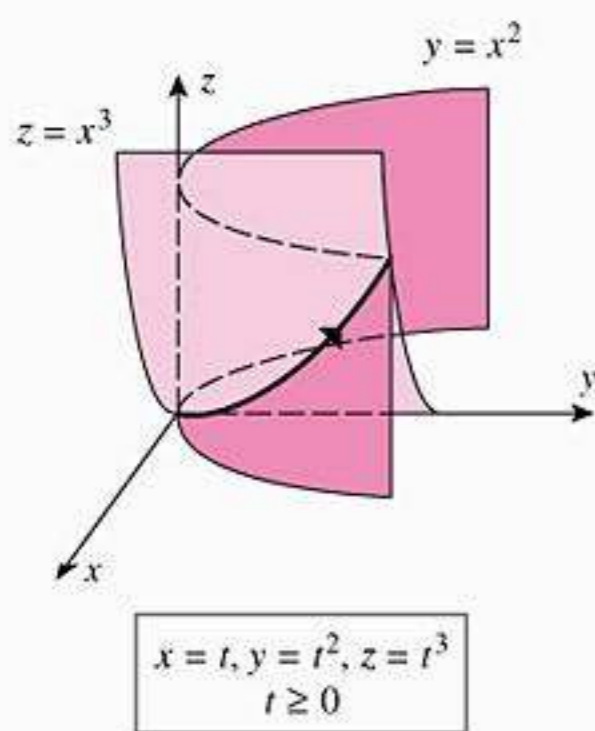
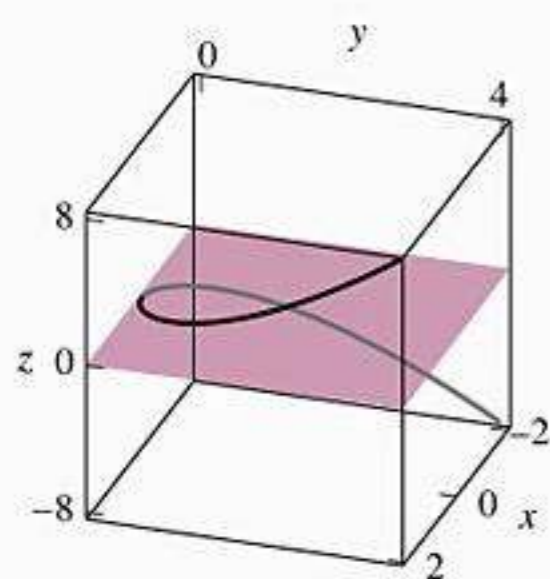


Figura 13.1.4



(a)



(b)

Figura 13.1.5

Encontre a função vetorial no espaço bidimensional cujas funções componentes são $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$.

■ EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE INTERSEÇÕES DE SUPERFÍCIES

As curvas no espaço tridimensional ocorrem freqüentemente como interseções de superfícies. Por exemplo, a Figura 13.1.5a mostra uma parte da interseção dos cilindros $z = x^3$ e $y = x^2$. Um método para encontrar as equações paramétricas da curva de interseção é escolher uma das variáveis como parâmetro e usar as duas equações para expressar as duas variáveis restantes em termos daquele parâmetro. Em particular, se escolhermos $x = t$ como parâmetro e substituirmos isso nas equações $z = x^3$ e $y = x^2$, obtemos as equações paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \tag{3}$$

Essa curva é chamada de *cúbica torcida*. A parte da cúbica torcida mostrada na Figura 13.1.5a corresponde a $t \geq 0$; o gráfico da cúbica torcida gerado no computador para valores positivos e negativos de t está na Figura 13.1.5b. Alguns outros exemplos e técnicas para encontrar interseções de superfícies são discutidos nos exercícios.

■ FUNÇÕES VETORIAIS

A cúbica torcida, definida pelas equações em (3), é o conjunto de pontos da forma (t, t^2, t^3) , para valores reais de t . Interpretando cada um desses pontos como ponto final de um vetor \mathbf{r} cujo ponto inicial é a origem,

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle = \langle t, t^2, t^3 \rangle = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

obtemos \mathbf{r} como uma função do parâmetro t , ou seja, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Como essa função produz um vetor, dizemos que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ define \mathbf{r} como uma *função de valores vetoriais a uma variável real* ou, mais simplesmente, uma *função vetorial*. Os vetores que consideramos neste livro são bi ou tridimensionais, portanto diremos que uma função vetorial é uma função no espaço bi ou tridimensional, de acordo com o tipo de vetores que produz.

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço bidimensional, então para cada valor admissível de t o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ pode ser representado em termos de componentes por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

As funções $x(t)$ e $y(t)$ são denominadas *funções componentes* ou *componentes* de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Analogamente, as funções componentes de uma função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

no espaço tridimensional são $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

► **Exemplo 3** As funções componentes de

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

são

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3 \quad \blacktriangleleft$$

O *domínio* de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é o conjunto dos valores admissíveis de t . Se $\mathbf{r}(t)$ estiver definida em termos de funções componentes e o domínio não estiver explicitamente especificado, convencionamos que o domínio será a interseção dos domínios naturais das funções componentes e dizemos que esse é o *domínio natural* de $\mathbf{r}(t)$.

► **Exemplo 4** Encontre o domínio natural de

$$\mathbf{r}(t) = \langle \ln |t - 1|, e^t, \sqrt{t} \rangle = (\ln |t - 1|)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

Solução Os domínios naturais das funções componentes

$$x(t) = \ln |t - 1|, \quad y(t) = e^t, \quad z(t) = \sqrt{t}$$

são

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \quad (-\infty, +\infty), \quad [0, +\infty)$$

respectivamente. A interseção desses conjuntos é

$$[0, 1) \cup (1, +\infty)$$

(confira), portanto o domínio natural de $\mathbf{r}(t)$ consiste em todos valores de t tais que

$$0 \leq t < 1 \quad \text{ou} \quad t > 1 \quad \blacktriangleleft$$

■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional, então definimos o **gráfico** de $\mathbf{r}(t)$ como a curva paramétrica descrita pelas funções componentes de $\mathbf{r}(t)$. Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 - t, 3t, 2t \rangle = (1 - t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \tag{4}$$

então o gráfico de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é o gráfico das equações paramétricas

$$x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 2t$$

Assim, o gráfico de (4) é a reta na Figura 13.1.1.

Falando estritamente, para sermos claros deveríamos escrever $(\cos t)\mathbf{i}$ e $(\sin t)\mathbf{j}$ em vez de $\cos t\mathbf{i}$ e $\sin t\mathbf{j}$. Contudo, é prática comum ignorar os parênteses em tais casos, já que não é possível interpretar essas expressões de outra maneira. Por que?

► **Exemplo 5** Descreva o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Solução As equações paramétricas correspondentes são

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

Assim, como vimos no Exemplo 2, o gráfico é uma hélice circular enrolada em torno de um cilindro de raio 1. ◀

Até agora, consideramos curvas paramétricas como sendo caminhos traçados pelo movimento de pontos. Entretanto, se uma curva paramétrica for vista como o gráfico de uma função vetorial, então podemos imaginar, também, que o gráfico seja traçado pela ponta de um vetor em movimento. Por exemplo, se a curva C no espaço tridimensional for o gráfico de

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

e se posicionarmos $\mathbf{r}(t)$ com o seu ponto inicial na origem, então seu ponto final cai na curva C (como mostrado na Figura 13.1.6). Assim, quando $\mathbf{r}(t)$ é posicionado com seu ponto inicial na origem, seu ponto final descreve a curva C quando o parâmetro t varia, caso em que dizemos que $\mathbf{r}(t)$ é o **vetor posição** de C . Por simplicidade, às vezes deixamos implícita a dependência t e escrevemos \mathbf{r} em vez de $\mathbf{r}(t)$ para o vetor posição.

► **Exemplo 6** Esboce o gráfico e um vetor posição de

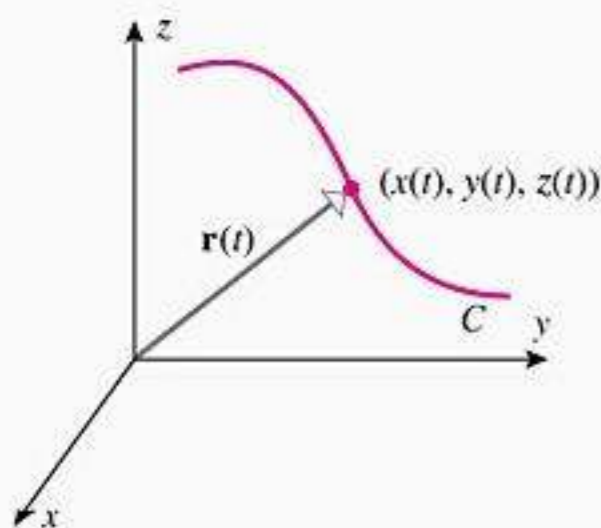
(a) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Solução (a) As equações paramétricas correspondentes são

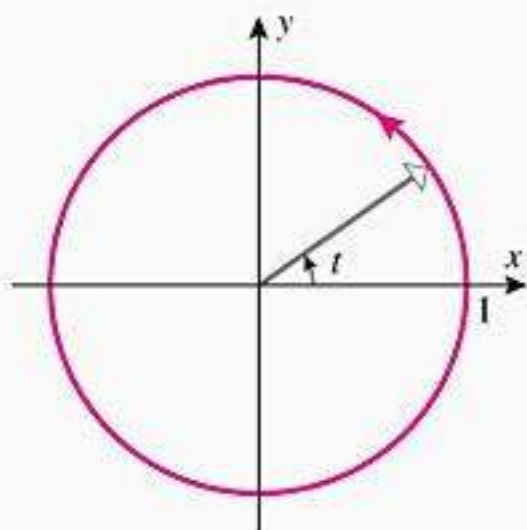
$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

logo o gráfico é um círculo de raio 1, centrado na origem, orientado no sentido anti-horário. O gráfico e um vetor posição são mostrados na Figura 13.1.7.



Quando t varia, a ponta do vetor posição $\mathbf{r}(t)$ descreve a curva C .

Figura 13.1.6



$$\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$$

Figura 13.1.7

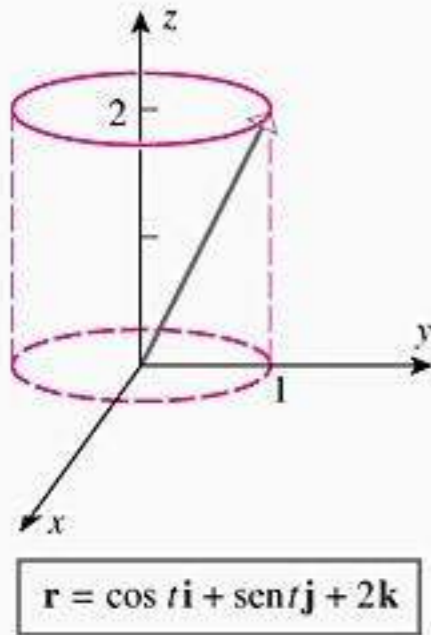


Figura 13.1.8

Solução (b) As equações paramétricas correspondentes são

$$x = \cos t, \quad y = \text{sen } t, \quad z = 2 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

A partir da terceira equação, a ponta do vetor posição traça uma curva no plano $z = 2$ e das duas primeiras equações, a curva é um círculo de raio 1 centrado no ponto $(0, 0, 2)$ e traçado no sentido anti-horário, olhando para baixo do eixo z . O gráfico e um vetor posição são mostrados na Figura 13.1.8. ◀

■ **FORMA VETORIAL DE UM SEGMENTO DE RETA**

Lembre-se da Fórmula (9) da Seção 12.5 em que vimos que se \mathbf{r}_0 for um vetor no espaço bi ou tridimensional, com seu ponto inicial na origem, então a reta que passa pelo ponto final de \mathbf{r}_0 e é paralela ao vetor \mathbf{v} pode ser dada na forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Em particular, se \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 são vetores no espaço bi ou tridimensional com seus pontos iniciais na origem, então a reta que passa pelos pontos finais desses vetores pode ser dada na forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (5-6)$$

como indicado na Figura 13.1.9.

É comum chamar (5) ou (6) de *forma vetorial de uma reta por dois pontos* e, para simplificar, dizer que a reta passa pelos *pontos* \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 (em vez de dizer que ela passa pelos *pontos finais* de \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1).

Deve ser entendido em (5) e (6) que t varia de $-\infty$ a $+\infty$. Contudo, se restringirmos a variação de t ao intervalo $0 \leq t \leq 1$, então \mathbf{r} variará de \mathbf{r}_0 a \mathbf{r}_1 . Assim, a equação

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (7)$$

representa o segmento de reta no espaço bi ou tridimensional que é traçado de \mathbf{r}_0 a \mathbf{r}_1 .

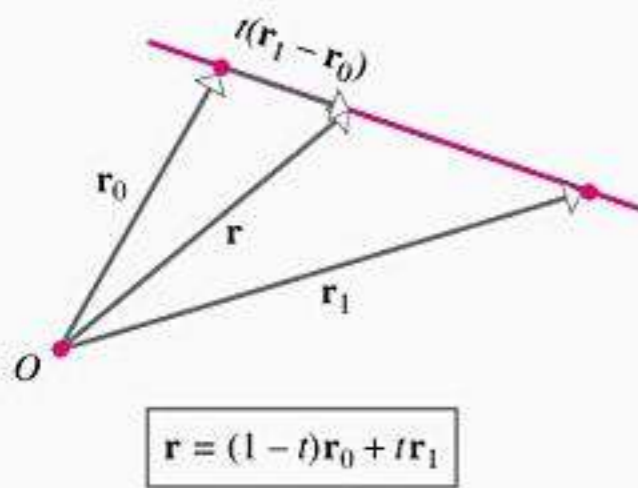


Figura 13.1.9

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.1** (Ver página 865 para respostas.)

1. (a) Expresse as equações paramétricas

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = \sqrt{t}, \quad z = \text{arc sen } t$$

como uma só equação vetorial da forma

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

- (b) A equação vetorial na parte (a) define $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ como uma função vetorial. O domínio de $\mathbf{r}(t)$ é _____ e $\mathbf{r}(\frac{1}{2}) =$ _____.

2. Descreva o gráfico de $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, -1 + 3t \rangle$.
 3. Descreva o gráfico de $\mathbf{r}(t) = \text{sen}^2 t \mathbf{i} + \text{cos}^2 t \mathbf{j}$.
 4. Encontre uma equação vetorial para a curva de interseção das superfícies $y = x^2$ e $z = y$ em termos do parâmetro $x = t$.

EXERCÍCIOS 13.1 Recurso Gráfico

1-4 Determine o domínio de $\mathbf{r}(t)$ e o valor de $\mathbf{r}(t_0)$.

- $\mathbf{r}(t) = \text{cos } t \mathbf{i} - 3t \mathbf{j}; t_0 = \pi$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{3t + 1}, t^2 \rangle; t_0 = 1$
- $\mathbf{r}(t) = \text{cos } \pi t \mathbf{i} - \ln t \mathbf{j} + \sqrt{t - 2} \mathbf{k}; t_0 = 3$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2e^{-t}, \text{arc sen } t, \ln(1 - t) \rangle; t_0 = 0$

5-8 Expresse as equações paramétricas como uma única equação vetorial da forma

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

- $x = 3 \text{ cos } t, y = t + \text{sen } t$
- $x = t^2 + 1, y = e^{-2t}$
- $x = 2t, y = 2 \text{ sen } 3t, z = 5 \text{ cos } 3t$

8. $x = t$ em t , $y = nt$, $z = c^2 t$

9-12 Determine a equação paramétrica que representa a equação reticular

9. $r = 3t^2 i - 2j$ 10. $r = \cos^2 t i + (1 - \cos^2 t) j$

11. $r = (2t - 1)i - 3\sqrt{t}j + \sin 3tk$

12. $r = te^{-t} i - 5t^2 k$

13-18 Desenhe o gráfico da equação

13. $r = 3 - 2t i + 5t j$ 14. $r = 2$ em $3ti - 2c - 3tj$

15. $r = 2ti - 3j + 1 + 3tk$

16. $r = 3i + 2 \cos t j + 2 \sin t k$

17. $r = 2 \cos t i - 3 \sin t j + k$

18. $r = -3i + (1 - t^2) j + tk$

19. a) Desenhe a inclinação da reta normal à curva em $t = 1$ na equação reticular $r = 1 - 2t i - 2 - 3t j$

b) Desenhe a curva em $t = 1$ em uma reta $r = (2 + t)i + (1 - 2t)j + 3tk$

intersecção no xz .

20. a) Desenhe a curva em $t = 1$ em uma reta normal à curva em $t = 1$ na equação reticular $r = 3 + 2t i + 5t j$

b) Desenhe a curva em $t = 1$ em uma reta $r = ti + (1 + 2t)j - 3tk$

intersecção no $3x - y - z = 2$

21-22 Encontre o segmento de reta representado pela equação reticular

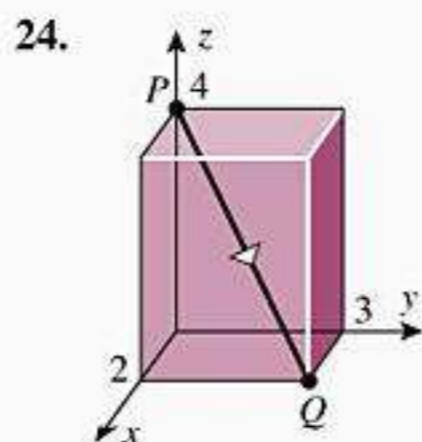
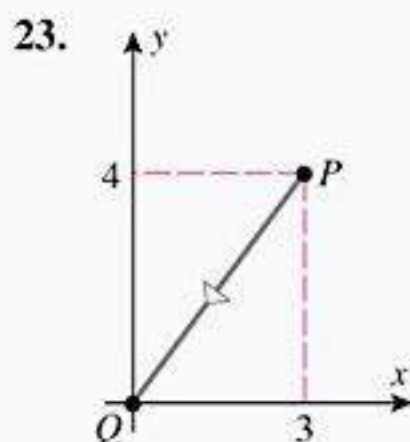
21. a) $r = 1 - t i + t j$ $0 \leq t \leq 1$

b) $r = 1 - t i + j + t(i - j)$ $0 \leq t \leq 1$

22. a) $r = 1 - t i + j + tk$ $0 \leq t \leq 1$

b) $r = 1 - t i + j + k + t(i + j)$ $0 \leq t \leq 1$

23-24 Encontre uma equação reticular para o segmento de reta PQ



25-34 Encontre o gráfico de $r(t)$ em termos de t crescente

25. $r(t) = 2i + tj$ 26. $r(t) = (3t - 4, t + 2)$

27. $r(t) = 1 + \cos t i + 3 - \sin t j$ $0 \leq t \leq 2\pi$

28. $r(t) = (2 \cos t, 5 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

29. $r(t) = c \cos t i + c \sin t j$ 30. $r(t) = \sqrt{t} i + (2t + 4)j$

31. $r(t) = 2 \cos t i + 2 \sin t j + tk$

32. $r(t) = 9 \cos t i + 4 \sin t j + tk$

33. $r(t) = ti + t^2 j + 2k$

34. $r(t) = ti + tj + \sin t k$ $0 \leq t \leq 2\pi$

35-36 Encontre a curva de interseção da superfície e desenhe a equação paramétrica para a interseção em termos paramétricos $x = t$. (Nota: trabalhe com um recurso gráfico gerando a curva paramétrica entre $-1 \leq t \leq 1$)

35. $z = x^2 + y^2$, $x - y = 0$

36. $y + x = 0$, $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

37-38 Encontre a curva de interseção da superfície e desenhe uma equação reticular para a curva em termos paramétricos $x = t$

37. $9x^2 + y^2 + 9z^2 = 81$, $y = x^2$, $z > 0$

38. $y = x$, $x + y + z = 1$

39. Desenhe o gráfico e

$$r = t \sin t i + t \cos t j + t^2 k$$

itua em $z = x^2 + y^2$

40. Desenhe o gráfico e

$$r = ti + \frac{1+t}{t}j + \frac{1-t^2}{t}k, \quad t > 0$$

itua em $x - y + z + 1 = 0$

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Desenhe o gráfico e

$$r = \sin t i + 2 \cos t j + \sqrt{3} \sin t k$$

é um círculo e determine seu centro e raio. [Sugestão: desenhe a curva itua e numa esfera e também num plano.]

42. Desenhe o gráfico e

$$r = 3 \cos t i + 3 \sin t j + 3 \sin t k$$

é um eixo e determine os rimos e o maior e menor. [Sugestão: desenhe o gráfico itua e em um cilindro circular e um plano e use a regra do círculo. (0 a Seção 11.4)]

43. Para a hélice $r = a \cos t i + a \sin t j + ct k$, desenhe a reta $c > 0$ tal que a hélice seja tangente a uma esfera de raio 3 unidades e meça o ângulo θ .

44. Quantas retas tangentes há à hélice circular

$$r = a \cos t i + a \sin t j + 0,2tk$$

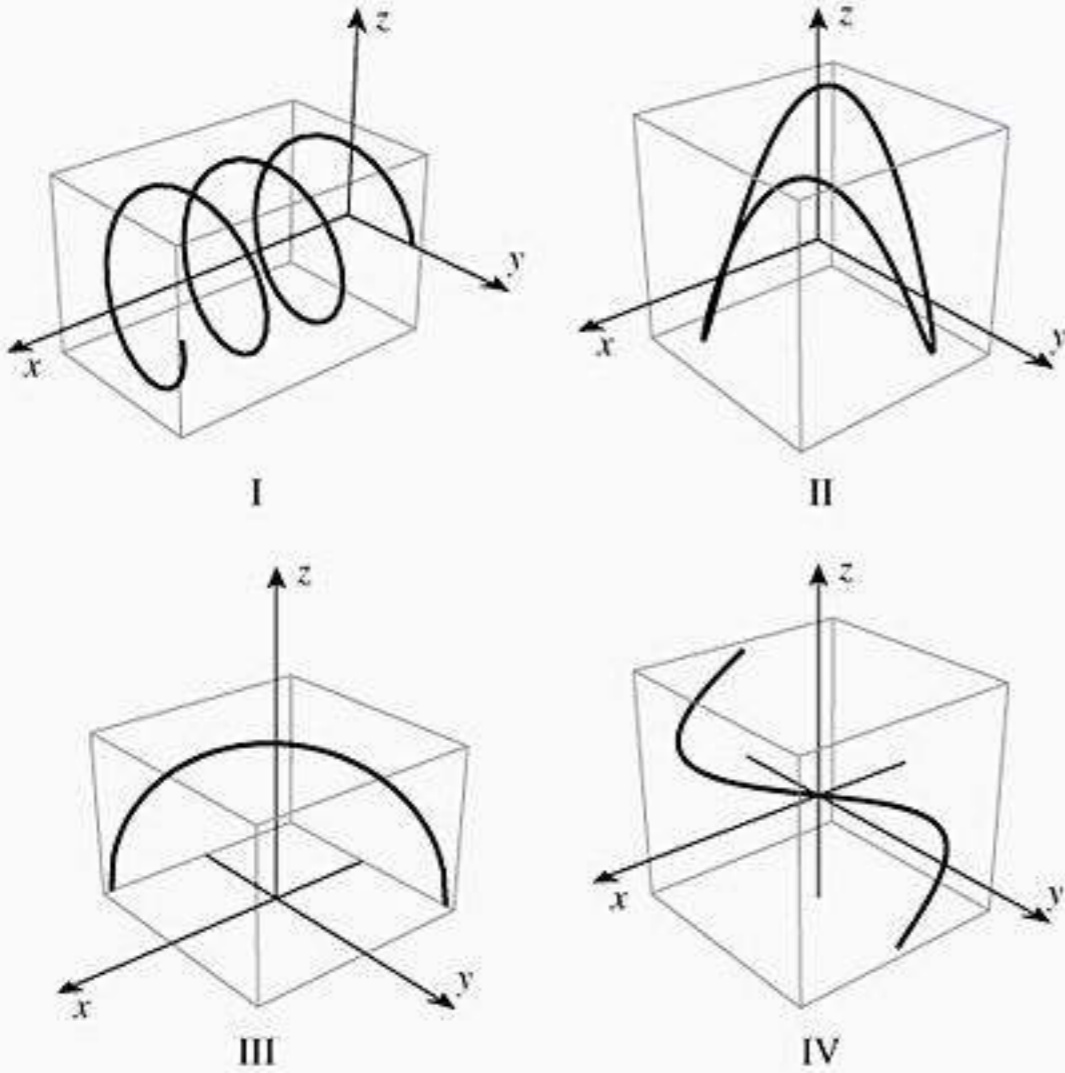
em uma esfera de raio 10 unidades e meça o ângulo θ .

45. Desenhe a curva $r = t \cos t i + t \sin t j + tk$, $t \geq 0$, itua e desenhe a curva $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Desenhe a curva

46. Desenhe a curva $r = a \cos t i + b \sin t j + ct k$, onde a, b e c são constantes e $a \neq b$.

47. Em cada parte, associe a equação vetorial com um dos gráficos abaixo, e explique seu raciocínio.

- (a) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \sqrt{2-t^2}\mathbf{k}$
- (b) $\mathbf{r} = \sin \pi t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
- (c) $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$
- (d) $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \sin 3t\mathbf{k}$



48. Confira suas conclusões do Exercício 47 gerando as curvas com um recurso gráfico. [Nota: O seu recurso gráfico pode olhar a curva de um ponto de vista diferente. Leia o manual

para determinar como controlar o ponto de vista, e veja se você pode gerar uma cópia razoável dos gráficos mostrados na figura, ajustando o ponto de vista e escolhendo apropriadamente o intervalo dos valores de t .]

- 49. (a) Obtenha as equações paramétricas para a curva da interseção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$ e o cilindro parabólico $z = x^2$ em termos de um parâmetro t para o qual $x = 3 \cos t$.
(b) Use um recurso gráfico para gerar a curva de interseção da parte (a).

50. Use um recurso gráfico para gerar a interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = y + 2$. Identifique a curva e explique o seu raciocínio.

51. (a) Esboce o gráfico de

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t, \frac{2}{1+t^2} \right\rangle$$

(b) Prove que a curva na parte (a) também é o gráfico da função

$$y = \frac{8}{4+x^2}$$

[Os gráficos de $y = a^3/(a^2 + x^2)$, em que a denota uma constante, foram estudados primeiro pelo matemático francês Pierre de Fermat e, mais tarde, pelos matemáticos italianos Guido Grandi e Maria Agnesi. Qualquer uma dessas curvas é conhecida como uma “bruxa de Agnesi”. Existem várias teorias sobre a origem desse nome. Alguns sugerem que foi uma tradução errada feita por Grandi ou Agnesi de um nome menos pitoresco do latim para o italiano. Outros culpam uma tradução para o inglês do tratado de 1748 de Agnesi intitulado “*Instituições Analíticas*”.]

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.1

- 1. (a) $\mathbf{r} = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + \arcsen t\mathbf{k}$ (b) $0 < t \leq 1$; $2\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\pi}{6}\mathbf{k}$
- 2. O gráfico é uma reta que passa por $(1, -1)$ com vetor diretor $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
- 3. O gráfico é o segmento de reta no plano xy de $(0, 1)$ a $(1, 0)$
- 4. $\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^2 \rangle$

13.2 CÁLCULO DE FUNÇÕES VETORIAIS

Nesta seção, definiremos limites, derivadas e integrais de funções vetoriais e discutiremos suas propriedades.

LIMITES E CONTINUIDADE

Nosso primeiro objetivo nesta seção é desenvolver uma noção do que significa uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional $\mathbf{r}(t)$ tender para um vetor limite \mathbf{L} quando t tender a um número a . Ou seja, queremos definir

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L} \tag{1}$$

Uma maneira de motivar uma definição razoável de (1) é posicionar $\mathbf{r}(t)$ e \mathbf{L} com seus pontos iniciais na origem e interpretar esse limite como significando que o ponto final de $\mathbf{r}(t)$ tende

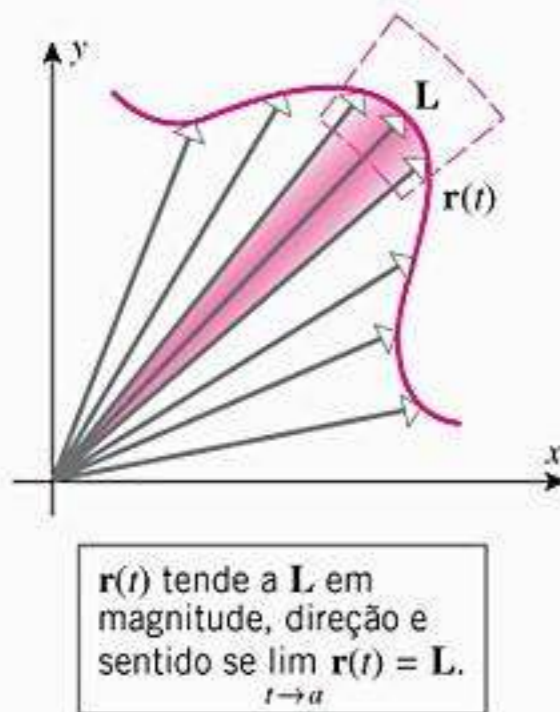


Figura 13.2.1

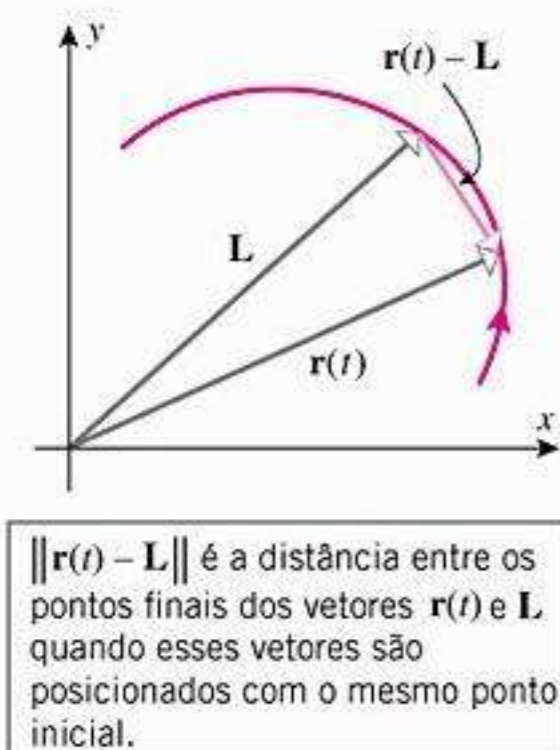


Figura 13.2.2

Note que $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$ é um número real para cada valor de t , de modo que embora essa expressão envolva uma função vetorial, o limite

$$\lim_{t \rightarrow a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$$

é um limite comum de função real.

Como poderíamos definir os limites laterais

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \mathbf{r}(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow a^-} \mathbf{r}(t)?$$

Os limites de funções vetoriais têm muitas das mesmas propriedades que os limites de funções reais. Por exemplo, supondo que os limites existam, o limite de uma soma é a soma dos limites, o limite de uma diferença é a diferença dos limites e um fator escalar constante pode ser tirado para fora de um símbolo de limite.

ao ponto final de \mathbf{L} quando t tender a a ou, equivalentemente, que o vetor $\mathbf{r}(t)$ tende ao vetor \mathbf{L} tanto em magnitude quanto em direção e sentido quando t tender a a (Figura 13.2.1). Algebricamente, isso equivale a afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0 \tag{2}$$

(Figura 13.2.2). Assim, temos a seguinte definição.

13.2.1 DEFINIÇÃO Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial definida para todo t de algum intervalo aberto contendo o número a , exceto que $\mathbf{r}(t)$ não precisa estar definido em a . Escrevemos

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

É intuitivamente claro que $\mathbf{r}(t)$ tenderá a um vetor limite \mathbf{L} quando t tende a a se, e somente se, as funções componentes de $\mathbf{r}(t)$ tenderem aos componentes correspondentes de \mathbf{L} . Isso sugere o teorema a seguir, cuja prova formal será omitida.

13.2.2 TEOREMA

(a) Se $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \rightarrow a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t)\mathbf{j}$$

sempre que existirem os limites das funções componentes. Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que $\mathbf{r}(t)$ tender a um vetor limite quando t tende a a .

(b) Se $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) &= \left\langle \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow a} z(t)\mathbf{k} \end{aligned}$$

sempre que existirem os limites das funções componentes. Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que $\mathbf{r}(t)$ tender a um vetor limite quando t tende a a .

► **Exemplo 1** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2 \cos \pi t)\mathbf{k}$. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} e^t \right) \mathbf{j} - \left(\lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos \pi t \right) \mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Alternativamente, usando a notação de ternos ordenados para vetores,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \langle t^2, e^t, -2 \cos \pi t \rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} t^2, \lim_{t \rightarrow 0} e^t, \lim_{t \rightarrow 0} (-2 \cos \pi t) \right\rangle = \langle 0, 1, -2 \rangle \blacktriangleleft$$

Motivados pela definição de continuidade de funções reais, dizemos que uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é *contínua* em $t = a$ se

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) \tag{3}$$

Ou seja, $\mathbf{r}(a)$ está definido, o limite de $\mathbf{r}(t)$ quando $t \rightarrow a$ tende a a existe, e ambos coincidem. Como no caso de funções reais, dizemos que $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial *contínua num intervalo* I se for contínua em cada ponto de I [com a ressalva que nos pontos extremos de I o limite bilateral seja substituído pelo limite lateral apropriado]. Segue do Teorema 13.2.2 que uma função vetorial é contínua em $t = a$ se, e somente se, suas funções componentes são contínuas em $t = a$.

■ DERIVADAS

A derivada de uma função vetorial é definida com um limite análogo ao da derivada de uma função real.

13.2.3 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, definimos a *derivada de \mathbf{r} em relação a t* como a função vetorial \mathbf{r}' dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{4}$$

O domínio de \mathbf{r}' consiste em todos valores de t do domínio de $\mathbf{r}(t)$ para os quais o limite existe.

A função $\mathbf{r}(t)$ é dita *derivável* ou *diferenciável* em t se existir o limite em (4). Seguimos utilizando toda a notação usual de derivadas. Por exemplo, a derivada de $\mathbf{r}(t)$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}'(t), \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}'$$

É importante não esquecer que $\mathbf{r}'(t)$ é um vetor, não um número, e portanto tem magnitude, direção e sentido para cada valor de t [exceto se $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$, caso em que $\mathbf{r}'(t)$ tem magnitude nula mas nenhuma direção ou sentido específicos]. Na próxima seção consideraremos o significado da magnitude de $\mathbf{r}'(t)$, mas por enquanto nosso objetivo é o de obter uma interpretação geométrica da direção e sentido de $\mathbf{r}'(t)$. Para isso, consideremos as partes (a) e (b) da Figura 13.2.3. Essas ilustrações mostram o gráfico C de $\mathbf{r}(t)$ (com a orientação) e os vetores $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t+h)$ e $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ para h positivo e negativo. Em ambos os casos, o vetor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ percorre a reta secante que une os pontos terminais de $\mathbf{r}(t+h)$ e $\mathbf{r}(t)$, mas com sentidos opostos nos dois casos. No caso em que h é positivo, o vetor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ aponta na direção do parâmetro crescente, e no caso em que h é negativo, ele aponta no sentido oposto. Entretanto, no caso em que h é negativo, a direção e o sentido são revertidos quando multiplicamos por $1/h$, de modo que em ambos os casos o vetor

$$\frac{1}{h}[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

aponta na direção do parâmetro crescente e percorre a reta secante. Quando $h \rightarrow 0$, a reta secante aproxima-se da reta tangente no ponto terminal de $\mathbf{r}(t)$, logo podemos concluir que o limite

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

(se ele existir e for não-nulo) é um vetor que é tangente à curva C na ponta de $\mathbf{r}(t)$ e que aponta na direção do parâmetro crescente (Figura 13.2.3).

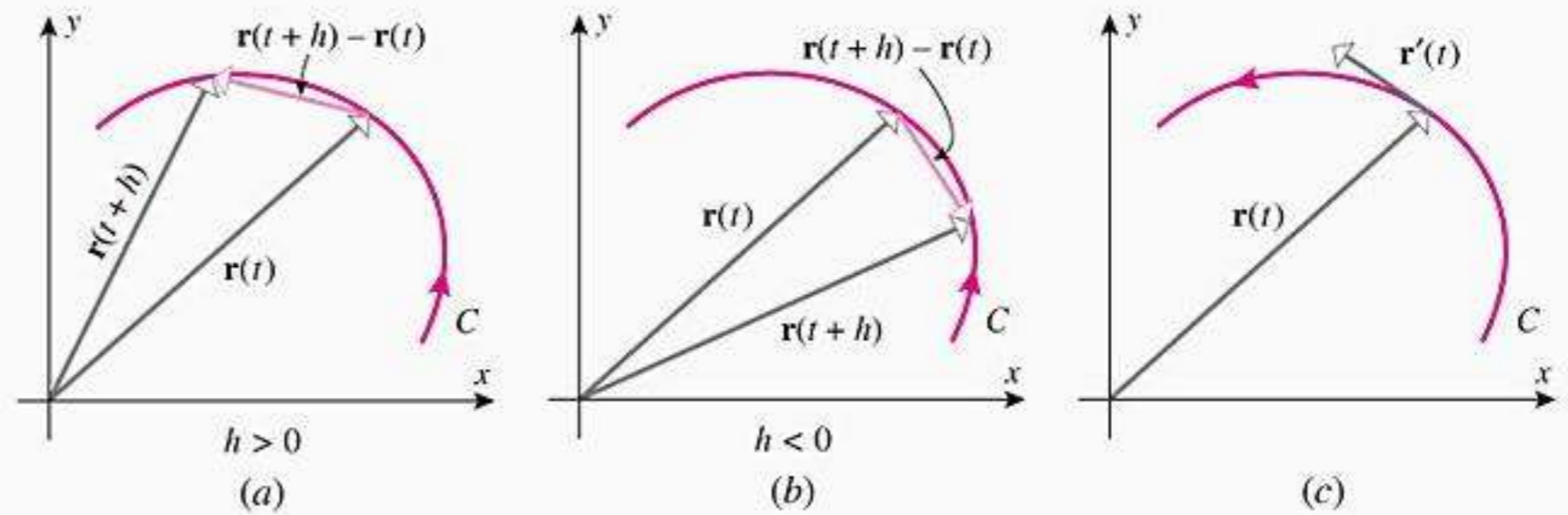


Figura 13.2.3

Podemos resumir essa discussão como segue.

13.2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA Suponha que C seja o gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional e que $\mathbf{r}'(t)$ exista e não seja nula para um valor dado de t . Se o vetor $\mathbf{r}'(t)$ estiver posicionado com seu ponto inicial no ponto final do vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então $\mathbf{r}'(t)$ é tangente a C e aponta na direção do parâmetro crescente.

Como os limites de funções vetoriais podem ser calculados componente a componente, parece razoável esperar que as derivadas também possam ser calculadas em termos de funções componentes. Esse é o resultado do próximo teorema.

13.2.5 TEOREMA Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, então \mathbf{r} é diferenciável em t se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em t , caso em que as funções componentes de $\mathbf{r}'(t)$ são as derivadas das correspondentes funções componentes de $\mathbf{r}(t)$

DEMONSTRAÇÃO Para simplificar, daremos a prova no caso bidimensional; a prova no caso tridimensional é idêntica, exceto pelo componente adicional. Suponha que $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\mathbf{j}] - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}]}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \mathbf{j} \\ &= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

► **Exemplo 2** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2 \cos \pi t)\mathbf{k}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(t^2)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(e^t)\mathbf{j} - \frac{d}{dt}(2 \cos \pi t)\mathbf{k} \\ &= 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (2\pi \sin \pi t)\mathbf{k} \end{aligned}$$

■ REGRAS DE DERIVAÇÃO

Muitas das regras de derivação de funções reais têm análogos no contexto de derivação de funções vetoriais. Algumas dessas estão enunciadas no teorema a seguir.

13.2.6 TEOREMA (Regras de Derivação) *Sejam $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ funções vetoriais que são todas do espaço bidimensional ou então do espaço tridimensional, seja $f(t)$ uma função real, k um escalar e \mathbf{c} um vetor constante (ou seja, um vetor cujo valor independa de t). Então valem as seguintes regras de derivação:*

- (a) $\frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$
- (b) $\frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$
- (c) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$
- (d) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$
- (e) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\mathbf{r}(t)$

As demonstrações da maioria dessas regras são conseqüências imediatas da Definição 13.2.3, embora a última regra seja mais facilmente demonstrada aplicando a regra do produto de funções reais às funções componentes. A demonstração do Teorema 13.2.6 é deixada como exercício.

■ RETAS TANGENTES A GRÁFICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Motivado pela discussão da interpretação geométrica da derivada de uma função vetorial, estabelecemos a definição seguinte.

13.2.7 DEFINIÇÃO *Seja P um ponto no gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ e seja $\mathbf{r}(t_0)$ o vetor posição da origem a P (Figura 13.2.4). Se $\mathbf{r}'(t_0)$ existir e $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, então dizemos que $\mathbf{r}'(t_0)$ é um **vetor tangente** ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_0)$ e a reta que passa por P que é paralela ao vetor tangente é denominada **reta tangente** ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_0)$.*

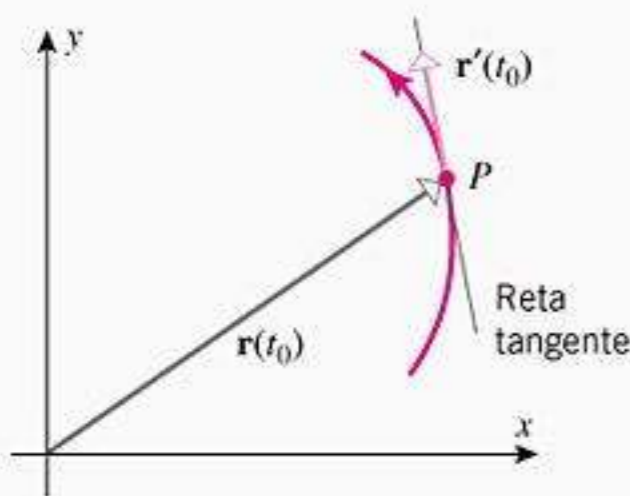


Figura 13.2.4

Sejam $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0)$. Segue da Fórmula (9) da Seção 12.5 que a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em \mathbf{r}_0 é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0 \tag{5}$$

► **Exemplo 3** Obtenha equações paramétricas da reta tangente à hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

onde $t = t_0$ e use esse resultado para obter equações paramétricas da reta tangente no ponto em que $t = \pi$.

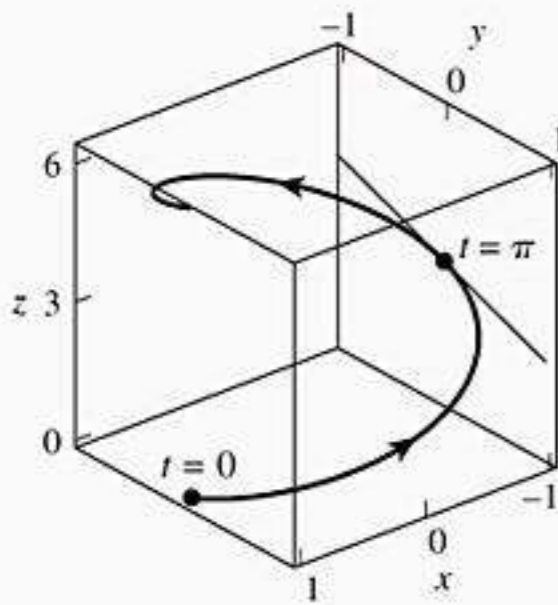


Figura 13.2.5

Solução A equação vetorial da hélice é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

portanto temos

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \cos t_0 \mathbf{i} + \sin t_0 \mathbf{j} + t_0 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0) = (-\sin t_0) \mathbf{i} + \cos t_0 \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Segue de (5) que a equação vetorial da reta tangente em $t = t_0$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \cos t_0 \mathbf{i} + \sin t_0 \mathbf{j} + t_0 \mathbf{k} + t [(-\sin t_0) \mathbf{i} + \cos t_0 \mathbf{j} + \mathbf{k}] \\ &= (\cos t_0 - t \sin t_0) \mathbf{i} + (\sin t_0 + t \cos t_0) \mathbf{j} + (t_0 + t) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Assim, as equações paramétricas da reta tangente em $t = t_0$ são

$$x = \cos t_0 - t \sin t_0, \quad y = \sin t_0 + t \cos t_0, \quad z = t_0 + t$$

Em particular, a reta tangente no ponto em que $t = \pi$ tem as equações paramétricas

$$x = -1, \quad y = -t, \quad z = \pi + t$$

O gráfico da hélice e esta reta tangente estão mostrados na Figura 13.2.5. ◀

► **Exemplo 4** Sejam

$$\mathbf{r}_1(t) = (\arctg t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_2(t) = (t^2 - t) \mathbf{i} + (2t - 2) \mathbf{j} + (\ln t) \mathbf{k}$$

Os gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ intersectam na origem. Encontre a medida em graus do ângulo agudo entre as retas tangentes aos gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ na origem.

Solução O gráfico de $\mathbf{r}_1(t)$ passa pela origem em $t = 0$, onde seu vetor tangente é

$$\mathbf{r}'_1(0) = \left\langle \frac{1}{1+t^2}, \cos t, 2t \right\rangle \Big|_{t=0} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

O gráfico de $\mathbf{r}_2(t)$ passa pela origem em $t = 1$ (confira), onde seu vetor tangente é

$$\mathbf{r}'_2(1) = \left\langle 2t - 1, 2, \frac{1}{t} \right\rangle \Big|_{t=1} = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

Pelo Teorema 12.3.3, o ângulo θ entre esses dois vetores tangentes satisfaz

$$\cos \theta = \frac{\langle 1, 1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2, 1 \rangle}{\|\langle 1, 1, 0 \rangle\| \|\langle 1, 2, 1 \rangle\|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Segue que $\theta = \pi/6$, ou seja, 30° . ◀

■ **DERIVADAS DE PRODUTOS ESCALARES E VETORIAIS**

As regras seguintes, que são deduzidas nos exercícios, fornecem um método para diferenciar produtos escalares no espaço bi ou tridimensional e produtos vetoriais no espaço tridimensional.

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2(t) \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2(t) \tag{7}$$

Observe que em (6) não importa a ordem dos fatores em cada termo no lado direito, mas em (7) sim.

Na Geometria plana, aprende-se que uma reta tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Conseqüentemente, se um ponto mover-se ao longo de um círculo no espaço bidimensional que está centrado na origem, então espera-se que o vetor posição e o vetor tangente em qualquer ponto sobre o círculo sejam ortogonais. Isso é a motivação para o útil teorema a seguir, que é aplicável em ambos os espaços bi e tridimensional.

13.2.8 TEOREMA Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional e $\|\mathbf{r}(t)\|$ for constante para todo t , então

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \tag{8}$$

isto é, $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ são vetores ortogonais para todo t .

DEMONSTRAÇÃO Segue de (6) com $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(t)$ que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}(t)$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|^2] = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{9}$$

Mas, $\|\mathbf{r}(t)\|^2$ é constante, logo a sua derivada é zero. Assim,

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

do que segue (8). ■

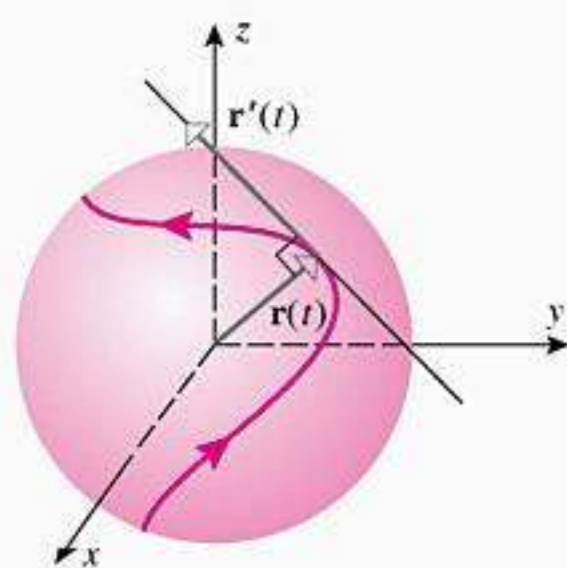


Figura 13.2.6

► **Exemplo 5** Da mesma forma que uma reta tangente ao círculo no espaço bidimensional é perpendicular ao raio no ponto de tangência, um vetor tangente a uma curva sobre a superfície de uma esfera no espaço tridimensional que está centrada na origem é ortogonal ao vetor posição naquele ponto de tangência (Figura 13.2.6). Para provar isso, suponha que o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ situe-se sobre a superfície de uma esfera de raio positivo k centrada na origem. Para cada valor de t temos $\|\mathbf{r}(t)\| = k$, logo pelo Teorema 13.2.8

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

e, portanto, o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ são ortogonais. ◀

■ **INTEGRAIS DEFINIDAS DE FUNÇÕES VETORIAIS**

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então definimos a *integral definida* de $\mathbf{r}(t)$ ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann, exatamente como na Definição 6.5.1, exceto que aqui o integrando é uma função vetorial. Especificamente, definimos

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}(t_k^*) \Delta t_k \tag{10}$$

Segue de (10) que a integral definida de $\mathbf{r}(t)$ ao longo do intervalo $a \leq t \leq b$ pode ser expressa como um vetor cujos componentes são as integrais definidas das funções componentes

de $\mathbf{r}(t)$. Por exemplo, se $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, então

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t) dt &= \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}(t_k^*) \Delta t_k \\ &= \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{k=1}^n x(t_k^*) \Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^n y(t_k^*) \Delta t_k \right) \mathbf{j} \right] \\ &= \left(\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x(t_k^*) \Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y(t_k^*) \Delta t_k \right) \mathbf{j} \\ &= \left(\int_a^b x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \mathbf{j}\end{aligned}$$

Em geral, temos

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \mathbf{j} \quad \text{Espaço Bidimensional} \quad (11)$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t) dt \right) \mathbf{k} \quad \text{Espaço Tridimensional} \quad (12)$$

Reescreva as Fórmulas (11) e (12) em notação de pares e ternos ordenados para vetores, com

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$$

e

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

respectivamente.

► **Exemplo 6** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2 \cos \pi t)\mathbf{k}$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt &= \left(\int_0^1 t^2 dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^1 e^t dt \right) \mathbf{j} - \left(\int_0^1 2 \cos \pi t dt \right) \mathbf{k} \\ &= \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 \mathbf{i} + \left. e^t \right|_0^1 \mathbf{j} - \left. \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi t \right|_0^1 \mathbf{k} = \frac{1}{3} \mathbf{i} + (e - 1) \mathbf{j} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ REGRAS DE INTEGRAÇÃO

Da mesma maneira que a derivação, muitas das regras de integração de funções reais têm análogos para funções vetoriais.

13.2.9 TEOREMA (Regras de Integração) Sejam $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ funções vetoriais que são todas do espaço bidimensional ou então do espaço tridimensional e que sejam contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$ e seja k um escalar. Então valem as seguintes regras de integração:

$$(a) \int_a^b k \mathbf{r}(t) dt = k \int_a^b \mathbf{r}(t) dt$$

$$(b) \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t) dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t) dt$$

$$(c) \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t) dt - \int_a^b \mathbf{r}_2(t) dt$$

Omitiremos a demonstração.

■ **ANTIDERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS**

Uma *antiderivada* de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial $\mathbf{R}(t)$ tal que

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t) \tag{13}$$

Assim como no Capítulo 6, expressamos a Equação (13) usando notação de integral como

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C} \tag{14}$$

onde \mathbf{C} representa um *vetor* constante arbitrário.

Como a derivação de funções vetoriais pode ser efetuada componente a componente, segue que a antiderivação pode ser feita da mesma maneira. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

► **Exemplo 7**

$$\begin{aligned} \int (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}) dt &= \left(\int 2t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int 3t^2 dt \right) \mathbf{j} \\ &= (t^2 + C_1)\mathbf{i} + (t^3 + C_2)\mathbf{j} \\ &= (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}) = (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + \mathbf{C} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}$ é um vetor constante de integração arbitrário. ◀

A maioria das propriedades conhecidas de integração de funções reais tem contrapartida vetorial. Por exemplo, a derivação e a integração de funções vetoriais são operações inversas, no sentido de que

$$\frac{d}{dt} \left[\int \mathbf{r}(t) dt \right] = \mathbf{r}(t) \quad \text{e} \quad \int \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{C} \tag{15-16}$$

Além disso, se $\mathbf{R}(t)$ for uma antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ num intervalo contendo $t = a$ e $t = b$, então temos a seguinte forma vetorial do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a) \tag{17}$$

► **Exemplo 8** Calcule a integral definida $\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}) dt$.

Solução Integrando os componentes, obtemos

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}) dt = t^2 \Big|_0^2 \mathbf{i} + t^3 \Big|_0^2 \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Solução Alternativa A função $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ é uma antiderivada do integrando, pois $\mathbf{R}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$. Assim, segue de (17) que

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_0^2 = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \Big|_0^2 = (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 9** Obtenha $\mathbf{r}(t)$ sabendo que $\mathbf{r}'(t) = \langle 3, 2t \rangle$ e $\mathbf{r}(1) = \langle 2, 5 \rangle$.

Solução Integrando $\mathbf{r}'(t)$ para encontrar $\mathbf{r}(t)$, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{r}'(t) dt = \int \langle 3, 2t \rangle dt = \langle 3t, t^2 \rangle + \mathbf{C}$$

onde \mathbf{C} é um vetor constante de integração. Para encontrar o valor de \mathbf{C} , substituímos $t = 1$ e usamos o valor dado de $\mathbf{r}(1)$ para obter

$$\mathbf{r}(1) = \langle 3, 1 \rangle + \mathbf{C} = \langle 2, 5 \rangle$$

de modo que $\mathbf{C} = \langle -1, 4 \rangle$. Assim,

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3t, t^2 \rangle + \langle -1, 4 \rangle = \langle 3t - 1, t^2 + 4 \rangle \blacktriangleleft$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.2** (Ver página 876 para respostas.)

- (a) $\lim_{t \rightarrow 3} (t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 (b) $\lim_{t \rightarrow \pi/4} \langle \cos t, \sen t \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$
- Encontre $\mathbf{r}'(t)$.
 (a) $\mathbf{r}(t) = (4 + 5t)\mathbf{i} + (t - t^2)\mathbf{j}$
 (b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{t}, \operatorname{tg} t, e^{2t} \right\rangle$
- Suponha que $\mathbf{r}_1(0) = \langle 3, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{r}_2(0) = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}'_1(0) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ e $\mathbf{r}'_2(0) = \langle -6, -4, -2 \rangle$. Use essa informação para calcular a derivada de cada função em $t = 0$.
 (a) $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$
 (b) $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{r}_1(t) + e^{2t} \mathbf{r}_2(t)$
 (c) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$
 (d) $f(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$
- (a) $\int_0^1 \langle 2t, t^2, \sen \pi t \rangle dt = \underline{\hspace{2cm}}$
 (b) $\int (t\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) dt = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 13.2  Recurso Gráfico

1-4 Obtenha o limite.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right\rangle$
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \sqrt{t} \mathbf{i} + \frac{\sen t}{t} \mathbf{j} \right\rangle$
- $\lim_{t \rightarrow 2} (t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$
- $\lim_{t \rightarrow 1} \left\langle \frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sen 2t \right\rangle$

5-6 Determine se $\mathbf{r}(t)$ é contínua em $t = 0$. Explique seu raciocínio.

- (a) $\mathbf{r}(t) = 3 \sen t \mathbf{i} - 2t \mathbf{j}$ (b) $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \frac{1}{t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

- (a) $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \operatorname{cosec} t \mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} - \sqrt{3t + 1} \mathbf{j} + e^{2t} \mathbf{k}$

7. Esboce o círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sen t \mathbf{j}$ e em cada parte desenhe o vetor com seu comprimento correto.

- (a) $\mathbf{r}'(\pi/4)$ (b) $\mathbf{r}''(\pi)$ (c) $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(3\pi/2)$

8. Esboce o círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} - \sen t \mathbf{j}$ e em cada parte desenhe o vetor com seu comprimento correto.

- (a) $\mathbf{r}'(\pi/4)$ (b) $\mathbf{r}''(\pi)$ (c) $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(3\pi/2)$

9-10 Obtenha $\mathbf{r}'(t)$.

- $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} t)\mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} - \sqrt{t} \mathbf{k}$


11-14 Encontre o vetor $\mathbf{r}'(t_0)$; então, esboce o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no espaço bidimensional e desenhe o vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$; $t_0 = 2$ **12.** $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$; $t_0 = 1$
- $\mathbf{r}(t) = \sec t \mathbf{i} + \operatorname{tg} t \mathbf{j}$; $t_0 = 0$
- $\mathbf{r}(t) = 2 \sen t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}$; $t_0 = \pi/6$

15-16 Encontre o vetor $\mathbf{r}'(t_0)$; então, esboce o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no espaço tridimensional e desenhe o vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$.

- $\mathbf{r}(t) = 2 \sen t \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k}$; $t_0 = \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sen t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$; $t_0 = \pi/4$

17-18 Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ e o gráfico da reta tangente em t_0 na mesma tela.

-  **17.** $\mathbf{r}(t) = \sen \pi t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$; $t_0 = \frac{1}{2}$

18. $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t \mathbf{i} + 4 \cos t \mathbf{j}; t_0 = \pi/4$

19-22 Obtenha equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto em que $t = t_0$.

19. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + (2 - \ln t) \mathbf{j}; t_0 = 1$

20. $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \mathbf{i} - 2 \cos 3t \mathbf{j}; t_0 = 0$

21. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos \pi t \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} \pi t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}; t_0 = \frac{1}{3}$

22. $\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}; t_0 = 2$

23-26 Obtenha uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto P_0 da curva.

23. $\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + \sqrt{3t + 4}\mathbf{j}; P_0(-1, 2)$

24. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} - 3t \mathbf{j}; P_0(2, -\pi)$

25. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - \frac{1}{t+1} \mathbf{j} + (4 - t^2) \mathbf{k}; P_0(4, 1, 0)$

26. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cosh t \mathbf{j} + (\operatorname{arc} \operatorname{tg} t) \mathbf{k}; P_0(0, 1, 0)$

27. Seja $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine

(a) $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t))$ (b) $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t))$

(c) $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t))$.

28. Seja $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$. Determine

$$\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))$$

29-30 Calcule

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$$

primeiro diferenciando o produto diretamente e, então, aplicando as Fórmulas (6) e (7).

29. $\mathbf{r}_1(t) = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \mathbf{r}_2(t) = t^4 \mathbf{k}$

30. $\mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + t \mathbf{k}$

31-36 Calcule a integral definida.

31. $\int (3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) dt$ 32. $\int (\operatorname{sen} t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}) dt$

33. $\int (t \operatorname{sen} t \mathbf{i} + \mathbf{j}) dt$ 34. $\int \langle t e^t, \ln t \rangle dt$

35. $\int \left(t^2 \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + \frac{1}{t} \mathbf{k} \right) dt$ 36. $\int \langle e^{-t}, e^t, 3t^2 \rangle dt$

37-42 Calcule a integral definida.

37. $\int_0^{\pi/2} \langle \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle dt$ 38. $\int_0^1 (t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}) dt$

39. $\int_0^2 \|t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}\| dt$

40. $\int_{-3}^3 \langle (3-t)^{3/2}, (3+t)^{3/2}, 1 \rangle dt$

41. $\int_1^9 (t^{1/2} \mathbf{i} + t^{-1/2} \mathbf{j}) dt$ 42. $\int_0^1 (e^{2t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}) dt$

43-46 Resolva o problema de valor inicial vetorial para $\mathbf{y}(t)$ por integração, usando as condições iniciais para determinar as constantes de integração.

43. $\mathbf{y}'(t) = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

44. $\mathbf{y}'(t) = \cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

45. $\mathbf{y}''(t) = \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}, \mathbf{y}(0) = 2\mathbf{i}, \mathbf{y}'(0) = \mathbf{j}$

46. $\mathbf{y}''(t) = 12t^2 \mathbf{i} - 2t \mathbf{j}, \mathbf{y}(0) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{y}'(0) = \mathbf{0}$

47-48 Seja $\theta(t)$ o ângulo entre $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$. Use uma calculadora gráfica para gerar o gráfico de θ versus t e faça uma estimativa grosseira dos valores de t nos quais ocorrem os cortes com o eixo t ou extremos relativos. O que esses valores dizem sobre os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$?

47. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t \mathbf{j}; 0 \leq t \leq 2\pi$

48. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}; 0 \leq t \leq 1$

49. (a) Determine os pontos nos quais a curva

$$\mathbf{r} = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} - 3t \mathbf{k}$$

intersecta o plano $2x - y + z = -2$

(b) Para a curva e o plano da parte (a), determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo que a reta tangente à curva faz com a reta normal ao plano em cada ponto de interseção.

50. Determine em que ponto a reta tangente à curva

$$\mathbf{r} = e^{-2t} \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 3 \operatorname{sen} t \mathbf{k}$$

no ponto $(1, 1, 0)$ intersecta o plano yz .

51-52 Mostre que os gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ intersectam-se no ponto P . Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo entre as retas tangentes aos gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ no ponto P .

51. $\mathbf{r}_1(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2 \mathbf{j} + (5 - t)\mathbf{k}; P(1, 1, 3)$

52. $\mathbf{r}_1(t) = 2e^{-t} \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + (t^2 + 3)\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2(t) = (1 - t)\mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + (t^3 + 4)\mathbf{k}; P(2, 1, 3)$

ENFOCANDO CONCEITOS

53. Use a Fórmula (7) para deduzir a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

54. Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ funções vetoriais diferenciáveis. Use as Fórmulas (6) e (7) para mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})] \\ = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] + \mathbf{u} \cdot \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} \right] + \mathbf{u} \cdot \left[\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right] \end{aligned}$$

55. Sejam $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2$ e w_3 funções diferenciáveis de t . Use o Exercício 54 para mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

56. Prove o Teorema 13.2.6 para o espaço bidimensional.
57. Deduza as Fórmulas (6) e (7) para o espaço tridimensional.
58. Prove o Teorema 13.2.9 para o espaço bidimensional.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.2

1. (a) $9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (b) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ 2. (a) $\mathbf{r}'(t) = 5\mathbf{i} + (1 - 2t)\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{r}'(t) = \left\langle -\frac{1}{t^2}, \sec^2 t, 2e^{2t} \right\rangle$ 3. (a) $\langle 6, 4, 2 \rangle$ (b) $\langle -4, 0, 4 \rangle$
(c) $\mathbf{0}$ (d) -28 4. (a) $\left\langle 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{\pi} \right\rangle$ (b) $\frac{t^2}{2}\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} + \mathbf{C}$

13.3 MUDANÇA DE PARÂMETRO; COMPRIMENTO DE ARCO

Observamos em seções anteriores que uma curva no espaço bi ou tridimensional pode ser representada parametricamente de várias maneiras. Por exemplo, na Seção 1.8 do Volume 1, demos duas representações paramétricas de um círculo – uma na qual o círculo foi traçado no sentido horário e a outra no sentido anti-horário. Algumas vezes, será desejável mudar o parâmetro de curva para um parâmetro diferente que é mais conveniente para o problema em questão. Nesta seção, investigaremos questões associadas a mudanças de parâmetros e mostraremos que o comprimento do arco desempenha um papel especial na representação paramétrica das curvas.

■ PARAMETRIZAÇÕES LISAS

Os gráficos de funções vetoriais variam de contínuos e lisos a descontínuos e altamente erráticos. Neste livro não estaremos preocupados com gráficos do último tipo, logo necessitaremos impor restrições para eliminar o comportamento não-desejado. Diremos que $\mathbf{r}(t)$ é uma **parametrização lisa** ou uma **função lisa** de t se $\mathbf{r}'(t)$ for contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para quaisquer valores admissíveis de t . Algebricamente, isso implica que os componentes de $\mathbf{r}(t)$ têm derivadas contínuas que não são todas nulas para o mesmo valor de t e, geometricamente, implica que o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ varia continuamente ao longo da curva. Por esta razão diz-se que a função parametrização lisa tem um **vetor tangente girando continuamente**.

► **Exemplo 1** Determine se as seguintes funções vetoriais têm vetores tangentes girando continuamente.

- (a) $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$ ($a > 0, c > 0$)
(b) $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$

Solução (a) Temos

$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

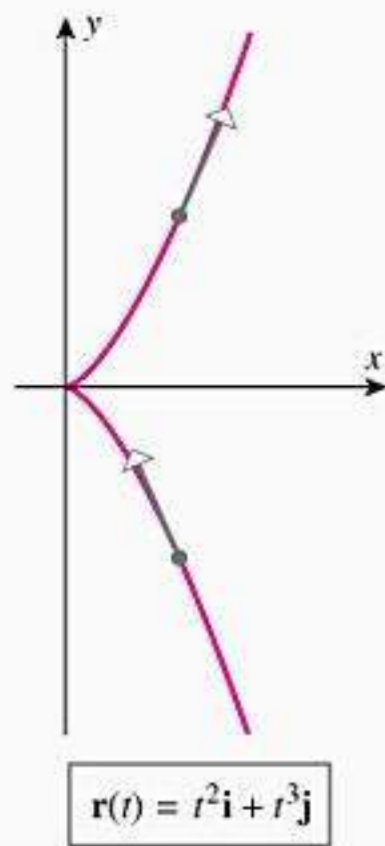


Figura 13.3.1

Os componentes são funções contínuas e não há valores de t para os quais todos os três sejam zero (verifique), logo $\mathbf{r}(t)$ tem um vetor tangente girando continuamente. O gráfico de $\mathbf{r}(t)$ é a hélice circular da Figura 13.1.2.

Solução (b) Temos

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Embora os componentes sejam funções contínuas, elas são ambas iguais a zero em $t = 0$, logo $\mathbf{r}(t)$ não tem um vetor tangente girando continuamente. O gráfico de $\mathbf{r}(t)$, que é mostrado na Figura 13.3.1, é uma parábola semicúbica traçada para cima (veja Exemplo 3 da Seção 11.2). Observe que para os valores de t ligeiramente menores do que zero, o ângulo entre $\mathbf{r}'(t)$ e \mathbf{i} está próximo de π e para valores de t ligeiramente maiores do que zero, o ângulo está próximo de 0; por consequência, há uma súbita reversão do sentido do vetor tangente quando t cresce e passa por $t = 0$. ◀

■ **COMPRIMENTO DE ARCO DO PONTO DE VISTA VETORIAL**

Pelo Teorema 7.4.3 do Volume 1, o comprimento de arco L de uma curva paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{1}$$

é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{2}$$

Analogamente, o comprimento do arco L de uma curva paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{3}$$

no espaço tridimensional é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \tag{4}$$

As Fórmulas (2) e (4) têm formas vetoriais que podem ser obtidas fazendo-se

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Espaço bidimensional

Espaço tridimensional

Segue-se que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

Espaço bidimensional

Espaço tridimensional

e, portanto,

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Espaço bidimensional

Espaço tridimensional

Substituindo essas expressões em (2) e (4) nos leva ao teorema seguinte.

13.3.1 TEOREMA Se C for o gráfico no espaço bi ou tridimensional de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então seu comprimento de arco L de $t = a$ a $t = b$ é

$$L = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt \quad (5)$$

► **Exemplo 2** Determine o comprimento de arco da parte da hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

de $t = 0$ a $t = \pi$.

Solução Seja $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$. Então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

A partir do Teorema 13.3.1, o comprimento de arco da hélice é

$$L = \int_0^\pi \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\pi \quad \blacktriangleleft$$

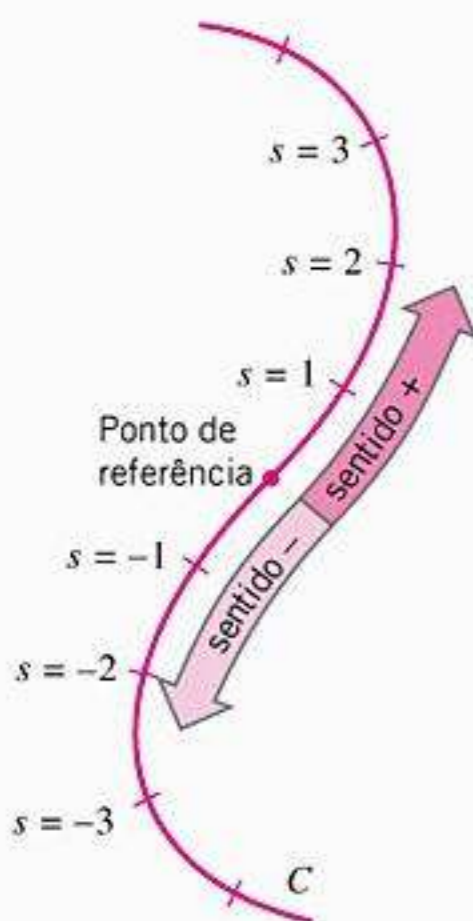


Figura 13.3.2

■ **COMPRIMENTO DE ARCO COMO PARÂMETRO**

Para muitos propósitos, o melhor parâmetro a ser usado para representar parametricamente uma curva no espaço bi ou tridimensional é o comprimento de arco medido ao longo da curva, a partir de algum ponto de referência fixado. Isso pode ser feito como segue:

Usando o Comprimento de Arco como Parâmetro

- Passo 1** Selecione um ponto arbitrário sobre a curva C para servir como um *ponto de referência*.
- Passo 2** Iniciando do ponto de referência, escolhemos um sentido ao longo da curva para o *sentido positivo* e o outro como sendo o *negativo*.
- Passo 3** Se P for um ponto sobre a curva, seja s o comprimento de arco “com sinal” ao longo de C a partir do ponto de referência ao ponto P , onde s é positivo se P estiver no sentido positivo do ponto de referência, e s é negativo se P estiver no sentido negativo. A Figura 13.3.2 ilustra essa idéia.

Por este procedimento, dado um valor de s , é determinado um único ponto P sobre a curva. Por exemplo, $s = 2$ determina o ponto que está 2 unidades ao longo da curva no sentido positivo do ponto de referência e $s = -\frac{3}{2}$ determina o ponto que está $\frac{3}{2}$ unidades ao longo da curva no sentido negativo do ponto de referência.

Vamos, agora, tratar s como uma variável. Quando o valor de s varia, o ponto correspondente P move-se ao longo de C e as coordenadas de P tornam-se funções de s . Assim, no espaço bidimensional as coordenadas de P são $(x(s), y(s))$ e no espaço tridimensional elas são $(x(s), y(s), z(s))$. Portanto, no espaço bi ou tridimensional, a curva C é dada pelas equações paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \text{ou} \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

Uma representação paramétrica de uma curva com comprimento de arco como o parâmetro é chamada uma *parametrização por comprimento de arco* da curva. Note que uma curva dada terá geralmente infinitas maneiras diferentes de parametrizações por comprimento de arco, uma vez que o ponto de referência e a orientação podem ser escolhidos arbitrariamente.

► **Exemplo 3** Obtenha a parametrização por comprimento de arco do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ com orientação no sentido anti-horário e $(a, 0)$ como ponto de referência.

Solução O círculo com a orientação no sentido anti-horário pode ser representado pelas equações paramétricas

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{6}$$

nas quais t pode ser interpretado como o ângulo medido em radianos desde o eixo x positivo até o raio da origem para o ponto $P(x, y)$ (Figura 13.3.3). Se tomarmos o sentido positivo para medir o comprimento de arco como sendo o anti-horário e tomarmos $(a, 0)$ como sendo o ponto de referência, então s e t estão relacionadas por

$$s = at \quad \text{ou} \quad t = s/a$$

Fazendo essa mudança de variável em (6) e notando que s cresce de 0 a $2\pi a$ quando t cresce de 0 a 2π , obtém-se a seguinte parametrização por comprimento do arco do círculo:

$$x = a \cos(s/a), \quad y = a \sin(s/a) \quad (0 \leq s \leq 2\pi a) \quad \blacktriangleleft$$

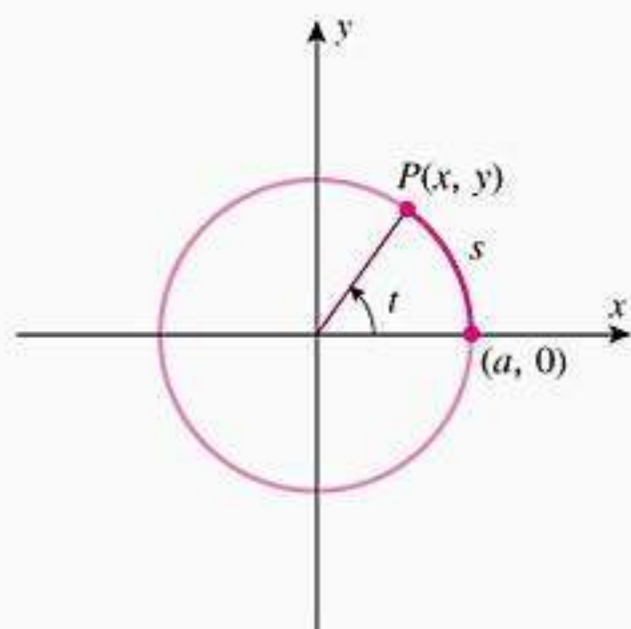


Figura 13.3.3

■ **MUDANÇA DE PARÂMETRO**

Em muitas situações, a solução de um problema pode ser simplificada pela escolha certa do parâmetro da função vetorial ou da curva paramétrica. Os dois parâmetros mais comuns para as curvas no espaço bi ou tridimensional são o tempo e o comprimento do arco. Contudo, há outras possibilidades convenientes úteis. Por exemplo, analisando o movimento de uma partícula no espaço bidimensional, é freqüentemente desejável parametrizar a sua trajetória em termos do ângulo ϕ entre o vetor tangente e o eixo x positivo (Figura 13.3.4). Assim, nosso próximo objetivo é desenvolver métodos para mudar o parâmetro em uma função vetorial ou curva parametrizada. Isso nos permitirá mover livremente entre diferentes parametrizações possíveis.

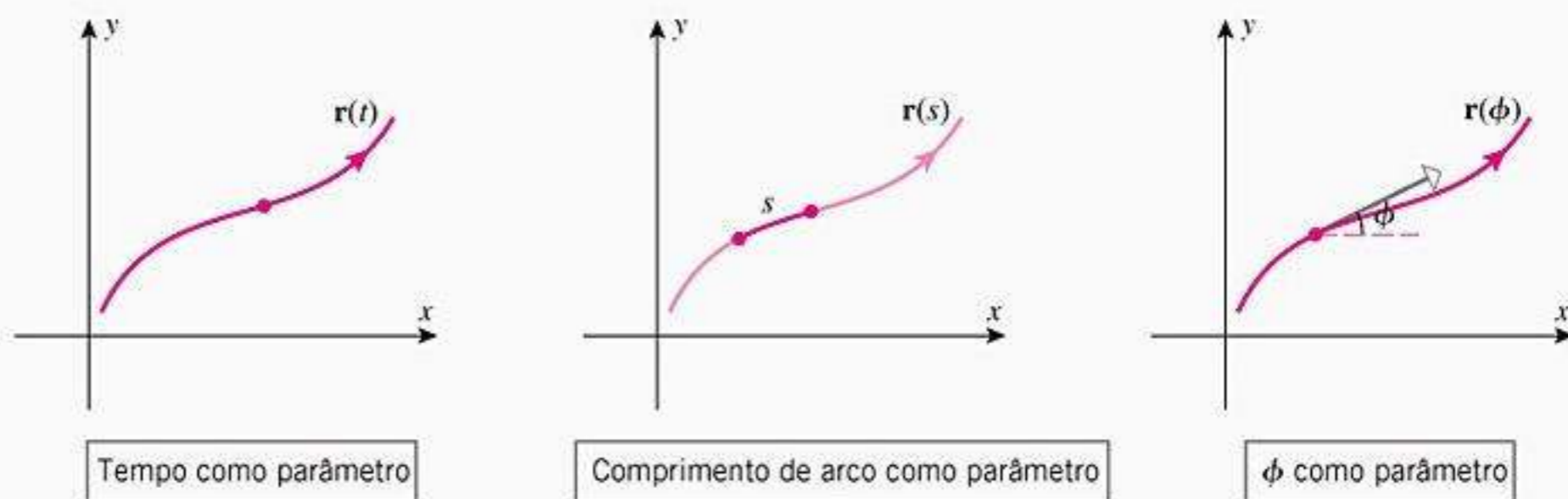


Figura 13.3.4

Uma **mudança de parâmetro** em uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é uma substituição $t = g(\tau)$ que produz uma nova função a valores vetoriais $\mathbf{r}(g(\tau))$ tendo o mesmo gráfico que $\mathbf{r}(t)$, mas possivelmente traçado diferentemente quando o parâmetro τ cresce.

► **Exemplo 4** Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

de modo que

- (a) o círculo seja traçado no sentido anti-horário quando τ cresce ao longo do intervalo $[0, 1]$;
- (b) o círculo seja traçado no sentido horário quando τ cresce ao longo do intervalo $[0, 1]$.

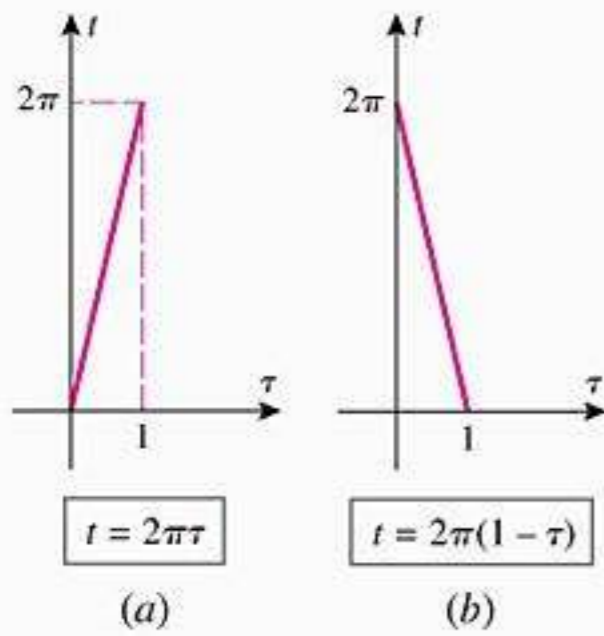


Figura 13.3.5

Solução (a) O círculo dado é traçado no sentido anti-horário quando t cresce. Assim, se escolhermos g como sendo uma função crescente, então da relação $t = g(\tau)$ resultará que t cresce quando τ cresce, portanto assegurando que o círculo seja traçado no sentido anti-horário quando τ cresce. Precisaremos, também, escolher g de modo que t cresça de 0 a 2π quando τ crescer de 0 a 1. Uma escolha simples de g que satisfaz todos esses critérios é a função linear cujo gráfico está na Figura 13.3.5a. A equação dessa reta é

$$t = g(\tau) = 2\pi\tau \tag{7}$$

que é a mudança de parâmetro desejada. A representação do círculo resultante em termos do parâmetro τ é

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos 2\pi\tau \mathbf{i} + \sin 2\pi\tau \mathbf{j} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

Solução (b) Para garantir que o círculo seja traçado no sentido horário, escolheremos g como sendo uma função decrescente tal que t decresça de 2π a 0 quando τ crescer de 0 a 1. Uma escolha simples de g que realiza isso é a função linear

$$t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau) \tag{8}$$

cujo gráfico está na Figura 13.3.5b. A representação do círculo resultante em termos do parâmetro τ é

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos(2\pi(1 - \tau))\mathbf{i} + \sin(2\pi(1 - \tau))\mathbf{j} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

que simplifica para (verifique)

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos 2\pi\tau \mathbf{i} - \sin 2\pi\tau \mathbf{j} \quad (0 \leq \tau \leq 1) \blacktriangleleft$$

Ao fazer uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ em uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, será importante assegurar que a nova função a valores vetoriais $\mathbf{r}(g(\tau))$ seja lisa se $\mathbf{r}(t)$ for lisa. Para estabelecer condições sob as quais isso acontece, necessitaremos a seguinte versão da regra da cadeia para funções vetoriais. A prova é deixada como exercício.

Mais precisamente, como $d\mathbf{r}/dt$ é um vetor e $dt/d\tau$ é um escalar, deveríamos escrever a Fórmula (9) na forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

No entanto, trocar a ordem dos fatores faz com que a fórmula seja mais fácil de ser lembrada, motivo pelo qual continuamos a usá-la assim.

13.3.2 TEOREMA (Regra da Cadeia) Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional que é diferenciável em relação a t . Se $t = g(\tau)$ for uma mudança de parâmetro em que g é diferenciável em relação a τ , então $\mathbf{r}(g(\tau))$ é diferenciável em relação a τ e

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \tag{9}$$

Uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ na qual $\mathbf{r}(g(\tau))$ é lisa se $\mathbf{r}(t)$ for lisa é chamada de **mudança de parâmetro lisa**. Segue de (9) que $t = g(\tau)$ será uma mudança de parâmetro lisa se $dt/d\tau$ for contínua e $dt/d\tau \neq 0$ para todos os valores de τ , uma vez que essas condições implicam que $d\mathbf{r}/d\tau$ é contínua e não-nula se $d\mathbf{r}/dt$ for contínua e não-nula. Mudanças de parâmetro lisas caem dentro de duas categorias – aquela para as quais $dt/d\tau > 0$ para todo τ (chamadas de **mudanças de parâmetro positivas**) e aquelas para as quais $dt/d\tau < 0$ para todo τ (chamadas de **mudanças de parâmetro negativas**). Uma mudança de parâmetro positiva preserva a orientação de uma curva paramétrica e uma mudança de parâmetro negativa inverte-a.

► **Exemplo 5** No Exemplo 4 a mudança de parâmetro dada na Fórmula (7) é positiva, uma vez que $dt/d\tau = 2\pi > 0$, e a mudança de parâmetro dada na Fórmula (8) é negativa, uma vez que $dt/d\tau = -2\pi < 0$. A mudança de parâmetro positiva preservou a orientação do círculo, e a mudança de parâmetro negativa inverteu-a. ◀

■ ENCONTRANDO PARAMETRIZAÇÕES POR COMPRIMENTO DE ARCO

A seguir, consideraremos o problema de encontrar uma parametrização por comprimento de arco de uma função vetorial expressa, inicialmente, em termos de algum outro parâmetro t . O teorema a seguir fornecerá um método geral para fazer isso.

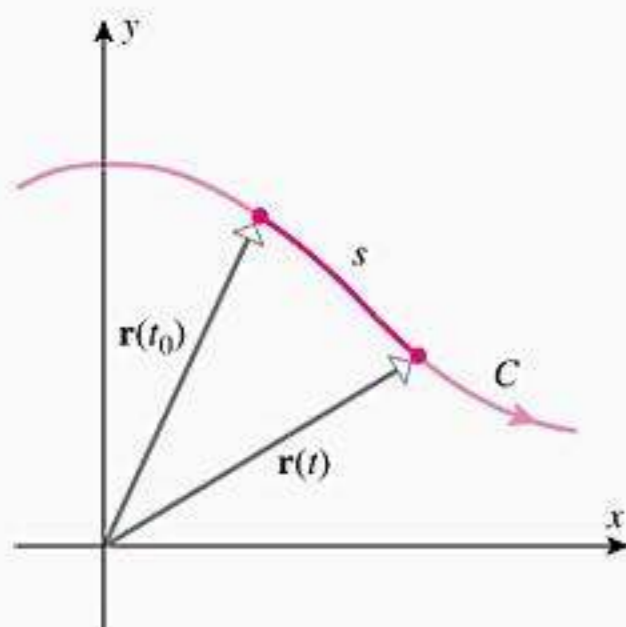


Figura 13.3.6

13.3.3 TEOREMA Seja C o gráfico de uma função vetorial lise $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional, e seja $\mathbf{r}(t_0)$ um ponto qualquer de C . Então, a seguinte fórmula define uma mudança de parâmetro positiva de t para s , onde s é um parâmetro comprimento de arco tendo $\mathbf{r}(t_0)$ como seu ponto de referência (Figura 13.3.6):

$$s = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du \tag{10}$$

DEMONSTRAÇÃO A partir de (5) com u como a variável de integração em vez de t , a integral representa o comprimento de arco daquela parte de C entre $\mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{r}(t)$ se $t > t_0$ e o negativo do comprimento de arco se $t < t_0$. Assim, s é o parâmetro comprimento do arco com $\mathbf{r}(t_0)$ como seu ponto de referência e seu sentido positivo na direção de t crescente. ■

Quando necessário, a Fórmula (10) pode ser expressa na forma de componentes como

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du \quad \text{Espaço bidimensional} \tag{11}$$

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du \quad \text{Espaço tridimensional} \tag{12}$$

► **Exemplo 6** Determine a parametrização por comprimento de arco da hélice circular

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \tag{13}$$

que tem como ponto de referência $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ e a mesma orientação que a hélice dada.

Solução Substituindo t por u em \mathbf{r} para a integração e tomando $t_0 = 0$ na Fórmula (10), obtemos

$$\mathbf{r} = \cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = (-\sin u) \mathbf{i} + \cos u \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| = \sqrt{(-\sin u)^2 + \cos^2 u + 1} = \sqrt{2}$$

$$s = \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}u \Big|_0^t = \sqrt{2}t$$

Assim, $t = s/\sqrt{2}$, logo (13) pode ser reparametrizado em termos de s como

$$\mathbf{r} = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{i} + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Podemos ter certeza que esta reparametrização preserva a orientação da hélice uma vez que a Fórmula (10) produz uma mudança de parâmetro positiva. ◀

► **Exemplo 7** Um besouro, iniciando no ponto de referência $(1, 0, 0)$ da hélice do Exemplo 6, sobe pela hélice por uma distância de 10 unidades. Quais são as coordenadas finais do besouro?

Solução A partir do Exemplo 6, a parametrização por comprimento de arco da hélice relativa ao ponto de referência $(1, 0, 0)$ é

$$\mathbf{r} = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

ou, expressa parametricamente,

$$x = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad y = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Assim, em $s = 10$ as coordenadas são

$$\left(\cos\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right), \frac{10}{\sqrt{2}}\right) \approx (0,705; 0,709; 7,07) \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 8** Lembre-se da Fórmula (9) da Seção 12.5, que a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (14)$$

é a forma vetorial da reta que passa pelo ponto terminal de \mathbf{r}_0 e é paralela ao vetor \mathbf{v} . Determine a parametrização por comprimento de arco da reta que tem como ponto de referência \mathbf{r}_0 e a mesma orientação que a reta dada.

Solução Substituindo t por u em (14) para a integração e tomando $t_0 = 0$ na Fórmula (10), obtemos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{v} \quad \boxed{\text{Pois } \mathbf{r}_0 \text{ é constante}}$$

Segue que

$$s = \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du = \int_0^t \|\mathbf{v}\| du = \|\mathbf{v}\|u \Big|_0^t = t\|\mathbf{v}\|$$

Isso implica que $t = s/\|\mathbf{v}\|$, logo (14) pode ser reparametrizada em termos de s como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) \quad \blacktriangleleft \quad (15)$$

Em palavras, a Fórmula (15) nos diz que a reta representada pela Equação (14) pode ser parametrizada em termos do comprimento de arco com ponto de referência \mathbf{r}_0 normalizando \mathbf{v} e, então, substituindo t por s .

► **Exemplo 9** Determine a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2$$

que tem a mesma orientação que a reta dada e usa $(1, -2)$ como ponto de referência.

Solução A reta passa pelo ponto $(1, -2)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Para determinar a parametrização por comprimento de arco da reta, precisamos apenas reescrever a equação dada usando $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ em vez de \mathbf{v} para determinar a direção e sentido e substituir t por s . Como

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

temos que as equações paramétricas da reta em termos de s são

$$x = \frac{2}{\sqrt{13}}s + 1, \quad y = \frac{3}{\sqrt{13}}s - 2 \quad \blacktriangleleft$$

■ PROPRIEDADES DAS PARAMETRIZAÇÕES POR COMPRIMENTO DE ARCO

Como os diversos parâmetros comprimento de arco para uma curva C estão intimamente relacionados às características geométricas de C , a parametrização por comprimento do arco tem propriedades não oferecidas pelas outras parametrizações. Por exemplo, o teorema seguinte mostra que se uma curva lisa for representada parametricamente usando um parâmetro comprimento de arco, então todos os vetores tangentes têm comprimento 1.

13.3.4 TEOREMA

(a) Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional, onde t é um parâmetro geral, e se s for o parâmetro comprimento de arco para C definido pela Fórmula (10), então para todos os valores de t o vetor tangente tem comprimento

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \frac{ds}{dt} \quad (16)$$

(b) Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ no espaço bi ou tridimensional, onde s é um parâmetro comprimento de arco, então para todo valor de s o vetor tangente a C tem comprimento

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1 \quad (17)$$

(c) Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional e se $\|d\mathbf{r}/dt\| = 1$ para cada valor de t , então para qualquer valor de t_0 no domínio de \mathbf{r} , o parâmetro $s = t - t_0$ é um parâmetro comprimento de arco que tem seu ponto de referência no ponto de C em que $t = t_0$.

DEMONSTRAÇÃO (a) Esse resultado segue aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 6.6.3 do Volume 1) à Fórmula (10).

DEMONSTRAÇÃO (b) Tome $t = s$ na parte (a).

DEMONSTRAÇÃO (c) Segue do Teorema 13.3.3 que a fórmula

$$s = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du$$

define um parâmetro comprimento de arco para C com ponto de referência $\mathbf{r}(0)$. Contudo, $\|d\mathbf{r}/du\| = 1$ por hipótese, logo podemos reescrever a fórmula para s como

$$s = \int_{t_0}^t du = u \Big|_{t_0}^t = t - t_0 \quad \blacksquare$$

As formas em componentes das Fórmulas (16) e (17) serão de interesse suficiente em seções posteriores para que as listemos aqui para referência:

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{Espaço bidimensional} \quad (18)$$

Note que as Fórmulas (18) e (19) não envolvem t_0 e portanto não dependem de onde for escolhido o ponto de referência para s . Isso é de se esperar, uma vez que mudando o ponto de referência deslocamos s por uma constante (o comprimento de arco entre os dois pontos de referência), e esta constante desaparece na diferenciação.

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \text{aç tri imen i na} \quad 19$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = 1 \quad \text{aç bi imen i na} \quad 20$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 \quad \text{aç tri imen i na} \quad 21$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.3 (Ver página 886 para respostas.)

1. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, então a integral

$$\int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$$

representa a geometria com _____

2. Se $\mathbf{r}(s)$ for uma função vetorial parametrizada com comprimento de arco s , então

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \underline{\hspace{2cm}}$$

o comprimento de arco gráfico era no intervalo $a \leq s \leq b$ é _____

3. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, então o comprimento de arco s , com $\mathbf{r}(t_0)$ como ponto de referência, é definido e a integral

$$s = \int_{t_0}^t \underline{\hspace{2cm}} du$$

4. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial e t com $\mathbf{r}'(1) = \langle \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1 \rangle$ e seja $\mathbf{r}_1(t)$ definida pela equação $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(2c - t)$. Então $\mathbf{r}'_1(\pi/3) = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 13.3

1-4 Determine se $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial parametrizada

1. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 3t^2 - 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(t) = c - t^2\mathbf{i} + \ln t^2\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(t) = te^{-t}\mathbf{i} + t^2 - 2t\mathbf{j} + c - \pi t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = \ln \pi t\mathbf{i} + 2t - nt\mathbf{j} + t^2 - t\mathbf{k}$

5-8 Encontre o comprimento de arco da curva paramétrica

5. $x = c - 3t, y = \ln^3 t, z = 2; 0 \leq t \leq \pi/2$
6. $x = 3c - t, y = 3 \ln t, z = 4t; 0 \leq t \leq \pi$
7. $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t; 0 \leq t \leq 1$
8. $x = \frac{1}{2}t, y = \frac{1}{3}(1 - t)^{3/2}, z = \frac{1}{3}(1 + t)^{3/2}; -1 \leq t \leq 1$

9-12 Encontre o comprimento de arco gráfico de $\mathbf{r}(t)$

9. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2}\mathbf{k}; 1 \leq t \leq 3$
10. $\mathbf{r}(t) = 4 + 3t\mathbf{i} + 2 - 2t\mathbf{j} + 5 + t\mathbf{k}; 3 \leq t \leq 4$
11. $\mathbf{r}(t) = 3c - t\mathbf{i} + 3 \ln t\mathbf{j} + t\mathbf{k}; 0 \leq t \leq 2\pi$
12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (c - t + t \ln t)\mathbf{j} + (\ln t - t c - t)\mathbf{k}; 0 \leq t \leq \pi$

13-16 Use a regra da cadeia e a regra do produto para encontrar o vetor tangente em termos de t e e em

13. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; t = 4t + 1$
14. $\mathbf{r} = (3c - t, 3 \ln t); t = \pi t$
15. $\mathbf{r} = e\mathbf{i} + 4e^{-t}\mathbf{j}; t = t^2$
16. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3t^{3/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}; t = 1/t$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. figura a seguir mostra o gráfico da hipociclóide de quatro cúspides

$$\mathbf{r}(t) = c - 3t\mathbf{i} + \ln^3 t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

- a. Dê uma equação paramétrica para $\mathbf{r}(t)$ que não seja a dada.
- b. Verifique que $\mathbf{r}(t)$ não é a mesma curva que $\mathbf{r}'(t)$.

18. figura a seguir mostra o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \ln^2 t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Verifique que a curva paramétrica não é a mesma que $\mathbf{r}'(t)$. Dê uma equação paramétrica para $\mathbf{r}'(t)$.

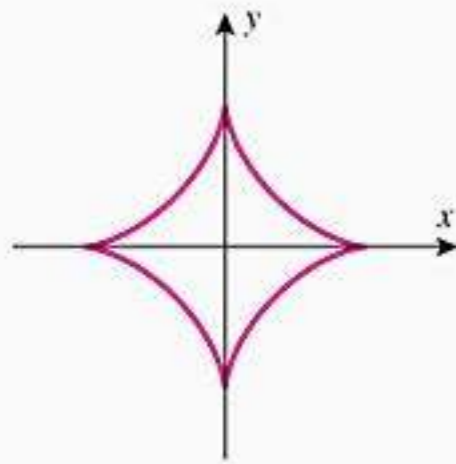


Figura Ex-17

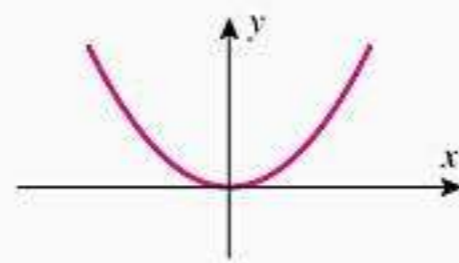


Figura Ex-18

19. a) obtenha a parametrização r c m riment e arc a reta
 $x = t, y = t$
 ue tenha a me ma riantaçã ue a reta a a e nt e re erência 0, 0
- b) obtenha a parametrizaçã r c m riment e arc a reta
 $x = t, y = t, z = t$
 ue tenha a me ma riantaçã ue a reta a a e nt e re erência 0, 0, 0
20. obtenha a parametrizaçõe r c m riment e arc a reta. Exercíci 19 ue tenha nt e re erência menci na , ma riantaçõe ta à a reta a a
21. a) obtenha a parametrizaçã r c m riment e arc a reta
 $x = 1 + t, y = 3 - 2t, z = 4 + 2t$
 ue tenha a me ma riantaçã ue a reta a a e nt e re erência 1, 3, 4
- b) e a e uaçõe aramétrica bti a na arte a ara eterminar nt bre a reta ue e te a a 25 uni a e nt e re erência na ireçã arâmetr cre cente
22. a) obtenha a parametrizaçã r c m riment e arc a reta
 $x = -5 + 3t, y = 2t, z = 5 + t$
 ue tenha a me ma riantaçã ue a reta a a e nt e re erência -5, 0, 5
- b) e a e uaçõe aramétrica bti a na arte a ara eterminar nt bre a reta ue e te a a 10 uni a e nt e re erência na ireçã arâmetr cre cente

23-28 obtenha a parametrizaçã r c m riment arc a cur a ue tenha a me ma riantaçã ue a cur a a a e $t = 0$ c m nt e re erência

23. $\mathbf{r}(t) = 3 + c t \mathbf{i} + 2 + e t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
24. $\mathbf{r}(t) = c^3 t \mathbf{i} + e n^3 t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
25. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3} t^3 \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{j}; t \geq 0$
26. $\mathbf{r}(t) = 1 + t^2 \mathbf{i} + 1 + t^3 \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$
27. $\mathbf{r}(t) = e^t c t \mathbf{i} + e^t e n t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
28. $\mathbf{r}(t) = e n e^t \mathbf{i} + c e^t \mathbf{j} + \sqrt{3} e^t \mathbf{k}; t \geq 0$
29. tre ue c m riment e arc a hé ice circu ar $x = a c t, y = a e n t, z = c t$ ara $0 \leq t \leq t_0$ é $t_0 \sqrt{a^2 + c^2}$.

30. e re u ta. Exercíci 29 ara m trar ue a hé ice circu ar

$$\mathbf{r} = a c t \mathbf{i} + a e n t \mathbf{j} + c t \mathbf{k}$$

e e re re a c m

$$\mathbf{r} = \left(a c \frac{s}{w} \right) \mathbf{i} + \left(a e n \frac{s}{w} \right) \mathbf{j} + \frac{c s}{w} \mathbf{k}$$

n e $w = \sqrt{a^2 + c^2}$ e s é um arâmetr c m riment e arc c m nt e re erência em $a, 0, 0$

31. Determine uma arametizaçã r c m riment e arc a ci c ói e

$$\begin{aligned} x &= a t - a e n t \\ y &= a - a c t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

c m 0, 0 c m nt e re erência

32. tre ue, em c r ena a ci ín rica, uma cur a a a e a e uaçõe aramétrica $r = r t, \theta = \theta t, z = z t$ ara $a \leq t \leq b$ tem c m riment e arc

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

[Sugestão: ue a re açõe $x = r c \theta, y = r e n \theta$]

33. Em ca a arte, ue a órmu a Exercíci 32 ara eterminar c m riment e arc a cur a

a) $r = e^{2t}, \theta = t, z = e^{2t}; 0 \leq t \leq \ln 2$

b) $r = t^2, \theta = n t, z = \frac{1}{3} t^3; 1 \leq t \leq 2$

34. tre ue, em c r ena a e érica, uma cur a a a e a e uaçõe aramétrica $\rho = \rho t, \theta = \theta t, \phi = \phi t$ ara $a \leq t \leq b$ tem c m riment e arc

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 e n^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt$$

[Sugestão: $x = \rho e n \phi c \theta, y = \rho e n \phi e n \theta, z = \rho c \phi$]

35. Em ca a arte, ue a órmu a Exercíci 34 ara eterminar c m riment e arc a cur a

a) $\rho = e^{-t}, \theta = 2t, \phi = \pi/4 \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\rho = 2t, \theta = n t, \phi = \pi t \quad 1 \leq t \leq 5$

ENFOCANDO CONCEITOS

36. a) tre ue $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$ é uma unçã et ria i a, ma a mu ança e arâmetr $t = \tau^3$ r uz uma unçã et ria ue nã é i a, emb ra tenha me m gráfico ue $\mathbf{r}(t)$
- b) erifi ue c m a ua unçõe et riai ã traça a e c m e e re éica a a cau a r b ema

37. Determine uma mu ança e arâmetr $t = g \tau$ ara emi círcu

$$\mathbf{r}(t) = c t \mathbf{i} + e n t \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

ta ue

- a) emicírcu e a traça n enti anti h rári uan τ aria n inter a $[0, 1]$
- b) emicírcu e a traça n enti h rári uan τ aria n inter a $[0, 1]$

38. Qual a função $r(t)$ parametrizada por $t = g \tau$ e em qual direção traçar o gráfico $r(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ no eixo t com τ variando de 0 a 1.
39. No primeiro traço na figura abaixo, um cabo de aço com diâmetro $\frac{1}{2}$ polegada e comprimento 20 polegadas é enrolado em um cilindro com raio 12 polegadas e diâmetro 24 polegadas. Qual é o comprimento do cabo em uma única volta completa em torno do cilindro?

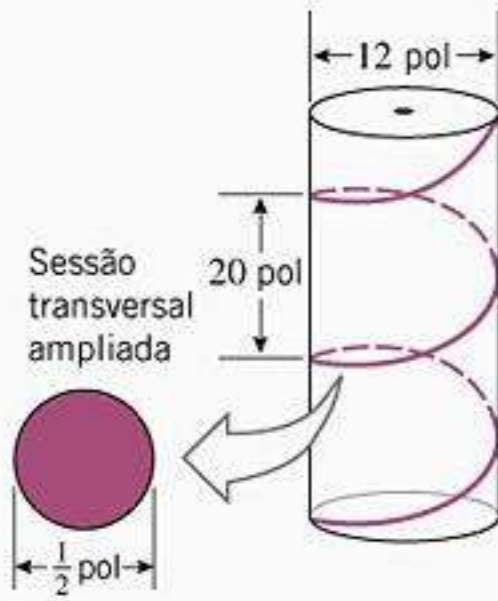


Figura Ex-39

40. Se $x = c t, y = e t, z = t^{3/2}$ determine
- a $\|r'(t)\|$ b $\frac{ds}{dt}$ c $\int_0^2 \|r'(t)\| dt$.
41. Se $r(t) = n t i + 2 t j + t^2 k$ determine
- a $\|r'(t)\|$ b $\frac{ds}{dt}$ c $\int_1^3 \|r'(t)\| dt$.
42. Prove: Se $r(t)$ é uma função parametrizada a i a, então o ângulo entre $r'(t)$ e o eixo i, j e k é uma função contínua de t .
43. Prove a regra da cadeia para a derivada de $\|r(t)\|$ em termos de $r(t)$ e $r'(t)$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.3

1. comprimento e arco gráfico $r(t) = a t i + b t j$ 2. $|b - a|$ 3. $\left\| \frac{dr}{du} \right\|$ 4. $\langle -3, 3, \sqrt{3} \rangle$

13.4 VETORES TANGENTE, NORMAL E BINORMAL UNITÁRIOS

Nesta seção, discutiremos algumas das propriedades geométricas fundamentais de funções vetoriais. Nosso trabalho, aqui, terá aplicações importantes no estudo do movimento ao longo de uma trajetória curvilínea no espaço bi ou tridimensional e no estudo das propriedades geométricas de curvas e superfícies.

■ VETOR TANGENTE UNITÁRIO

Se C é o gráfico de uma função vetorial lisa $r(t)$ em um intervalo I , então $r'(t)$ é não nulo, tangente a C e a $r'(t)$ é um vetor tangente unitário.

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \tag{1}$$

que é tangente a C e a $r'(t)$ é um vetor tangente unitário a C em t .

A menos de menção explícita em contrário, vamos supor que $T(t)$ está posicionado com seu ponto inicial no ponto final de $r(t)$, como na Figura 13.4.1. Isso assegura que $T(t)$ é realmente tangente ao gráfico de $r(t)$ e não simplesmente paralelo à reta tangente.

► **Exemplo 1** Encontre o vetor tangente unitário ao gráfico $r(t) = t^2 i + t^3 j$ no instante $t = 2$.

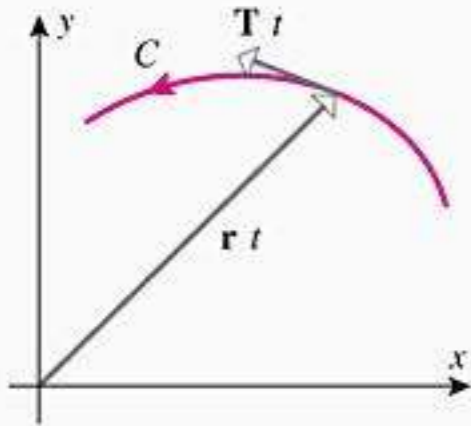


Figura 13.4.1

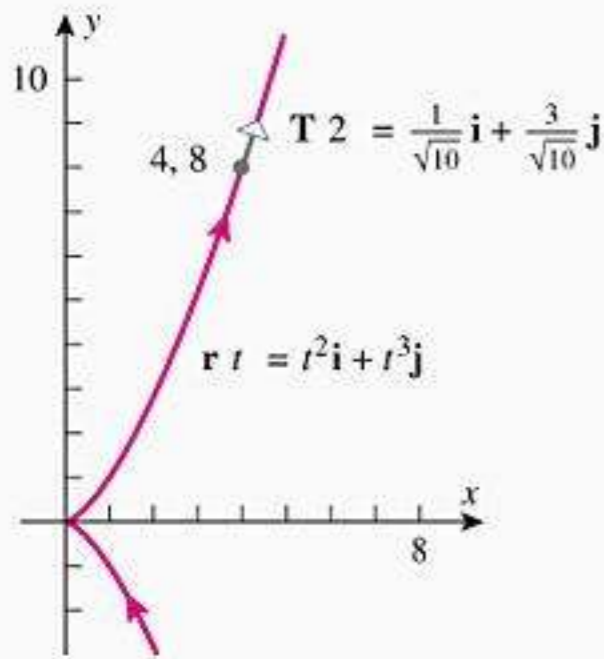


Figura 13.4.2

Solução m

$$r'(t) = 2ti + 3t^2j$$

tem

$$T(2) = \frac{r'(2)}{\|r'(2)\|} = \frac{4i + 12j}{\sqrt{160}} = \frac{4i + 12j}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}i + \frac{3}{\sqrt{10}}j$$

gráfico e r t e et r T 2 ã m tra na Figura 13 4 2 ◀

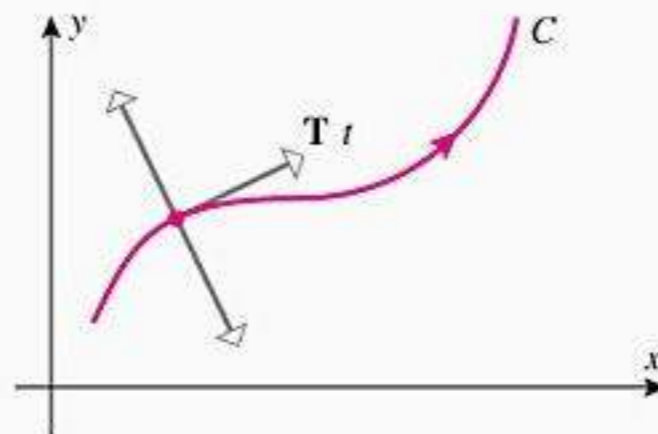
■ **VETOR NORMAL UNITÁRIO**

im n e rema 13 2 8 ue e uma unçã et ria r t ti er n rma c n tante, entã r t e r'(t) ã et re rt g nai Em articu ar, T t tem n rma c n tante 1, g T t e T'(t) ã et re rt g nai im ica ue T'(t) é er en icu ar à reta tangente a C em t, rtant izem ue T'(t) é *normal* a C em t Segue ue e T'(t) ≠ 0 e en rma izar m T'(t), entã bterem um et r unitári

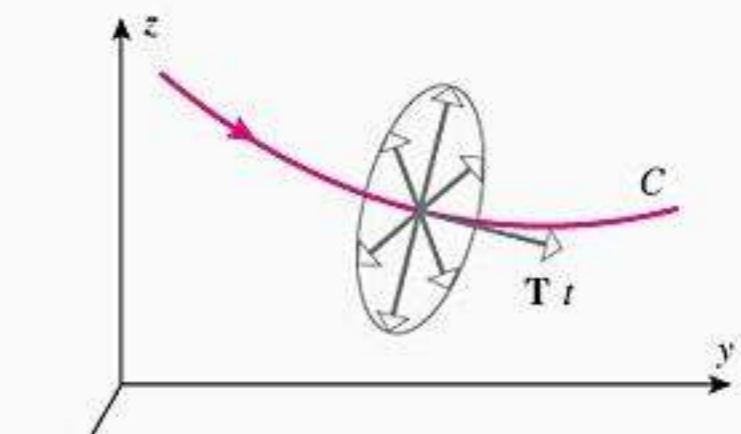
$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \quad 2$$

ue é n rma a C e a nta na me ma ireçã e enti ue T'(t) hamam N t *vetor normal unitário principal* a C em t u, mai im e mente, *vetor normal unitário* b er e ue et r n rma unitári mente e tá efini n nt n e T'(t) ≠ 0 men e mençã e ícita em c ntrári , am u r ue e ta c n içã e tá ati eita Em articu ar, i *exclui* reta

No espaço bidimensional, há dois vetores unitários que são ortogonais a T t e no espaço tridimensional há uma infinidade de tais vetores (Figura 13.4.3). Em ambos os casos, o normal unitário principal é aquele normal particular que aponta na direção e sentido de T'(t). Após o exemplo a seguir, mostraremos que, para uma curva paramétrica não-linear no espaço bidimensional, o normal unitário principal é aquele que aponta "para dentro", ou seja, para o lado côncavo da curva.



Há dois vetores unitários ortogonais a T t



Há uma infinidade de vetores unitários ortogonais a T t

Figura 13.4.3

► **Exemplo 2** btenha T t e N t ara a hé ice circu ar

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct$$

n e a > 0

Solução et r içã a hé ice é

$$r(t) = a \cos t i + a \sin t j + ct k$$

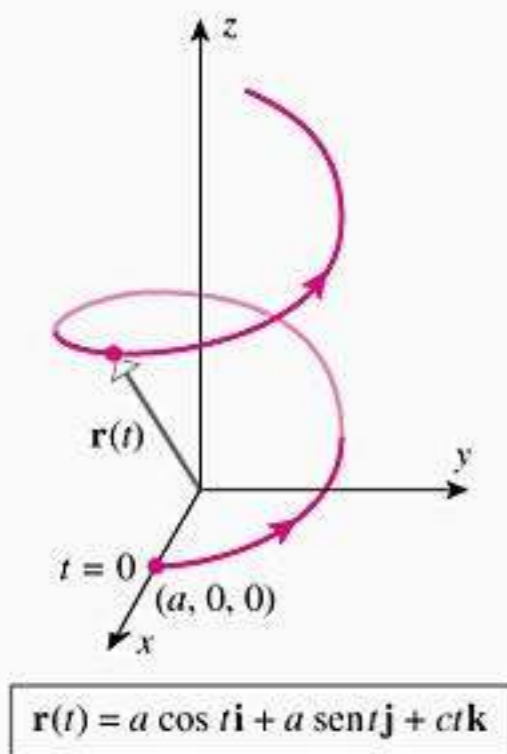


Figura 13.4.4

(Figura 13.4.4). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-a \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + c\mathbf{k} \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2} \\ \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{i} + \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{k} \\ \mathbf{T}'(t) &= -\frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{i} - \frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{j} \\ \|\mathbf{T}'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)^2 + \left(-\frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} = -(\cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}) \end{aligned}$$

Observe que o componente \mathbf{k} do normal unitário principal $\mathbf{N}(t)$ é zero para cada valor de t , portanto esse vetor sempre está num plano horizontal, conforme ilustra a Figura 13.4.5. Deixamos como exercício mostrar que esse vetor realmente sempre aponta para o eixo z .

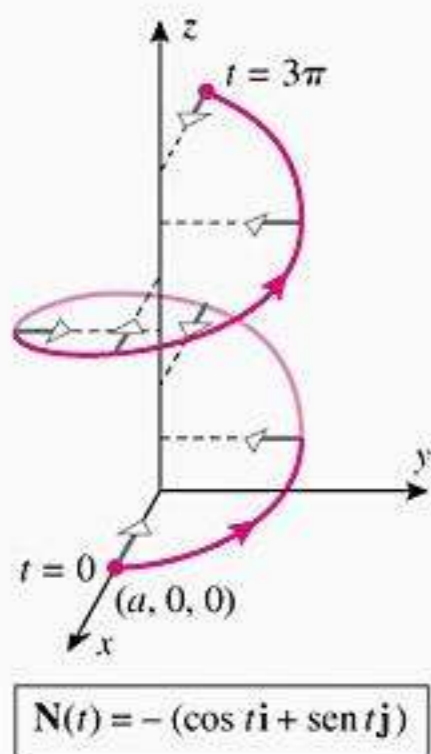


Figura 13.4.5

■ VETORES NORMAIS UNITÁRIOS PARA DENTRO NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Nosso próximo objetivo é mostrar que, para uma curva paramétrica não-linear C no espaço bidimensional, o vetor normal unitário sempre aponta para o lado côncavo de C . Para isso, seja $\phi(t)$ o ângulo do eixo x positivo a $\mathbf{T}(t)$ e seja $\mathbf{n}(t)$ o vetor unitário que resulta quando $\mathbf{T}(t)$ é girado no sentido anti-horário por um ângulo $\pi/2$ (Figura 13.4.6). Como $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$ são vetores unitários, segue da Fórmula (12) da Seção 12.2 que esses vetores podem ser expressos como

$$\mathbf{T}(t) = \cos \phi(t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi(t)\mathbf{j} \tag{3}$$

e

$$\mathbf{n}(t) = \cos[\phi(t) + \pi/2]\mathbf{i} + \operatorname{sen}[\phi(t) + \pi/2]\mathbf{j} = -\operatorname{sen} \phi(t)\mathbf{i} + \cos \phi(t)\mathbf{j} \tag{4}$$

Observe que em intervalos nos quais $\phi(t)$ é crescente, o vetor $\mathbf{n}(t)$ aponta para o lado côncavo de C , e nos intervalos nos quais $\phi(t)$ decresce ele aponta para o lado oposto ao côncavo (Figura 13.4.7).

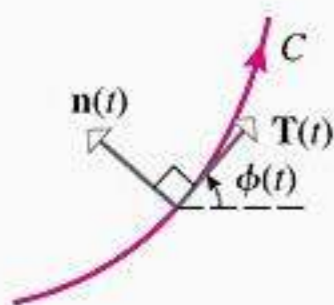


Figura 13.4.6

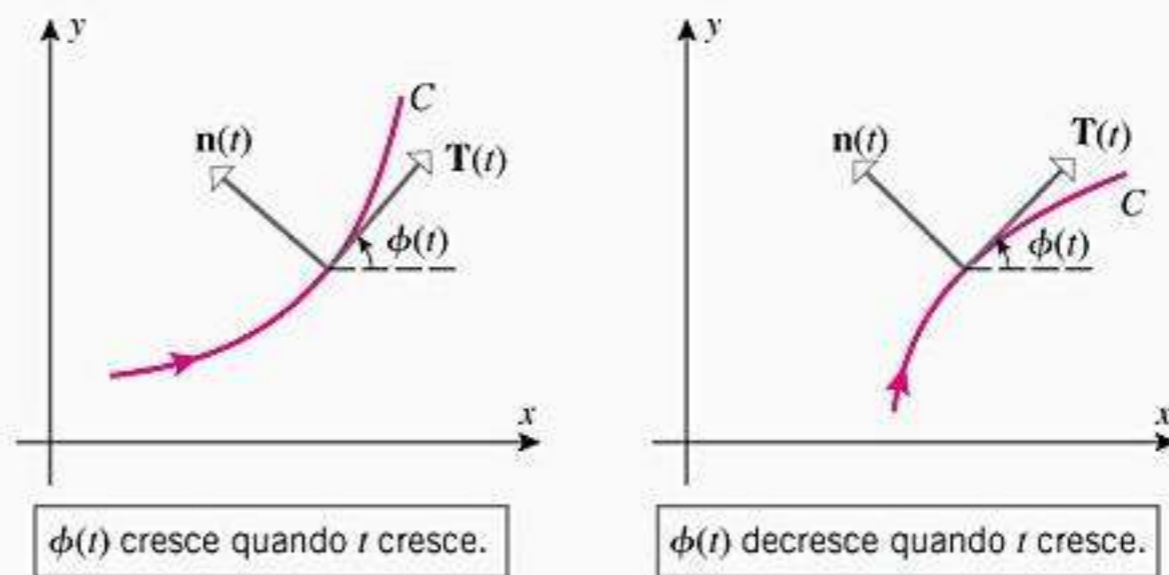


Figura 13.4.7

Agora, diferenciamos $\mathbf{T}(t)$ usando a Fórmula (3) e aplicando a regra da cadeia. Disso resulta

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = [(-\operatorname{sen} \phi)\mathbf{i} + (\cos \phi)\mathbf{j}] \frac{d\phi}{dt}$$

e assim, a partir de (4),

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{n}(t) \frac{d\phi}{dt} \tag{5}$$

Mas, $d\phi/dt > 0$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é crescente e $d\phi/dt < 0$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é decrescente. Desse modo, tem-se a partir de (5) que $d\mathbf{T}/dt$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{n}(t)$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é crescente, mas sentido oposto nos intervalos em que $\phi(t)$ é decrescente. Conseqüentemente, $\mathbf{T}'(t) = d\mathbf{T}/dt$ aponta “para dentro”, ou seja, para o lado côncavo da curva em todos os casos, e logo também $\mathbf{N}(t)$. Por essa razão, $\mathbf{N}(t)$ é chamado de *normal unitário para dentro*, quando aplicado a curvas no espaço bidimensional.

■ CALCULANDO T E N PARA CURVAS PARAMETRIZADAS PELO COMPRIMENTO DE ARCO

No caso em que $\mathbf{r}(s)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, o procedimento para calcular o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ e o vetor normal unitário $\mathbf{N}(s)$ é mais simples do que no caso geral. Por exemplo, mostramos no Teorema 13.3.4 que se s for um parâmetro comprimento de arco, então $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. Assim, a Fórmula (1) para o vetor tangente unitário simplifica para

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \tag{6}$$

e, conseqüentemente, a Fórmula (2) para o vetor normal unitário simplifica para

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} \tag{7}$$

ADVERTÊNCIA

As Fórmulas (6) e (7) somente podem ser aplicadas quando a curva estiver parametrizada pelo comprimento de arco s . Para outras parametrizações, podemos usar as Fórmulas (1) e (2).

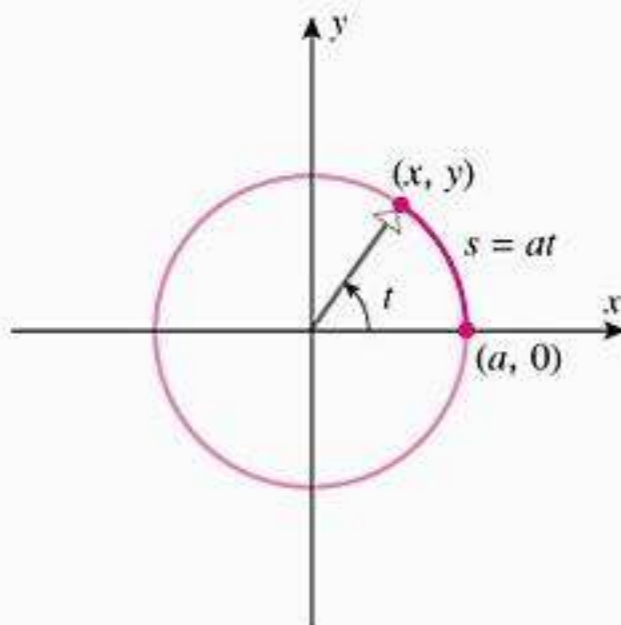


Figura 13.4.8

► Exemplo 3 O círculo de raio a orientado no sentido anti-horário e centrado na origem pode ser representado pela função vetorial

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{8}$$

Nessa representação, podemos interpretar t como o ângulo medido em radianos desde o eixo x até o vetor posição (Figura 13.4.8). Esse ângulo subtende um arco de comprimento $s = at$ sobre o círculo, portanto podemos reparametrizar o círculo em termos de s substituindo s/a no lugar de t em (8). Obtemos

$$\mathbf{r}(s) = a \cos(s/a) \mathbf{i} + a \sin(s/a) \mathbf{j} \quad (0 \leq s \leq 2\pi a)$$

Para encontrar $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ pelas Fórmulas (6) e (7), devemos calcular $\mathbf{r}'(s)$, $\mathbf{r}''(s)$ e $\|\mathbf{r}''(s)\|$. Fazendo isso, obtemos

$$\mathbf{r}'(s) = -\sin(s/a) \mathbf{i} + \cos(s/a) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}''(s) = -(1/a) \cos(s/a) \mathbf{i} - (1/a) \sin(s/a) \mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}''(s)\| = \sqrt{(-1/a)^2 \cos^2(s/a) + (-1/a)^2 \sin^2(s/a)} = 1/a$$

Assim,

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) = -\sin(s/a) \mathbf{i} + \cos(s/a) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{r}''(s)/\|\mathbf{r}''(s)\| = -\cos(s/a) \mathbf{i} - \sin(s/a) \mathbf{j}$$

de modo que $\mathbf{N}(s)$ aponta para o centro do círculo, para todo s (Figura 13.4.9). Isso faz sentido geometricamente e é consistente, também, com nossa observação anterior, que no espaço bidimensional o vetor normal unitário é o normal para dentro. ◀

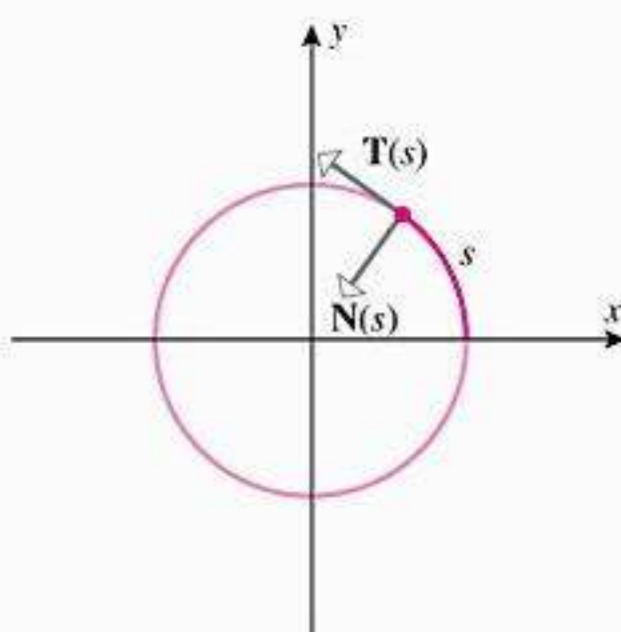


Figura 13.4.9

■ VETORES BINORMAIS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Se C for o gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ no espaço tridimensional, definimos o *vetor binormal* a C em t como

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{9}$$

Segue das propriedades do produto vetorial que $\mathbf{B}(t)$ é ortogonal a ambos $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ e está orientado em relação a $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ pela regra da mão direita. Além disso, $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é um vetor unitário, pois

$$\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\| \|\mathbf{N}(t)\| \sin(\pi/2) = 1$$

Assim, $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ é um conjunto de três vetores unitários mutuamente ortogonais.

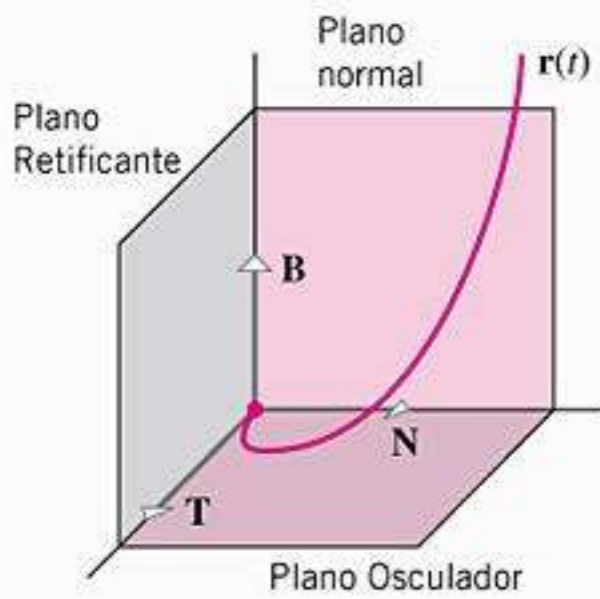


Figura 13.4.10



Figura 13.4.11

Exatamente como os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} determinam um sistema de coordenadas que satisfaz a regra da mão direita, o mesmo ocorre com os vetores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Em cada ponto de uma curva paramétrica suave C no espaço tridimensional, esses vetores determinam três planos mutuamente perpendiculares que passam pelo ponto – o plano \mathbf{TB} (chamado de *plano retificante*), o plano \mathbf{TN} (chamado de *plano osculador*) e o plano \mathbf{NB} (chamado de *plano normal*) (Figura 13.4.10). Além disso, pode ser mostrado que um sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ satisfaz a regra da mão direita, ou seja, que cada um desses vetores está relacionado aos outros dois pela regra da mão direita (Figura 13.4.11):

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t) \quad (10)$$

O sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ é chamado de *triedro TNB* ou então de *triedro de Frenet*, em homenagem ao matemático francês Jean Frédéric Frenet (1816-1900), que foi o pioneiro em sua aplicação ao estudo de curvas no espaço. Tipicamente, o sistema de coordenadas xyz determinado pelos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} permanece fixo, enquanto que o triedro \mathbf{TNB} varia à medida que a sua origem move-se ao longo da curva C (Figura 13.4.12).

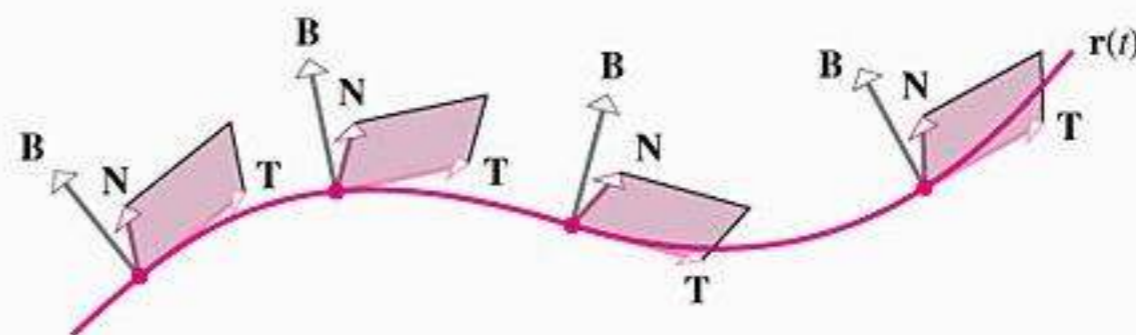


Figura 13.4.12

A Fórmula (9) expressa $\mathbf{B}(t)$ em termos de $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Alternativamente, o binormal $\mathbf{B}(t)$ pode ser expresso diretamente em termos de $\mathbf{r}(t)$ como

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \quad (11)$$

e no caso em que o parâmetro é o comprimento de arco, ele pode ser expresso em termos de $\mathbf{r}(s)$ como

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} \quad (12)$$

Omitimos a demonstração.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.4 (Ver página 892 para respostas.)

- Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então os vetores tangente, normal e binormal unitários de C em t são definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{T}(t) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \mathbf{N}(t) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \mathbf{B}(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$
- Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ parametrizado pelo comprimento de arco, então as definições dos vetores tangente e normal unitários de C em t simplificam, respectivamente, para

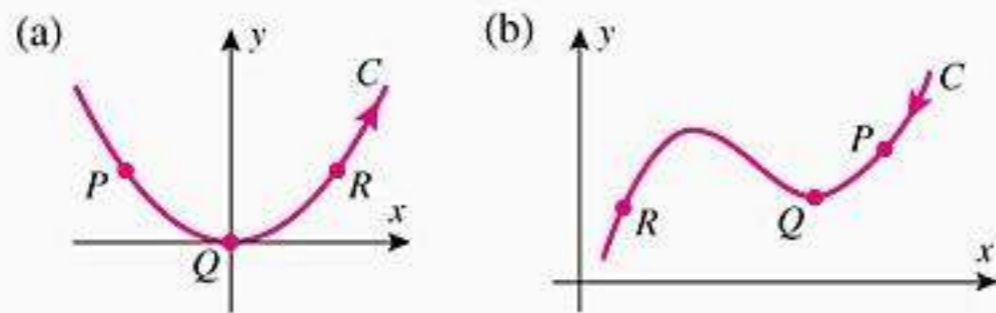
$$\mathbf{T}(s) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ e } \mathbf{N}(s) = \underline{\hspace{2cm}}.$$
- Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então o vetor binormal unitário de C em t pode ser calculado diretamente em termos de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ pela fórmula $\mathbf{B}(t) = \underline{\hspace{2cm}}$. Quando $t = s$ for o comprimento de arco, essa fórmula simplifica para $\mathbf{B}(s) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que C seja o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ parametrizado pelo comprimento de arco, com $\mathbf{r}'(0) = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ e $\mathbf{r}''(0) = \langle -3, 12, -3 \rangle$. Então

$$\mathbf{T}(0) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \mathbf{N}(0) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \mathbf{B}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

EXERCÍCIOS 13.4

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Em cada parte, esboce os vetores tangente e normal unitários nos pontos P , Q e R , levando em conta a orientação da curva C .



2. Faça um esboço grosseiro que mostre a elipse

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$ e os vetores tangente e normal unitários nos pontos $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ e $t = \pi$.

3. Na nota à margem do Exemplo 8 da Seção 13.3, observou-se que uma reta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ pode ser parametrizada em termos de um parâmetro comprimento de arco s com ponto de referência \mathbf{r}_0 normalizando \mathbf{v} . Use esse resultado para mostrar que a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto t_0 pode ser expressa como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{T}(t_0)$$

onde s é um parâmetro comprimento de arco com ponto de referência $\mathbf{r}(t_0)$.

4. Use o resultado do Exercício 3 para mostrar que a reta tangente à parábola

$$x = t, \quad y = t^2$$

no ponto $(1, 1)$ pode ser expressa parametricamente como

$$x = 1 + \frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}$$

5-12 Obtenha $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ no ponto dado.

5. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j}; t = 1$
6. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}; t = 1$
7. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t \mathbf{i} + 5 \sin t \mathbf{j}; t = \pi/3$
8. $\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + t \mathbf{j}; t = e$
9. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}; t = \pi/2$
10. $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3 \mathbf{k}; t = 0$
11. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t; t = 0$
12. $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t; t = \ln 2$

13-14 Use o resultado do Exercício 3 para obter equações paramétricas para a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em t_0 em termos de um parâmetro comprimento de arco s .

13. $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}; t_0 = 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \sqrt{9 - t^2} \mathbf{k}; t_0 = 1$

15-18 Use a fórmula $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ para obter $\mathbf{B}(t)$ e então confira sua resposta usando a Fórmula (11) para encontrar $\mathbf{B}(t)$ diretamente de $\mathbf{r}(t)$.

15. $\mathbf{r}(t) = 3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\sin t - t \cos t) \mathbf{i} + (\cos t + t \sin t) \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (a \neq 0, c \neq 0)$

19-20 Encontre $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ para os valores dados de t . Então, encontre equações para os planos osculador, normal e retificante nos pontos que correspondem àquele valor de t .

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}; t = \pi/4$

20. $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + e^t \sin t \mathbf{k}; t = 0$

21. (a) Use a fórmula $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$ e as Fórmulas (1) e (11) para mostrar que $\mathbf{N}(t)$ pode ser expresso em termos de $\mathbf{r}(t)$ como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \times \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

- (b) Use propriedades do produto vetorial para mostrar que a fórmula da parte (a) pode ser expressa como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{\|(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)\|}$$

- (c) Use o resultado da parte (b) e o Exercício 41 da Seção 12.4 para mostrar que $\mathbf{N}(t)$ pode ser expresso diretamente em termos de $\mathbf{r}(t)$ como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$$

onde

$$\mathbf{u}(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|^2 \mathbf{r}''(t) - (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)) \mathbf{r}'(t)$$

22. Use o resultado da parte (b) do Exercício 21 para obter o vetor normal unitário requisitado no

- (a) Exercício 5 (b) Exercício 9.

23-24 Use o resultado da parte (c) do Exercício 21 para encontrar $\mathbf{N}(t)$.

23. $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ 24. $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.4

1. $\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}; \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ 2. $\mathbf{r}'(s); \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$ 3. $\frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}; \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$
 4. $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle; \left\langle -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right\rangle; \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

13.5 CURVATURA

Nesta seção, consideraremos o problema de obter uma medida numérica de quanto encurva-se uma curva no espaço bi ou tridimensional. Nosso resultado terá aplicações na Geometria e no estudo do movimento ao longo de uma trajetória curva.

■ DEFINIÇÃO DE CURVATURA

Suponha que C seja o gráfico de uma função vetorial lisa no espaço bi ou tridimensional parametrizada em termos do comprimento de arco. A Figura 13.5.1 sugere que, para uma curva no espaço bidimensional, a “intensidade” de encurvamento de C está estreitamente relacionada com $d\mathbf{T}/ds$, que é a taxa de variação do vetor tangente unitário \mathbf{T} em relação a s . (Lembre que \mathbf{T} tem comprimento constante, logo somente varia a sua direção.) Se C for uma reta (não há encurvamento), então a direção de \mathbf{T} permanece constante (Figura 13.5.1a); se C encurvar-se ligeiramente, então \mathbf{T} passa por uma gradual mudança de direção (Figura 13.5.1b); se C encurvar-se fortemente, então \mathbf{T} passa por uma rápida variação na direção (Figura 13.5.1c).

A situação no espaço tridimensional é mais complicada, pois os encurvamentos de uma curva não estão limitados a um único plano – eles podem ocorrer em todas as direções, conforme ilustrado pelo complicado tubo plotado na Figura 13.1.3. Para descrever completamente as características do encurvamento de uma curva no espaço tridimensional, devemos levar em conta $d\mathbf{T}/ds$, $d\mathbf{N}/ds$ e $d\mathbf{B}/ds$. Um estudo completo desse tópico nos afastaria muito do nosso assunto, portanto limitaremos a nossa discussão a $d\mathbf{T}/ds$, que é a mais importante dessas derivadas em aplicações.

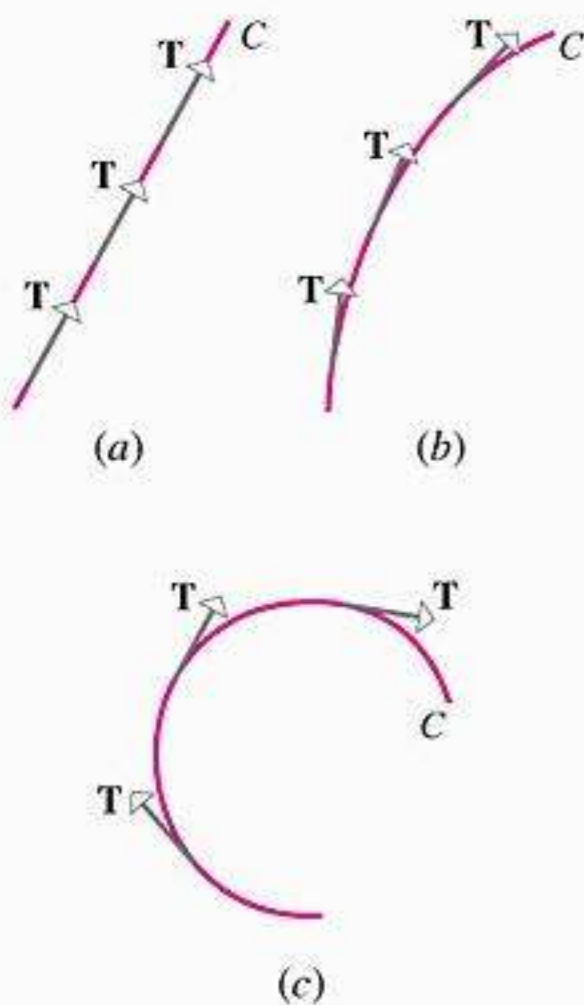


Figura 13.5.1

13.5.1 DEFINIÇÃO Se C for uma curva lisa no espaço bi ou tridimensional parametrizada pelo comprimento do arco, então a **curvatura** de C , denotada por $\kappa = \kappa(s)$ (onde κ é a letra grega *kappa*), é definida por

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \tag{1}$$

Observe que $\kappa(s)$ é uma função real de s , uma vez que é o comprimento de $d\mathbf{T}/ds$ que mede a curvatura. Em geral, a curvatura variará de ponto a ponto ao longo de uma curva; entretanto, o seguinte exemplo mostra que a curvatura é constante para círculos no espaço bidimensional, como é de se esperar.

► **Exemplo 1** No Exemplo 3 da Seção 13.4, mostramos que o círculo de raio a , centrado na origem, pode ser parametrizado em termos de comprimento de arco como

$$\mathbf{r}(s) = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{i} + a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{j} \quad (0 \leq s \leq 2\pi a)$$

Assim,

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{j}$$

e, portanto, por (1),

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \sqrt{\left[-\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right)\right]^2 + \left[-\frac{1}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right]^2} = \frac{1}{a}$$

de modo que o círculo tem a curvatura constante $1/a$. ◀

O exemplo seguinte mostra que as retas têm curvatura zero, o que é consistente com o fato de que elas não se encurvam.

► **Exemplo 2** Vimos na Fórmula (15) da Seção 13.3 que uma reta no espaço bi ou tridimensional pode ser parametrizada em termos do comprimento de arco como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}$$

onde o ponto final de \mathbf{r}_0 é um ponto da reta e \mathbf{u} é um vetor unitário paralelo à reta. Como \mathbf{u} e \mathbf{r}_0 são constantes, suas derivadas em relação a s são zero e portanto

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds}[\mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}] = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{r}''(s) = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} = \frac{d}{ds}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$$

Assim,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ FÓRMULAS PARA A CURVATURA

A Fórmula (1) é aplicável somente se a curva estiver parametrizada em termos do comprimento de arco. O teorema seguinte fornece duas fórmulas para a curvatura em termos de um parâmetro qualquer t .

13.5.2 TEOREMA Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial lisa no espaço bi ou tridimensional, então para cada valor de t no qual $\mathbf{T}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ existam, a curvatura κ pode ser expressa como

$$(a) \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (2)$$

$$(b) \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad (3)$$

DEMONSTRAÇÃO (a) Tem-se a partir da Fórmula (1) e das Fórmulas (16) e (17) da Seção 13.3 que

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

DEMONSTRAÇÃO (b) Tem-se a partir da Fórmula (1) da Seção 13.4 que

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}'(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}(t) \quad (5)$$

Mas da Fórmula (2) da Seção 13.4 e da parte (a) deste teorema, temos

$$\mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|\mathbf{N}(t) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|$$

Portanto,

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{N}(t)$$

Substitua (5) em (4), obtenha

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}'(t) + \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^2\mathbf{N}(t)$$

então, de (4) e

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}'(t) \times \mathbf{T}(t) + \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3(\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t))$$

Como $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}(t) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)$, segue que a equação simplifica para

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3(\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3\mathbf{B}(t)$$

Segue que a equação anterior implica que $\mathbf{B}(t)$ é um vetor unitário, ou seja,

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3$$

Segue, então, a Fórmula (3). ■

A Fórmula (2) é útil se $\mathbf{T}(t)$ for conhecido ou for fácil de se obter; entretanto, a Fórmula (3) será geralmente mais fácil de aplicar, uma vez que ela envolve apenas $\mathbf{r}(t)$ e as suas derivadas. Notamos, também, que o produto vetorial foi definido apenas para vetores no espaço tridimensional, de modo que ao usar a Fórmula (3) no espaço bidimensional devemos, primeiro, escrever a função $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ do espaço bidimensional como a função $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ do espaço tridimensional, com o componente \mathbf{k} nulo.

► **Exemplo 3** Determine a curvatura para a hélice circular

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct$$

onde $a > 0$

Solução A parametrização da hélice é

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

então,

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t)\mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-a \cos t)\mathbf{i} + (-a \sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & c \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (ac \sin t)\mathbf{i} - (ac \cos t)\mathbf{j} + a^2 \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| &= \sqrt{(ac \sin t)^2 + (-ac \cos t)^2 + a^4} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + c^2} \end{aligned}$$

Logo,

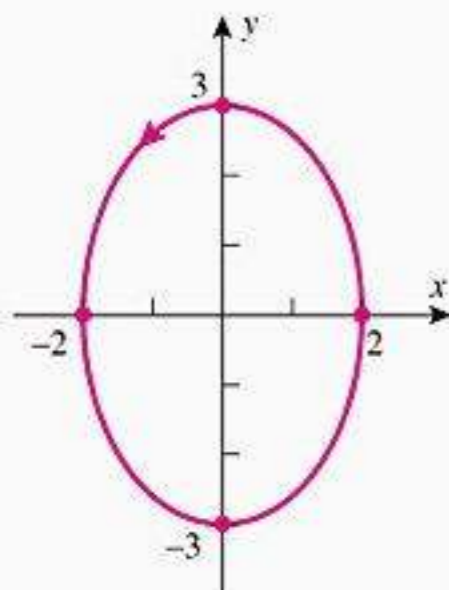
$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

Portanto, a curvatura é constante. ◀

► **Exemplo 4** Determine a curvatura para a curva

$$\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Veja a Figura 13.5.2. Determine a curvatura da elipse em $t = \pi/4$ e $t = 3\pi/4$.
 Solução: A curva é um arco de uma elipse. Para obter a curvatura, primeiro precisamos obter o gráfico da curva. O gráfico é mostrado na Figura 13.5.2. Para obter o gráfico, usamos o seguinte procedimento: primeiro, encontramos os pontos onde a curva cruza os eixos x e y . Para isso, substituímos $t = 0$ e $t = \pi$ na equação da curva para obter os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, respectivamente. Em seguida, substituímos $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$ na equação da curva para obter os pontos $(0, 3)$ e $(0, -3)$, respectivamente. Esses quatro pontos são os vértices da elipse. Para obter o gráfico, traçamos uma elipse que passe por esses quatro pontos. O gráfico é mostrado na Figura 13.5.2.



$$\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$$

Figura 13.5.2

Solução Para aplicar a Fórmula (3), devemos tratar a elipse como uma curva no plano xy de um sistema de coordenada xyz , adicionando um componente \mathbf{k} zero e escrevendo sua equação como

$$\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

Não é essencial escrever o componente \mathbf{k} zero explicitamente, desde que lembremos que ele esteja lá quando calcularmos um produto vetorial. Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = (-2 \sin t) \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-2 \cos t) \mathbf{i} + (-3 \sin t) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \sin t & 3 \cos t & 0 \\ -2 \cos t & -3 \sin t & 0 \end{vmatrix} = [(6 \sin^2 t) + (6 \cos^2 t)] \mathbf{k} = 6 \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} = \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}$$

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 6$$

logo

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{6}{[4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t]^{3/2}} \quad (7)$$

Os extremos do eixo menor são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, que correspondem a $t = 0$ e $t = \pi$, respectivamente. Substituindo esses valores em (7), obtém-se a mesma curvatura em ambos os pontos, isto é,

$$\kappa = \kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Os extremos do eixo maior são $(0, 3)$ e $(0, -3)$, que correspondem a $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$, respectivamente; por (7), a curvatura nesses pontos é

$$\kappa = \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{6}{4^{3/2}} = \frac{3}{4}$$

Observe que a curvatura é maior nos extremos do eixo maior do que nos extremos do eixo menor, como era de se esperar. A Figura 13.5.3 mostra o gráfico de κ versus t . Esse gráfico ilustra nitidamente que a curvatura é mínima em $t = 0$ (o extremo direito do eixo menor), cresce até um máximo em $t = \pi/2$ (o topo do eixo maior), decresce até um mínimo outra vez em $t = \pi$ (o extremo esquerdo do eixo menor) e continua ciclicamente dessa maneira. A Figura 13.5.4 fornece uma outra maneira de visualizar a curvatura. ◀

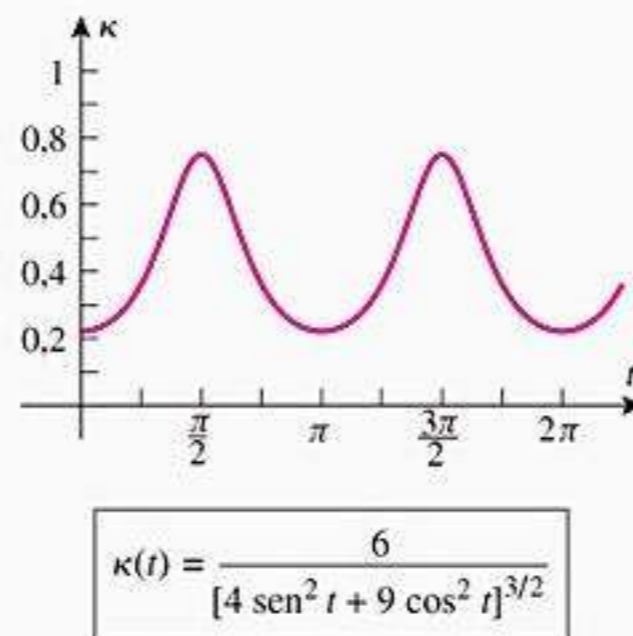


Figura 13.5.3

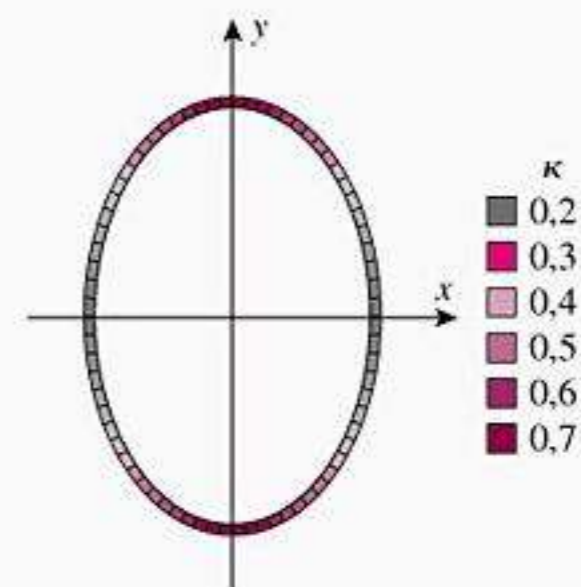


Figura 13.5.4

■ RAIOS DE CURVATURA

No último exemplo, verificamos que a curvatura nos extremos do eixo menor é $\frac{2}{9}$ e a curvatura nos extremos do eixo maior é $\frac{3}{4}$. Para obter um melhor entendimento do significado desses

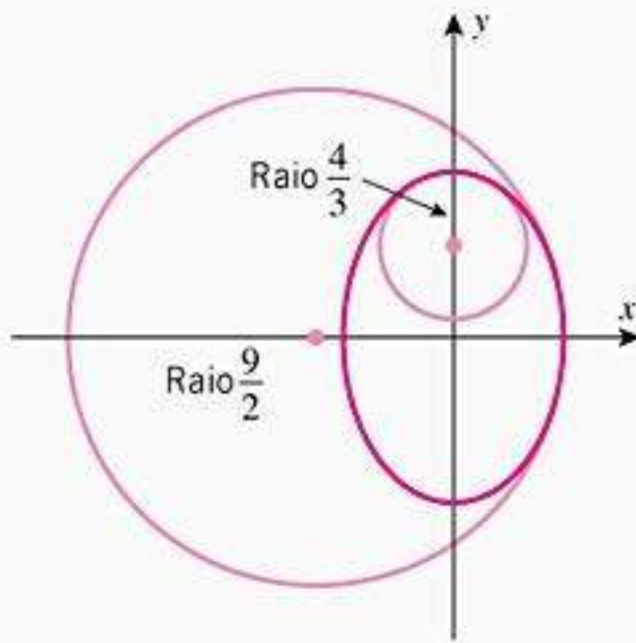


Figura 13.5.5

números, lembre-se que no Exemplo 1 vimos que um círculo de raio a tem uma curvatura constante de $1/a$; assim, a curvatura da elipse nos extremos do eixo menor é igual à de um círculo de raio $\frac{9}{2}$ e a curvatura nos extremos do eixo maior é igual à de um círculo de raio $\frac{4}{3}$ (Figura 13.5.5).

Em geral, se uma curva C no espaço bidimensional tem curvatura κ no ponto P , então o círculo de raio $\rho = 1/\kappa$ que tenha em comum uma tangente com C em P e centro no lado côncavo da curva em P , é chamado de **círculo de curvatura** ou **círculo osculador** em P (Figura 13.5.6). O círculo osculador e a curva C não somente tocam-se em P , mas têm a mesma curvatura naquele ponto. Nesse sentido, o círculo osculador é o círculo que melhor aproxima a curva C na vizinhança de P . O raio ρ de um círculo osculador em P é chamado de **raio de curvatura** em P e o centro do círculo é chamado de **centro de curvatura** em P (Figura 13.5.6).

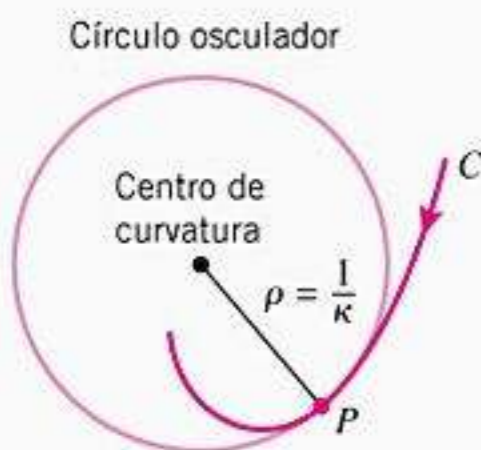


Figura 13.5.6

■ **UMA INTERPRETAÇÃO DA CURVATURA NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL**

Uma interpretação geométrica útil da curvatura no espaço bidimensional pode ser obtida considerando o ângulo ϕ medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo até o vetor tangente unitário \mathbf{T} (Figura 13.5.7). Pela Fórmula (12) da Seção 12.2, podemos expressar \mathbf{T} em termos de ϕ como

$$\mathbf{T}(\phi) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$$

Assim,

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\phi} = (-\sin \phi) \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}$$

do que obtemos

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \left\| \frac{d\mathbf{T}}{d\phi} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \sqrt{(-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi} = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

Em resumo, mostramos que

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \tag{8}$$

o que nos diz que a curvatura no espaço bidimensional pode ser interpretada como a magnitude da taxa de variação de ϕ com relação a s – quanto maior for a curvatura, mais rápido varia ϕ em relação a s (Figura 13.5.8). No caso de uma reta, o ângulo ϕ é constante (Figura 13.5.9) e, conseqüentemente, $\kappa(s) = |d\phi/ds| = 0$, o que é consistente com o fato de que a reta tem curvatura zero em todo ponto.

■ **RESUMO DAS FÓRMULAS**

Concluimos esta seção com um resumo das fórmulas para \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} . Essas fórmulas ou foram deduzidas no texto ou são facilmente deduzíveis de fórmulas já estabelecidas.

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \tag{9}$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)} \tag{10}$$

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)} \tag{11}$$

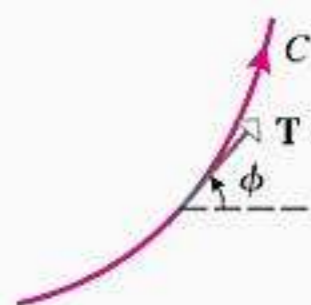
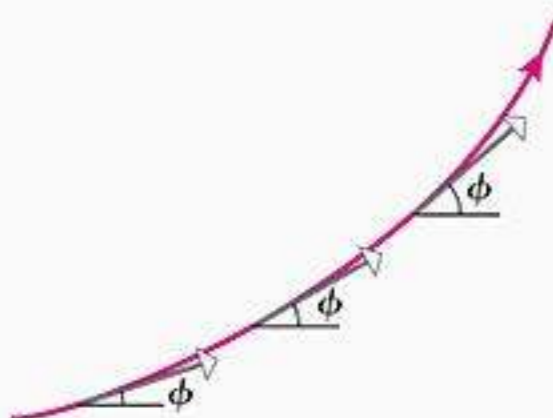
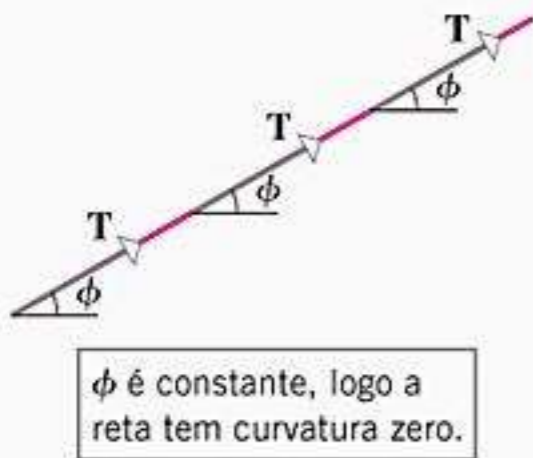


Figura 13.5.7



No espaço bidimensional $\kappa(s)$ é a magnitude da taxa de variação de ϕ em relação a s

Figura 13.5.8



ϕ é constante, logo a reta tem curvatura zero.

Figura 13.5.9

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (12)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \quad (13)$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \quad (14)$$

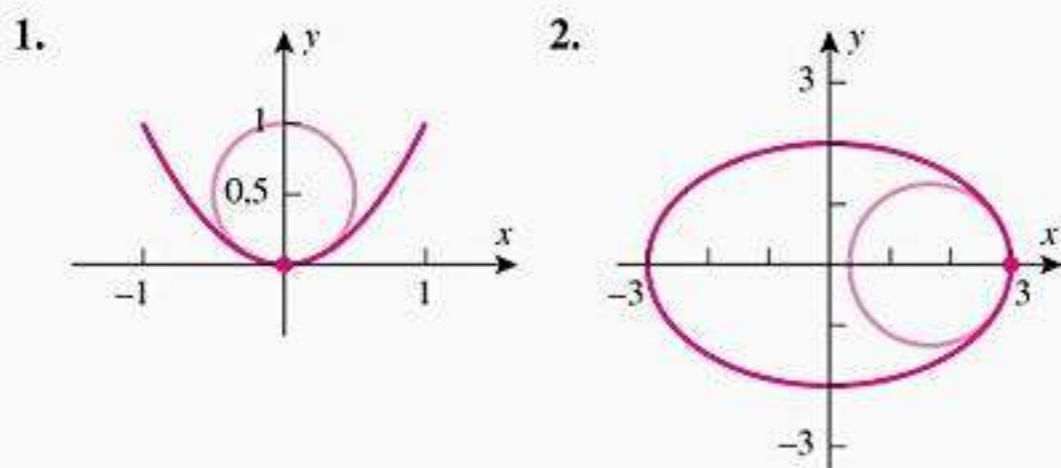
EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.5 (Ver página 900 para respostas.)

- Se C for uma curva lisa parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura é definida por $\kappa(s) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial lisa com curvatura $\kappa(t)$.
 - A curvatura pode ser expressa em termos de $\mathbf{T}'(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ como $\kappa(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - A curvatura pode ser expressa diretamente em termos de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ como $\kappa(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que C seja o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s) \rangle$ parametrizado pelo comprimento de arco, com vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s) = \langle \cos \phi(s), \sin \phi(s) \rangle$. Então a curvatura pode ser expressa em termos de $\phi(s)$ como $\kappa(s) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Suponha que C seja uma curva lisa e que $x^2 + y^2 = 4$ seja o círculo osculador de C em $P(1, \sqrt{3})$. Então a curvatura de C em P é $\underline{\hspace{2cm}}$.

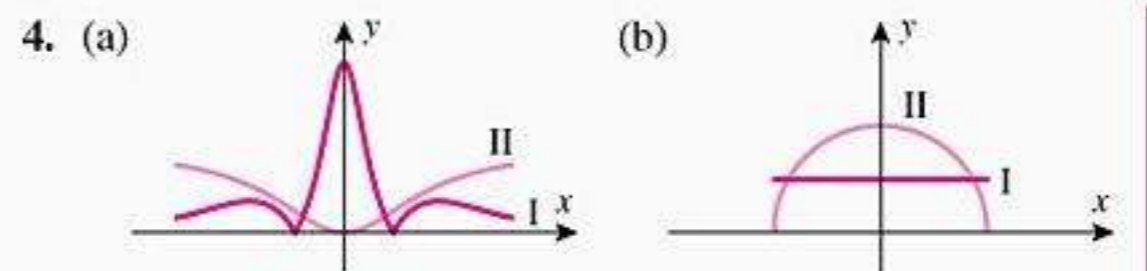
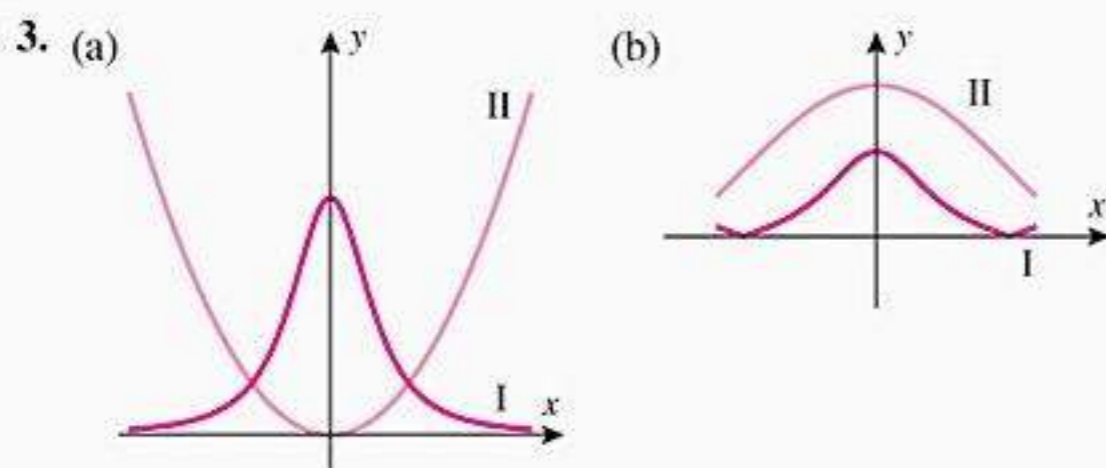
EXERCÍCIOS 13.5 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1-2 Use o círculo osculador mostrado na figura para estimar a curvatura nos pontos indicados.



3-4 Para uma curva plana $y = f(x)$, a curvatura em $(x, f(x))$ é uma função $\kappa(x)$. Nestes exercícios são mostrados os gráficos de $f(x)$ e de $\kappa(x)$. Determine qual é qual e explique seu raciocínio.



5-12 Use a Fórmula (3) para encontrar $\kappa(t)$.

- $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = e^{3t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$
- $x = 1 - t^3, y = t - t^2$
- $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{k}$
- $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$

13-16 Obtenha a curvatura e o raio de curvatura no ponto dado.

- $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}; t = \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}; t = 0$
- $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t; t = 0$
- $x = \sin t, y = \cos t, z = \frac{1}{2} t^2; t = 0$

17-18 Confirme que s é um parâmetro comprimento de arco mostrando que $\|\mathbf{dr}/\mathbf{ds}\| = 1$ e então aplique a Fórmula (1) para determinar $\kappa(s)$.

17. $\mathbf{r} = \sin\left(1 + \frac{s}{2}\right) \mathbf{i} + \cos\left(1 + \frac{s}{2}\right) \mathbf{j} + \sqrt{3}\left(1 + \frac{s}{2}\right) \mathbf{k}$

18. $\mathbf{r} = \left(1 - \frac{2}{3}s\right)^{3/2} \mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}s\right)^{3/2} \mathbf{j} \quad (0 \leq s \leq \frac{3}{2})$

19. (a) Use a Fórmula (3) para mostrar que no espaço bidimensional a curvatura de uma curva paramétrica lisa

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

é

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

onde as linhas denotam diferenciação em relação a t .

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que no espaço bidimensional a curvatura da curva plana dada por $y = f(x)$ é

$$\kappa(x) = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

[Sugestão: expresse $y = f(x)$ parametricamente com $x = t$ como o parâmetro.]

20. Use a parte (b) do Exercício 19 para mostrar que a curvatura de $y = f(x)$ pode ser expressa em termos do ângulo de inclinação da reta tangente como

$$\kappa(\phi) = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \cos^3 \phi \right|$$

[Sugestão: $\text{tg } \phi = dy/dx$.]

21-26 Use o resultado do Exercício 19(b) para obter a curvatura no ponto dado.

- 21. $y = \sin x; x = \pi/2$
- 22. $y = x^3/3; x = 0$
- 23. $y = 1/x; x = 1$
- 24. $y = e^{-x}; x = 1$
- 25. $y = \text{tg } x; x = \pi/4$
- 26. $y^2 - 4x^2 = 9; (2, 5)$

27-32 Use o resultado do Exercício 19(a) para determinar a curvatura no ponto dado.

- 27. $x = t^2, y = t^3; t = \frac{1}{2}$
- 28. $x = 4 \cos t, y = \sin t; t = \pi/2$
- 29. $x = e^{3t}, y = e^{-t}; t = 0$
- 30. $x = 1 - t^3, y = t - t^2; t = 1$
- 31. $x = t, y = 1/t; t = 1$
- 32. $x = 2 \sin 2t, y = 3 \sin t; t = \pi/2$

33. Em cada parte, use as fórmulas do Exercício 19 para ajudar a determinar o raio de curvatura nos pontos dados. Então, esboce o gráfico junto com os círculos osculadores nesses pontos.

- (a) $y = \cos x$ em $x = 0$ e $x = \pi$
- (b) $x = 2 \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) em $t = 0$ e $t = \pi/2$

34. Use a fórmula do Exercício 19(a) para obter $\kappa(t)$ da curva $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$. Então, esboce o gráfico de $\kappa(t)$.

35-36 Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $y = f(x)$ e então faça uma conjectura sobre a forma do gráfico de $y = \kappa(x)$. Confira sua conjectura gerando esse gráfico.

35. $f(x) = xe^{-x}$ para $0 \leq x \leq 5$

36. $f(x) = x^3 - x$ para $-1 \leq x \leq 1$

37. (a) Leia o manual sobre o cálculo de derivadas de ordens superiores num CAS. Então, use o CAS e a parte (b) do Exercício 19 para obter $\kappa(x)$ para $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(b) Use o CAS para gerar o gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ e $\kappa(x)$ na mesma tela para $-2 \leq x \leq 2$.

(c) Obtenha o raio de curvatura em cada extremo relativo.

(d) Faça com precisão razoável um esboço à mão do gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ e dos círculos osculadores em suas proporções corretas nos extremos relativos.

38. (a) Use um CAS para fazer o gráfico da curva paramétrica $x = t \cos t, y = t \sin t$ para $t \geq 0$.

(b) Faça uma conjectura sobre o comportamento de $\kappa(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

(c) Use o CAS e a parte (a) do Exercício 19 para obter $\kappa(t)$.

(d) Confira sua conjectura encontrando o limite de $\kappa(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

39. Use a fórmula do Exercício 19(a) para mostrar que, para uma curva em coordenadas polares descrita por $r = f(\theta)$, a curvatura é

$$\kappa(\theta) = \frac{\left| r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

[Sugestão: Seja θ o parâmetro e use as relações $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.]

40. Use o resultado do Exercício 39 para mostrar que um círculo tem curvatura constante.

41-44 Use a fórmula do Exercício 39 para obter a curvatura no ponto indicado.

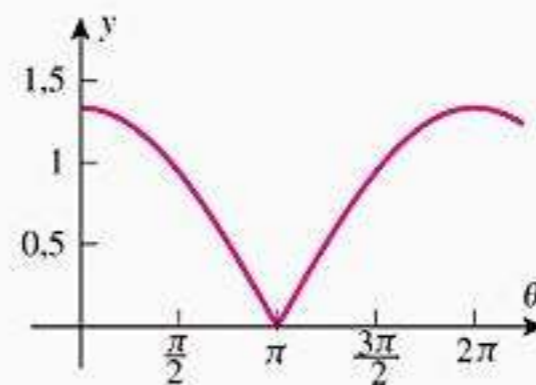
41. $r = 1 + \cos \theta; \theta = \pi/2$

42. $r = e^{2\theta}; \theta = 1$

43. $r = \sin 3\theta; \theta = 0$

44. $r = \theta; \theta = 1$

45. A figura abaixo é o gráfico do raio de curvatura versus θ em coordenadas retangulares da cardióide $r = 1 + \cos \theta$. Em palavras, explique o que o gráfico nos diz sobre a cardióide.



$y = 1/\kappa(\theta)$

Figura Ex-45

46. Use a fórmula do Exercício 39 e um recurso gráfico para gerar o gráfico no Exercício 45.

47. Obtenha o raio de curvatura da parábola $y^2 = 4px$ em $(0, 0)$.
48. Em qual(is) ponto(s) $y = e^x$ tem curvatura máxima?
49. Em qual(is) ponto(s) $4x^2 + 9y^2 = 36$ tem raio de curvatura mínimo?
50. Obtenha o valor de x , $x > 0$, onde $y = x^3$ tem curvatura máxima.
51. Obtenha os valores máximo e mínimo do raio de curvatura da curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$.
52. Obtenha o valor mínimo do raio de curvatura da curva $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$.
53. Use a fórmula do Exercício 39 para mostrar que a curvatura da curva polar $r = e^{a\theta}$ é inversamente proporcional a r .
54. Use a fórmula do Exercício 39 e um CAS para mostrar que a curvatura da lemniscata $r = \sqrt{a \cos 2\theta}$ é diretamente proporcional a r .

55. (a) Use o resultado do Exercício 20 para mostrar que para a parábola $y = x^2$ a curvatura $\kappa(\phi)$ nos pontos em que a reta tangente tem um ângulo de inclinação de ϕ é

$$\kappa(\phi) = |2 \cos^3 \phi|$$

- (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o raio de curvatura da parábola no ponto da parábola em que a reta tangente tem inclinação 1.
- (c) Faça um esboço de precisão razoável na proporção que mostre o círculo osculador no ponto da parábola em que a reta tangente tem inclinação 1.
56. A *evoluta* de uma curva paramétrica lisa C no espaço bidimensional é a curva formada pelos centros de curvatura de C . A figura abaixo mostra a elipse $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) e o gráfico da evoluta num mesmo sistema.
- (a) Quais pontos da evoluta correspondem a $t = 0$ e $t = \pi/2$?
- (b) Em que sentido é traçada a evoluta quando t cresce de 0 a 2π ?
- (c) Com que se parece a evoluta de um círculo? Explique seu raciocínio.

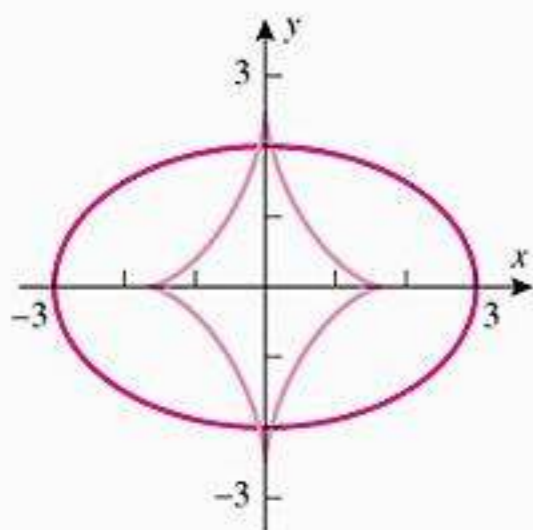


Figura Ex-56

ENFOCANDO CONCEITOS

57-62 Nestes exercícios, nos ocuparemos do problema de criar uma curva lisa única, juntando pedaços separados de duas curvas lisas. Se duas curvas lisas C_1 e C_2 forem juntadas em um

ponto P para formar uma curva C , então diremos que C_1 e C_2 fazem uma *transição lisa* em P se a curvatura de C for contínua em P .

57. Mostre que a transição em $x = 0$ da reta horizontal $y = 0$ com $x \leq 0$ para a parábola $y = x^2$ com $x > 0$ não é lisa, enquanto que a transição para $y = x^3$ com $x > 0$ é lisa.
58. (a) Esboce o gráfico da curva definida por partes por $y = x^2$ para $x < 0$, $y = x^4$ para $x \geq 0$.
(b) Mostre que para a curva da parte (a) a transição em $x = 0$ não é lisa.
59. A figura abaixo mostra o arco de um círculo de raio r com centro em $(0, r)$. Determine o valor de a que garante uma transição lisa do círculo para a parábola $y = ax^2$ no ponto em que $x = 0$.

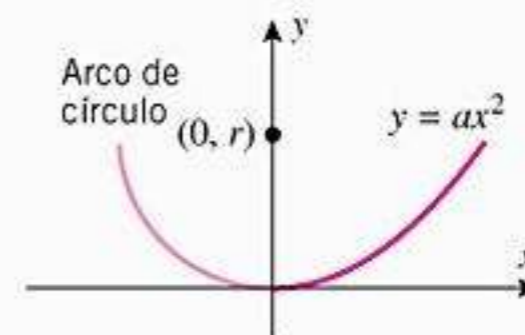


Figura Ex-59

60. Determine a , b e c tais que haja uma transição lisa em $x = 0$ da curva $y = e^x$ com $x \leq 0$ para a parábola $y = ax^2 + bx + c$ com $x > 0$. [Sugestão: a curvatura é contínua nos pontos em que y'' for contínua.]
61. Suponha que f seja uma função tal que $f'''(x)$ esteja definida para todo $x \leq 0$. Explique por que é sempre possível encontrar números a , b e c tais que exista uma transição lisa em $x = 0$ da curva $y = f(x)$, $x \leq 0$, para a parábola $y = ax^2 + bx + c$.
62. No Exercício 60 da Seção 11.2, definimos a espiral de Cornu parametricamente como

$$x = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

Essa curva, cujo gráfico está ilustrado na figura da próxima página, é usada no planejamento de rodovias para criar uma transição gradual de uma estrada reta (curvatura zero) para uma rampa de saída com curvatura positiva.

- (a) Expresse a espiral de Cornu como uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ e, então, use o Teorema 13.3.4 para mostrar que $s = t$ é o parâmetro comprimento de arco com ponto de referência $(0, 0)$.
- (b) Substitua t por s e use a Fórmula (1) para mostrar que $\kappa(s) = \pi |s|$. [Nota: se $s \geq 0$, então a curvatura $\kappa(s) = \pi s$ cresce a partir de 0 a uma taxa constante em relação a s . Isso torna essa espiral ideal para unir uma estrada curva com uma estrada reta.]
- (c) O que acontece com a curvatura da espiral de Cornu quando $s \rightarrow +\infty$? Em palavras, explique por que isso é consistente com o gráfico.

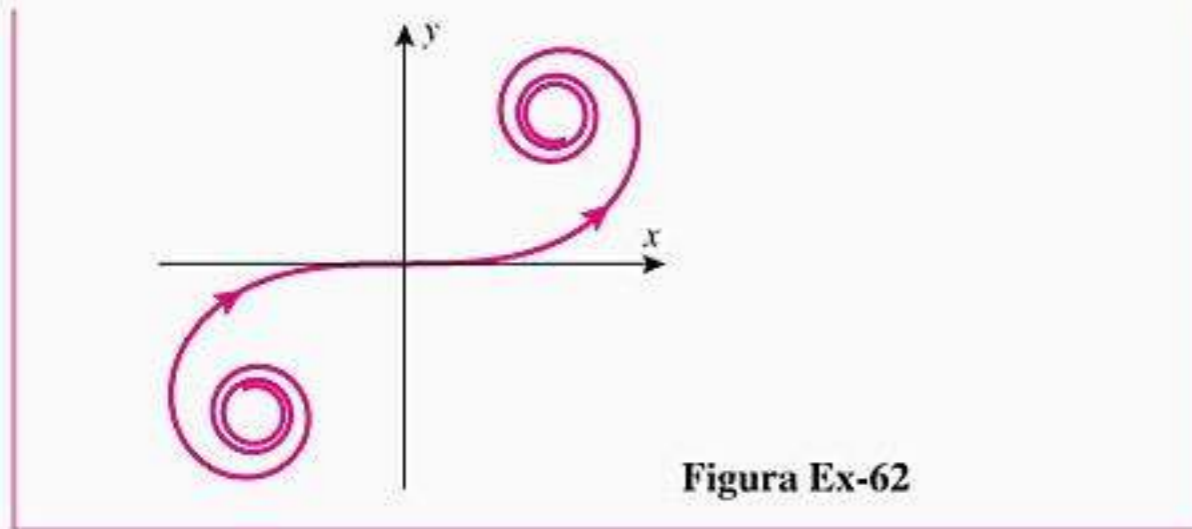


Figura Ex-62

63-66 Suponha que s seja um parâmetro comprimento de arco para uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ no espaço e que $d\mathbf{T}/ds$ e $d\mathbf{N}/ds$ existam em cada ponto da curva. (Isto implica que $d\mathbf{B}/ds$ também existe, já que $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.)

63. Mostre que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$$

e use esse resultado para obter as fórmulas em (10).

64. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}(s)$.
 (b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}(s)$. [Sugestão: use o fato de que $\mathbf{B}(s)$ é perpendicular a ambos $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ e diferencie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}$ em relação a s .]
 (c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que $d\mathbf{B}/ds$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{N}(s)$. O *negativo* desse escalar é chamado de *torção* de $\mathbf{r}(s)$ e é denotado por $\tau(s)$. Assim,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

- (d) Mostre que $\tau(s) = 0$ para todo s se o gráfico de $\mathbf{r}(s)$ situar-se num plano. [Nota: por razões que não discutiremos aqui, a torção está relacionada ao retorcimento de uma curva, e $\tau(s)$ é considerado como uma medida numérica da tendência da curva torcer-se para fora do plano osculador.]
65. Seja κ a curvatura de C e τ a torção (definida no Exercício 64). Diferenciando $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ com relação a s , mostre que $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.
66. As seguintes derivadas, conhecidas como *fórmulas de Frenet-Serret*, são fundamentais na teoria das curvas no espaço tridimensional:

$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$	[Exercício 63]
$d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$	[Exercício 65]
$d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$	[Exercício 64(c)]

Use as duas primeiras fórmulas de Frenet-Serret e o fato de que $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}$ se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ para mostrar que

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)] \cdot \mathbf{r}'''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$$

67. Use os resultados do Exercício 66 e do Exercício 30 da Seção 13.3 para mostrar que para a hélice circular

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

com $a > 0$, a torção e o vetor binormal são

$$\tau = \frac{c}{w^2}$$

e

$$\mathbf{B} = \left(\frac{c}{w} \sin \frac{s}{w}\right) \mathbf{i} - \left(\frac{c}{w} \cos \frac{s}{w}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{a}{w}\right) \mathbf{k}$$

onde $w = \sqrt{a^2 + c^2}$ e s tem ponto de referência $(a, 0, 0)$.

68. (a) Use a regra da cadeia e as duas primeiras fórmulas de Frenet-Serret do Exercício 66 para mostrar que

$$\mathbf{T}' = \kappa s' \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}' = -\kappa s' \mathbf{T} + \tau s' \mathbf{B}$$

onde as linhas denotam diferenciação em relação a t .

(b) Mostre que as Fórmulas (4) e (6) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{r}'(t) = s' \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}''(t) = s'' \mathbf{T} + \kappa (s')^2 \mathbf{N}$$

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que

$$\mathbf{r}'''(t) = [s''' - \kappa^2 (s')^3] \mathbf{T} + [3\kappa s' s'' + \kappa' (s')^2] \mathbf{N} + \kappa \tau (s')^3 \mathbf{B}$$

(d) Use os resultados das partes (b) e (c) para mostrar que

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$$

69-72 Use a fórmula do Exercício 68(d) para obter a torção $\tau = \tau(t)$.

69. A cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$

70. A hélice circular $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$

71. $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2}t \mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.5

1. $\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$ 2. (a) $\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ (b) $\frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ 3. $\left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ 4. $\frac{1}{2}$

13.6 MOVIMENTO AO LONGO DE UMA CURVA

Em seções anteriores, consideramos o movimento de uma partícula ao longo de uma reta. Numa reta há apenas dois sentidos nos quais a partícula pode mover-se – o sentido positivo ou o negativo. O movimento no espaço bi ou tridimensional é mais complicado, pois há uma infinidade de direções segundo as quais uma partícula pode mover-se. Nesta seção, mostraremos como os vetores podem ser usados para analisar o movimento ao longo de curvas no espaço bi ou tridimensional.

■ VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Vamos supor que o movimento de uma partícula no espaço bi ou tridimensional seja descrito por uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, na qual o parâmetro t denota o tempo; chamaremos isso de *função posição* ou *trajetória* da partícula. Quando a partícula se move ao longo de sua trajetória, a direção e o sentido do movimento e a sua velocidade podem variar de instante a instante. Assim, antes de podermos empreender a análise de um tal movimento, precisamos ter claras as respostas para as seguintes questões:

- Quais são a direção e o sentido do movimento da partícula em um instante do tempo?
- Qual é a velocidade da partícula em um instante do tempo?

Definiremos a direção e o sentido do movimento no instante t como sendo a direção e o sentido do vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$, e definiremos a velocidade escalar como sendo ds/dt – a taxa de variação instantânea do comprimento de arco percorrido pela partícula desde um ponto de referência arbitrário. Dando um passo mais adiante, combinaremos a velocidade escalar com a direção e o sentido do movimento para formar o vetor

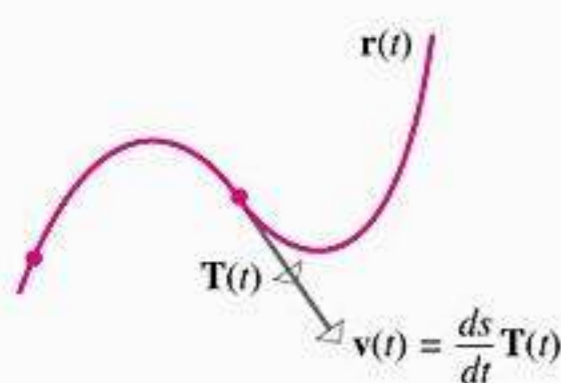
$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t) \tag{1}$$

que chamamos de *função velocidade vetorial*, ou simplesmente, *velocidade* da partícula no instante t . Dessa forma, em cada instante do tempo o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ aponta na direção e sentido do movimento e tem uma magnitude que é igual à velocidade escalar da partícula (Figura 13.6.1).

Lembre-se de que para o movimento ao longo de uma reta coordenada a função velocidade é a derivada da função posição. O mesmo é verdadeiro para o movimento ao longo de uma curva, uma vez que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Para o movimento ao longo de uma reta coordenada, a função aceleração foi definida como sendo a derivada da função velocidade. A definição é a mesma para o movimento ao longo de uma curva.



O comprimento do vetor velocidade é a velocidade escalar da partícula e a direção e sentido do vetor velocidade é a direção e sentido do movimento.

Figura 13.6.1

13.6.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento ao longo de uma curva no espaço bi ou tridimensional, então a *velocidade vetorial*, a *aceleração* e a *velocidade escalar instantâneas* da partícula no instante t são definidas por

$$\text{velocidade} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2}$$

$$\text{aceleração} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{3}$$

$$\text{velocidade escalar} = \|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} \tag{4}$$

Como mostramos na Tabela 13.6.1, a posição, a velocidade e a aceleração podem também ser expressas em forma de componentes.

Tabela 13.6.1

	ESPAÇO BIDIMENSIONAL	ESPAÇO TRIDIMENSIONAL
POSIÇÃO	$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$	$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$
VELOCIDADE	$\mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$	$\mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$
ACELERAÇÃO	$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$	$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$
VELOCIDADE ESCALAR	$\ \mathbf{v}(t)\ = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$	$\ \mathbf{v}(t)\ = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

► **Exemplo 1** Uma partícula move-se ao longo de um caminho circular de tal maneira que suas coordenadas x e y no instante t são

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t$$

- (a) Determine as velocidades vetorial e escalar instantâneas da partícula no instante t .
- (b) Esboce o caminho da partícula e mostre os vetores posição e velocidade no instante $t = \pi/4$ com o vetor velocidade desenhado de tal forma que o seu ponto inicial esteja na ponta do vetor posição.
- (c) Mostre que em cada instante o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade.

Solução (a) No instante t , o vetor posição é

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$$

logo as velocidades vetorial e escalar instantâneas são

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2 \end{aligned}$$

Solução (b) O gráfico das equações paramétricas é um círculo de raio 2 centrado na origem. No instante $t = \pi/4$, os vetores posição e velocidade da partícula são

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\pi/4) &= 2 \cos(\pi/4)\mathbf{i} + 2 \sin(\pi/4)\mathbf{j} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} \\ \mathbf{v}(\pi/4) &= -2 \sin(\pi/4)\mathbf{i} + 2 \cos(\pi/4)\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Esses vetores e o círculo são mostrados na Figura 13.6.2.

Solução (c) No instante t , o vetor aceleração é

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j}$$

Uma maneira de provar que $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ são perpendiculares é mostrar que seu produto vetorial é zero (tente fazer isso). Contudo, é mais fácil observar que $\mathbf{a}(t)$ é o negativo de $\mathbf{r}(t)$, o que implica que $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ são perpendiculares, uma vez que, em cada ponto sobre um círculo, o raio e a reta tangente são perpendiculares. ◀

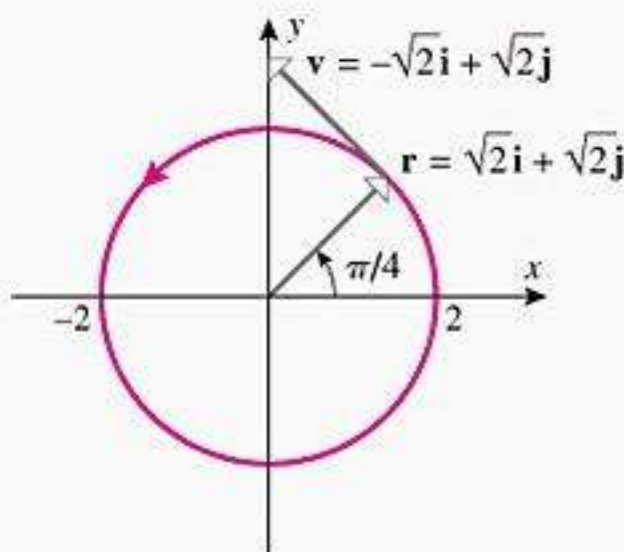


Figura 13.6.2

Como $\mathbf{v}(t)$ pode ser obtido diferenciando $\mathbf{r}(t)$ e como $\mathbf{a}(t)$ pode ser obtido diferenciando $\mathbf{v}(t)$, tem-se que $\mathbf{r}(t)$ pode ser obtido integrando $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ pode ser obtido integrando $\mathbf{a}(t)$. Entretanto, tais integrações não produzem funções únicas, pois ocorrem constantes das integrações. Tipicamente, são necessárias condições iniciais para determinar essas constantes.

► **Exemplo 2** Uma partícula move-se pelo espaço tridimensional de tal maneira que sua velocidade é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

Determine as coordenadas da partícula no instante $t = 1$, dado que a partícula está no ponto $(-1, 2, 4)$ no instante $t = 0$.

Solução Integrando a função velocidade para obter a função posição resulta em

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt = \int (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) dt = t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k} + \mathbf{C} \quad (5)$$

onde \mathbf{C} é um vetor constante de integração. Uma vez que as coordenadas da partícula no instante $t = 0$ são $(-1, 2, 4)$, o vetor posição no instante $t = 0$ é

$$\mathbf{r}(0) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad (6)$$

Substituindo $t = 0$ em (5) e equacionando o resultado com (6) obtemos

$$\mathbf{C} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Substituindo esse valor de \mathbf{C} em (5) e simplificando, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^3}{3} + 4\right)\mathbf{k}$$

Assim, no instante $t = 1$, o vetor posição da partícula é

$$\mathbf{r}(1) = 0\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j} + \frac{13}{3}\mathbf{k}$$

de modo que suas coordenadas naquele instante são $(0, \frac{5}{2}, \frac{13}{3})$ ◀

■ DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

Se uma partícula movimenta-se ao longo de uma curva C no espaço bi ou tridimensional, o *deslocamento* da partícula sobre o intervalo do tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é comumente denotado por $\Delta \mathbf{r}$ e é definido como

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \quad (7)$$

(Figura 13.6.3). O vetor deslocamento, que descreve a variação na posição da partícula durante o intervalo de tempo, pode ser obtido integrando a função velocidade de t_1 a t_2 :

$$\Delta \mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{r}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \quad \boxed{\text{Deslocamento}} \quad (8)$$

A partir do Teorema 13.3.1 podemos determinar a distância s percorrida por uma partícula sobre um intervalo do tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ integrando a velocidade escalar sobre aquele intervalo, uma vez que

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}(t)\| dt \quad \boxed{\text{Distância percorrida}} \quad (9)$$

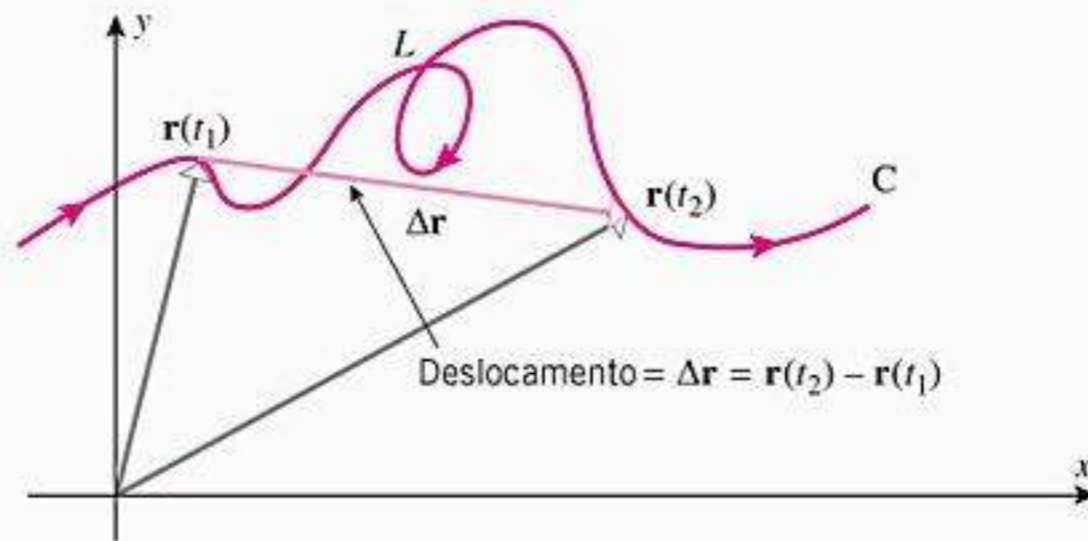


Figura 13.6.3

► **Exemplo 3** Uma partícula move-se ao longo de uma hélice circular no espaço tridimensional, de tal maneira que o seu vetor posição no instante t é

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos \pi t)\mathbf{i} + (4 \sin \pi t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Determine a distância percorrida e o deslocamento da partícula durante o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 5$.

Solução Temos

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4\pi \sin \pi t)\mathbf{i} + (4\pi \cos \pi t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-4\pi \sin \pi t)^2 + (4\pi \cos \pi t)^2 + 1} = \sqrt{16\pi^2 + 1}$$

Assim, segue de (9) que a distância percorrida pela partícula do instante $t = 1$ a $t = 5$ é

$$s = \int_1^5 \sqrt{16\pi^2 + 1} dt = 4\sqrt{16\pi^2 + 1}$$

Além disso, segue de (8) que o deslocamento durante o intervalo de tempo é

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(5) - \mathbf{r}(1) \\ &= (4 \cos 5\pi \mathbf{i} + 4 \sin 5\pi \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - (4 \cos \pi \mathbf{i} + 4 \sin \pi \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= (-4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) - (-4\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 4\mathbf{k} \end{aligned}$$

o que nos mostra que a variação da partícula no intervalo de tempo é igual a 4 unidades diretamente para cima. ◀

■ **COMPONENTES NORMAL E TANGENCIAL DA ACELERAÇÃO**

Sabemos de nossa experiência como passageiros de automóvel que se a velocidade do carro aumentar rapidamente, então nosso corpo será jogado para trás contra o encosto do assento. Sabemos também que se o carro percorrer uma curva na estrada, então nosso corpo será jogado para fora da curva – quanto maior a curvatura na estrada, maior será a força com que somos empurrados. A explicação desses fenômenos pode ser entendida resolvendo-se a velocidade e a aceleração em componentes vetoriais que são paralelos aos vetores tangente e normal unitários. O teorema seguinte explica como isso pode ser feito.

13.6.2 TEOREMA Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa C no espaço bi ou tridimensional, então em cada ponto da curva os vetores velocidade e aceleração podem ser escritos como

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N} \quad (10-11)$$

onde s é um parâmetro comprimento de arco para a curva e \mathbf{T} , \mathbf{N} e κ denotam o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário e a curvatura no ponto (Figura 13.6.4).

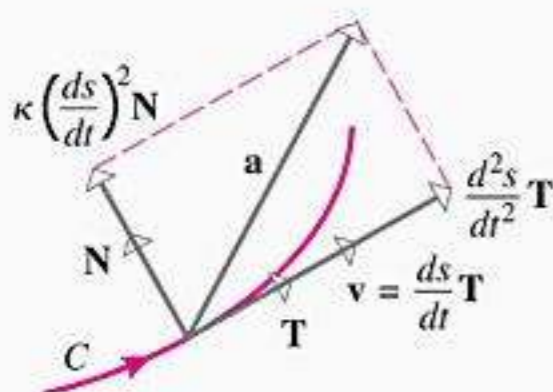


Figura 13.6.4

DEMONSTRAÇÃO A Fórmula (10) é simplesmente uma reafirmação de (1). Para obter (11), diferenciamos ambos os lados de (10) em relação a t ; disso resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \mathbf{T} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \kappa \mathbf{N} \end{aligned} \quad \boxed{\text{Fórmula (10) da Seção 13.5}}$$

de onde segue (11). ■

Os coeficientes de \mathbf{T} e \mathbf{N} em (11) são denotados usualmente por

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \quad a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (12-13)$$

e, nesse caso, a Fórmula (11) é expressa como

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} \quad (14)$$

Nessa fórmula, os escalares a_T e a_N são chamados de *componente tangencial escalar da aceleração* e *componente normal escalar da aceleração* e os vetores $a_T \mathbf{T}$ e $a_N \mathbf{N}$ são chamados de *componente tangencial vetorial da aceleração* e *componente normal vetorial da aceleração*.

Os componentes escalares da aceleração explicam o efeito que experimentamos quando um carro arranca rapidamente ou faz uma curva. O crescimento abrupto na velocidade escalar produz grandes valores para d^2s/dt^2 , o que resulta num grande componente tangencial escalar da aceleração; pela segunda lei de Newton, isso produz uma grande força tangencial sobre o carro na direção do movimento. Para entender o efeito de percorrer uma curva, observe que o componente normal escalar da aceleração tem a curvatura κ e a velocidade escalar ds/dt como fatores. Assim, curvas acentuadas ou curvas feitas em alta velocidade ambas produzem grandes forças normais sobre o carro.

Embora as Fórmulas (12) e (13) sejam úteis para o conhecimento do movimento de partículas movendo-se ao longo de trajetórias curvas, elas não são sempre as melhores fórmulas de cálculo. O teorema a seguir fornece algumas fórmulas mais úteis que relacionam a_T , a_N e κ à velocidade \mathbf{v} e à aceleração \mathbf{a} .

A Fórmula (14) aplica-se a movimentos tanto no espaço bidimensional quanto tridimensional. O que é interessante é que a fórmula no espaço tridimensional não envolve o vetor binormal \mathbf{B} , portanto o vetor aceleração está sempre no plano de \mathbf{T} e \mathbf{N} (o plano osculador), mesmo para os caminhos mais sinuosos (Figura 13.6.5).

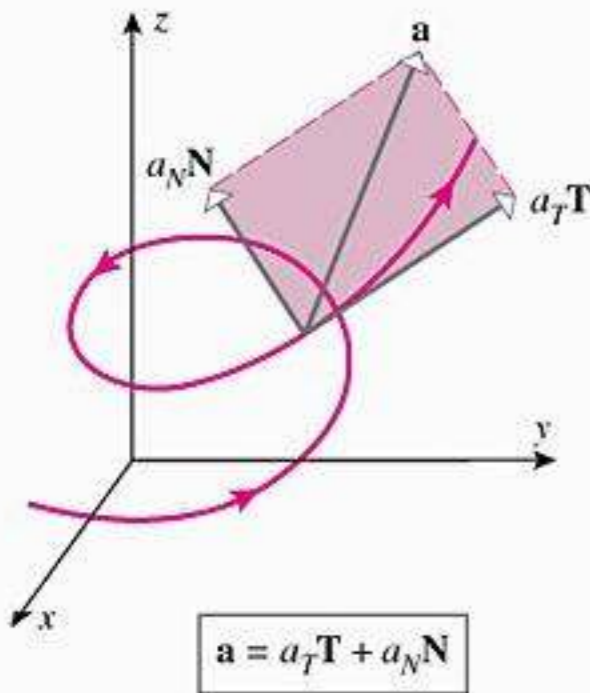


Figura 13.6.5

O Teorema 13.6.3 aplica-se a movimentos no espaço bi ou tridimensional, mas para o movimento no espaço bidimensional, precisamos acrescentar um componente \mathbf{k} nulo a \mathbf{v} e a \mathbf{a} para calcular o produto vetorial.

13.6.3 TEOREMA Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa C no espaço bi ou tridimensional, então em cada ponto da curva a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} estão relacionadas com a_T , a_N e κ pelas fórmulas

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} \quad a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \quad (15-17)$$

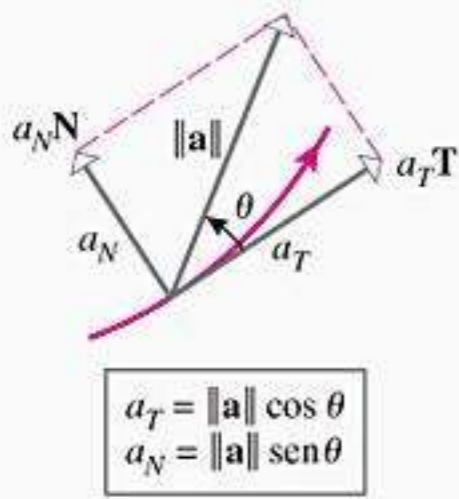


Figura 13.6.6

Lembre-se de que para curvas lisas não-lineares no espaço bidimensional, o vetor normal unitário \mathbf{N} é o normal para dentro (pois aponta para o lado côncavo da curva). Explique por que o mesmo é verdadeiro para $a_N \mathbf{N}$.

DEMONSTRAÇÃO Conforme ilustrado na Figura 13.6.6, seja θ o ângulo entre o vetor \mathbf{a} e o vetor $a_T \mathbf{T}$. Assim,

$$a_T = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \quad \text{e} \quad a_N = \|\mathbf{a}\| \sin \theta$$

de onde obtemos que

$$a_T = \|\mathbf{a}\| \cos \theta = \frac{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_N = \|\mathbf{a}\| \sin \theta = \frac{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{a}\| \sin \theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\kappa = \frac{a_N}{(ds/dt)^2} = \frac{a_N}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

► **Exemplo 4** Uma partícula move-se pelo espaço tridimensional, de tal maneira que o vetor posição no instante t é

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

(O caminho é a cúbica torcida mostrada na Figura 13.1.5.)

- (a) Obtenha os componentes tangencial e normal escalares da aceleração no instante t .
- (b) Obtenha os componentes tangencial e normal escalares da aceleração no instante $t = 1$.
- (c) Obtenha os componentes tangencial e normal vetoriais da aceleração no instante $t = 1$.
- (d) Obtenha a curvatura da trajetória no ponto em que a partícula está no instante $t = 1$.

Solução (a) Temos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 4t + 18t^3$$

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim, de (15) e (16)

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} = 2\sqrt{\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}}$$

Solução (b) No instante $t = 1$, os componentes a_T e a_N na parte (a) são

$$a_T = \frac{22}{\sqrt{14}} \approx 5,88 \quad \text{e} \quad a_N = 2\sqrt{\frac{19}{14}} \approx 2,33$$

Solução (c) Como \mathbf{T} e \mathbf{v} têm a mesma direção e sentido, \mathbf{T} pode ser obtido normalizando \mathbf{v} , isto é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

No instante $t = 1$, temos

$$\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{v}(1)}{\|\mathbf{v}(1)\|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\|\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

Disso e da parte (b), obtemos o componente tangencial vetorial da aceleração:

$$a_T(1)\mathbf{T}(1) = \frac{22}{\sqrt{14}}\mathbf{T}(1) = \frac{11}{7}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \frac{11}{7}\mathbf{i} + \frac{22}{7}\mathbf{j} + \frac{33}{7}\mathbf{k}$$

Para encontrar o componente normal vetorial da aceleração, reescrevemos $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ como

$$a_N\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_T\mathbf{T}$$

Assim, no instante $t = 1$ o componente normal vetorial da aceleração é

$$\begin{aligned} a_N(1)\mathbf{N}(1) &= \mathbf{a}(1) - a_T(1)\mathbf{T}(1) \\ &= (2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) - \left(\frac{11}{7}\mathbf{i} + \frac{22}{7}\mathbf{j} + \frac{33}{7}\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{11}{7}\mathbf{i} - \frac{8}{7}\mathbf{j} + \frac{9}{7}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Solução (d) Aplicaremos a Fórmula (17) com $t = 1$. Da parte (a),

$$\|\mathbf{v}(1)\| = \sqrt{14} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(1) \times \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim, no instante $t = 1$,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{38}{7}} \approx 0,17 \blacktriangleleft$$

No caso em que $\|\mathbf{a}\|$ e a_T são conhecidos, existe uma alternativa útil da Fórmula (16) para a_N que não requer o cálculo de um produto vetorial. Segue geometricamente da Figura 13.6.6 e do Teorema de Pitágoras, ou algebricamente da Fórmula (14), que

Use a Fórmula (18) para confirmar o valor de a_N obtido no Exemplo 4.

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} \tag{18}$$

■ UM MODELO DE MOVIMENTO DE PROJÉTIL

Anteriormente neste livro examinamos vários problemas relacionados com objetos que se movem *verticalmente* no campo gravitacional da Terra (ver a subseção da Seção 6.7 do Volume 1 intitulado O Modelo de Queda Livre e a subseção da Seção 9.1 intitulada Um Modelo de Queda Livre Retardada pela Resistência do Ar). Agora, consideraremos o movimento de um projétil lançado ao longo de uma trajetória *curva* no campo gravitacional da Terra. Para isso, necessitaremos da *versão vetorial* da Segunda Lei do Movimento de Newton (9.1.1), a saber,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{19}$$

e precisaremos fazer três hipóteses de modelagem:

- A massa m do objeto é constante.
- A única força agindo sobre o objeto depois de lançado é a força da gravidade da Terra. (Assim, são ignorados a resistência do ar e o efeito gravitacional de outros planetas e objetos celestes.)
- O objeto permanece suficientemente próximo à Terra, para que possamos supor a força da gravidade como sendo constante.

Vamos supor que no instante $t = 0$ um objeto de massa m seja lançado de uma altura s_0 acima da Terra com um vetor velocidade inicial de \mathbf{v}_0 . Além disso, introduzamos um sistema de coordenadas xy , conforme mostrado na Figura 13.6.7. Nesse sistema de coordenadas, o sentido y positivo é para cima, a origem está na superfície da Terra e a localização inicial do

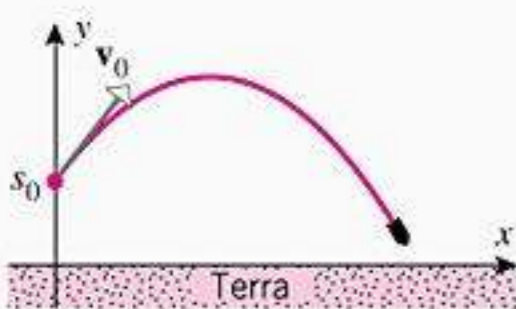


Figura 13.6.7

objeto é $(0, s_0)$. Nosso objetivo é usar os princípios básicos da Física para deduzir a função velocidade $\mathbf{v}(t)$ e a função posição $\mathbf{r}(t)$ a partir da função aceleração $\mathbf{a}(t)$ do objeto. Nosso ponto de partida é a observação física de que a força \mathbf{F} da gravidade da Terra sobre um objeto de massa m é dirigida para baixo e dada por

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$

onde g é a aceleração devida à gravidade (ver 9.4.3). Tem-se a partir desse fato e da segunda lei de Newton (19) que

$$m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$$

ou, cancelando m em ambos os lados,

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j} \tag{20}$$

Observe que essa função aceleração não envolve t e é, portanto, constante. Podemos, agora, obter a função velocidade $\mathbf{v}(t)$ integrando essa função aceleração e usando a condição inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ para determinar a constante de integração. Integrando (20) em relação a t e lembrando que $-g\mathbf{j}$ é constante, obtemos

$$\mathbf{v}(t) = \int -g\mathbf{j} dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{c}_1$$

onde \mathbf{c}_1 é um vetor constante de integração. Substituindo $t = 0$ nessa equação e usando a condição inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ obtemos $\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}_1$. Assim, a função velocidade do objeto é

$$\mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 \tag{21}$$

Para obter a função posição $\mathbf{r}(t)$ do objeto, integraremos a função velocidade e usaremos o conhecimento da posição inicial do objeto para determinar a constante de integração. Observe que o objeto tem coordenadas $(0, s_0)$ no instante $t = 0$, logo o vetor posição nesse instante é

$$\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i} + s_0\mathbf{j} = s_0\mathbf{j} \tag{22}$$

Essa é a condição inicial que necessitaremos para determinar a constante de integração. Integrando (21) em relação a t , obtemos

$$\mathbf{r}(t) = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{c}_2 \tag{23}$$

onde \mathbf{c}_2 é um outro vetor constante de integração. Substituindo $t = 0$ em (23) e usando a condição inicial (22), obtemos

$$s_0\mathbf{j} = \mathbf{c}_2$$

de modo que (23) pode ser escrito como

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + s_0\right)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 \tag{24}$$

Essa fórmula expressa a função posição do objeto em termos da posição e da velocidade inicial conhecidas.

■ EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO MOVIMENTO DE PROJÉTIL

As Fórmulas (21) e (24) podem ser usadas para obter equações paramétricas da posição e velocidade em termos da velocidade inicial do objeto e o ângulo que o vetor da velocidade inicial faz com o eixo x . Para esse fim, sejam $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$, α o ângulo que o vetor velocidade inicial \mathbf{v}_0 faz com o eixo x , v_x e v_y os componentes escalares horizontal e vertical de $\mathbf{v}(t)$ no instante t e x e y os componentes horizontal e vertical de $\mathbf{r}(t)$ no instante t . Como está ilustrado na Figura 13.6.8, o vetor velocidade inicial pode ser expresso como

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j} \tag{25}$$

Substituindo essa expressão em (24) e combinando componentes iguais, obtemos (verifique)

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left(s_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \tag{26}$$

Observe que a massa m do objeto não aparece nas Fórmulas (21) e (24) e portanto não tem influência sobre a trajetória ou a velocidade do objeto. Isso explica a famosa observação de Galileu que dois objetos de massas diferentes, deixados cair da mesma altura, atingirão o chão no mesmo instante se for ignorada a resistência do ar.

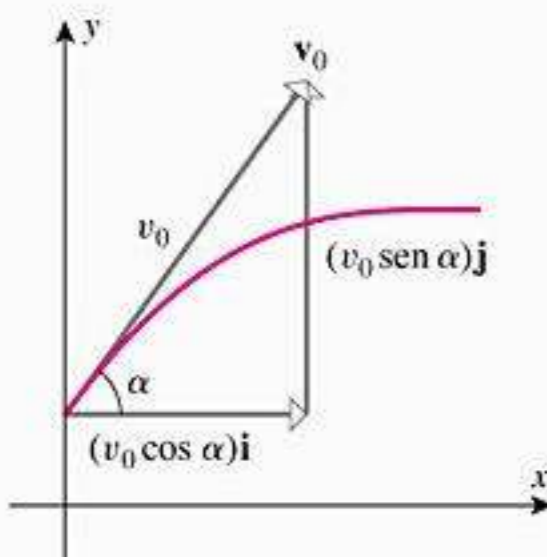


Figura 13.6.8

que é equivalente às equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = s_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (27)$$

Analogamente, substituindo (25) em (21) e combinando componentes iguais, obtemos

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\mathbf{j}$$

que é equivalente às equações paramétricas

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad (28)$$

O parâmetro t pode ser eliminado em (27) resolvendo a primeira equação para t e substituindo na segunda equação. Deixamos para o leitor mostrar que disso resulta

$$y = s_0 + (\operatorname{tg} \alpha)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 \quad (29)$$

que é a equação de uma parábola, já que o lado direito é um polinômio quadrático em x . Assim, mostramos que a trajetória de um projétil é um arco parabólico.

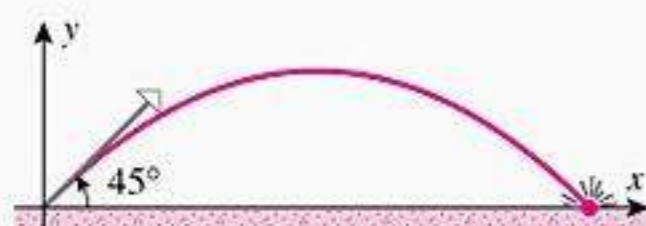


Figura 13.6.9

► **Exemplo 5** Um projétil lançado por um canhão tem uma velocidade na boca do canhão de 800 pés/s. O cano faz um ângulo de 45° com a horizontal e, para simplificar, vamos supor que a abertura do cano esteja ao nível do solo.

- Obtenha equações paramétricas para a trajetória do projétil em relação ao sistema de coordenadas da Figura 13.6.9.
- Que altura atinge o projétil?
- Que distância o projétil percorre horizontalmente?
- Qual é a velocidade do projétil no ponto de impacto com o chão?

Solução (a) A partir de (27) com $v_0 = 800$ pés/s, $\alpha = 45^\circ$, $s_0 = 0$ pés (uma vez que o projétil começa ao nível do solo) e $g = 32$ pés/s², obtemos as equações paramétricas

$$x = (800 \cos 45^\circ)t, \quad y = (800 \sin 45^\circ)t - 16t^2 \quad (t \geq 0)$$

que simplificam para

$$x = 400\sqrt{2}t, \quad y = 400\sqrt{2}t - 16t^2 \quad (t \geq 0) \quad (30)$$

Solução (b) A altura máxima do projétil é o valor máximo de y em (30), que ocorre quando $dy/dt = 0$, isto é, quando

$$400\sqrt{2} - 32t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo esse valor de t em (30), obtemos

$$y = 5000 \text{ pés}$$

como a altura máxima do projétil.

Solução (c) O projétil atingirá o solo quando $y = 0$. A partir de (30), isso ocorre quando

$$400\sqrt{2}t - 16t^2 = 0 \quad \text{ou} \quad t(400\sqrt{2} - 16t) = 0$$

A solução $t = 0$ corresponde à posição inicial do projétil e a solução $t = 25\sqrt{2}$ ao instante do impacto. Substituindo o último valor na equação de x em (30), obtemos

$$x = 20.000 \text{ pés}$$

como a distância horizontal percorrida pelo projétil.

Solução (d) A partir de (30), a função posição do projétil é

$$\mathbf{r}(t) = 400\sqrt{2}t\mathbf{i} + (400\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}$$

de modo que a função velocidade é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 400\sqrt{2}\mathbf{i} + (400\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j}$$

Da parte (c), o impacto ocorre quando $t = 25\sqrt{2}$, logo o vetor velocidade nesse ponto é

$$\mathbf{v}(25\sqrt{2}) = 400\sqrt{2}\mathbf{i} + [400\sqrt{2} - 32(25\sqrt{2})]\mathbf{j} = 400\sqrt{2}\mathbf{i} - 400\sqrt{2}\mathbf{j}$$

Assim, a velocidade no impacto é de

$$\|\mathbf{v}(25\sqrt{2})\| = \sqrt{(400\sqrt{2})^2 + (-400\sqrt{2})^2} = 800 \text{ pés/s} \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.6 (Ver página 914 para respostas.)

1. Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula, então a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula no instante t são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{v}(t) = \underline{\hspace{2cm}}, \mathbf{a}(t) = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{ds}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula, então o deslocamento da partícula ao longo do intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é $\underline{\hspace{2cm}}$ e a distância s percorrida pela partícula durante esse intervalo de tempo é dada pela integral $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. O componente tangencial escalar da aceleração é dado pela fórmula $\underline{\hspace{2cm}}$ e o componente normal escalar da aceleração é dado pela fórmula $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. O modelo de movimento de projétil

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + s_0\right)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

descreve o movimento de um objeto com aceleração constante $\mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$ e função velocidade $\mathbf{v}(t) = \underline{\hspace{2cm}}$. A posição inicial do objeto é $\underline{\hspace{2cm}}$ e sua velocidade inicial é $\underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 13.6  Recurso Gráfico  CAS

1-4 Nestes exercícios, $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento no plano. Obtenha a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar em um instante arbitrário t . Esboce a trajetória da partícula junto com os vetores velocidade e aceleração no instante t indicado.

1. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}; t = \pi/3$
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; t = 2$
3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}; t = 0$
4. $\mathbf{r}(t) = (2 + 4t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}; t = 1$

5-8 Obtenha a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração em um dado instante t de uma partícula em movimento ao longo da curva dada.

5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}; t = 1$
6. $x = 1 + 3t, y = 2 - 4t, z = 7 + t; t = 2$
7. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t; t = \pi/4$
8. $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}; t = \pi/2$

ENFOCANDO CONCEITOS

9. Conforme ilustrado na figura abaixo, suponha que as equações do movimento de uma partícula movendo-se ao longo de uma trajetória elíptica sejam $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t$.
- (a) Mostre que a aceleração está dirigida para a origem.
 - (b) Mostre que a magnitude da aceleração é proporcional à distância da partícula à origem.

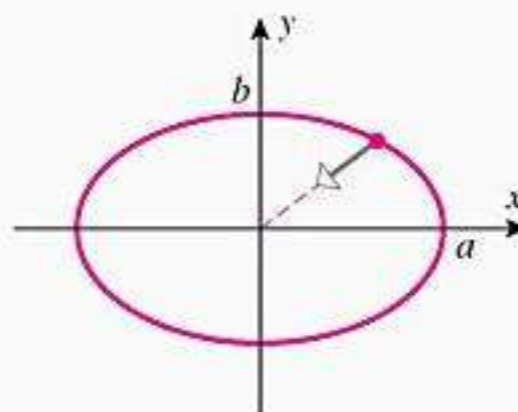


Figura Ex-9

10. Suponha que uma partícula vibre de tal maneira que sua função posição seja $\mathbf{r}(t) = 16 \sin \pi t\mathbf{i} + 4 \cos 2\pi t\mathbf{j}$, onde a distância está em milímetros e t está em segundos.

- a Determine a equação da aceleração em $t=1$
- b trace a trajetória e encontre uma curva parabólica
- c trace a trajetória e encontre a tangente à curva

11. Uma partícula se move no plano xy com aceleração $\mathbf{a} = 2t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$. Se a partícula está em $(1, 1)$ em $t=0$, determine sua velocidade em $t=1$.

12. O vetor posição $\mathbf{r}(t)$ de uma partícula é $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$. Determine a velocidade e a aceleração em $t=1$.

- a Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=1$
- b Substitua $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ na equação $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ e determine a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=1$

13. Uma partícula se move no plano xy com velocidade $\mathbf{v} = 12\sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$, $t > 0$. Determine a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=1$.

14. Uma partícula se move no plano xy com velocidade $\mathbf{v} = t - t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$. Determine a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=1$.

15. Uma partícula se move no plano xy com velocidade $\mathbf{v} = 3t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$.

- a Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ a $t=2\pi/3$
- b Qual é a equação da tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=2\pi/3$?
- c Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=2\pi/3$. Determine a equação da tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=2\pi/3$.

16. Uma partícula se move no plano xy com velocidade $\mathbf{v} = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$.

- a Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ a $t=\pi$
- b Qual é a equação da tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=\pi$?
- c Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=\pi$. Determine a equação da tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=\pi$.

17-20. Encontre a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=1$.

- 17. $\mathbf{a} = -c\mathbf{i} - t\mathbf{j}$ $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$
- 18. $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ $\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
- 19. $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + c\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$ $\mathbf{r}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$
- 20. $\mathbf{a} = t + 1 - t^2\mathbf{j} - e^{-2t}\mathbf{k}$ $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{k}$

21. Determine, até grau máximo, o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{a} para $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ em $t=1$.

22. Determine o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{a} em $t=1$ para $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$. Determine o ângulo.

23. a) Suponha que em $t=t_0$ um elétron tenha um vetor posição $\mathbf{r} = 3,5\mathbf{i} - 1,7\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e num instante mais tarde $t=t_1$ seu vetor posição é $\mathbf{r} = 4,2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2,4\mathbf{k}$. Qual é o comprimento do percurso durante o intervalo t_0 a t_1 ?

b) Suponha que, durante um certo intervalo de tempo, um rötön tenha um deslocamento $\Delta\mathbf{r} = 0,7\mathbf{i} + 2,9\mathbf{j} - 1,2\mathbf{k}$ e seu vetor posição final seja $\mathbf{r} = 3, \mathbf{k}$. Qual é o vetor posição inicial?

24. Suponha que a trajetória de uma partícula em xy seja um círculo no plano xy e a velocidade $\mathbf{v} = 5c - 2\pi t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$.

- a Encontre a equação da trajetória e o comprimento do percurso durante o intervalo $t=0$ a $t=1$.
- b Qual é a direção da velocidade da partícula durante o intervalo $t=0$ a $t=1$?

25-28. Encontre o deslocamento e a direção da trajetória durante o intervalo $t=0$ a $t=1$.

- 25. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}$; $1 \leq t \leq 3$
- 26. $\mathbf{r} = (1 - 3\cos t)\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 3\pi/2$
- 27. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq \ln 3$
- 28. $\mathbf{r} = \cos 2t\mathbf{i} + (1 - \cos 2t)\mathbf{j} + (3 + \frac{1}{2}\cos 2t)\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq \pi$

29-30. São as trajetórias de uma partícula que se move no plano xy com velocidade $\mathbf{v} = 3t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$. Determine a equação da trajetória e a tangente à curva em $t=0$ e a equação da tangente à curva em $t=2\pi/3$.

- 29. $\mathbf{r}_1 = 2\cos 3t\mathbf{i} + 2\sin 3t\mathbf{j}$
 $\mathbf{r}_2 = 2\cos(t^2)\mathbf{i} + 2\sin(t^2)\mathbf{j}$ ($t \geq 0$)
- 30. $\mathbf{r}_1 = (3 + 2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}_2 = (5 - 2t^3)\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

31-38. Encontre a equação da trajetória e o comprimento da trajetória.

- a) Calcule o comprimento da trajetória e o comprimento da trajetória em t em xy .
- b) Calcule o comprimento da trajetória e o comprimento da trajetória em t em xy .
- c) Calcule a curvatura da trajetória em $t=0$ e a curvatura da trajetória em $t=1$.

- 31. $\mathbf{r} = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$ $t=0$
- 32. $\mathbf{r} = \cos(t^2)\mathbf{i} + \sin(t^2)\mathbf{j}$; $t = \sqrt{\pi}/2$
- 33. $\mathbf{r} = t^3 - 2t\mathbf{i} + t^2 - 4\mathbf{j}$ $t=1$
- 34. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ $t=\pi/4$
- 35. $\mathbf{r} = 1/t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ $t=1$
- 36. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ $t=0$
- 37. $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} - \cos 2t\mathbf{k}$ $t=\pi/2$
- 38. $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ $t=1$

39-42 Nestes exercícios, \mathbf{v} e \mathbf{a} são dadas num certo instante de tempo. Determine a_T , a_N , \mathbf{T} e \mathbf{N} nesse instante.

39. $\mathbf{v} = -4\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ 40. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$
 41. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
 42. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

43-46 É dada a velocidade escalar $\|\mathbf{v}\|$ de uma partícula num instante de tempo arbitrário t . Determine o componente tangencial escalar da aceleração no instante indicado.

43. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3t^2 + 4}$; $t = 2$ 44. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{t^2 + e^{-3t}}$; $t = 0$
 45. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(4t - 1)^2 + \cos^2 \pi t}$; $t = \frac{1}{4}$
 46. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 3}$; $t = 1$

47. O acelerador nuclear do Laboratório Enrico Fermi é circular com um raio de 1 km. Encontre o componente normal escalar da aceleração de um próton movendo-se ao longo do acelerador com uma velocidade constante de $2,9 \times 10^5$ km/s.
 48. Suponha que uma partícula se mova com aceleração não-nula ao longo da curva $y = f(x)$. Use a parte (b) do Exercício 19 da Seção 13.5 para mostrar que o vetor aceleração é tangente à curva em cada ponto em que $f''(x) = 0$.

49-50 Use a informação dada e o Exercício 19 da Seção 13.5 para determinar o componente normal escalar da aceleração como uma função de x .

49. Uma partícula move-se ao longo da parábola $y = x^2$ com uma velocidade constante de 3 unidades por segundo.
 50. Uma partícula move-se ao longo da curva $x = \ln y$ com uma velocidade constante de 2 unidades por segundo.

51-52 Use a informação dada para determinar o componente normal escalar da aceleração no instante $t = 1$.

51. $\mathbf{a}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $a_T(1) = 3$
 52. $\|\mathbf{a}(1)\| = 9$; $a_T(1)\mathbf{T}(1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 53. Um automóvel viaja a uma velocidade constante ao longo de uma curva cujo raio de curvatura é de 1000 metros. Qual é a velocidade máxima permitida se o valor máximo aceito para o componente normal escalar da aceleração for de $1,5\text{m/s}^2$?
 54. Se um automóvel de massa m fizer uma curva, então o componente vetorial da aceleração para dentro $a_N\mathbf{N}$ é causado pela força de atrito \mathbf{F} da estrada. Assim, segue da forma vetorial da segunda lei de Newton [Equação (19)] que a força de atrito e o componente escalar normal da aceleração estão relacionados pela equação $\mathbf{F} = ma_N\mathbf{N}$. Assim,

$$\|\mathbf{F}\| = m\kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Use esse resultado para encontrar a magnitude da força de atrito em newtons exercida pela estrada sobre um carrinho de kart

de 500 kg, dirigindo a uma velocidade de 10 km/h ao longo de uma pista circular com raio de 15 m. [Nota: $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$]

55. Um projétil é disparado a partir do nível do chão com uma velocidade na boca de canhão de 320 pés/s e ângulo de elevação de 60° . Determine:
 (a) as equações paramétricas da trajetória do projétil;
 (b) a altura máxima alcançada pelo projétil;
 (c) a distância horizontal percorrida pelo projétil;
 (d) a velocidade do projétil no impacto.
 56. Resolva o Exercício 55 supondo que a velocidade na boca do canhão seja de 980 m/s e o ângulo de elevação de 45° .
 57. Uma pedra é atirada para baixo do topo de um prédio a 168 pés de altura a um ângulo de 60° com a horizontal. A que distância da base do prédio a pedra atinge o solo se sua velocidade inicial for de 80 pés/s?
 58. Resolva o Exercício 57 supondo que a pedra seja atirada horizontalmente com uma velocidade de 80 pés/s.
 59. Um projétil é disparado do nível do chão com um ângulo de elevação de 30° . Qual deveria ser a velocidade na boca do canhão a fim de que a altura máxima do projétil seja 2500 pés?
 60. Um projétil, disparado do nível do chão com um ângulo de elevação de 45° , atinge o chão a uma distância de 24.500 m. Calcule a velocidade do projétil na boca do canhão.
 61. Determine dois ângulos de elevação que irão possibilitar um projétil atirado a partir do nível do chão com uma velocidade da boca do canhão de 800 pés/s atingir no chão um alvo que está a 10.000 pés.
 62. Uma bola rola para fora de uma mesa de 4 pés de altura, enquanto move-se a uma velocidade constante de 5 pés/s.
 (a) Quanto tempo irá levar para a bola atingir o chão após deixar a mesa?
 (b) Com que velocidade a bola atinge o chão?
 (c) Se uma bola fosse deixada cair a partir do repouso da mesma mesa exatamente quando a outra bola rolando deixa a mesa, qual das duas atingirá o chão primeiro? Justifique sua resposta.
 63. Na figura abaixo, uma mangueira de incêndio joga água com uma velocidade inicial de 40 pés/s a um ângulo de 60° com a horizontal.
 (a) Confirme que a água irá passar acima do canto A.
 (b) Confirme que a água irá atingir o telhado.
 (c) A que distância do ponto A a água irá atingir o telhado?

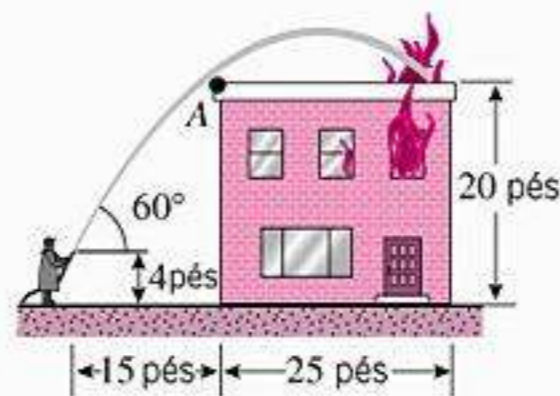


Figura Ex-63

64. Qual é a velocidade inicial mínima que irá permitir à água do Exercício 63 atingir o telhado?

65. Conforme mostra a figura abaixo, água é esguichada de uma mangueira com uma velocidade inicial de 35 m/s a um ângulo de 45° com a horizontal.

- (a) Qual é o raio de curvatura do jato de água no ponto em que ele deixa a mangueira?
- (b) Qual é a máxima altura do jato acima da ponta da mangueira?

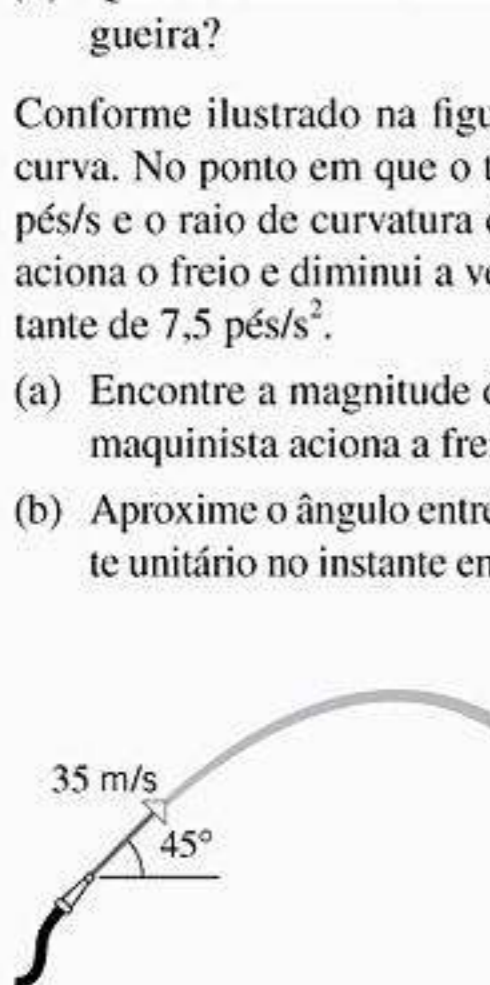


Figura Ex-65

66. Conforme ilustrado na figura abaixo, um trem percorre uma curva. No ponto em que o trem está a uma velocidade de 132 pés/s e o raio de curvatura da curva é 3.000 pés, o maquinista aciona o freio e diminui a velocidade do trem a uma taxa constante de 7,5 pés/s².

- (a) Encontre a magnitude da aceleração no instante em que o maquinista aciona o freio.
- (b) Aproxime o ângulo entre o vetor aceleração e o vetor tangente unitário no instante em que o maquinista aciona o freio.

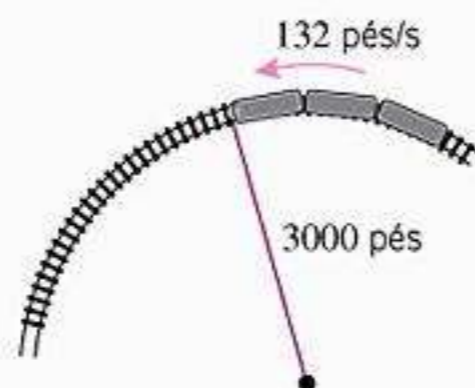


Figura Ex-66

67. Um projétil é disparado de um ponto ao nível do chão com ângulo de elevação α e uma velocidade de boca v_0 .

- (a) Mostre que a altura máxima atingida pelo projétil é

$$\text{altura máxima} = \frac{(v_0 \text{ sen } \alpha)^2}{2g}$$

- (b) O *alcance horizontal* R do projétil é a distância horizontal percorrida até retornar ao solo. Mostre que $R = (v_0^2 \text{ sen } 2\alpha)/g$. Para que ângulo de elevação o alcance será máximo? Qual é o alcance máximo?

68. Um projétil é disparado a partir do nível do solo com um ângulo de elevação α e uma velocidade de boca v_0 . Obtenha dois ângulos que podem ser usados para atingir um alvo ao nível do solo que está a 3/4 do alcance máximo do projétil. Expresse sua resposta até o décimo de grau mais próximo. [Sugestão: ver Exercício 67(b).]

69. No instante $t = 0$, uma bola de beisebol que está 5 pés acima do solo é atingida com um bastão. A bola deixa o bastão com uma velocidade de 80 pés/s em um ângulo de 30° acima da horizontal.

- (a) Quanto tempo leva até a bola atingir o chão? Expresse a sua resposta até o centésimo de segundo mais próximo.
- (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a distância horizontal percorrida pela bola. Expresse a sua resposta até o décimo de pé mais próximo.

70. Repita o Exercício 69, supondo que a bola deixe o bastão a uma velocidade de 70 pés/s num ângulo de 60° acima da horizontal.

C 71. No instante $t = 0$, um esquiador deixa a extremidade de uma rampa com uma velocidade de v_0 pés/s a um ângulo α com a horizontal (ver figura a seguir). Ele atinge o solo a 259 pés em 2,9 segundos.

- (a) Aproxime v_0 até o pés/s mais próximo e α até o grau mais próximo.
- (b) Use um CAS ou uma calculadora com capacidade de integração para aproximar a distância percorrida pelo esquiador. (Use $g = 32$ pés/s² como aceleração devida à gravidade).

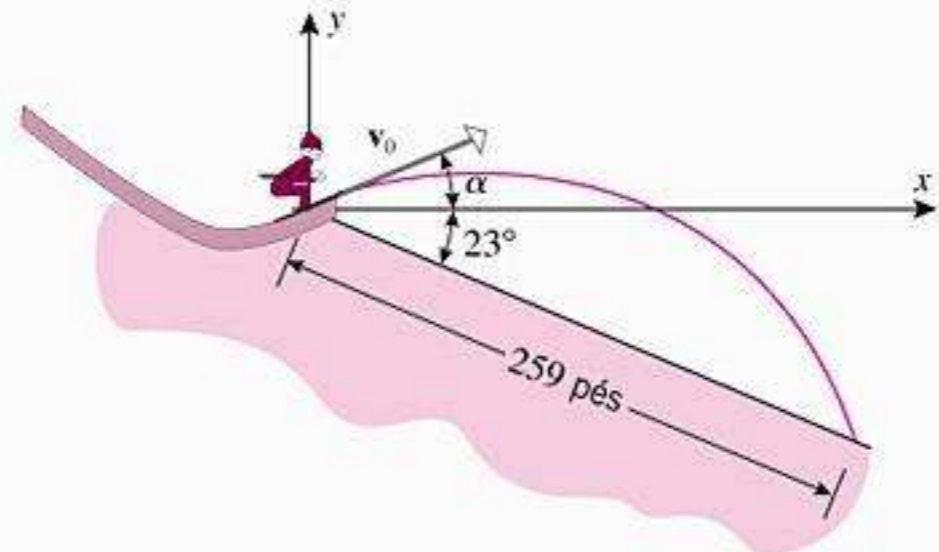


Figura Ex-71

ENFOCANDO CONCEITOS

72. No instante $t = 0$, um projétil é atirado de uma altura h acima do solo, a um ângulo de elevação de α com uma velocidade v . Seja R a distância horizontal até o ponto onde o projétil atinge o chão.

- (a) Mostre que α e R devem satisfazer a equação

$$g(\sec^2 \alpha)R^2 - 2v^2(\text{tg } \alpha)R - 2v^2h = 0$$

- (b) Se g , h e v forem constantes, então a equação da parte (a) define R implicitamente como uma função de α . Seja R_0 o valor máximo de R e α_0 o valor de α quando $R = R_0$. Use diferenciação implícita para encontrar $dR/d\alpha$ e mostrar que

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{v^2}{gR_0}$$

[Sugestão: suponha que $dR/d\alpha = 0$ quando R for máximo.]

- (c) Use os resultados nas partes (a) e (b) para mostrar que

$$R_0 = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gh}$$

e

$$\alpha_0 = \text{arc tg } \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}$$

73. Suponha que a função posição de um ponto em movimento no plano xy seja

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Essa equação pode ser expressa em coordenadas polares fazendo a substituição

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \text{ sen } \theta(t)$$

Disso resulta

$$\mathbf{r} = r(t) \cos \theta(t)\mathbf{i} + r(t) \text{ sen } \theta(t)\mathbf{j}$$

que pode ser expresso como

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r(t)$$

onde $\mathbf{e}_r = \cos \theta(t)\mathbf{i} + \text{sen } \theta(t)\mathbf{j}$.

a) O vetor \mathbf{e}_r é um vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que o vetor posição \mathbf{r} e $r > 0$ e $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$ é um vetor unitário perpendicular a \mathbf{e}_r girado no sentido anti-horário por um ângulo de $\pi/2$ e \mathbf{e}_r é chamado de **vetor radial unitário** e \mathbf{e}_θ é chamado de **vetor transversal unitário** (ver figura a seguir).

b) O vetor velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ pode ser expresso em termos de componentes radiais e transversais.

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

c) O vetor aceleração $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ pode ser expresso em termos de componentes radiais e transversais.

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{e}_\theta$$

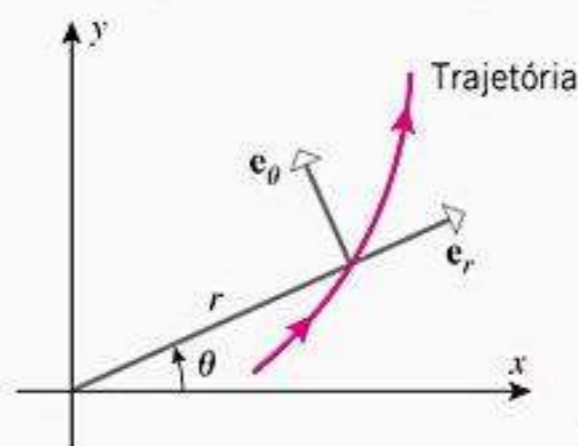


Figura Ex-73

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.6

1. $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \|\mathbf{v}(t)\|$ 2. $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}(t)\| dt$ 3. $\frac{d^2s}{dt^2} = \kappa (ds/dt)^2$ 4. $-g\mathbf{j} = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 = s_0\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$

13.7 LEIS DE KEPLER DO MOVIMENTO PLANETÁRIO

Um dos grandes avanços na história da Astronomia ocorreu no início dos anos 1600, quando Johannes Kepler* deduziu, a partir de dados empíricos, que todos os planetas em nosso sistema solar movem-se em órbitas elípticas com o Sol em um foco. Subseqüentemente, Isaac Newton mostrou matematicamente que tal movimento planetário é uma consequência de uma lei do quadrado inverso da atração gravitacional. Nesta seção, usaremos os conceitos desenvolvidos nas seções precedentes deste capítulo para deduzir as três leis básicas do movimento planetário, conhecidas como as **leis de Kepler**.

■ LEIS DE KEPLER

As Seções 11, 12 e 13, enunciam a seguinte lei do movimento planetário que foram publicadas por Johannes Kepler em 1609, no seu livro conhecido como *Astronomia Nova*.

13.7.1 LEIS DE KEPLER

- Primeira lei **Lei das Órbitas**: A órbita de um planeta em torno do Sol é uma elipse com o Sol em um dos focos.
- Segunda lei **Lei das Áreas**: A área varrida por um planeta em um determinado intervalo de tempo é diretamente proporcional ao intervalo de tempo.
- Terceira lei **Lei dos Períodos**: O quadrado do período orbital de um planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância média entre o planeta e o Sol.

* Ver biografia na página 77.

■ FORÇAS CENTRAIS

Se uma partícula mover-se sob a influência de uma *única* força que está sempre voltada para um ponto fixo O , então diz-se que a partícula está em movimento num *campo de força central*. A força é chamada de *força central* e o ponto O é chamado de *centro da força*. Por exemplo, no modelo mais simples do movimento planetário, supõe-se que a única força agindo sobre o planeta seja a força da gravidade do Sol, voltada em direção ao centro do Sol. Esse modelo, que produz as leis de Kepler, ignora as forças que outros objetos celestes exercem sobre o planeta, bem como o efeito menor que a gravidade do planeta tem sobre o Sol. Os modelos de forças centrais são também usados para estudar o movimento dos cometas, dos asteróides, das luas e dos satélites artificiais. Eles também têm importantes aplicações no eletromagnetismo. Nosso objetivo, nesta seção, é desenvolver alguns princípios básicos sobre os campos de forças centrais e, então, usar esses resultados para deduzir as leis de Kepler.

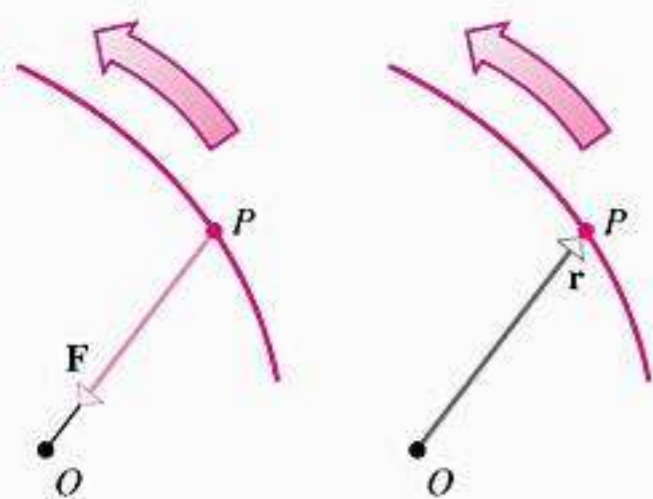


Figura 13.7.1

Suponha que uma partícula P de massa m move-se em um campo de força central devido a uma força \mathbf{F} que é voltada para um ponto fixado O e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor posição de O a P (Figura 13.7.1). Sejam $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ as funções velocidade e aceleração da partícula e suponha que \mathbf{F} e \mathbf{a} estejam relacionadas pela segunda lei de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Nosso primeiro objetivo é mostrar que a partícula P move-se em um plano contendo o ponto O . Para isso, observe que \mathbf{a} tem a mesma direção e sentido de \mathbf{F} pela segunda lei de Newton, e isso implica que \mathbf{a} e \mathbf{r} são vetores de mesma direção com sentidos opostos. Assim, segue da parte (c) do Teorema 12.4.5 que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Como a velocidade e a aceleração da partícula são dadas por $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, respectivamente, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Integrando os lados esquerdo e direito desta equação em relação a t , obtemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (2)$$

onde \mathbf{b} é uma constante (independente de t). Entretanto, \mathbf{b} é ortogonal a ambos \mathbf{r} e \mathbf{v} , logo podemos concluir que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ situam-se em um plano fixo contendo o ponto O .

Os astrônomos chamam o plano que contém a órbita de um planeta a *eclíptica* do planeta.

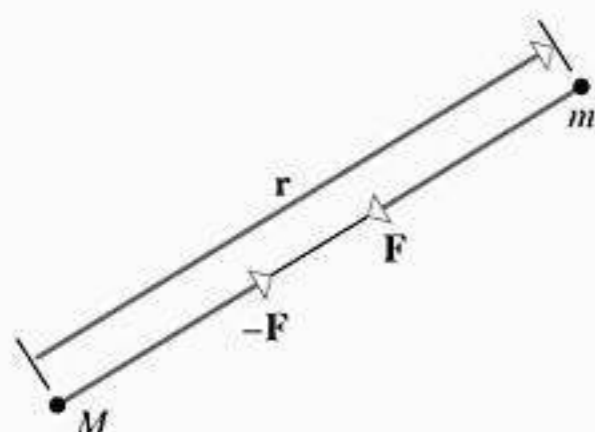
■ LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON

Nosso próximo objetivo é deduzir a função posição de uma partícula movendo-se sob uma força central em um sistema de coordenadas polares. Para alcançar isso, necessitaremos do seguinte resultado, conhecido como *Lei da Gravitação Universal de Newton*.

13.7.2 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON Toda partícula de matéria no universo atrai qualquer outra partícula de matéria no universo com uma força que é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Especificamente, se uma partícula de massa M e uma partícula de massa m estão a uma distância r uma da outra, então elas se atraem com forças iguais e opostas \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ de magnitude

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{r^2} \quad (3)$$

onde G é uma constante chamada de *constante gravitacional universal*.



M exerce uma força \mathbf{F} sobre m e m exerce a força $-\mathbf{F}$ sobre M .

Figura 13.7.2

Para obter uma fórmula para a força vetorial \mathbf{F} que a massa M exerce sobre a massa m , tomaremos \mathbf{r} como sendo o vetor posição da massa M para a massa m (Figura 13.7.2). Assim,

a distância r entre as massas é $\|\mathbf{r}\|$ e a força \mathbf{F} pode ser expressa em termos de \mathbf{r} como

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \|\mathbf{F}\| \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

que, por (3), pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \tag{4}$$

Inicialmente, queremos encontrar uma fórmula para a função aceleração. Para alcançar isso, usamos a Fórmula (4) e a segunda lei de Newton, obtendo

$$m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$$

e portanto

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \tag{5}$$

Para obter uma fórmula para a função posição da massa m , precisaremos introduzir um sistema de coordenadas e fazer algumas hipóteses sobre as condições iniciais. Vamos supor:

- A distância r de m a M é mínima no instante $t = 0$.
- A massa m tem vetores posição e velocidade não-nulos \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 no instante $t = 0$.
- Um sistema de coordenadas polares é introduzido com seu pólo na massa M e orientado de tal modo que $\theta = 0$ no instante $t = 0$.
- O vetor \mathbf{v}_0 é perpendicular ao eixo polar no instante $t = 0$.

Além disso, para assegurar que o ângulo polar θ cresça com t , concordaremos em observar este sistema de coordenadas polares olhando em direção ao pólo a partir do ponto final do vetor $\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$. Veremos também, que é útil superpor um sistema de coordenadas xyz ao sistema de coordenadas polares com eixo positivo z na direção e sentido de \mathbf{b} (Figura 13.7.3).

Para fins computacionais, será útil denotar $\|\mathbf{r}_0\|$ por r_0 e $\|\mathbf{v}_0\|$ por v_0 , caso em que podemos expressar os vetores \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 no sistema de coordenadas xyz como

$$\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$$

e o vetor \mathbf{b} como

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = r_0\mathbf{i} \times v_0\mathbf{j} = r_0v_0\mathbf{k} \tag{6}$$

(Figura 13.7.4). Será útil também introduzir o vetor unitário

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j} \tag{7}$$

que nos permite expressar a forma polar do vetor posição \mathbf{r} como

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \text{sen } \theta \mathbf{j} = r(\cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}) = r\mathbf{u} \tag{8}$$

e expressar o vetor aceleração \mathbf{a} em termos de \mathbf{u} reescrevendo (5) como

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{u} \tag{9}$$

Estamos, agora, prontos para deduzir a função posição da massa m em coordenadas polares. Inicialmente, lembremos de (2) que o vetor $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é constante, portanto segue de (6) que a relação

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r_0v_0\mathbf{k} \tag{10}$$

é válida para *todos* valores de t . Agora, examinaremos \mathbf{b} de outro ponto de vista. Segue de (8) que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = r \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \mathbf{u}$$

Observe na Fórmula (5) que a aceleração \mathbf{a} não envolve m . Assim, a aceleração de um planeta não é afetada pela sua própria massa.

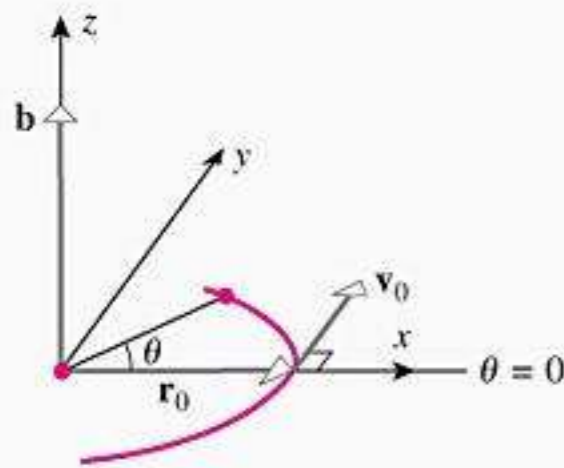


Figura 13.7.3

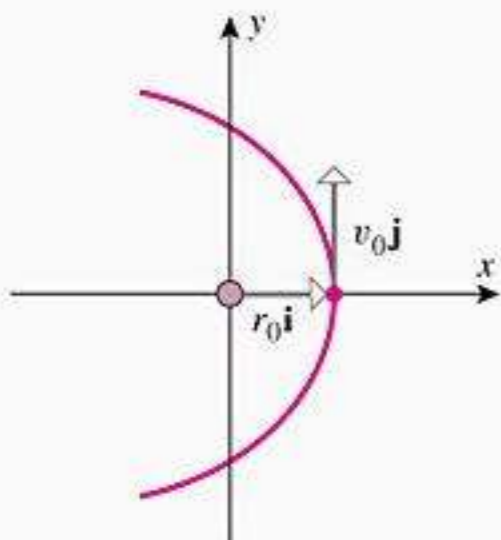


Figura 13.7.4

e, portanto,

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (r\mathbf{u}) \times \left(r \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \mathbf{u} \right) = r^2 \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + r \frac{dr}{dt} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = r^2 \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (11)$$

Mas (7) implica que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

logo,

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (11), obtém-se

$$\mathbf{b} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \quad (13)$$

Assim, segue de (7), (9) e (13) que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\frac{GM}{r^2} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \right) \\ &= GM (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \frac{d\theta}{dt} = GM \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

A partir dessa fórmula e o fato de que $d\mathbf{b}/dt = \mathbf{0}$ (pois \mathbf{b} é constante), obtemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = GM \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Integrando ambos os lados desta equação em relação a t , obtém-se

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM\mathbf{u} + \mathbf{C} \quad (15)$$

onde \mathbf{C} é um vetor constante de integração. Essa constante pode ser obtida calculando ambos os lados da equação em $t = 0$. Deixamos como exercício mostrar que

$$\mathbf{C} = (r_0 v_0^2 - GM)\mathbf{i} \quad (16)$$

do que segue

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM\mathbf{u} + (r_0 v_0^2 - GM)\mathbf{i} \quad (17)$$

Podemos, agora, obter a função posição calculando o produto misto $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ de duas maneiras. Primeiro, usamos (10) e a propriedade (11) da Seção 12.4 para obter

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = r_0^2 v_0^2 \quad (18)$$

e, em seguida, usamos (17) para obter

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\mathbf{u}) + \mathbf{r} \cdot (r_0 v_0^2 - GM)\mathbf{i} \\ &= \mathbf{r} \cdot \left(GM \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + r\mathbf{u} \cdot (r_0 v_0^2 - GM)\mathbf{i} \\ &= GMr + r(r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta \end{aligned}$$

Se, agora, igualarmos isso com (18), obteremos

$$r_0^2 v_0^2 = GMr + r(r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta$$

que, resolvendo para r , dá

$$r = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM + (r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta} = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{GM}}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \right) \cos \theta} \quad (19)$$

ou, mais simplesmente,

$$r = \frac{k}{1 + e \cos \theta} \quad (20)$$

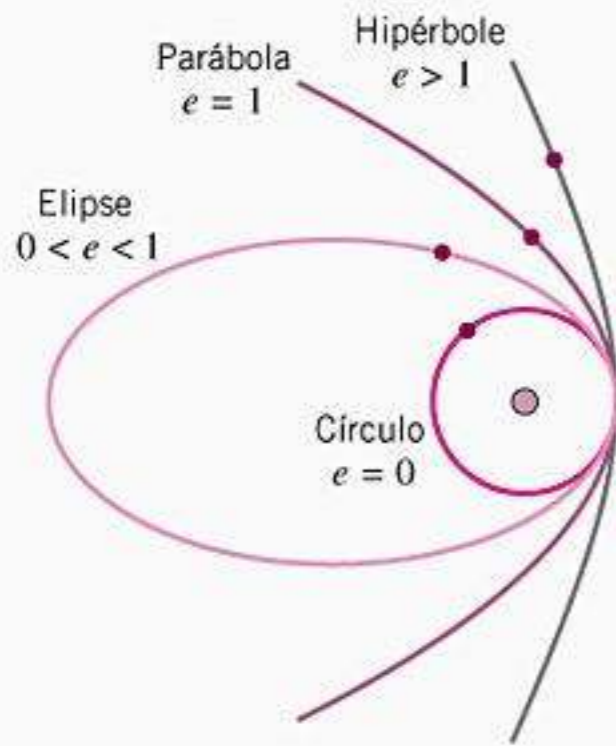


Figura 13.7.5

onde

$$k = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \quad \text{e} \quad e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (21-22)$$

Deixaremos como exercício mostrar que $e \geq 0$. Aceitando isso, segue que comparando (20) com a Fórmula (3) da Seção 11.6 concluímos que a trajetória é uma seção cônica com excentricidade e , o foco no pólo e $d = k/e$. Assim, dependendo se $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$, a trajetória será, respectivamente, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole (Figura 13.7.5).

Note a partir da Fórmula (22) que e depende de r_0 e v_0 , logo a forma exata da trajetória é determinada pela massa M e as condições iniciais. Se as condições iniciais são tais que $e < 1$, então a massa m é capturada em uma órbita elíptica; caso contrário, a massa m “escapa” e nunca retorna para a sua posição inicial. Conseqüentemente, a velocidade inicial que produz uma excentricidade de $e = 1$ é chamada de *velocidade de escape* e é denotada por v_{esc} . Assim, segue de (22) que

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (23)$$

(verifique).

■ **AS PRIMEIRA E SEGUNDA LEIS DE KEPLER**

Segue de nossa discussão geral de campos de forças centrais que os planetas têm órbitas elípticas com o Sol no foco, o que é a primeira lei de Kepler. Para deduzir a segunda lei de Kepler, começamos igualando (10) e (13) para obter

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0 v_0 \quad (24)$$

Para provar que a reta radial do centro do Sol ao centro de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais, sejam $r = f(\theta)$ a equação polar do planeta e A a área varrida pela reta radial quando ela varia de qualquer ângulo fixado θ_0 para um ângulo θ . Segue da fórmula de área em 11.3.2 que A pode ser expressa como

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} [f(\phi)]^2 d\phi$$

em que a variável muda ϕ é introduzida na integração para reservar θ como limite superior. Segue, agora, da Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e da regra da cadeia que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Assim, decorre de (24) que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \quad (25)$$

o que mostra que A varia a uma taxa constante. Isso implica que áreas iguais são varridas em tempos iguais.

■ **A TERCEIRA LEI DE KEPLER**

Para deduzir a terceira de lei de Kepler, sejam a e b os semi-eixos maior e menor da órbita elíptica; lembremos que a área dessa elipse é πab . Integrando (25), segue que em t unidades de tempo a reta radial varre uma área de $A = \frac{1}{2} r_0 v_0 t$. Assim, se T denotar o tempo necessário para o planeta completar uma revolução em torno do Sol (o período), então a reta radial varrerá toda a área da elipse durante aquele tempo e, portanto,

$$\pi ab = \frac{1}{2} r_0 v_0 T$$

da qual obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{r_0^2 v_0^2} \tag{26}$$

Entretanto, segue da Fórmula (1) da Seção 11.6 e da relação $c^2 = a^2 - b^2$ para uma elipse que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Assim, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e, portanto, (26) pode ser escrito como

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1 - e^2)}{r_0^2 v_0^2} \tag{27}$$

Mas comparando a Equação (20) com a Equação (17) da Seção 11.6, vemos que

$$k = a(1 - e^2)$$

Finalmente, substituindo essa expressão e (21) em (27), obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{r_0^2 v_0^2} k = \frac{4\pi^2 a^3}{r_0^2 v_0^2} \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{28}$$

Assim, provamos que T^2 é proporcional a a^3 , que é a terceira lei de Kepler. Quando conveniente, a Fórmula (28) pode também ser expressa como

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \tag{29}$$

■ SATÉLITES ARTIFICIAIS

A segunda e a terceira leis de Kepler e a Fórmula (23) aplicam-se também a satélites que orbitam um corpo celeste; precisaremos apenas interpretar M como sendo a massa do corpo que está exercendo a força e m como sendo a massa do satélite. Os valores de GM que são exigidos em muitas das fórmulas nesta seção foram determinados experimentalmente para vários corpos atratores (Tabela 13.7.1).

Tabela 13.7.1

CORPO ATRATOR	SISTEMA INTERNACIONAL	SISTEMA BRITÂNICO DE ENGENHARIA
TERRA	$GM = 3,99 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ $GM = 3,99 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$	$GM = 1,41 \times 10^{16} \text{ pés}^3/\text{s}^2$ $GM = 1,24 \times 10^{12} \text{ milhas}^3/\text{h}^2$
SOL	$GM = 1,33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$ $GM = 1,33 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$	$GM = 4,69 \times 10^{21} \text{ pés}^3/\text{s}^2$ $GM = 4,13 \times 10^{17} \text{ milhas}^3/\text{h}^2$
LUA	$GM = 4,90 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$ $GM = 4,90 \times 10^3 \text{ km}^3/\text{s}^2$	$GM = 1,73 \times 10^{14} \text{ pés}^3/\text{s}^2$ $GM = 1,53 \times 10^{10} \text{ milhas}^3/\text{h}^2$

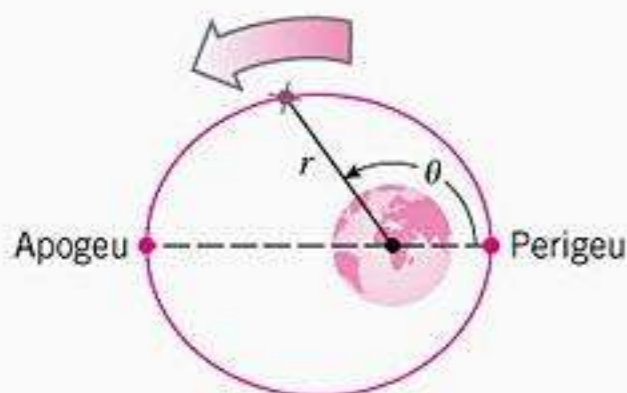


Figura 13.7.6

Lembre-se de que para as órbitas de planetas ao redor do Sol, o ponto no qual a distância entre o centro do planeta e o centro do Sol é máxima é chamado de *afélio* e o ponto no qual é mínima é chamado de *periélio*. Para os satélites em torno da Terra o ponto no qual a distância máxima ocorre é chamada de *apogeu* e o ponto no qual a distância mínima ocorre é chamada de *perigeu* (Figura 13.7.6). As distâncias reais entre os centros no apogeu e no perigeu são chamadas de *distância do apogeu* e *distância do perigeu*.

► **Exemplo 1** Uma órbita geossíncrona para um satélite é uma órbita circular em torno do Equador da Terra, na qual o satélite permanece fixado sobre um ponto do Equador. Use o fato de que a Terra faz uma revolução em torno de seu eixo a cada 24 horas, para determinar a altitude em milhas de um satélite de comunicações em órbita geossíncrona. Suponha que a Terra seja uma esfera com raio de 4000 milhas.

Solução Para permanecer fixado em relação a um ponto sobre o Equador, o satélite deve ter um período de $T = 24$ h. Segue de (28) ou (29) e do valor da Terra na Tabela 13.7.1 de $GM = 1,24 \times 10^{12}$ milhas³/h² que

$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(1.24 \times 10^{12})(24)^2}{4\pi^2}} \approx 26.250 \text{ milhas}$$

e, portanto, a altitude h do satélite é

$$h \approx 26.250 - 4000 = 22.250 \text{ milhas} \blacktriangleleft$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.7** (Ver página 921 para respostas.)

- Sejam G a constante gravitacional universal e M e m duas massas a uma distância r entre si.
 - De acordo com a Lei de Newton da Gravitação Universal, M e m se atraem uma à outra com uma força de magnitude _____.
 - Se \mathbf{r} for o vetor de posição de M para m , então a força de atração que a massa M exerce sobre a massa m é _____.
- Suponha que uma massa m esteja numa órbita em torno de uma massa M e que r_0 seja a distância mínima de m a M . Se G for a constante gravitacional universal então a velocidade “de escape” de m será _____.
- Para um planeta numa órbita elíptica em torno do Sol, qual é a potência do semi-eixo maior da órbita que é proporcional ao quadrado do período do planeta?
- Suponha que uma massa m esteja numa órbita em torno de uma massa M e que r_0 seja a distância mínima de m a M . Se v_0 for a velocidade escalar da massa m quando essa estiver a uma distância r_0 de M , e se G denotar a constante gravitacional universal, então a excentricidade da órbita será _____.

EXERCÍCIOS 13.7

Nos exercícios que requeiram valores numéricos, quando necessário, use a Tabela 13.7.1 e os seguintes valores:

- raio da Terra = 4000 milhas = 6440 km
- raio da Lua = 1080 milhas = 1740 km
- 1 ano (terrestre) = 365 dias

ENFOCANDO CONCEITOS

- Obtenha o valor de C dado na Fórmula (16), pondo $t = 0$ em (15).
 - Use as Fórmulas (7), (17) e (22) para mostrar que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM[(e + \cos \theta)\mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}]$$
 - Mostre que $\|\mathbf{v} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{b}\|$.
 - Use os resultados das partes (b) e (c) para mostrar que a velocidade de uma partícula em órbita elíptica é

$$v = \frac{v_0}{1+e} \sqrt{e^2 + 2e \cos \theta + 1}$$

- Suponha que uma partícula esteja numa órbita elíptica. Use a parte (d) para concluir que a distância da partícula

ao centro da força atinge um mínimo se, e somente se, a velocidade da partícula atinge um máximo. Analogamente, argumente que a distância da partícula ao centro da força atinge um máximo se, e somente se, a velocidade da partícula atinge um mínimo.

- Use o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que quando uma partícula em órbita elíptica com excentricidade e alcança uma extremidade do eixo menor, sua velocidade é

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

- Use o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que, para uma partícula em órbita elíptica com excentricidade e , as velocidades máxima e mínima estão relacionadas por

$$v_{\max} = v_{\min} \frac{1+e}{1-e}$$

- Use a Fórmula (22) e o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que a velocidade v de uma partícula em órbita circular de raio r_0 é constante e é dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

5. Suponha que uma partícula esteja numa órbita elíptica num campo de forças central em que o centro da força esteja num foco e sejam $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ as funções posição e velocidade da partícula, respectivamente. Sejam r_{\min} e r_{\max} as distância mínima e máxima da partícula ao centro de força e sejam v_{\min} e v_{\max} as velocidade mínima e máxima da partícula.
- Relembre a discussão sobre elipses em coordenadas polares na Seção 11.6 e mostre que se a elipse tem excentricidade e e semi-eixo maior a , então $r_{\min} = a(1 - e)$ e $r_{\max} = a(1 + e)$.
 - Explique por que r_{\min} e r_{\max} ocorrem em pontos em que \mathbf{r} e \mathbf{v} são ortogonais. [Sugestão: primeiro mostre que os valores extremos de $\|\mathbf{r}\|$ ocorrem em pontos críticos da função $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$.]
 - Explique por que v_{\min} e v_{\max} ocorrem em pontos em que \mathbf{r} e \mathbf{v} são ortogonais. [Sugestão: primeiro mostre que os valores extremos de $\|\mathbf{v}\|$ ocorrem em pontos críticos da função $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Em seguida use a Equação (5).]
 - Use a Equação (2) e as partes (b) e (c) para concluir que $r_{\max} v_{\min} = r_{\min} v_{\max}$.
6. Use os resultados nas partes (a) e (d) do Exercício 5 para deduzir a equação no Exercício 3.

7. Use o resultado do Exercício 4 para determinar a velocidade em km/s de um satélite em órbita circular 200 km acima da superfície da Terra.
8. Use o resultado do Exercício 4 para determinar a velocidade em mi/h de um satélite de comunicações que está em órbita geossíncrona em torno da Terra. [Ver Exemplo 1.]
9. Encontre a velocidade de escape em km/s para uma sonda espacial em órbita circular 300 km acima da superfície da Terra.

10. A constante de gravitação universal é aproximadamente

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$$

e o semi-eixo maior da órbita da Terra é aproximadamente

$$a = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$$

Estime a massa do Sol em kg.

11. (a) A excentricidade da órbita da Lua em torno da Terra é 0,055 e o semi-eixo maior é $a = 238.900$ milhas. Encontre as distâncias máxima e mínima entre a superfície da Terra e a superfície da Lua.
- (b) Determine o período da órbita da Lua em dias.
12. (a) O *Vanguard 1* foi lançado em março de 1958 com altitude de perigeu e apogeu acima da Terra de 649 km e 4340 km, respectivamente. Encontre o comprimento do semi-eixo maior de sua órbita.
- (b) Use o resultado da parte (a) do Exercício 19 da Seção 11.6 para encontrar a excentricidade de sua órbita.
- (c) Encontre o período do *Vanguard 1* em minutos.
13. (a) Suponha que uma sonda espacial esteja em órbita circular a uma altitude de 180 milhas acima da superfície da Terra. Use o Exercício 4 para determinar sua velocidade.
- (b) Durante um período muito curto de tempo, um propulsor da sonda espacial é acionado para aumentar a velocidade da sonda em 600 mi/h na direção do movimento. Encontre a excentricidade da órbita elíptica resultante e use o resultado da parte (b) do Exercício 5 para encontrar a altitude do apogeu.
14. Mostre que a grandeza e definida pela Fórmula (22) é não-negativa. [Sugestão: o eixo polar foi escolhido de tal modo que r é mínimo quando $\theta = 0$.]

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.7

1. (a) $\frac{GMm}{r^2}$ (b) $-\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$ 2. $\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ 3. 3 4. $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

1. Em palavras, o que se quer dizer com o gráfico de uma função vetorial?

2-5 Descreva o gráfico da equação.

2. $\mathbf{r} = (2 - 3t)\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$ 3. $\mathbf{r} = 3 \text{ sen } 2t\mathbf{i} + 3 \text{ cos } 2t\mathbf{j}$

4. $\mathbf{r} = 3 \text{ cos } t\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 5. $\mathbf{r} = -2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$

6. Descreva o gráfico das funções vetoriais.

(a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$

(b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad (0 \leq t \leq 1)$

(c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}'(t_0)$

7. Mostre que o gráfico de $\mathbf{r}(t) = t \text{ sen } \pi t \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t \text{ cos } \pi t \mathbf{k}$ está situado sobre a superfície de um cone e esboce o cone.

8. Obtenha equações paramétricas para a interseção das superfícies

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad 2x^2 + y^2 + 6z^2 = 24$$

e esboce a interseção.

9. Em palavras, dê uma descrição geométrica da afirmação $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$.

10. Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-t} \mathbf{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} \right)$.

11. Encontre equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t) = (t + \cos 2t)\mathbf{i} - (t^2 + t)\mathbf{j} + \sin tk$ no ponto em que $t = 0$.

12. Suponha que $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ sejam funções vetoriais lisas tais que $\mathbf{r}_1(0) = \langle -1, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{r}_2(0) = \langle 1, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{r}'_1(0) = \langle 1, 0, 1 \rangle$ e $\mathbf{r}'_2(0) = \langle 4, 0, 2 \rangle$. Use essa informação para calcular a derivada em $t = 0$ de cada função.

(a) $\mathbf{r}(t) = 3\mathbf{r}_1(t) + 2\mathbf{r}_2(t)$ (b) $\mathbf{r}(t) = [\ln(t + 1)]\mathbf{r}_1(t)$
 (c) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ (d) $f(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

13. Calcule $\int (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}) dt$.

14. Calcule $\int_0^{\pi/3} \langle \cos 3t, -\sin 3t \rangle dt$.

15. Resolva o problema de valor inicial vetorial

$$\mathbf{y}'(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

16. Resolva o problema de valor inicial vetorial

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

para uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ desconhecida.

17. Encontre o comprimento de arco do gráfico de

$$\mathbf{r}(t) = e^{\sqrt{2}t} \mathbf{i} + e^{-\sqrt{2}t} \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq \sqrt{2} \ln 2)$$

18. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial lisa de t com $\mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e que $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(2 - e^{t \ln 2})$. Encontre $\mathbf{r}'_1(1)$.

19. Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta que passa por $P(-1, 4, 3)$ e $Q(0, 2, 5)$, que tenha ponto de referência P e orienta a reta no sentido de P para Q .

20. Encontre a parametrização pelo comprimento de arco da curva

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, -e^t \sin t \rangle \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$$

que tenha a mesma orientação e que tenha $\mathbf{r}(0)$ como ponto de referência.

21. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial lisa. Dê as definições de $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$.

22. Encontre $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{N}(0)$ e $\mathbf{B}(0)$ para a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 2 \cos t, 2 \cos t + \frac{3}{\sqrt{5}} \sin t, \cos t - \frac{6}{\sqrt{5}} \sin t \right\rangle$$

23. Dê a definição de "curvatura" e explique o que significa geometricamente.

24. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma curva lisa com $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}''(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encontre a curvatura em $t = 0$.

25-28 Encontre a curvatura da curva no ponto dado.

25. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} - t \mathbf{k}; t = \pi/2$

26. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, e^{2t}, e^{-2t} \rangle; t = 0$

27. $y = \cos x; x = \pi/2$ 28. $y = \ln x; x = 1$

29. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja a função posição de uma partícula em movimento no espaço bi ou tridimensional. Em cada parte, explique o que a grandeza dada representa fisicamente.

(a) $\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|$ (b) $\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$ (c) $\|\mathbf{r}(t)\|$

30. (a) O que o Teorema 13.2.8 nos diz sobre o vetor velocidade de uma partícula que se move sobre uma esfera?

(b) O que o Teorema 13.2.8 nos diz sobre o vetor aceleração de uma partícula que se move com velocidade escalar constante?

(c) Mostre que a partícula com função posição

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 t} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 t} \sin t \mathbf{j} + \frac{1}{2} \cos t \mathbf{k}$$

move-se sobre uma esfera.

31. Como ilustrado na figura abaixo, suponha que uma partícula se move no sentido anti-horário em torno de um círculo de raio R centrado na origem a uma taxa constante de ω radianos por segundo. Isso é chamado de **movimento circular uniforme**. Supondo que a partícula esteja no ponto $(R, 0)$ no instante $t = 0$, então sua função posição será

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$$

(a) Mostre que o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ é sempre tangente ao círculo e que a partícula tem velocidade escalar constante v dada por

$$v = R\omega$$

(b) Mostre que o vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ está sempre voltado para o centro do círculo e tem magnitude constante a dada por

$$a = R\omega^2$$

(c) Mostre que o tempo T necessário para a partícula fazer uma revolução completa é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

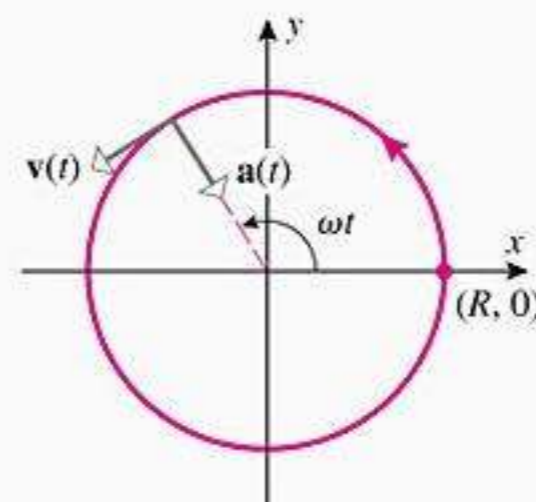


Figura Ex-31

32. Se uma partícula de massa m estiver em movimento circular uniforme [ver Exercício 31], então o vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ é chamado de **aceleração centrípeta**. De acordo com a segunda lei de Newton, essa aceleração deve ser produzida por alguma força $\mathbf{F}(t)$, chamada de **força centrípeta**, que está relacionada com $\mathbf{a}(t)$ pela equação $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$. Se essa força não estiver

presente, então a partícula não pode estar submetida a um movimento circular uniforme.

- (a) Mostre que a direção da força centrípeta varia com o tempo, mas tem magnitude constante F , dada por

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

- (b) Um astronauta com uma massa de $m = 60$ kg orbita a Terra em uma altitude de $h = 3200$ km com uma velocidade constante de $v = 6,43$ km/s. Obtenha a aceleração centrípeta supondo que o raio da Terra seja de 6440 km.
- (c) Que força gravitacional centrípeta em newtons a Terra exerce sobre o astronauta?

33. No instante $t = 0$, uma partícula na origem de um sistema de coordenadas xyz tem uma velocidade de $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. A função aceleração da partícula é $\mathbf{a}(t) = 2t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$.

- (a) Encontre a função posição da partícula.
 (b) Encontre a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

34. Conforme ilustrado na figura abaixo, as coordenadas polares de um foguete são rastreadas por radar de um ponto que está a b unidades da rampa de lançamento. Mostre que a velocidade v do foguete pode ser expressa em termos de b , θ e $d\theta/dt$ como

$$v = b \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

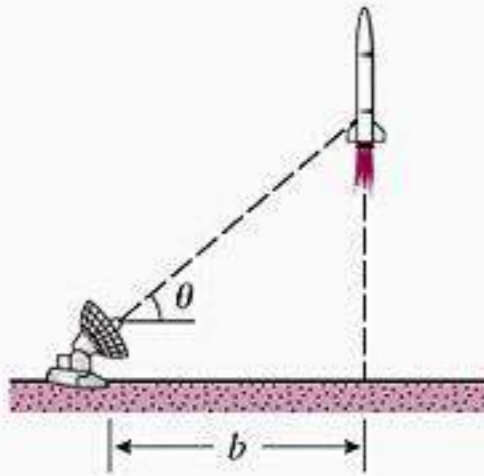


Figura Ex-34

35. Um jogador lança uma bola com uma velocidade inicial de 60 pés/s em um ângulo desconhecido α com a horizontal a partir de um ponto que está 4 pés acima do chão de um ginásio coberto. Dado que o forro do ginásio está a 25 pés de altura, determine a altura máxima h na qual a bola pode atingir uma parede que está a 60 pés adiante (ver figura abaixo).

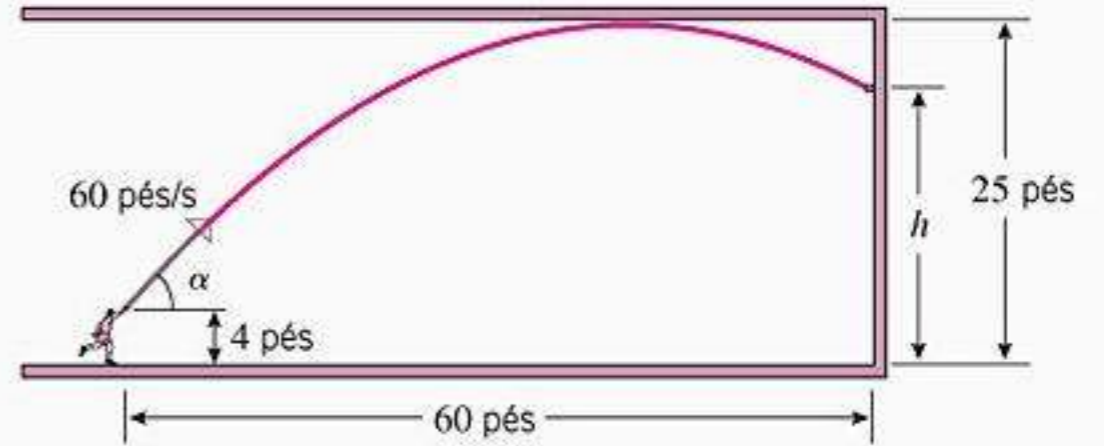


Figura Ex-35

36. Sejam $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo no espaço bi ou tridimensional. Mostre que a taxa de variação de sua velocidade pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{v}\|) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$$

37. Use a fórmula (23) da Seção 13.7 para encontrar a velocidade de escape (em km/s) de uma sonda espacial numa órbita circular a 600 km acima da superfície da Terra.

38. A constante de gravitação universal é aproximadamente $6,67 \times 10^{-11}$ m³/kg·s² e o semi-eixo maior da órbita da Lua em torno da Terra é $a = 384.629$ km. Estime a massa da Terra em quilogramas.



Que ninguém ignorante em Matemática entre aqui.

—Platão

Filósofo e Pensador grego da Antigüidade

DERIVADAS PARCIAIS

Neste capítulo, estenderemos muitos dos conceitos básicos do Cálculo para funções de duas ou mais variáveis, comumente chamadas de funções de várias variáveis. Iniciaremos discutindo limites e continuidade de funções de duas ou três variáveis, então definiremos as derivadas de tais funções, depois usaremos essas derivadas para estudar planos tangentes, taxas de variação, inclinações de superfícies e problemas de maximização e minimização. Embora muitas das idéias básicas que desenvolvemos para funções de uma variável persistam de uma maneira natural, as funções de várias variáveis são intrinsecamente mais complicadas do que as funções de uma variável, logo precisaremos desenvolver novas ferramentas e novas idéias para tratar dessas funções.

Foto: Superfícies tridimensionais são parecidas com cordilheiras. Neste capítulo, utilizaremos derivadas para analisar quão íngremes são tais superfícies, bem como outras de suas características.

14.1 FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Em todas seções anteriores, estudamos funções reais de uma variável real e funções vetoriais de uma variável real. Nesta seção, consideraremos funções reais de duas ou mais variáveis reais.

■ NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Há muitas fórmulas familiares em que uma variável dada depende de outras duas ou mais variáveis. Por exemplo, a área A de um triângulo depende do comprimento da base b e da altura h pela fórmula $A = \frac{1}{2}bh$; o volume de uma caixa retangular depende do comprimento l , da largura w e da altura h pela fórmula $V = lwh$; e a média aritmética \bar{x} de n números reais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ depende desses números pela fórmula

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Assim, dizemos que

A é uma função das duas variáveis b e h ;

V é uma função das três variáveis l , w e h ;

\bar{x} é uma função das n variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

A terminologia e a notação para funções de duas ou mais variáveis são análogas àsquelas para funções de uma variável. Por exemplo, a expressão

$$z = f(x, y)$$

significa que z é uma função de x e y no sentido de que um único valor da variável dependente z é determinado especificando valores para as variáveis independentes x e y . Analogamente,

$$w = f(x, y, z)$$

expressa w como uma função de x, y e z , e

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

expressa u como uma função de x_1, x_2, \dots, x_n .

É conveniente pensar em funções de duas ou três variáveis independentes em termos geométricos. Por exemplo, se $z = f(x, y)$, então podemos ver (x, y) como um ponto do plano xy e pensar em f como uma regra que associa um único valor numérico z ao ponto (x, y) ; analogamente, podemos pensar em $w = f(x, y, z)$ como uma regra que associa um único valor numérico w ao ponto (x, y, z) de um sistema de coordenadas xyz (Figura 14.1.1).

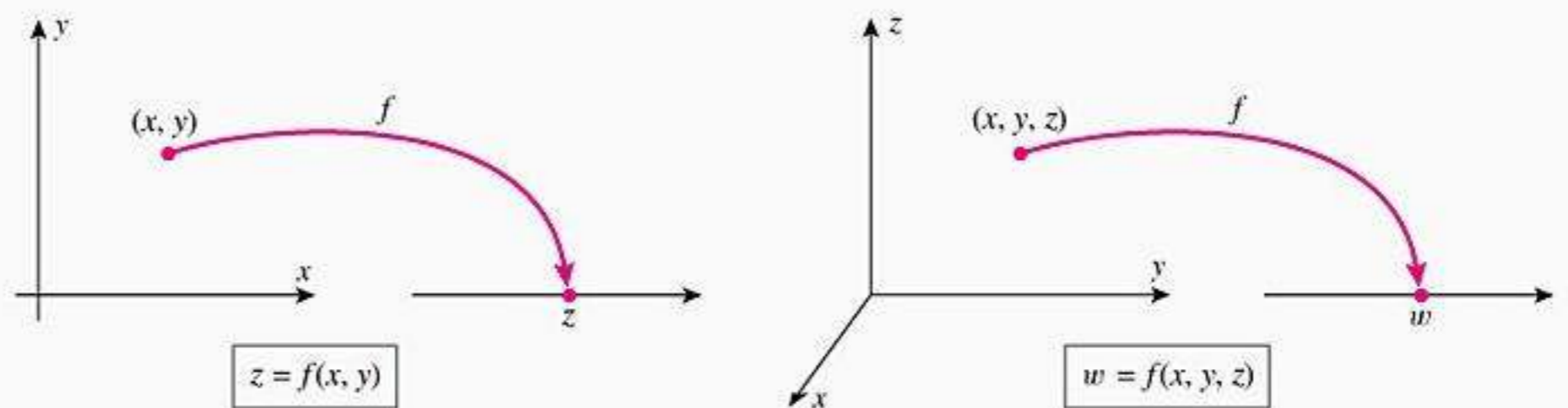


Figura 14.1.1

Como ocorre com funções de uma variável, as variáveis independentes de uma função de duas ou mais variáveis podem estar restritas a algum conjunto D , que denominamos **domínio** de f . Às vezes, o domínio é determinado por restrições físicas sobre as variáveis. Se a função estiver definida por uma fórmula e se não houver restrições físicas nem outras explicitadas, entende-se que o domínio consiste em todos os pontos para os quais a fórmula dá um valor real para a variável dependente. Esse é o que chamamos de **domínio natural** da função. As definições a seguir resumem essa discussão.

Por extensão, podemos definir a noção de “espaço n -dimensional” em que um “ponto” é uma seqüência de n números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) . Então uma função de n variáveis reais é uma regra que associa um único número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cada ponto de algum conjunto desse espaço.

14.1.1 DEFINIÇÃO Uma **função f de duas variáveis**, x e y , é uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ a cada ponto (x, y) de algum conjunto D no plano xy .

14.1.2 DEFINIÇÃO Uma **função f de três variáveis**, x, y e z , é uma regra que associa um único número real $f(x, y, z)$ a cada ponto (x, y, z) de algum conjunto D no espaço tridimensional.



Figura 14.1.2

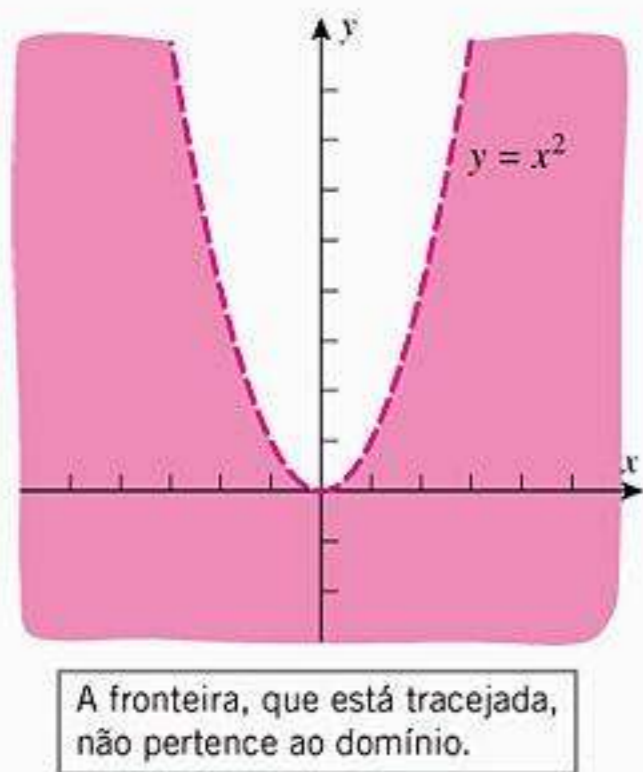


Figura 14.1.3

► **Exemplo 1** Seja

$$f(x, y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$$

Determine $f(1, 4)$, $f(0, 9)$, $f(t^2, t)$, $f(ab, 9b)$ e o domínio natural de f .

Solução Por substituição,

$$f(1, 4) = 3(1)^2\sqrt{4} - 1 = 5$$

$$f(0, 9) = 3(0)^2\sqrt{9} - 1 = -1$$

$$f(t^2, t) = 3(t^2)^2\sqrt{t} - 1 = 3t^4\sqrt{t} - 1$$

$$f(ab, 9b) = 3(ab)^2\sqrt{9b} - 1 = 9a^2b^2\sqrt{b} - 1$$

Por causa do radical \sqrt{y} na fórmula para f , devemos ter $y \geq 0$ para evitar valores imaginários para $f(x, y)$. Assim, o domínio natural de f consiste em todos os pontos no plano xy que estão sobre ou acima do eixo x . (Ver Figura 14.1.2.) ◀

► **Exemplo 2** Esboce o domínio natural da função $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$.

Solução A função $\ln(x^2 - y)$ só está definida se $0 < x^2 - y$ ou $y < x^2$. Primeiro esboçamos a parábola $y = x^2$ como uma curva tracejada. A região $y < x^2$ consiste em todos os pontos abaixo dessa curva (Figura 14.1.3). ◀

► **Exemplo 3** Seja

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Determine $f(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e o domínio natural de f .

Solução Por substituição

$$f(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \sqrt{1 - (0)^2 - (\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Por causa do sinal da raiz quadrada, devemos ter $0 \leq 1 - x^2 - y^2 - z^2$ para ter um valor real para $f(x, y, z)$. Reescrevendo essa desigualdade na forma

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

vemos que o domínio natural de f consiste em todos os pontos sobre ou dentro da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \blacktriangleleft$$

■ FUNÇÕES DESCRITAS POR TABELAS

Às vezes é necessário ou conveniente representar funções de duas variáveis por meio de uma tabela, em vez de dar uma fórmula explícita. Por exemplo, o Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA utiliza a fórmula

$$W = 35,74 + 0,6215T + (0,4275T - 35,75)v^{0,16} \tag{1}$$

para modelar o índice de sensação térmica W em graus Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) como uma função da temperatura T , dada em graus Fahrenheit, e da velocidade do vento v (em milhas por hora), para velocidades superiores a 3 milhas por hora. Essa fórmula é suficientemente complexa a ponto de ser difícil obter uma idéia intuitiva da relação entre as variáveis. É possível obter uma idéia mais precisa dessa relação escolhendo valores amostrais de T e de v e construir uma tabela, como a Tabela 14.1.1, em que arredondamos os valores de W até o inteiro mais

O índice de sensação térmica indica aquela temperatura (em graus Fahrenheit) com a qual um vento de 3 milhas por hora produziria na pele exposta a mesma sensação do que a combinação de temperatura e velocidade do vento nas condições climatológicas atuais.

Tabela 14.1.1
 VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h)

TEMPERATURA T (°F)		20	25	30	35
5	13	19	25	31	
15	6	13	19	25	
25	3	9	16	23	
35	0	7	14	21	
45	-2	5	12	19	

próximo. Por exemplo, se a temperatura é de 30° F e a velocidade do vento é de 5 milhas por hora, a sensação que temos é de uma temperatura de 25° F. Se a velocidade do vento aumentasse para 15 milhas por hora, teríamos a impressão de que a temperatura despencara para 9° F. Observe que, nesse caso, um aumento de 10 milhas por hora no vento causa uma queda de 6° F no índice de sensação térmica. Para estimar valores de sensação térmica que não estejam dispostos na tabela, podemos utilizar a *interpolação linear*. Por exemplo, suponha que a temperatura seja de 30° F e a velocidade do vento seja 7 milhas por hora. Uma estimativa razoável para a queda no índice de sensação térmica em relação a uma velocidade do vento de 5 milhas por hora seria $\frac{2}{10} \cdot 6^\circ \text{F} = 1,2^\circ \text{F}$. (Por que?) A estimativa resultante do índice de sensação térmica então seria $25^\circ \text{F} - 1,2^\circ \text{F} = 23,8^\circ \text{F}$.

Em alguns casos, as tabelas para funções de duas variáveis surgem diretamente dos dados experimentais, quando então devemos trabalhar diretamente com a tabela ou então utilizar alguma técnica para construir uma fórmula que modele os dados da tabela. Essas técnicas de modelagem não serão abordadas neste texto.

■ **GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS**

Lembre que para uma função f de uma variável, o gráfico de $f(x)$ no plano xy foi definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Analogamente, se f for uma função de duas variáveis, definimos o *gráfico* de $f(x, y)$ no espaço xyz como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$. Em geral, tal gráfico será uma superfície no espaço tridimensional.

► **Exemplo 4** Em cada parte, descreva o gráfico da função num sistema de coordenadas xyz .

- (a) $f(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$
- (b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- (c) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Solução (a) Por definição, o gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = 1 - x - \frac{1}{2}y$$

que representa um plano. Uma parte triangular do plano pode ser esboçada plotando as interseções com os eixos coordenados e unindo-os com segmentos de reta (Figura 14.1.4a).

Solução (b) Por definição, o gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{2}$$

Depois de elevar ao quadrado ambos os lados, isso pode ser reescrito como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

que representa uma esfera de raio 1, centrada na origem. Uma vez que (2) impõe a condição adicional $z \geq 0$, o gráfico é somente a semi-esfera superior (Figura 14.1.4b).

Solução (c) O gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2} \tag{3}$$

Depois de elevar ao quadrado, obtemos

$$z^2 = x^2 + y^2$$

que é a equação de um cone circular (ver Tabela 12.7.1). Como (3) impõe a condição $z \leq 0$, o gráfico é precisamente a folha inferior do cone (Figura 14.1.4c). ◀

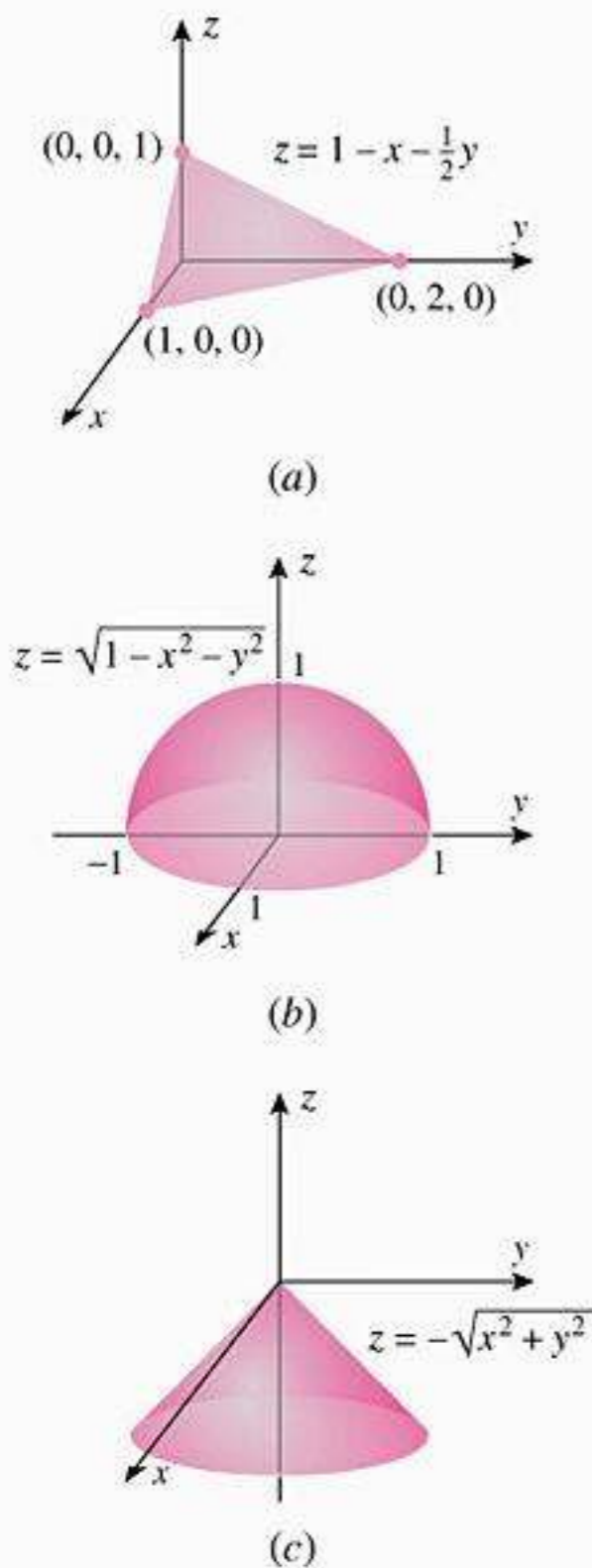


Figura 14.1.4

■ CURVAS DE NÍVEL

Estamos todos familiarizados com os mapas topográficos (ou de contornos) nos quais uma paisagem tridimensional, tal como a extensão de uma montanha, está representada por linhas de contorno bidimensionais ou curvas de elevação constante. Considere, por exemplo, o modelo de colina e seu mapa de contornos mostrados na Figura 14.1.5. O mapa de contornos foi construído passando planos de elevação constante pela colina, projetando o contorno resultante sobre uma superfície plana e classificando os contornos por sua elevação. Na Figura 14.1.5, notamos como os dois sulcos aparecem como reentrâncias das linhas de contorno, e como as curvas estão mais próximas no mapa de contornos quando a colina tem uma inclinação íngreme e tornam-se mais espaçadas quando a inclinação é gradual.

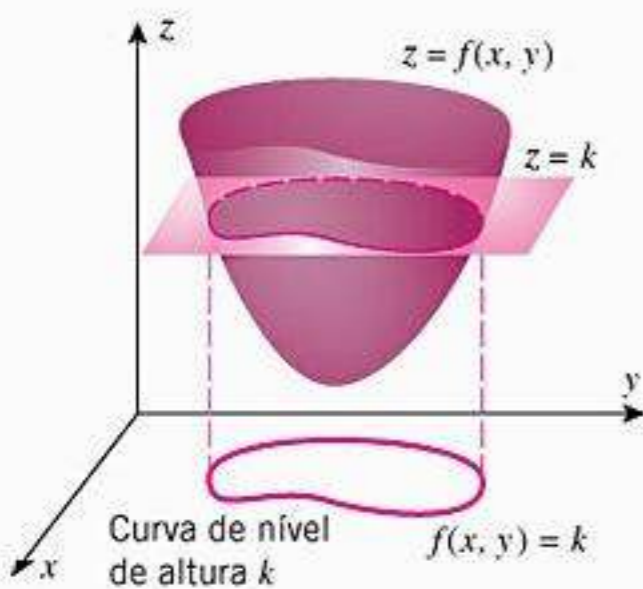


Figura 14.1.6

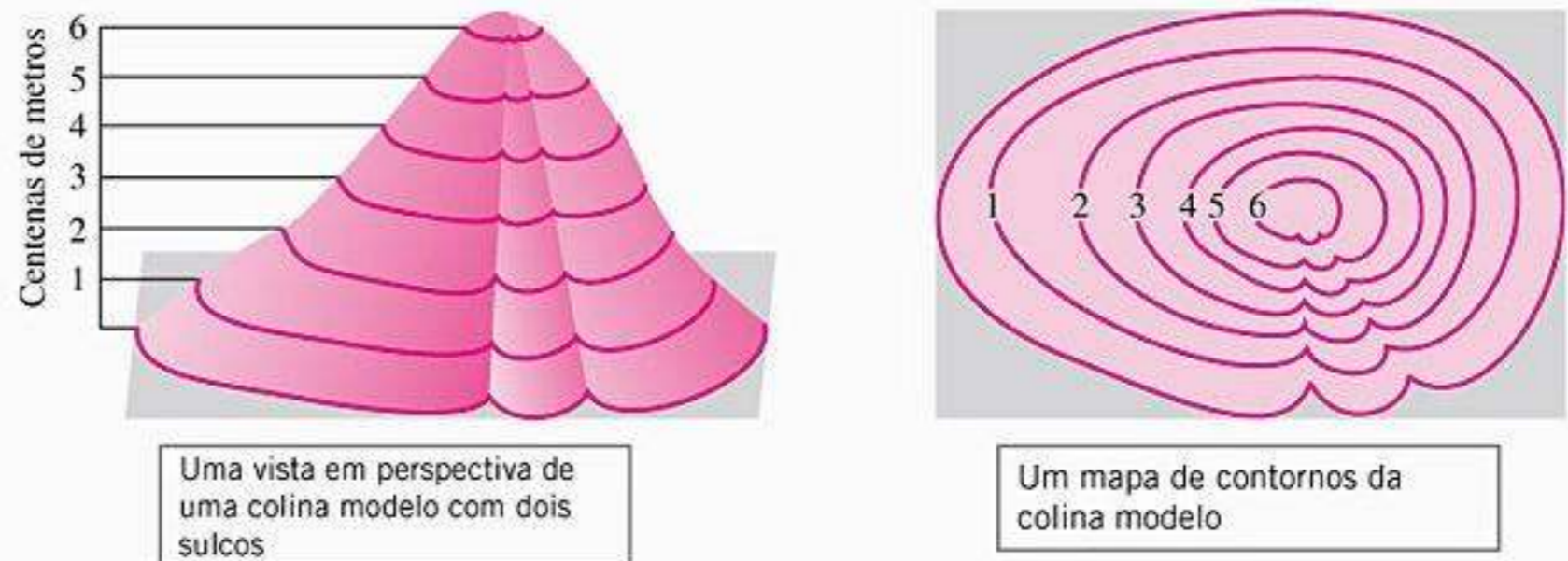


Figura 14.1.5

Os mapas de contornos são úteis também para o estudo de funções de duas variáveis. Se a superfície $z = f(x, y)$ for cortada pelo plano horizontal $z = k$, então todos os pontos da interseção têm $f(x, y) = k$. A projeção desta interseção sobre o plano xy é denominada **curva de nível de altura k** ou **curva de nível com constante k** (Figura 14.1.6). Um conjunto de curvas de nível para $z = f(x, y)$ é chamado de um **esboço de contornos** ou **mapa de contornos** de f .

► **Exemplo 5** O gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ no espaço xyz é o parabolóide hiperbólico (superfície de sela), mostrado na Figura 14.1.7a. As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$. Para $k > 0$, essas curvas são hipérbolas abrindo ao longo de retas paralelas ao eixo y ; para $k < 0$, elas são hipérbolas abrindo ao longo de retas paralelas ao eixo x ; e para $k = 0$, a curva de nível consiste nas retas que se intersectam $y + x = 0$ e $y - x = 0$ (Figura 14.1.7b). ◀

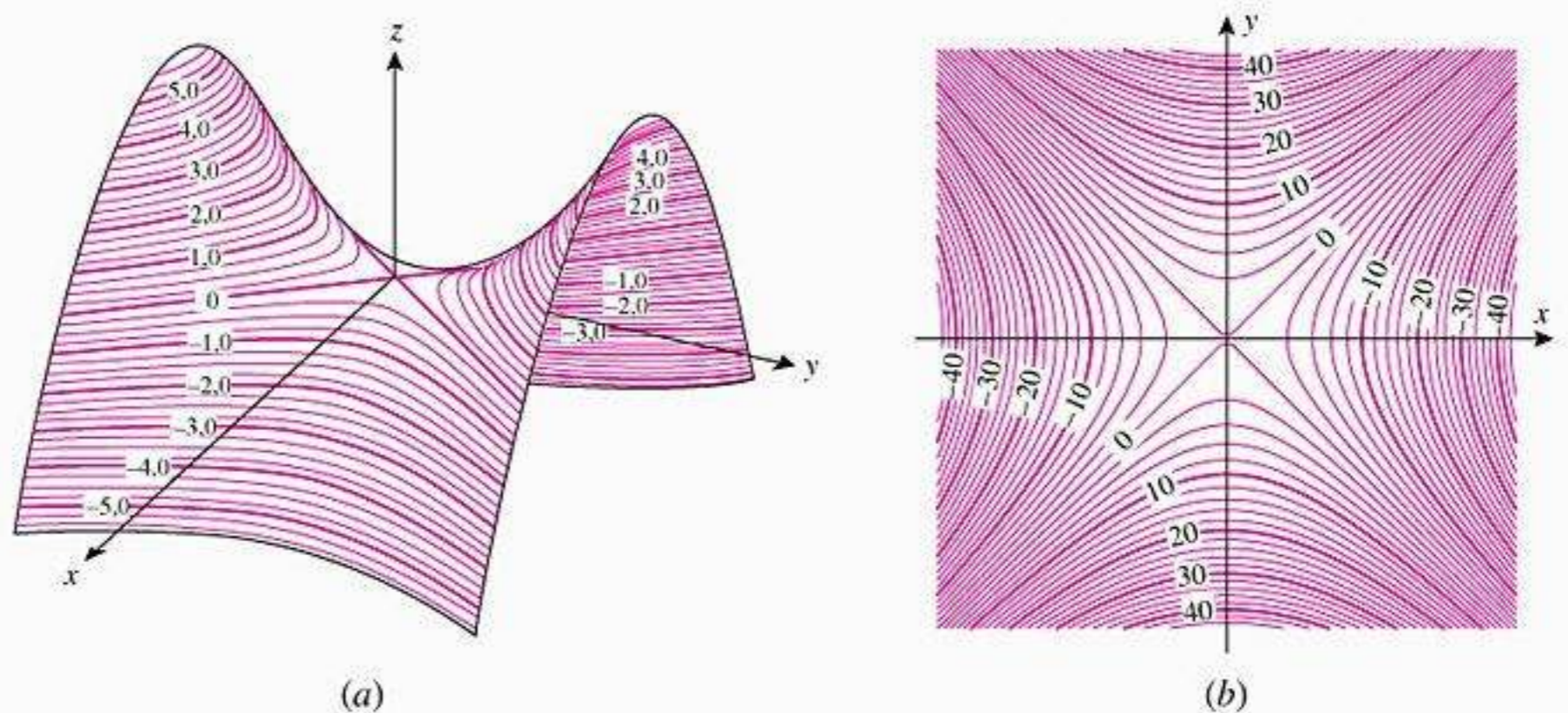


Figura 14.1.7

► **Exemplo 6** Esboce o mapa de contornos de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ usando as curvas de nível de altura $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Solução O gráfico da superfície $z = 4x^2 + y^2$ é o parabolóide mostrado na parte esquerda da Figura 14.1.8, logo é razoável esperar que o mapa de contorno seja uma família de elipses centradas na origem. A curva de nível de altura k tem a equação $4x^2 + y^2 = k$. Se $k = 0$, então o gráfico é o único ponto $(0, 0)$. Para $k > 0$, podemos reescrever a equação como

$$\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que representa uma família de elipses com cortes no eixo x iguais a $\pm\sqrt{k}/2$ e cortes no eixo y iguais a $\pm\sqrt{k}$. O mapa de contornos para os valores especificados de k é mostrado na parte à direita da Figura 14.1.8. ◀

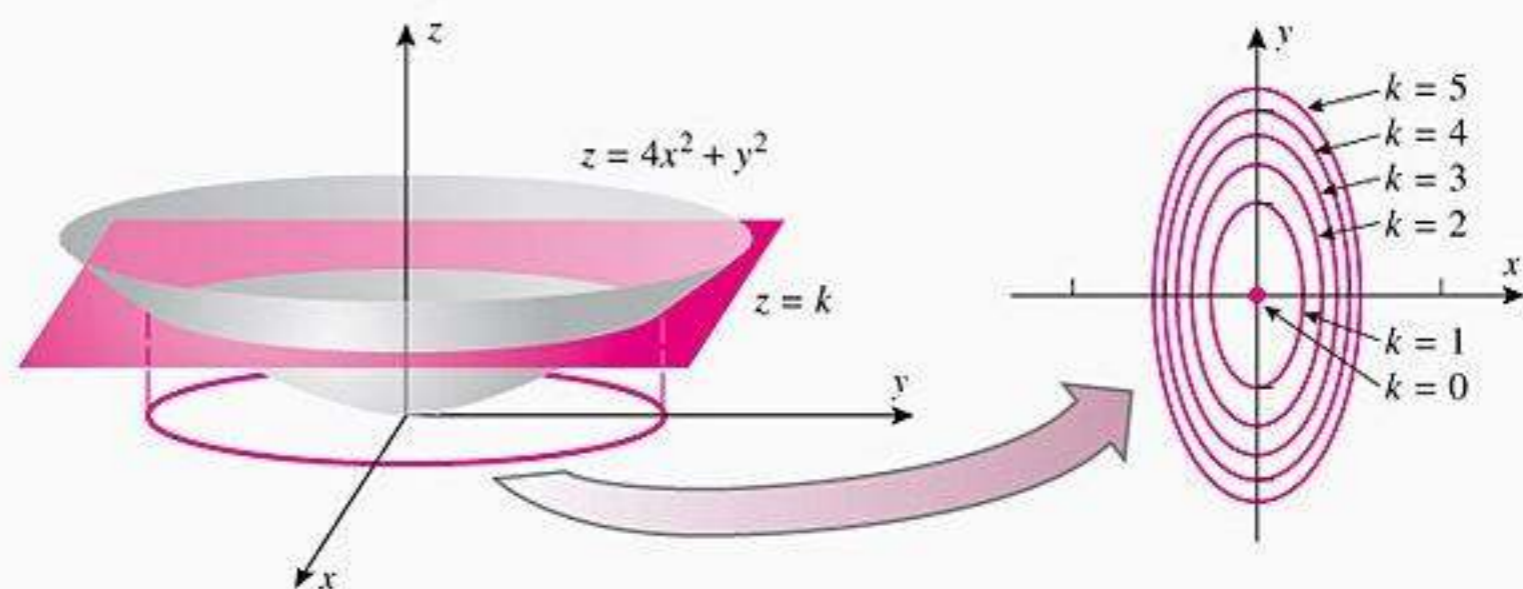


Figura 14.1.8

► **Exemplo 7** Esboce o mapa de contornos de $f(x, y) = 2 - x - y$ usando as curvas de nível de altura $k = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

Solução O gráfico da superfície $z = 2 - x - y$ é o plano mostrado na parte esquerda da Figura 14.1.9, logo é razoável esperar que o mapa de contornos seja uma família de retas paralelas. A curva de nível de altura k tem a equação $2 - x - y = k$, que podemos reescrever como

$$y = -x + (2 - k)$$

Isso representa uma família de retas paralelas de inclinação -1 . O mapa de contornos para os valores especificados de k é mostrado na Figura 14.1.9. ◀

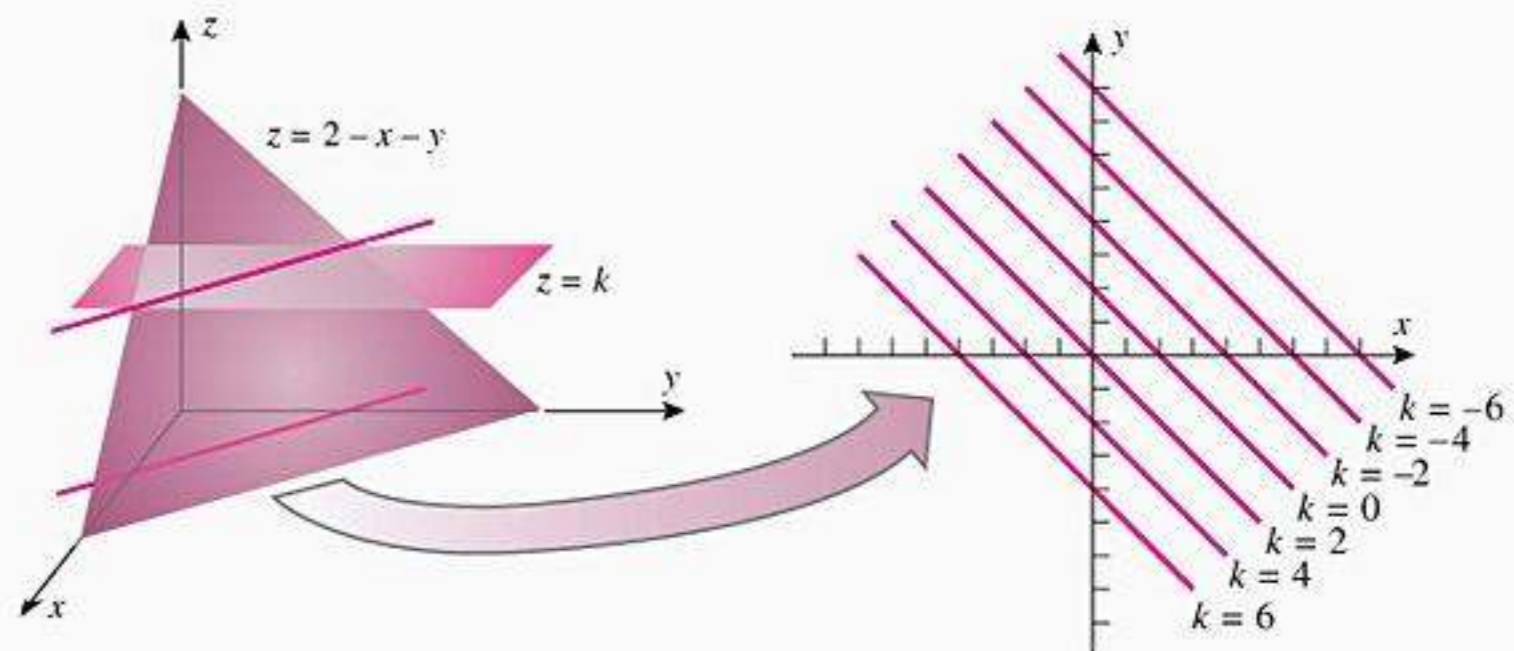


Figura 14.1.9

■ MAPAS DE CONTORNOS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

Exceto nos casos mais simples, os mapas de contornos podem ser difíceis de se produzir sem a ajuda de um recurso gráfico. A Figura 14.1.10 ilustra como a tecnologia gráfica pode ser usada para exibir curvas de nível. A tabela mostra duas representações gráficas das curvas de nível da função $f(x, y) = |\text{sen } x \text{ sen } y|$ produzidas com um CAS sobre o domínio $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$.

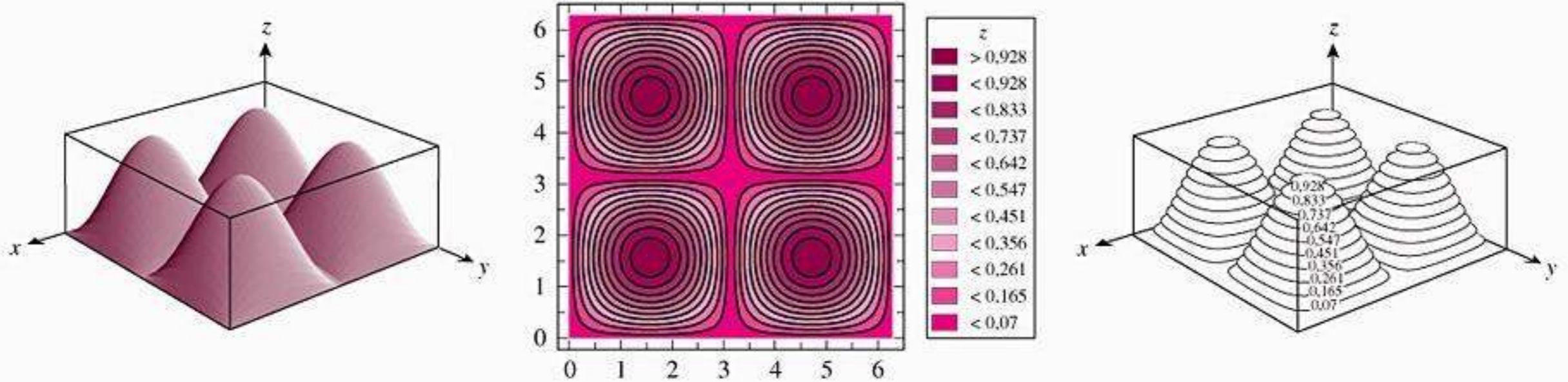


Figura 14.1.10

O termo "superfície de nível" é padrão, mas confuso, uma vez que uma superfície de nível *não* precisa estar nivelada no sentido de ser horizontal; é simplesmente uma superfície sobre a qual todos os valores de f são o mesmo.

■ SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Observe que o gráfico de $y = f(x)$ é uma curva no espaço bidimensional e o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície no espaço tridimensional, logo o número de dimensões necessárias para esses gráficos é o número de variáveis mais 1. Conseqüentemente, não há maneira "direta" de fazer o gráfico de uma função de três variáveis, uma vez que necessitamos de quatro dimensões. Contudo, se k for constante, então o gráfico da equação $f(x, y, z) = k$ será, geralmente, uma superfície no espaço tridimensional (por exemplo, o gráfico de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma esfera), que denominamos *superfície de nível com constante k* . Alguma intuição geométrica do comportamento da função f pode, às vezes, ser obtida fazendo o gráfico dessas superfícies de nível para vários valores de k .

► **Exemplo 8** Descreva as superfícies de nível de

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (b) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$

Solução (a) As superfícies de nível têm equações da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

Para $k > 0$, o gráfico dessa equação é uma esfera de raio \sqrt{k} centrada na origem; para $k = 0$, o gráfico é o único ponto $(0, 0, 0)$; e para $k < 0$, não há superfície de nível (Figura 14.1.11).

Solução (b) As superfícies de nível têm equações da forma

$$z^2 - x^2 - y^2 = k$$

Como foi visto na Seção 12.7, essa equação representa um cone se $k = 0$, um hiperbolóide de duas folhas se $k > 0$ e um hiperbolóide de uma folha se $k < 0$ (Figura 14.1.12). ◀

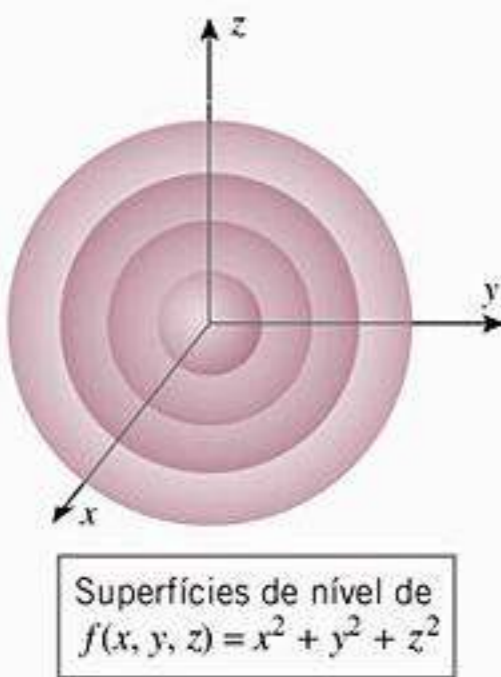


Figura 14.1.11

■ FAZENDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

Gerar superfícies com um recurso gráfico é mais complicado do que gerar curvas planas, pois há mais fatores que devem ser levados em conta. Podemos tratar disso apenas superficialmente aqui, portanto se o leitor precisar usar um recurso gráfico, o manual será a principal fonte de informações.

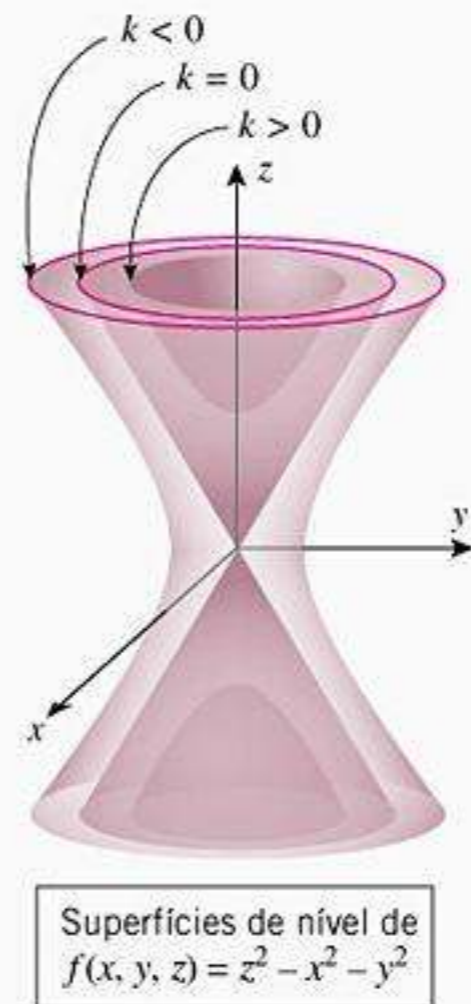


Figura 14.1.12

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico computacional que gere superfícies no espaço tridimensional, leia seu manual e tente reproduzir algumas das superfícies nas Figuras 14.1.13 e 14.1.14 e da Tabela 14.1.2.

Os recursos gráficos podem apenas mostrar uma parte do espaço xyz numa tela de visualização, logo o primeiro passo para fazer o gráfico de uma superfície é determinar qual parte do espaço xyz queremos exibir. Esta região é chamada de *janela de inspeção* ou *caixa de inspeção*. Por exemplo, a Figura 14.1.13 mostra o efeito de produzir o gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$ em três diferentes janelas de inspeção. Entretanto, dentro de uma janela de inspeção fixa, a aparência da superfície também é afetada pelo *ponto de vista*, isto é, a direção da qual a superfície é vista, e a distância do observador à superfície. Por exemplo, a Figura 14.1.14 mostra o gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$ de três pontos de vista diferentes usando a primeira janela de inspeção da Figura 14.1.13.

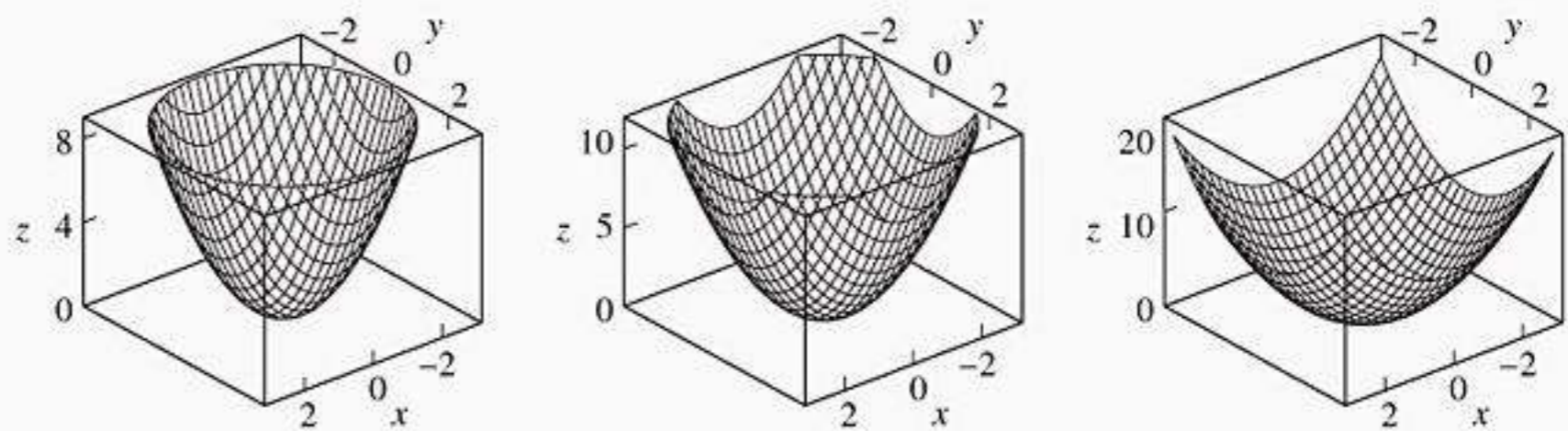


Figura 14.1.13 Variando a caixa de inspeção.

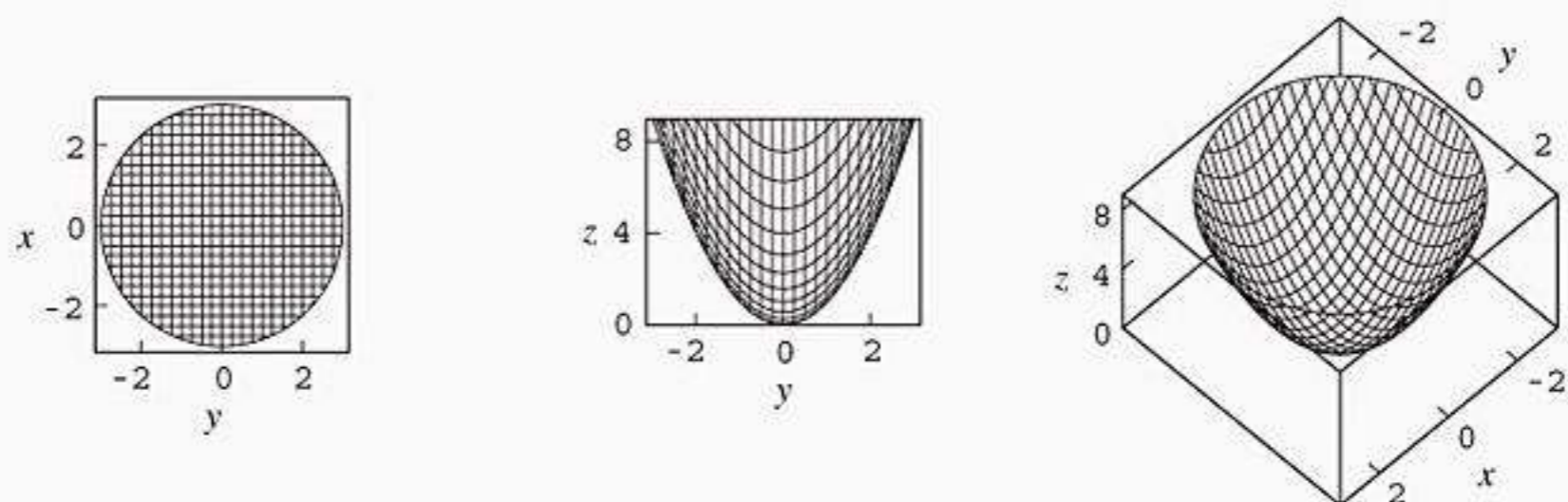
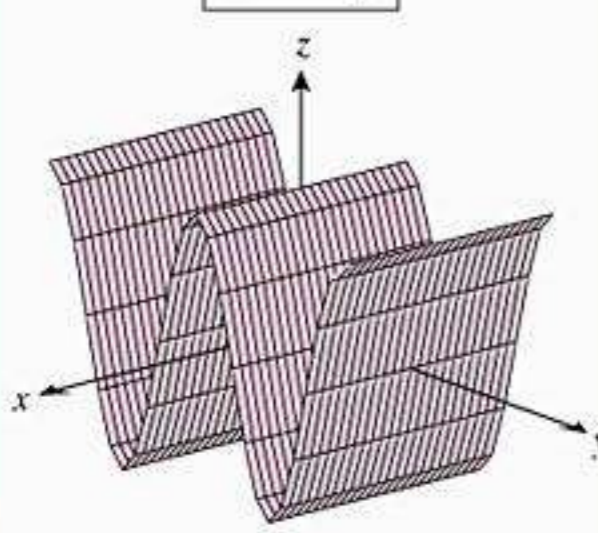
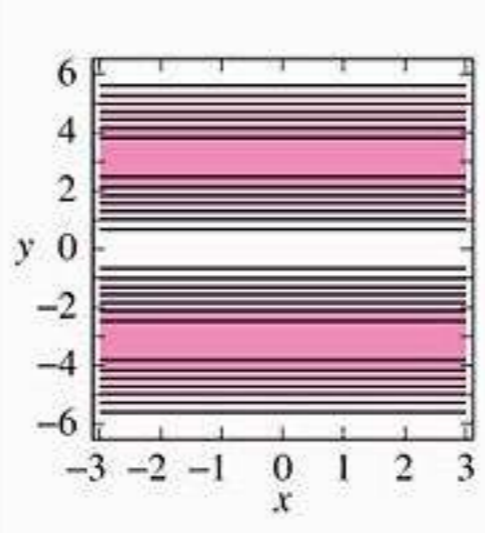
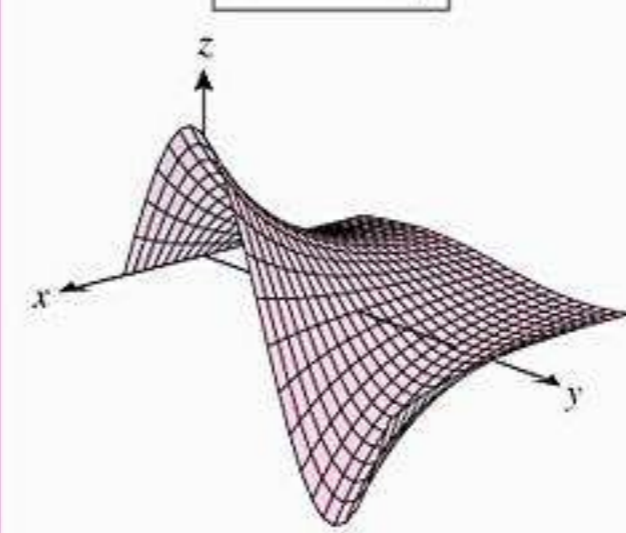
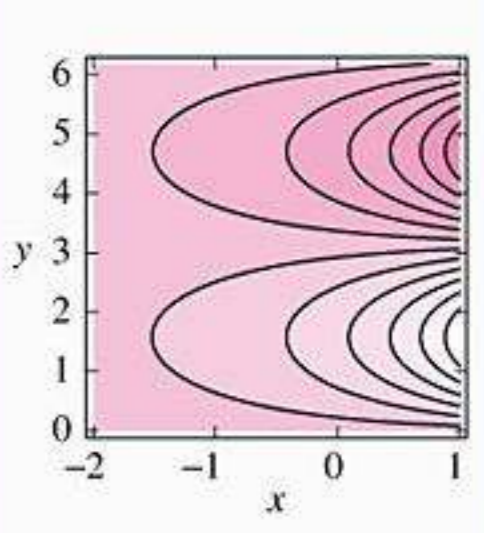
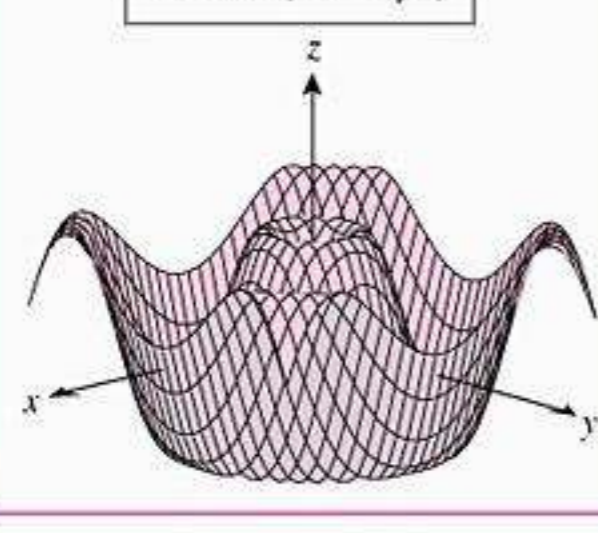
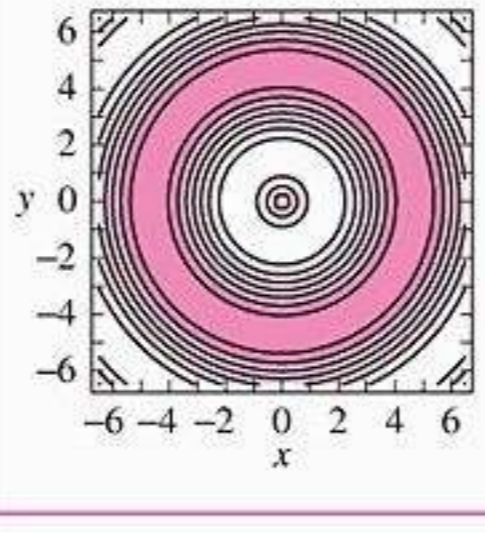
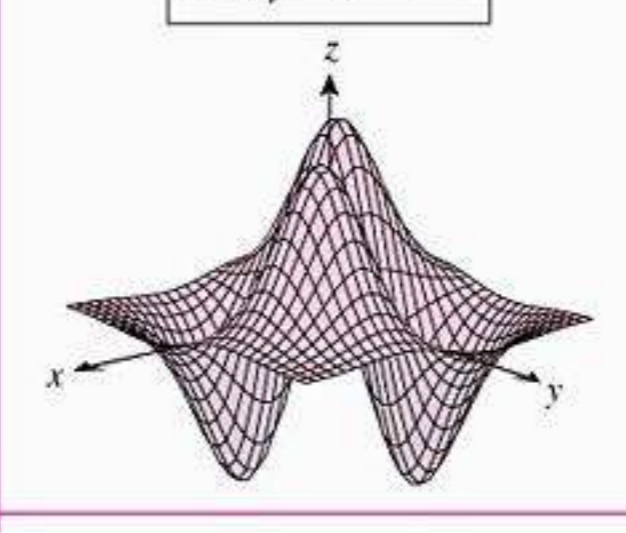
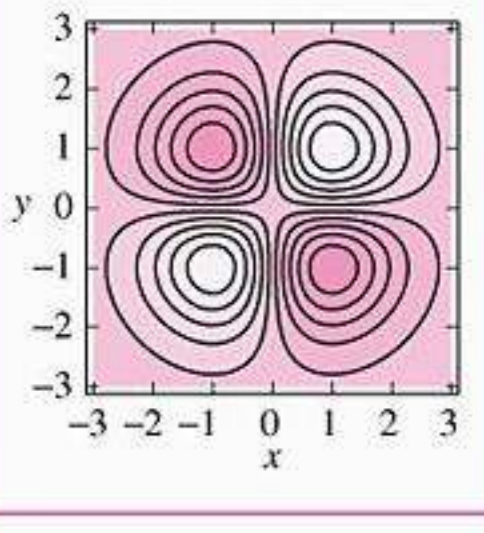
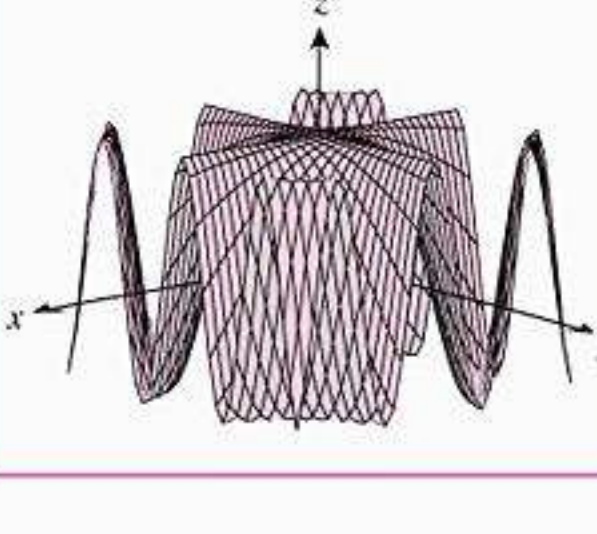
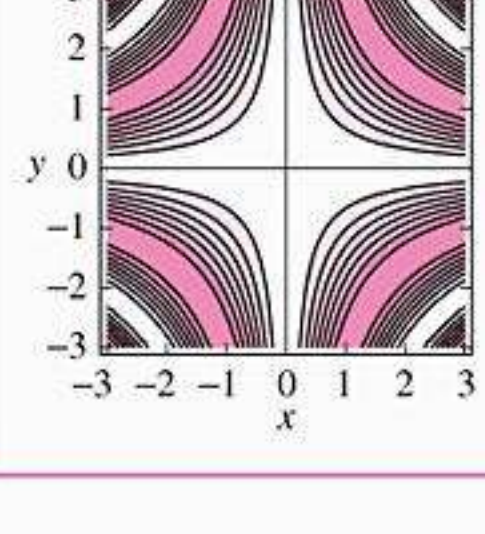
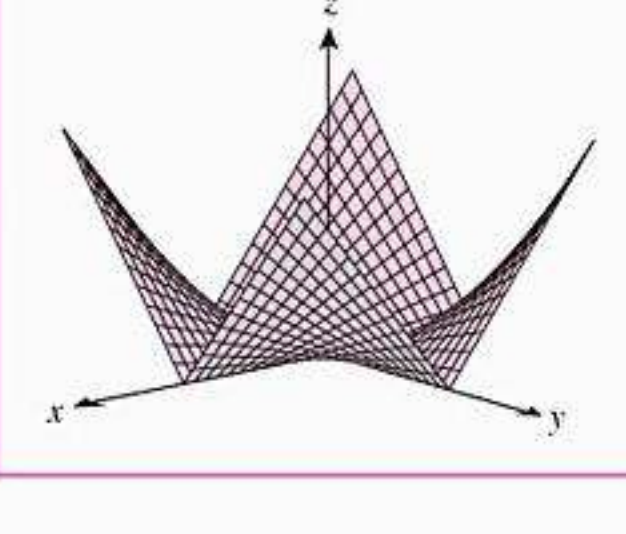
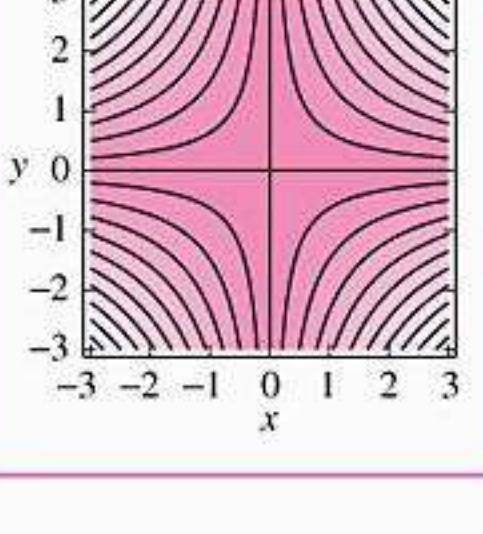


Figura 14.1.14 Variando o ponto de vista.

Na Tabela 14.1.2 mostramos seis superfícies no espaço tridimensional, junto com os mapas de contornos associados. Observe que a malha das curvas nas superfícies são os traços em planos verticais, enquanto que as curvas de nível são traços em planos horizontais. Nesses mapas de contornos a graduação de cor vai do escuro para o claro à medida que z cresce.

Tabela 14.1.2

SUPERFÍCIE	MAPA DE CONTORNOS	SUPERFÍCIE	MAPA DE CONTORNOS
$z = \cos y$ 		$z = e^x \operatorname{sen} y$ 	
$z = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$ 		$z = xye^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ 	
$z = \cos(xy)$ 		$z = xy $ 	

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.1 (Ver página 936 para respostas.)

- O domínio de $f(x, y) = \ln xy$ é _____ e o domínio de $g(x, y) = \ln x + \ln y$ é _____.
- Seja $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y + 1}$.
 - $f(2, 1) =$ _____
 - $f(1, 2) =$ _____
 - $f(a, a) =$ _____
 - $f(y + 1, y) =$ _____
- Seja $f(x, y) = e^{x+y}$.
 - Para quais valores de k a curva de nível $f(x, y) = k$ contém pelo menos um ponto?
 - Descreva as curvas de nível $f(x, y) = k$ para os valores de k obtidos em (a).
- Seja $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$.
 - Determine todos os valores de k tais que a superfície de nível $f(x, y, z) = k$ contém pelo menos um ponto.
 - Descreva as curvas de nível $f(x, y, z) = k$ para os valores de k obtidos em (a).

EXERCÍCIOS 14.1  

1-8 Estes exercícios dizem respeito a funções de duas variáveis.

- Seja $f(x, y) = x^2y + 1$. Determine
 - $f(2, 1)$
 - $f(1, 2)$
 - $f(0, 0)$
 - $f(1, -3)$
 - $f(3a, a)$
 - $f(ab, a - b)$
- Seja $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Determine
 - $f(t, t^2)$
 - $f(x, x^2)$
 - $f(2y^2, 4y)$
- Seja $f(x, y) = xy + 3$. Determine
 - $f(x + y, x - y)$
 - $f(xy, 3x^2y^3)$
- Seja $g(x) = x \sin x$. Determine
 - $g(x/y)$
 - $g(xy)$
 - $g(x - y)$
- Determine $F(g(x), h(y))$ se $F(x, y) = xe^{xy}$, $g(x) = x^3$ e $h(y) = 3y + 1$.
- Determine $g(u(x, y), v(x, y))$ se $g(x, y) = y \sin(x^2y)$, $u(x, y) = x^2y^3$ e $v(x, y) = \pi xy$.
- Sejam $f(x, y) = x + 3x^2y^2$, $x(t) = t^2$ e $y(t) = t^3$. Determine
 - $f(x(t), y(t))$
 - $f(x(0), y(0))$
 - $f(x(2), y(2))$
- Sejam $g(x, y) = ye^{-3x}$, $x(t) = \ln(t^2 + 1)$ e $y(t) = \sqrt{t}$. Determine $g(x(t), y(t))$.
- Utilize a Tabela 14.1.1 para estimar o índice de sensação térmica quando
 - a temperatura é 25° F e a velocidade do vento é de 7 milhas por hora.
 - a temperatura é 28° F e a velocidade do vento é de 5 milhas por hora.
- Utilize a Tabela 14.1.1 para estimar o índice de sensação térmica quando
 - a temperatura é 35° F e a velocidade do vento é de 14 milhas por hora.
 - a temperatura é 32° F e a velocidade do vento é de 15 milhas por hora.
- Um método para determinar a umidade relativa do ar consiste em molhar o bulbo (o que contém o mercúrio) de um termômetro, agitá-lo pelo ar, e então comparar a leitura do termômetro com a verdadeira temperatura do ar. Se a umidade for inferior a 100%, então a temperatura obtida no termômetro será inferior à temperatura do ar. Essa diferença de temperatura é conhecida como a *depressão do bulbo molhado*. A tabela a seguir dá a umidade relativa do ar como uma função da temperatura do ar e da depressão do bulbo molhado. Use a tabela para completar as partes (a) - (c).
 - Qual é a umidade relativa do ar se a temperatura do ar for de 20° C e a depressão do bulbo molhado for 16° C?
 - Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 25° C e a depressão do bulbo molhado for 3,5° C.
 - Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 22° C e a depressão do bulbo molhado for 5° C.

		TEMPERATURA DO AR(°C)			
		15	20	25	30
DEPRESSÃO DO BULBO MOLHADO(°C)	3	71	74	77	79
	4	62	66	70	73
	5	53	59	63	67

Tabela Ex-11

- Utilize a tabela do Exercício 11 para completar as partes (a) - (c).
 - Qual é a depressão do bulbo molhado se a temperatura do ar for de 30° C e a umidade relativa for 73%?
 - Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 15° C e a depressão do bulbo molhado for 4,25° C.
 - Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 26° C e a depressão do bulbo molhado for 3° C.

13-16 Estes exercícios envolvem funções de três variáveis.

- Seja $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$. Determine
 - $f(2, 1, 2)$
 - $f(-3, 2, 1)$
 - $f(0, 0, 0)$
 - $f(a, a, a)$
 - $f(t, t^2, -t)$
 - $f(a + b, a - b, b)$
- Seja $f(x, y, z) = zxy + x$. Determine
 - $f(x + y, x - y, x^2)$
 - $f(xy, y/x, xz)$
- Determine $F(f(x), g(y), h(z))$ se $F(x, y, z) = ye^{xyz}$, $f(x) = x^2$, $g(y) = y + 1$ e $h(z) = z^2$.
- Determine $g(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ se $g(x, y, z) = z \sin xy$, $u(x, y, z) = x^2z^3$, $v(x, y, z) = \pi xyz$ e $w(x, y, z) = xy/z$.

17-18 Estes exercícios dizem respeito a funções de quatro ou mais variáveis.

- (a) Seja $f(x, y, z, t) = x^2y^3\sqrt{z+t}$. Determine $f(\sqrt{5}, 2, \pi, 3\pi)$.
 - Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n kx_k$. Determine $f(1, 1, \dots, 1)$.
- (a) Seja $f(u, v, \lambda, \phi) = e^{u+v} \cos \lambda \operatorname{tg} \phi$. Determine $f(-2, 2, 0, \pi/4)$.
 - Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Determine $f(1, 2, \dots, n)$.

19-22 Esboce o domínio de f . Utilize linhas sólidas para as porções da fronteira que estão incluídas no domínio e linhas tracejadas para as porções que não estão incluídas.

- $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
- $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$
- $f(x, y) = \ln xy$

23-24 Descreva o domínio de f em palavras.

23. (a) $f(x, y) = xe^{-\sqrt{y+2}}$
 (b) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$
 (c) $f(x, y, z) = e^{xyz}$
24. (a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{y^2 + 3}$ (b) $f(x, y) = \ln(y - 2x)$
 (c) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + y + z}$

25-34 Esboce o gráfico de f .

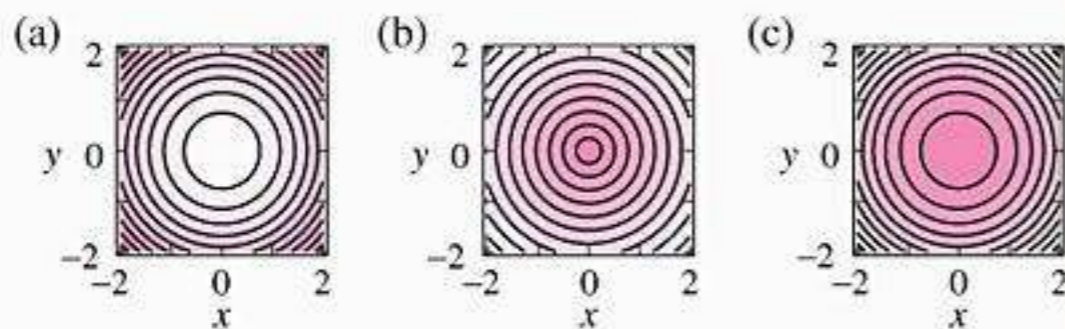
25. $f(x, y) = 3$ 26. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
 27. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 28. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 29. $f(x, y) = x^2 - y^2$ 30. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 31. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ 32. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
 33. $f(x, y) = y + 1$ 34. $f(x, y) = x^2$

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Em cada parte, associe o mapa de contornos com uma das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \\ f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

por inspeção, e explique seu raciocínio. Quanto maior o valor de z , mais clara fica a cor no mapa de contornos e os contornos correspondem a valores igualmente espaçados de z .



36. Em cada parte, associe o mapa de contornos com uma das superfícies na figura abaixo por inspeção, e explique a seguir seu raciocínio. Quanto maior o valor de z , mais clara fica a cor no mapa de contornos.

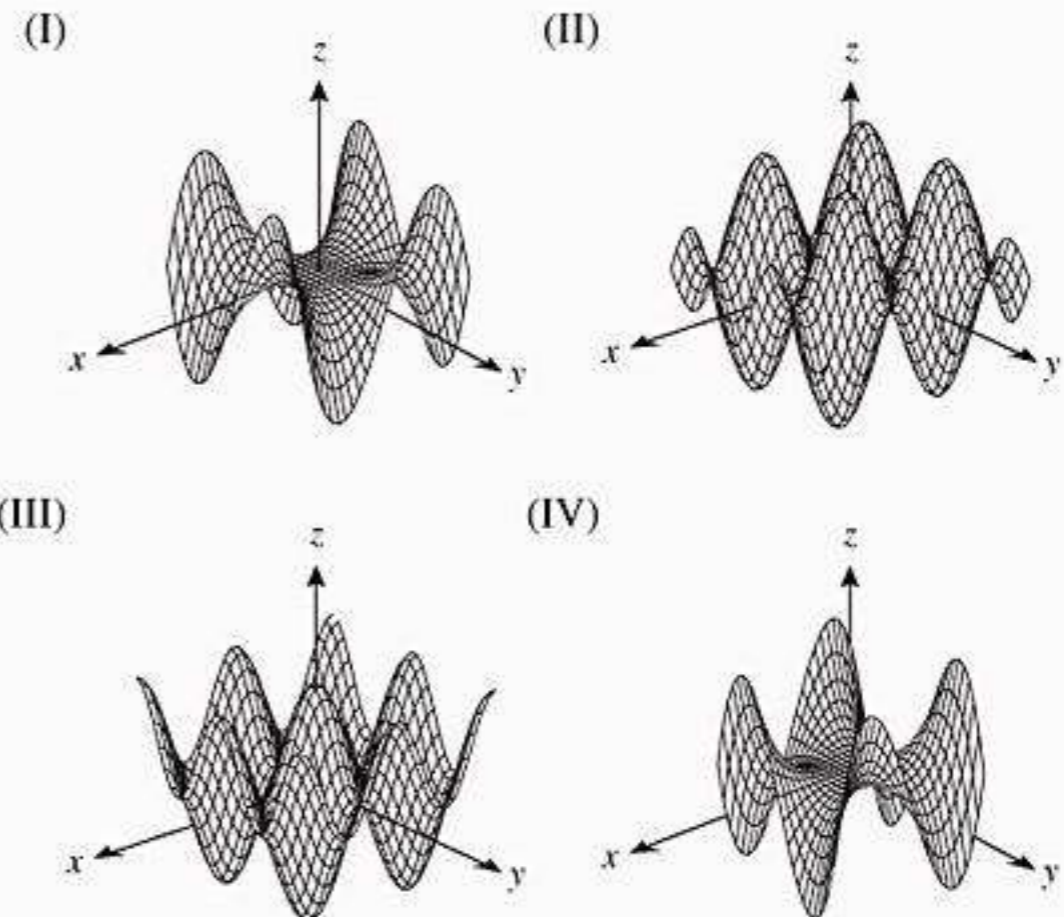
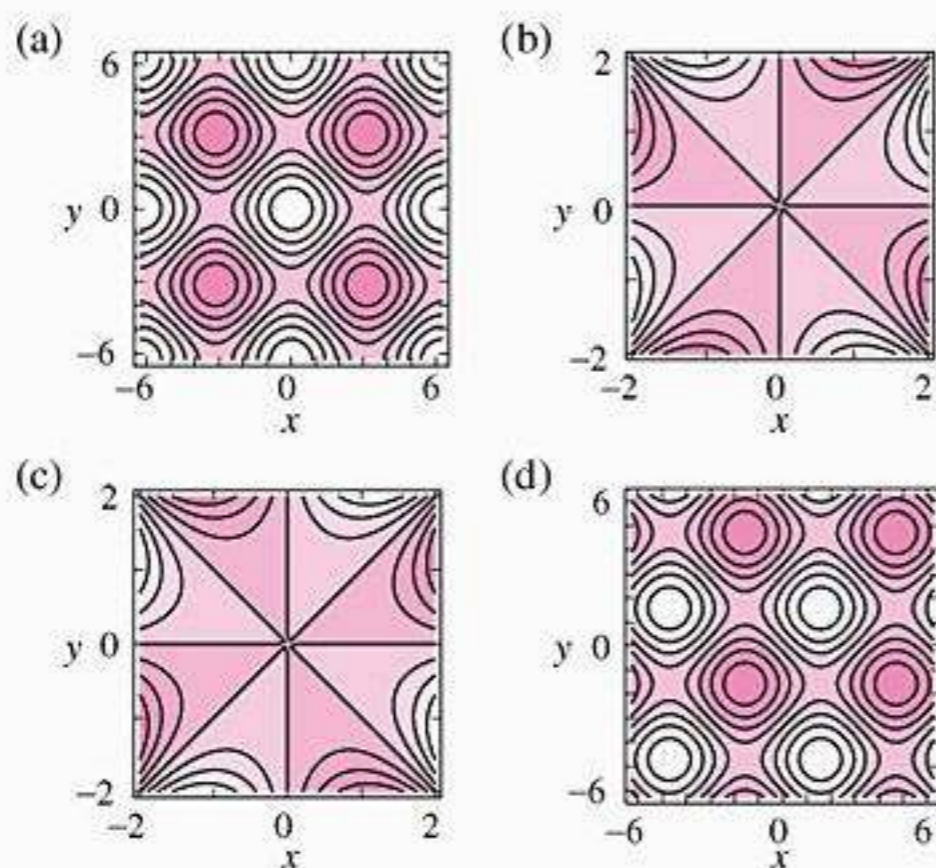


Figura Ex-36

37. Em cada parte, as questões se referem ao mapa de contorno na figura abaixo.

- (a) O ponto A ou B é o ponto mais alto? Explique seu raciocínio.
 (b) O ponto A ou B está na inclinação mais íngreme? Explique seu raciocínio.
 (c) Iniciando em A e movendo-se de tal modo que y permanece constante e x cresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?
 (d) Iniciando em B e movendo-se de tal modo que y permanece constante e x cresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?
 (e) Iniciando em A e movendo-se de tal modo que x permanece constante e y decresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?
 (f) Iniciando em B e movendo-se de tal modo que x permanece constante e y decresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?

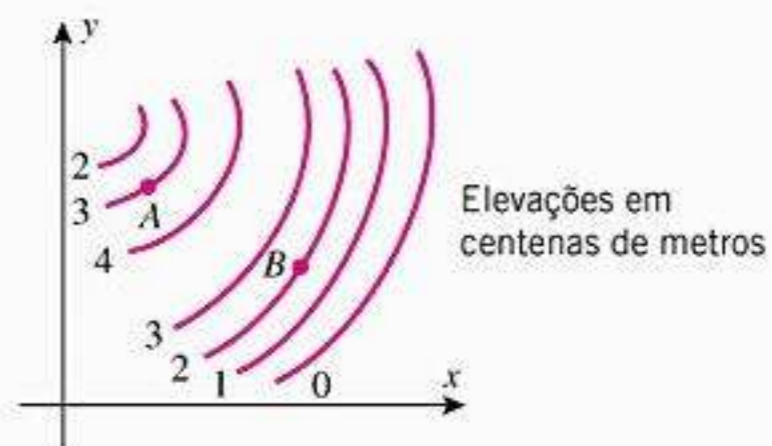


Figura Ex-37

38. Uma curva conectando pontos de pressão atmosférica iguais sobre um mapa meteorológico é denominada **linha isobárica** ou de **isóbare**. Em um mapa meteorológico típico, as linhas isobáricas referem-se à pressão ao nível do mar e são dadas em unidades de **milibares** (mb). Matematicamente, as linhas isobáricas são curvas de nível para a função pressão $p(x, y)$ definida nos pontos geográficos (x, y) , representados no mapa. Linhas isobáricas muito próximas correspondem a inclinações íngremes no gráfico da função pressão,

e estão usualmente associadas a fortes ventos – quanto maior a inclinação, maior será a velocidade do vento.

- (a) Em referência ao mapa meteorológico abaixo, a velocidade do vento é maior em Medicine Hart ou em Chicago? Explique seu raciocínio.
- (b) Estime a taxa de variação média da pressão atmosférica de Medicine Hart a Chicago, dado que a distância entre as duas cidades é aproximadamente 1600 milhas.

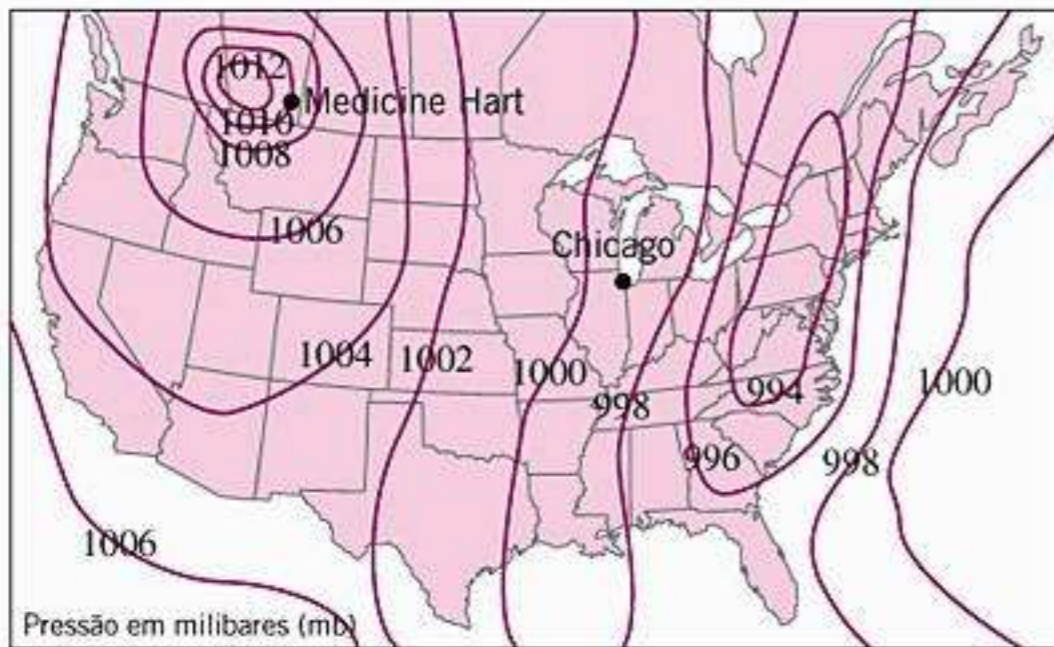


Figura Ex-38

39-44 Esboce a curva de nível $z = k$ para os valores especificados de k .

- 39. $z = x^2 + y^2$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$
- 40. $z = y/x$; $k = -2, -1, 0, 1, 2$
- 41. $z = x^2 + y$; $k = -2, -1, 0, 1, 2$
- 42. $z = x^2 + 9y^2$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$
- 43. $z = x^2 - y^2$; $k = -2, -1, 0, 1, 2$
- 44. $z = y \operatorname{cosec} x$; $k = -2, -1, 0, 1, 2$

45-48 Esboce a superfície de nível $f(x, y, z) = k$.

- 45. $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2$; $k = 16$
- 46. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $k = 0$
- 47. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + 4$; $k = 7$
- 48. $f(x, y, z) = 4x - 2y + z$; $k = 1$

49-52 Descreva a superfície de nível em palavras.

- 49. $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2$
- 50. $f(x, y, z) = 3x - y + 2z$
- 51. $f(x, y, z) = x^2 + z^2$
- 52. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- 53. Seja $f(x, y) = x^2 - 2x^3 + 3xy$. Determine uma equação da curva de nível que passa pelo ponto
 - (a) $(-1, 1)$
 - (b) $(0, 0)$
 - (c) $(2, -1)$
- 54. Seja $f(x, y) = ye^x$. Determine uma equação da curva de nível que passa pelo ponto
 - (a) $(\ln 2, 1)$
 - (b) $(0, 3)$
 - (c) $(1, -2)$

- 55. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Determine uma equação da superfície de nível que passa pelo ponto
 - (a) $(1, -2, 0)$
 - (b) $(1, 0, 3)$
 - (c) $(0, 0, 0)$
- 56. Seja $f(x, y, z) = xyz + 3$. Determine uma equação da superfície de nível que passa pelo ponto
 - (a) $(1, 0, 2)$
 - (b) $(-2, 4, 1)$
 - (c) $(0, 0, 0)$
- 57. Se $T(x, y)$ for a temperatura em um ponto (x, y) sobre uma placa delgada de metal no plano xy , então as curvas de nível de T são denominadas *curvas isotérmicas*. Todos os pontos sobre uma tal curva têm a mesma temperatura. Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e $T(x, y) = xy$.
 - (a) Esboce as curvas isotérmicas sobre as quais $T = 1$, $T = 2$ e $T = 3$.
 - (b) Uma formiga, inicialmente em $(1, 4)$, anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é a trajetória tomada pela formiga e qual é a temperatura ao longo de sua trajetória?
- 58. Se $V(x, y)$ for a voltagem ou potencial num ponto (x, y) do plano xy , então as curvas de nível de V são denominadas *curvas equipotenciais*. Ao longo de uma tal curva, a voltagem permanece constante. Dado que

$$V(x, y) = \frac{8}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}}$$

esboce as curvas equipotenciais nas quais $V = 2,0$; $V = 1,0$ e $V = 0,5$.

- 59. Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$.
 - (a) Use um recurso gráfico para gerar a curva de nível que passa pelo ponto $(2, -1)$.
 - (b) Gere a curva de nível de altura 1.
- 60. Seja $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$.
 - (a) Use um recurso gráfico para gerar a curva de nível que passa pelo ponto $(2, 2)$.
 - (b) Gere a curva de nível de altura 8.
- 61. Seja $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.
 - (a) Use um CAS para gerar o gráfico de f para $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$.
 - (b) Gere um mapa de contornos para a superfície e confirme visualmente que está consistente com a superfície obtida na parte (a).
 - (c) Leia o manual apropriado e explore o efeito de gerar o gráfico de f de vários pontos de vista.
- 62. Seja $f(x, y) = \frac{1}{10}e^x \sin y$.
 - (a) Use um CAS para gerar o gráfico de f para $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 2\pi$.
 - (b) Gere o mapa de contornos para a superfície e confirme visualmente que está consistente com a superfície obtida na parte (a).
 - (c) Leia o manual apropriado e explore o efeito de gerar o gráfico de f de vários pontos de vista.

63. Em cada parte, descreva em palavras como o gráfico de g está relacionado com o gráfico de f .
- (a) $g(x, y) = f(x - 1, y)$ (b) $g(x, y) = 1 + f(x, y)$
 (c) $g(x, y) = -f(x, y + 1)$
64. (a) Esboce o gráfico de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
 (b) Descreva em palavras como o gráfico da função $g(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$ está relacionado como o gráfico de f para valores positivos de a .

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.1

1. todos pontos (x, y) do primeiro ou terceiro quadrantes; todos pontos (x, y) do primeiro quadrante 2. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) 0 (d) $1/(2y+2)$
 3. (a) $k > 0$ (b) as retas $x + y = \ln k$ 4. (a) $0 < k \leq 1$ (b) esferas de raio $\sqrt{(1-k)/k}$ para $0 < k < 1$, o único ponto $(0, 0, 0)$ para $k = 1$.

14.2 LIMITES E CONTINUIDADE

Nesta seção, introduziremos as noções de limite e continuidade para funções de duas ou mais variáveis. Não entraremos em grandes detalhes – nosso objetivo é desenvolver precisamente os conceitos básicos e obter resultados necessários nas seções posteriores. Um estudo mais extensivo desses tópicos é comumente dado em Cálculo avançado.

■ LIMITES AO LONGO DE CURVAS

Para uma função de uma variável, há dois limites laterais em um ponto x_0 , a saber,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

refletindo o fato de que há apenas dois sentidos pelos quais x pode aproximar x_0 , pela direita ou pela esquerda. Para funções de duas ou três variáveis, a situação é mais complicada, pois há uma infinidade de curvas diferentes ao longo das quais um ponto pode aproximar outro (Figura 14.2.1). Nosso primeiro objetivo nesta seção é definir o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) ao longo de uma curva C (e, analogamente, para funções de três variáveis).

Se C for uma curva paramétrica lisa no espaço bi ou tridimensional que está representada pelas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{ou} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

e se $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $z_0 = z(t_0)$, então os limites

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y, z)$$

são definidos por

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t)) \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t), z(t)) \tag{2}$$

Em palavras, as Fórmulas (1) e (2) afirmam que um limite de uma função f ao longo de uma curva paramétrica pode ser obtido substituindo as equações paramétricas da curva na fórmula da função e então calculando o limite no ponto apropriado da função a uma variável que resulta.

Nessas fórmulas, o limite da função de t deve ser tratado como um limite lateral se (x_0, y_0) ou (x_0, y_0, z_0) forem pontos extremos de C .

Uma interpretação geométrica do limite ao longo de uma curva para uma função de duas variáveis, está mostrada na Figura 14.2.2. À medida que o ponto $(x(t), y(t))$ move-se ao longo da curva C no plano xy em direção a (x_0, y_0) , o ponto $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ move-se diretamente acima ao longo do gráfico de $z = f(x, y)$ com $f(x(t), y(t))$ tendendo ao valor limite L . Na figura, seguimos uma prática comum de omitir o zero na coordenada z para os pontos no plano xy .

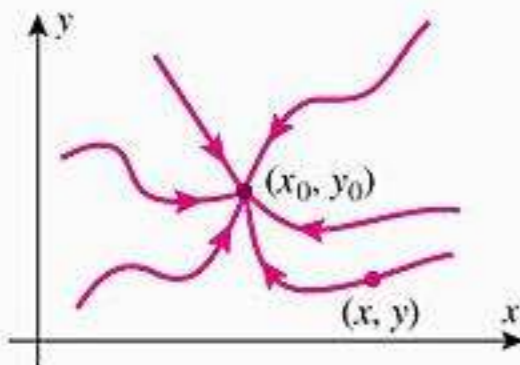


Figura 14.2.1

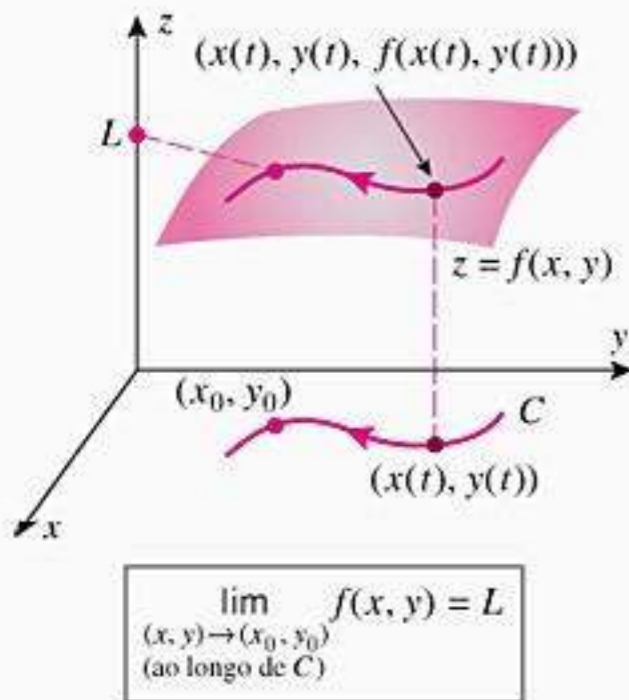


Figura 14.2.2

► **Exemplo 1** A Figura 14.2.3a mostra um gráfico gerado por um computador da função

$$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

O gráfico revela que a superfície tem um cume acima da reta $y = -x$, o que é de se esperar, uma vez que $f(x, y)$ tem um valor constante de $\frac{1}{2}$ para $y = -x$, exceto em $(0, 0)$, onde f não está definida (verifique). Além disso, o gráfico sugere que o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de uma reta que passa pela origem varia com a direção da reta. Determine esse limite ao longo

- (a) do eixo x (b) do eixo y (c) da reta $y = x$
- (d) da reta $y = -x$ (e) da parábola $y = x^2$

Solução (a) O eixo x tem equações paramétricas $x = t, y = 0$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \text{(ao longo de } y = 0)}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{0}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

o que é consistente com a Figura 14.2.3b.

Solução (b) O eixo y tem equações paramétricas $x = 0, y = t$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \text{(ao longo de } x = 0)}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{0}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

o que é consistente com a Figura 14.2.3b.

Solução (c) A reta $y = x$ tem equações paramétricas $x = t, y = t$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \text{(ao longo de } y = x)}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t^2}{2t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

o que é consistente com a Figura 14.2.3b.

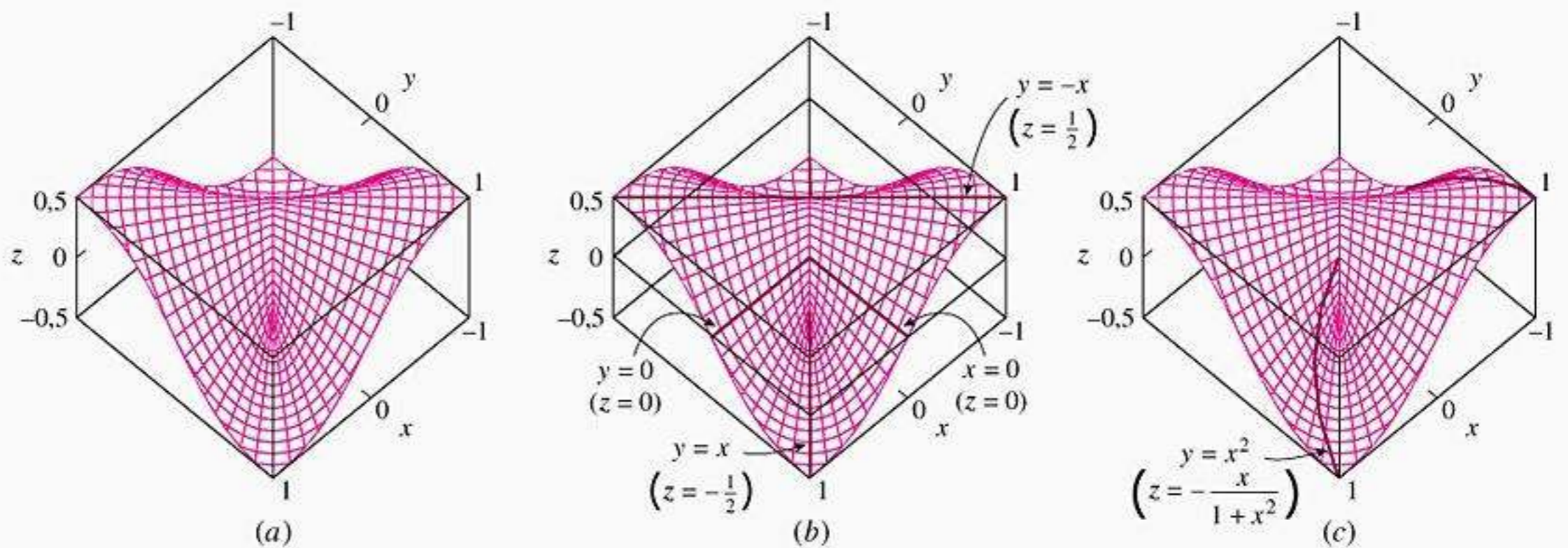


Figura 14.2.3

Solução (d) A reta $y = -x$ tem equações paramétricas $x = t, y = -t$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ao longo de } y = -x\text{)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

o que é consistente com a Figura 14.2.3b.

Solução (e) A parábola $y = x^2$ tem equações paramétricas $x = t, y = t^2$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ao longo de } y = x^2\text{)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t^3}{t^2 + t^4} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{1 + t^2} \right) = 0$$

o que é consistente com a Figura 14.2.3c, que mostra a curva paramétrica

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = -\frac{t}{1 + t^2}$$

sobreposta na superfície. ◀

■ CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

Embora os limites ao longo de curvas sejam úteis em muitas ocasiões, eles nem sempre contam toda a história sobre o comportamento limite de uma função num ponto; o que se precisa é de um conceito de limite que dê conta do comportamento da função em *toda uma vizinhança* de um ponto, e não só ao longo de curvas lisas que passem pelo ponto. Para alcançar isso, começamos introduzindo alguma terminologia.

Seja C um círculo no espaço bidimensional centrado em (x_0, y_0) e de raio positivo δ . O conjunto de todos os pontos englobados pelo círculo, mas que não estejam sobre a circunferência, é denominado **disco aberto** de raio δ centrado em (x_0, y_0) ; já o conjunto de todos os pontos da circunferência junto com os englobados pelo círculo, é o **disco fechado** de raio δ centrado em (x_0, y_0) (Figura 14.2.4). Analogamente, seja S uma esfera no espaço tridimensional centrada em (x_0, y_0, z_0) e de raio positivo δ ; o conjunto de todos os pontos englobados pela esfera, mas que não estejam sobre a esfera, é denominado **bola aberta** de raio δ centrada em (x_0, y_0, z_0) e o conjunto de todos os pontos da esfera junto com os englobados pela esfera, é a **bola fechada** de raio δ centrada em (x_0, y_0, z_0) . Os discos e as bolas são os análogos bi e tridimensionais dos intervalos de uma reta.

As noções de “aberto” e “fechado” podem ser estendidas a conjuntos mais gerais do espaço bi e tridimensional. Se D é um conjunto de pontos do espaço bidimensional, então dizemos que um ponto (x_0, y_0) é um **ponto interior** de D se existir *algum* disco aberto centrado em (x_0, y_0) que contenha unicamente pontos de D ; dizemos que (x_0, y_0) é um **ponto de fronteira** de D se *qualquer* disco aberto centrado em (x_0, y_0) contiver pontos tanto de D quanto não de D . A mesma terminologia se aplica a conjuntos no espaço tridimensional, mas nesse caso utilizamos bolas em vez de discos (Figura 14.2.5).

Dizemos que o conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto D do espaço bi ou tridimensional constitui o **interior** de D e o conjunto de todos os pontos de fronteira constitui a **fronteira** de D . Além disso, da mesma maneira que fizemos com discos e bolas, dizemos que D é **fechado** se contiver todos seus pontos de fronteira e D é **aberto** se não contiver ponto algum de sua fronteira. O conjunto de todos os pontos do espaço bidimensional e de todos os pontos do espaço tridimensional, não têm pontos de fronteira (por que?), portanto, convencio-namos que esses conjuntos são tanto abertos quanto fechados.

■ LIMITES GERAIS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

A afirmação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

tem o objetivo de transmitir a idéia de que, restringindo o ponto (x, y) a estar suficientemente próximo (mas distinto) do ponto (x_0, y_0) , podemos forçar o valor de $f(x, y)$ a ficar tão próximo



Figura 14.2.4



Figura 14.2.5

de L quanto queiramos. Essa idéia é formalmente expressa na definição seguinte e é ilustrada na Figura 14.2.6.

14.2.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função de duas variáveis e suponha que f esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto centrado em (x_0, y_0) , exceto, possivelmente, em (x_0, y_0) . Escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \tag{3}$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y)$ satisfaça

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

sempre que a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Quando for conveniente, podemos escrever (3) também como

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$$

ou como

$$f(x, y) \rightarrow L \text{ quando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

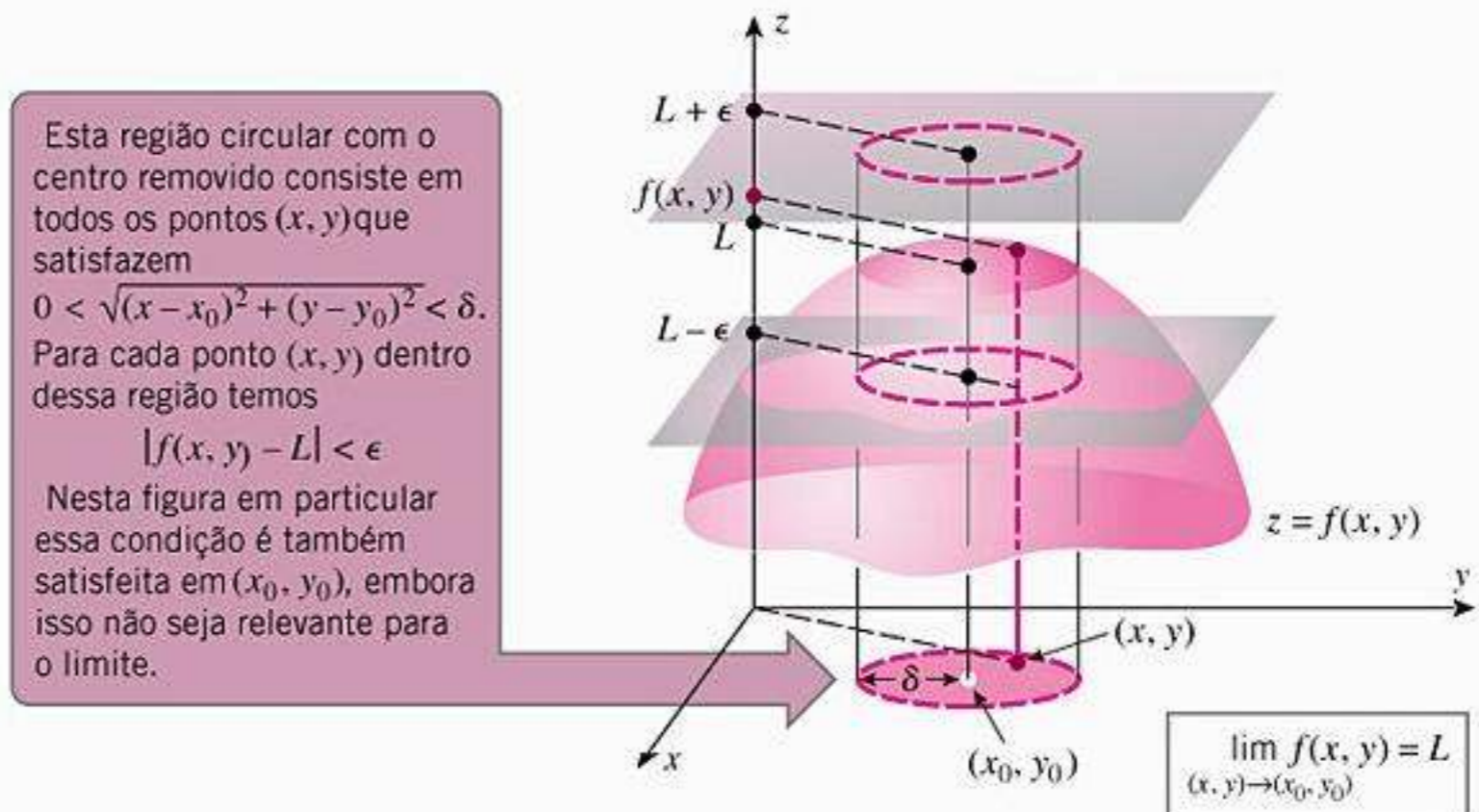


Figura 14.2.6

Uma outra ilustração da Definição 14.2.1 é mostrada no diagrama “de flecha” da Figura 14.2.7. Como a Figura 14.2.6, essa figura pretende transmitir a idéia de que os valores de $f(x, y)$ podem ser forçados a cair a menos de ϵ unidades de L no eixo z pela exigência de que (x, y) esteja a menos de δ unidades de (x_0, y_0) no plano xy . Utilizamos um ponto branco em (x_0, y_0) para sugerir que a condição com épsilon não precisa valer nesse ponto.

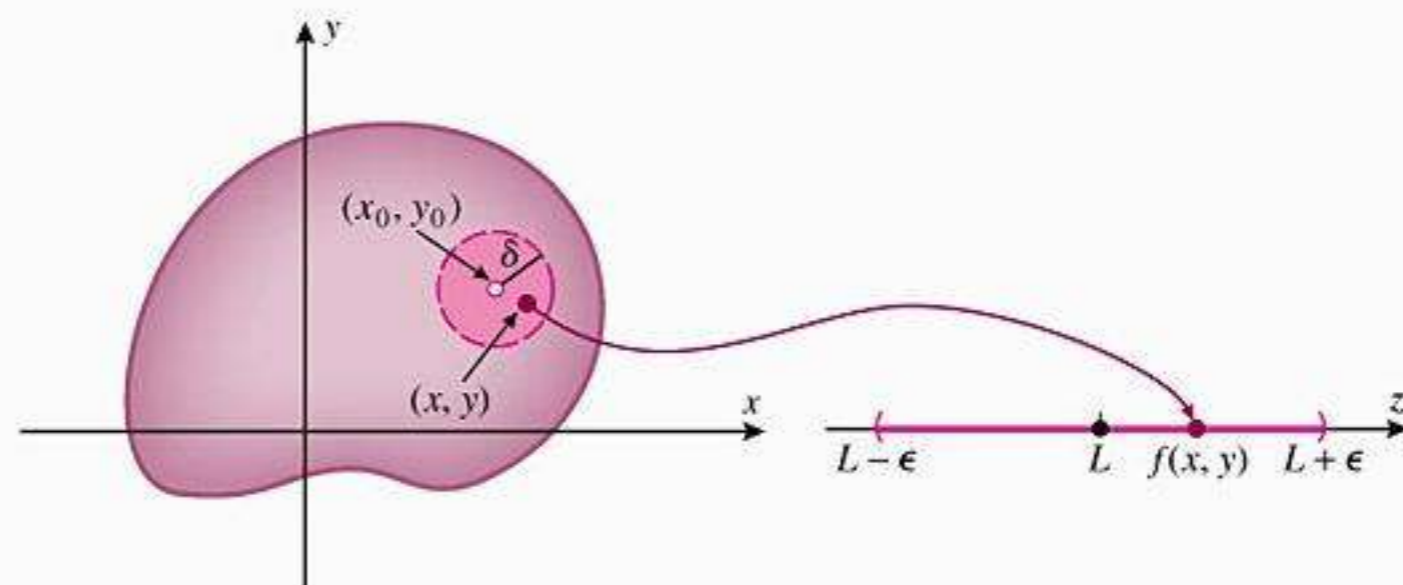


Figura 14.2.7

Notamos sem prova que as propriedades padrão de limites são válidas para limites ao longo de curvas e para limites gerais de funções de duas variáveis, portanto os cálculos envolvidos em tais limites podem ser efetuados da maneira usual.

► **Exemplo 2**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} [5x^3y^2 - 9] &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} [5x^3y^2] - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} 9 \\ &= 5 \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} x \right]^3 \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} y \right]^2 - 9 \\ &= 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ **RELAÇÕES ENTRE LIMITES GERAIS E LIMITES AO LONGO DE CURVAS LISAS**

Enunciado informalmente, se $f(x, y)$ tiver limite L quando (x, y) tender a (x_0, y_0) , então o valor de $f(x, y)$ fica cada vez mais próximo de L à medida que a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) tender a zero. Como essa afirmação não impõe restrição alguma sobre a direção pela qual (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) , é plausível que a função $f(x, y)$ também tenha o limite L quando (x, y) tender a (x_0, y_0) ao longo de *qualquer* curva lisa. Isso decorre do teorema seguinte, que enunciamos sem demonstração.

ADVERTÊNCIA

De um modo geral, não podemos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

mostrando que esse limite vale ao longo de alguma curva específica, nem mesmo se valer para uma família específica de curvas. O problema é que poderia haver alguma outra curva ao longo da qual o limite não exista ou tenha um valor diferente.

14.2.2 TEOREMA

- (a) Se $f(x, y) \rightarrow L$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, então $f(x, y) \rightarrow L$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ao longo de qualquer curva lisa.
- (b) Se o limite de $f(x, y)$ deixar de existir quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ao longo de alguma curva lisa, ou se $f(x, y)$ tiver limites diferentes quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ao longo de duas curvas lisas diferentes no domínio de f , então o limite de $f(x, y)$ não existe quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

► **Exemplo 3** O limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe, pois no Exemplo 1 encontramos duas curvas lisas diferentes ao longo das quais esse limite tem dois valores diferentes. Especificamente,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ao longo de } x=0\text{)}}} -\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{(ao longo de } y=x\text{)}}} -\frac{xy}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft$$

■ **CONTINUIDADE**

Informalmente enunciado, uma função de uma variável é contínua se o seu gráfico for uma curva não quebrada, sem saltos ou buracos. Para estender esta idéia para funções de duas variáveis, imagine que o gráfico de $z = f(x, y)$ esteja moldado a partir de uma fina camada de argila que tenha sido escavada ou apertada com força fazendo cumes e vales. Consideraremos f como sendo contínua se a superfície de argila não tiver ruptura nem buracos. As funções cujos gráficos estão na Figura 14.2.8 deixam de ser contínuas devido ao seu comportamento em $(0,0)$.

A definição precisa da continuidade em um ponto para funções de duas variáveis é análoga àquela para funções de uma variável – será necessário que o limite da função e o valor da função sejam o mesmo naquele ponto.

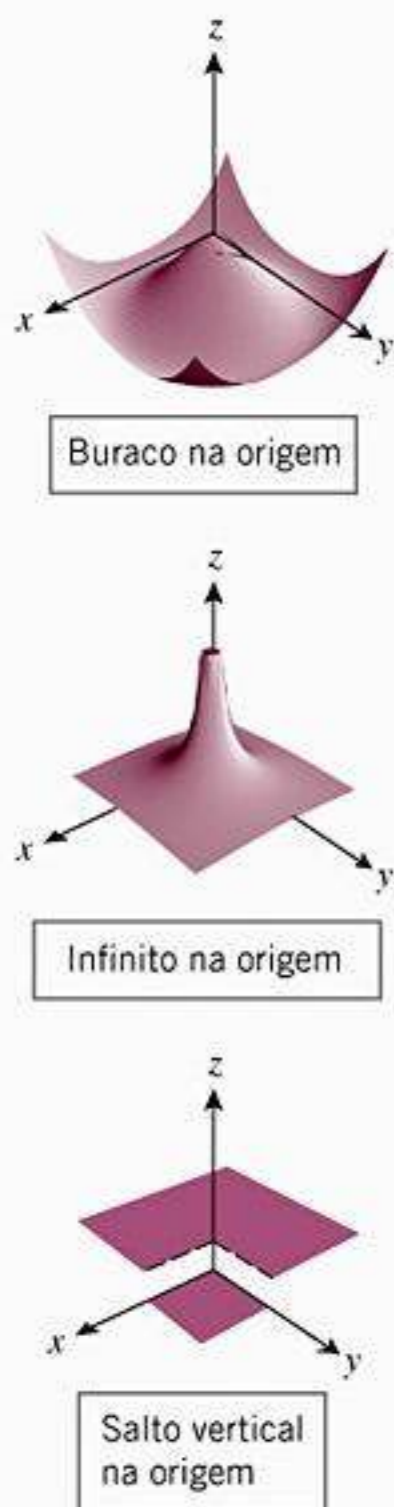


Figura 14.2.8

14.2.3 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função $f(x, y)$ é *contínua em* (x_0, y_0) se $f(x_0, y_0)$ estiver definido e se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Além disso, se f for contínua em cada ponto de um conjunto aberto D , então dizemos que f é *contínua em* D ; e se f for contínua em todo ponto do plano xy , então dizemos que f é *contínua em toda parte*.

O teorema seguinte, que enunciamos sem demonstração, ilustra algumas das maneiras em que funções contínuas podem ser combinadas para produzir novas funções contínuas.

14.2.4 TEOREMA

- (a) Se $g(x)$ for contínua em x_0 e $h(y)$ for contínua em y_0 , então $f(x, y) = g(x)h(y)$ é contínua em (x_0, y_0) .
- (b) Se $h(x, y)$ for contínua em (x_0, y_0) e $g(u)$ for contínua em $u = h(x_0, y_0)$, então a composição $f(x, y) = g(h(x, y))$ é contínua em (x_0, y_0) .
- (c) Se $f(x, y)$ for contínua em (x_0, y_0) e $x(t)$ e $y(t)$ forem contínuas em t_0 , com $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, então a composição $f(x(t), y(t))$ é contínua em t_0 .

► **Exemplo 4** Use o Teorema 14.2.4 para mostrar que as funções $f(x, y) = 3x^2y^5$ e $f(x, y) = \text{sen}(3x^2y^5)$ são contínuas em toda parte.

Solução Os polinômios $g(x) = 3x^2$ e $h(y) = y^5$ são contínuos em cada ponto da reta real, portanto pela parte (a) do Teorema 14.2.4, a função $f(x, y) = 3x^2y^5$ é contínua em cada ponto (x, y) do plano xy . Como $3x^2y^5$ é contínua em cada ponto do plano xy e $\text{sen } u$ é contínua em cada ponto u da reta real, segue da parte (b) do Teorema 14.2.4 que a composição $f(x, y) = \text{sen}(3x^2y^5)$ é contínua em toda parte. ◀

O Teorema 14.2.4 é um de uma classe inteira de teoremas sobre continuidade de funções de duas ou mais variáveis. O conteúdo desses teoremas pode ser resumido informalmente com três princípios básicos:

Reconhecendo Funções Contínuas

- A composição de funções contínuas é contínua.
- A soma, diferença ou produto de funções contínuas é contínua.
- O quociente de funções contínuas é contínua, exceto onde o denominador for zero.

Usando esses princípios e o Teorema 14.2.4, o leitor deve ser capaz de confirmar que as seguintes funções são todas contínuas em toda parte.

$$xe^{xy} + y^{2/3}, \quad \cosh(xy^3) - |xy|, \quad \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

► **Exemplo 5** a cu e $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Solução m $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ é c ntínua em $(-1,2)$ r uê , egue a efiniã e c ntínua e ara unãõe e ua ariá ei ue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2 + (2)^2} = -\frac{2}{5} \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 6** m a unã

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{1 - xy}$$

é um u ciente e unãõe c ntínua , é c ntínua e cet n e $1 - xy = 0$ im, $f(x,y)$ é c ntínua em t a arte e cet na hi érb e $xy = 1$ ◀

■ **LIMITES EM DESCONTINUIDADES**

À eze , é áci rec nhecer uan um imite nã e i te P re em , é e i ente ue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$

ue im ica ue a re a unã ten em a $+\infty$ uan $x,y \rightarrow 0,0$ a ng e ua uer cur a i a Figura 14.2.9 ntu , nã é e i ente e imite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

e i te, i e tá na rma in etermina a ti $0 \cdot \infty$ Emb ra a regra e L' ô ita nã a er a ica a iretamente, eguinte e em i u tra um mét ara enc ntrar e te imite c n erten ara c r ena a are

► **Exemplo 7** Determine $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

Solução Se am r, θ a c r ena a are nt x, y c m $r \geq 0$ Entã , tem

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ém i , uma ez ue $r \geq 0$, tem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e m ue $r \rightarrow 0^+$ e, e mente e, $x, y \rightarrow 0,0$ im, em rec cre er imite a c m

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \ln r^2$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln r}{1/r^2}$$

Isso converte o limite para uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ .

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2/r}{-2/r^3}$$

Regra de L'Hôpital.

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} (-r^2) = 0 \blacktriangleleft$$

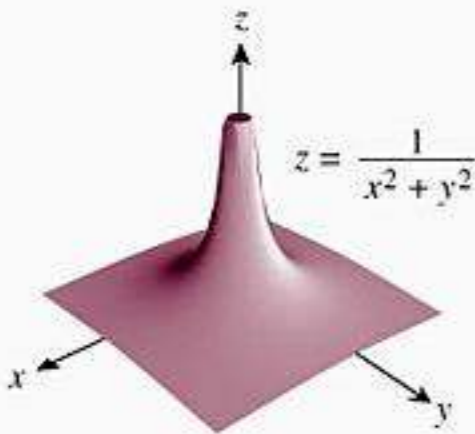
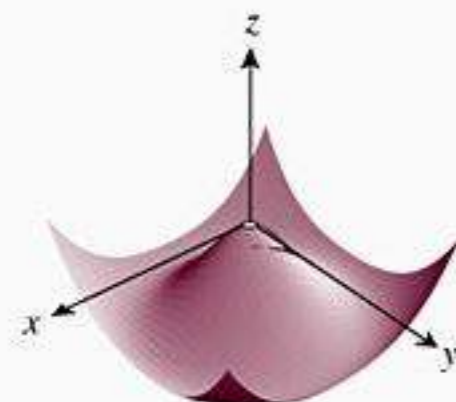


Figura 14.2.9



$$z = x^2 + y^2 \ln(x^2 + y^2)$$

Figura 14.2.10

O gráfico de $f(x,y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ no Exemplo 7 é uma superfície com um buraco, ou furo, na origem (Figura 14.2.10). Podemos remover essa descontinuidade definindo $f(0,0)$ como sendo igual a 0. (Ver Exercícios 31 e 32, que também tratam da noção de descontinuidade "removível".)

■ CONTINUIDADE EM PONTOS DE FRONTEIRA

No nosso estudo de continuidade de funções de uma variável, definimos primeiro a continuidade num ponto, depois a continuidade em intervalos abertos e então, usando limites laterais, estendemos a noção de continuidade para incluir os pontos nas extremidades do intervalo. Analogamente, para funções de duas variáveis, podemos estender a noção de continuidade de $f(x, y)$ para a fronteira de seu domínio, modificando apropriadamente a Definição 14.2.1, de tal modo que (x, y) seja forçado a aproximar (x_0, y_0) somente por pontos que estejam completamente no domínio de f . Omitiremos os detalhes.

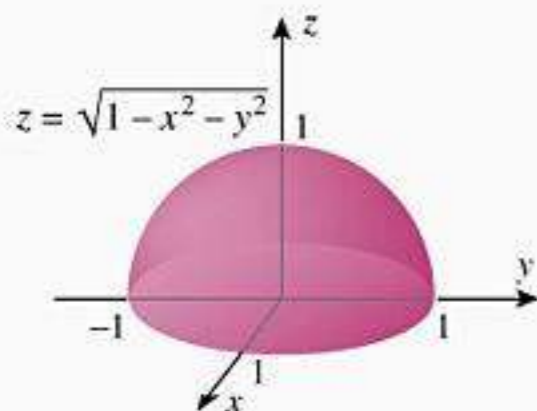


Figura 14.2.11

► **Exemplo 8** O gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é o hemisfério superior mostrado na Figura 14.2.11 e o domínio natural de f é o disco unitário fechado

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

O gráfico de f não apresenta cortes nem buracos, de modo que passa no nosso “teste intuitivo” de continuidade. Nesse caso, a continuidade num ponto (x_0, y_0) da fronteira reflete o fato de que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} = 0$$

quando (x, y) fica restrito a pontos do disco unitário fechado $x^2 + y^2 \leq 1$. Segue que f é contínua em seu domínio. ◀

■ EXTENSÕES PARA TRÊS VARIÁVEIS

Todos os resultados nesta seção podem ser estendidos para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, a distância entre os pontos (x, y, z) e (x_0, y_0, z_0) no espaço tridimensional é

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

logo, a extensão natural da Definição 14.2.1 para o espaço tridimensional é como segue:

14.2.5 DEFINIÇÃO Seja f uma função de três variáveis tal que f esteja definida em todos pontos dentro de uma bola centrada em (x_0, y_0, z_0) , exceto, possivelmente, em (x_0, y_0, z_0) . Escrevemos

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L \tag{4}$$

se dado um número qualquer $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y, z)$ satisfaça

$$|f(x, y, z) - L| < \epsilon$$

sempre que a distância entre (x, y, z) e (x_0, y_0, z_0) satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Da mesma forma que ocorre com as funções de uma ou duas variáveis, definimos uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis como sendo contínua num ponto (x_0, y_0, z_0) se o limite da função e o valor da função forem o mesmo neste ponto, isto é,

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Embora os detalhes sejam omitidos, as propriedades de limites e de continuidade que foram discutidas para funções de duas variáveis, inclusive a noção de continuidade em pontos de fronteira, podem ser transportadas para funções de três variáveis.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.2 (Ver página 945 para respostas.)

1. Seja

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Determine o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo da curva C .

- (a) $C : x = 0$ (b) $C : y = 0$
 (c) $C : y = x$ (d) $C : y = x^2$

2. (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} x \cos \pi y = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^{xy^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Uma função $f(x, y)$ é contínua em x_0, y_0 desde que $f(x_0, y_0)$ exista e que $f(x, y)$ tenha um limite igual a $\underline{\hspace{2cm}}$ quando (x, y) tende a $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. Determine todos os valores da constante a tais que a função $f(x, y) = \sqrt{x^2 - ay^2 + 1}$ seja contínua em toda parte.

EXERCÍCIOS 14.2

1-6 Use as leis do limite e as propriedades da continuidade para calcular o limite.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (4xy^2 - x)$ 2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, \pi)} (xy^2 \operatorname{sen} xy)$
 3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$ 4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} e^{2x-y^2}$
 5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2y^3)$ 6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-2)} x\sqrt[3]{y^3 + 2x}$

7-8 Mostre que o limite não existe considerando os limites quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo dos eixos coordenados.

7. (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{2x^2 + y^2}$
 8. (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2}$

9-12 Calcule o limite fazendo a substituição $z = x^2 + y^2$ e observando que $z \rightarrow 0^+$ se, e somente se, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ 10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$
 11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-1/(x^2 + y^2)}$ 12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-1/\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13-20 Determine se o limite existe. Se existir, determine seu valor.

13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ 14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 16y^4}{x^2 + 4y^2}$
 15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$ 16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
 17. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 18. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,-1)} \ln(2x + y - z)$

19. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

20. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$

21-22 Calcule o limite, se existir, convertendo para coordenadas polares, como no Exemplo 7.

21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$ 22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

23-24 Calcule o limite, se existir, convertendo para coordenadas esféricas, (ρ, θ, ϕ) e observe que $\rho \rightarrow 0^+$ se, e só se, $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$, já que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

23. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

24. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$

ENFOCANDO CONCEITOS

25. A figura a seguir mostra uma parte do gráfico de

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

- (a) Baseado no gráfico da figura, $f(x, y)$ tem limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Explique seu raciocínio.
 (b) Mostre que $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$. Isso implica que $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Explique.
 (c) Mostre que $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da parábola $y = x^2$, e confirme visualmente que isso é consistente com o gráfico de $f(x, y)$.
 (d) Baseado nas partes (b) e (c), $f(x, y)$ tem um limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Isso é consistente com a resposta da parte (a)?

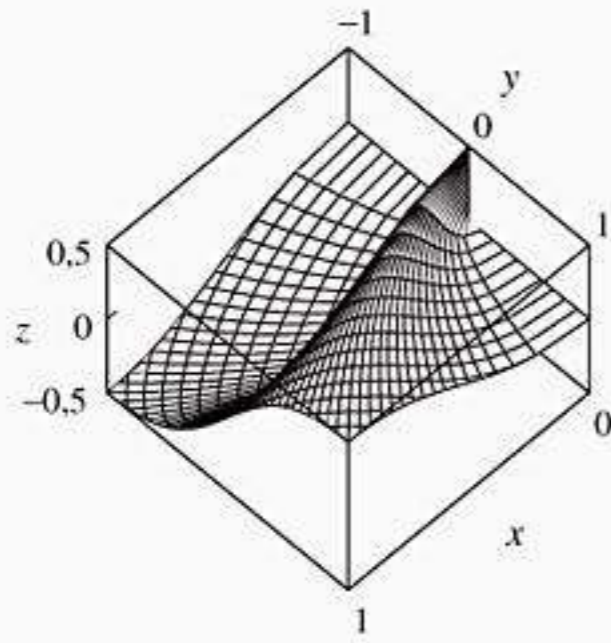


Figura Ex-25

26. (a) Mostre que o valor de

$$\frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

tende a 0 quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$, ou ao longo de qualquer parábola $y = kx^2$.

(b) Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

não existe, tomando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da curva $y = x^3$.

27. (a) Mostre que o valor de

$$\frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4}$$

tende a 0 quando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ ao longo de qualquer reta $x = at, y = bt, z = ct$.

(b) Mostre que o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4}$$

não existe tomando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ ao longo da curva $x = t^2, y = t, z = t$.

28. Determine $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y - 1)^2} \right]$.

29. Determine $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + (y - 1)^2} \right]$.

30. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

31-32 Dizemos que uma função $f(x, y)$ tem uma *descontinuidade removível* em (x_0, y_0) se existir $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ mas f não for contínua em (x_0, y_0) , ou por não estar definida em (x_0, y_0) ou por que $f(x_0, y_0)$ difere do valor do limite. Determine se $f(x, y)$ tem uma descontinuidade removível em $(0, 0)$.

31. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

32. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

33-40 Esboce a maior região na qual a função f é contínua.

33. $f(x, y) = y \ln(1 + x)$

34. $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

35. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

36. $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

37. $f(x, y) = \cos \left(\frac{xy}{1 + x^2 + y^2} \right)$

38. $f(x, y) = e^{1-xy}$

39. $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(xy)$

40. $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(x - y)$

41-44 Descreva a maior região na qual a função f é contínua.

41. $f(x, y, z) = 3x^2 e^{yz} \cos(xyz)$

42. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

43. $f(x, y, z) = \frac{y + 1}{x^2 + z^2 - 1}$

44. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2 + 3z^2}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.2

1. (a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) 1 2. (a) 3 (b) 1 (c) 0 3. $f(x_0, y_0); (x_0, y_0)$ 4. $a \leq 0$

14.3 DERIVADAS PARCIAIS

Nesta seção, desenvolveremos as ferramentas matemáticas para estudar taxas de variação que envolvam duas ou mais variáveis independentes.

DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Se $z = f(x, y)$, então pode-se indagar como os valores de z variam se x for mantido fixado e y for permitido variar ou se y for mantido fixado e x for permitido variar. Por exemplo, a lei dos

gases ideais da Física afirma que sob condições apropriadas, a pressão exercida por um gás é uma função do volume do gás e sua temperatura. Assim, um físico estudando gases poderia estar interessado na taxa de variação da pressão se o volume for mantido fixado e à temperatura for permitido variar ou se a temperatura for mantida fixada e ao volume for permitido variar. Passamos a definir uma derivada que descreva tais taxas de variação.

Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto do domínio de uma função $f(x, y)$. Se fixarmos $y = y_0$, então $f(x, y_0)$ é uma função apenas da variável x . O valor da derivada

$$\frac{d}{dx}[f(x, y_0)]$$

em x_0 dá, portanto, uma medida da taxa de variação instantânea de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) . Analogamente, o valor da derivada

$$\frac{d}{dy}[f(x_0, y)]$$

em y_0 dá uma medida da taxa de variação instantânea de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) . Essas derivadas são tão importantes no estudo do Cálculo Diferencial de funções a várias variáveis que têm seu próprio nome e notação.

14.3.1 DEFINIÇÃO Se $z = f(x, y)$ e (x_0, y_0) é um ponto no domínio de f , então a *derivada parcial de f em relação a x* em (x_0, y_0) [também chamada *derivada parcial de z em relação a x* em (x_0, y_0)] é a derivada em x_0 da função que resulta quando $y = y_0$ for mantido fixado e a x for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_x(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx}[f(x, y_0)] \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Analogamente, a *derivada parcial de f em relação a y* em (x_0, y_0) [também chamada *derivada parcial de z em relação a y* em (x_0, y_0)] é a derivada em y_0 da função que resulta quando $x = x_0$ for mantido fixado e a y for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_y(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_y(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dy}[f(x_0, y)] \right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

Os limites em (1) e (2) mostram a relação entre as derivadas parciais e as derivadas de funções de uma variável. Na prática, nosso método usual de calcular derivadas parciais é segurar uma variável fixada e então derivar a função resultante usando as regras de derivação de funções de uma variável.

► **Exemplo 1** Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para a função $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$.

Solução Como

$$f_x(x, 3) = \frac{d}{dx}[f(x, 3)] = \frac{d}{dx}[18x^3 + 4x + 6] = 54x^2 + 4$$

temos $f_x(1, 3) = 54 + 4 = 58$. Também, como

$$f_y(1, y) = \frac{d}{dy}[f(1, y)] = \frac{d}{dy}[2y^2 + 2y + 4] = 4y + 2$$

temos $f_y(1, 3) = 4(3) + 2 = 14$. ◀

■ **AS FUNÇÕES DERIVADAS PARCIAIS**

As Fórmulas (1) e (2) definem as derivadas parciais de uma função num ponto (x_0, y_0) específico. Contudo, muitas vezes será desejável omitir os subscritos e pensar nas derivadas parciais

como funções das variáveis x e y . Essas funções são

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

O exemplo seguinte apresenta uma maneira alternativa de fazer as contas do Exemplo 1.

► **Exemplo 2** Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$ e use essas derivadas parciais para calcular $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$.

Solução Mantendo y fixado e derivando em relação a x , obtemos

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 6x^2y^2 + 4$$

e mantendo x fixado e derivando em relação a y , obtemos

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 4x^3y + 2$$

Assim,

$$f_x(1, 3) = 6(1^2)(3^2) + 4 = 58 \quad \text{e} \quad f_y(1, 3) = 4(1^3)3 + 2 = 14$$

o que está de acordo com os resultados no Exemplo 1. ◀

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os sistemas algébricos computacionais têm comandos especiais para calcular derivadas parciais. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ do Exemplo 2.

■ **DERIVADAS PARCIAIS VISTAS COMO TAXAS DE VARIAÇÃO E INCLINAÇÕES**

Lembre-se que se $y = f(x)$, então o valor de $f'(x_0)$ pode ser interpretado ou como a taxa de variação de y em relação a x no ponto x_0 ou a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 . As derivadas parciais têm interpretações análogas. Para ver isso, suponha que C_1 seja a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$ e que C_2 seja sua interseção com o plano $x = x_0$ (Figura 14.3.1). Assim, $f_x(x_0, y_0)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de z em relação a x ao longo da curva C_1 e $f_y(x_0, y_0)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de z em relação a y ao longo da curva C_2 . Em particular, $f_x(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de z em relação a x ao longo da curva C_1 no ponto (x_0, y_0) e $f_y(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de z em relação a y ao longo da curva C_2 no ponto (x_0, y_0) .

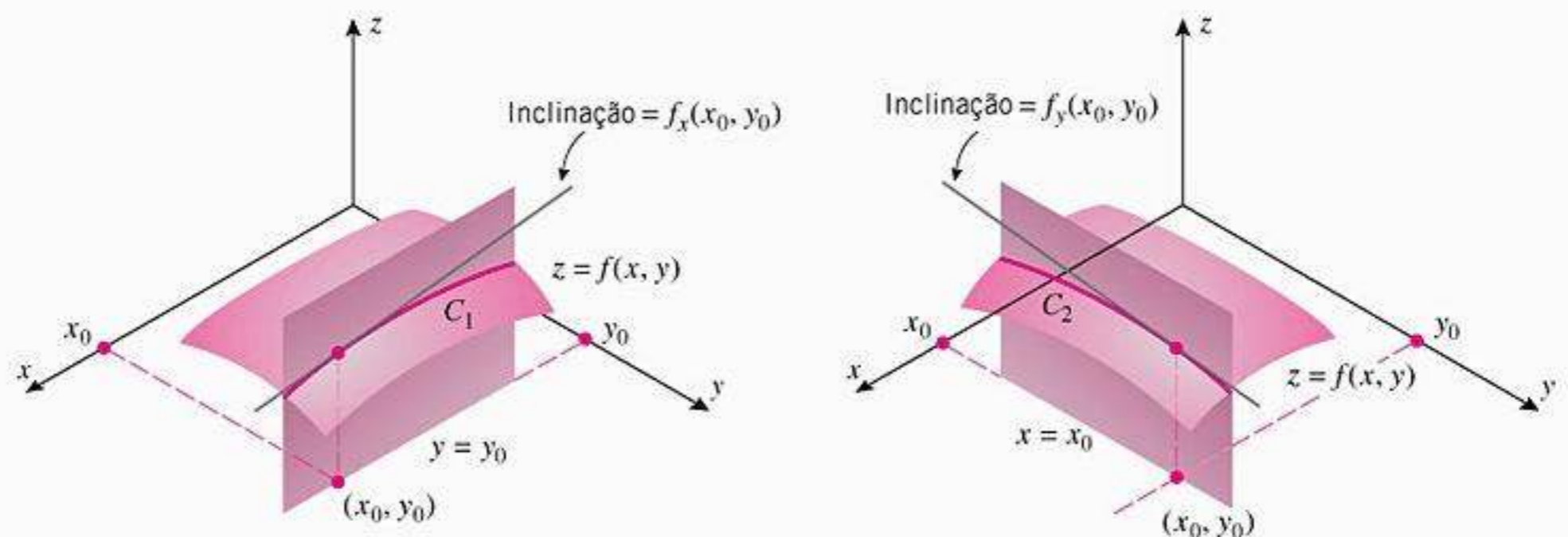


Figura 14.3.1

Em problemas concretos, devemos acompanhar a interpretação de $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ pelas unidades correspondentes. Ver Exemplo 3.

► **Exemplo 3** Lembre que o índice de sensação térmica é dado pela fórmula

$$W = 35,74 + 0,6215T + (0,4275T - 35,75)v^{0,16}$$

Calcule a derivada parcial de W em relação a v no ponto $(T, v) = (25, 10)$ e interprete essa derivada parcial como uma taxa de variação.

Solução Mantendo T fixado e derivando em relação a v obtemos

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = 0 + 0 + (0,4275T - 35,75)(0,16)v^{0,16-1} = (0,4275T - 35,75)(0,16)v^{-0,84}$$

Como W é dado em graus Fahrenheit e v em milhas por hora, as unidades de uma taxa de variação de W em relação a v são $^{\circ}\text{F}/(\text{milhas/hora})$ (que também podemos escrever como $^{\circ}\text{F}\cdot\text{h}/\text{milhas}$). Substituindo $T = 25$ e $v = 10$, resulta

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = (-4,01)10^{-0,84} \approx -0,58 \frac{^{\circ}\text{F}}{\text{milhas/h}}$$

como a taxa de variação instantânea de W em relação a v no ponto $(T, v) = (25, 10)$. Concluímos que se a temperatura do ar permanecer constante em 25°F e a velocidade do vento mudar um pouco a partir de uma velocidade inicial de 10 milhas por hora, então a razão da variação do índice de sensação térmica pela variação da velocidade do vento deveria ser de aproximadamente $-0,58^{\circ}\text{F}/(\text{milhas/hora})$. ◀

Geometricamente, $f_x(x_0, y_0)$ pode ser vista como a inclinação da reta tangente à curva C_1 no ponto (x_0, y_0) e $f_y(x_0, y_0)$ pode ser vista como a inclinação da reta tangente à curva C_2 no ponto (x_0, y_0) (Figura 14.3.1). Diremos que $f_x(x_0, y_0)$ é a **inclinação da superfície na direção x** em (x_0, y_0) e $f_y(x_0, y_0)$ a **inclinação da superfície na direção y** em (x_0, y_0) .

► **Exemplo 4** Seja $f(x, y) = x^2y + 5y^3$.

- (a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção x no ponto $(1, -2)$.
- (b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção y no ponto $(1, -2)$.

Solução (a) Derivando f em relação a x com y fixado, obtemos

$$f_x(x, y) = 2xy$$

Assim, a inclinação na direção x é $f_x(1, -2) = -4$, isto é, z está decrescendo a uma taxa de 4 unidades a cada unidade de crescimento de x .

Solução (b) Derivando f em relação a y com x fixado, obtemos

$$f_y(x, y) = x^2 + 15y^2$$

Assim, a inclinação na direção y é $f_y(1, -2) = 61$, isto é, z está crescendo a uma taxa de 61 unidades a cada unidade de crescimento de y . ◀

► **Exemplo 5** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Mostre que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, existem em todos os pontos (x, y) .
- (b) Explique por que f não é contínua em $(0, 0)$.

Confirme a conclusão do Exemplo 3 calculando $\frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v}$ para valores de Δv perto de 0.

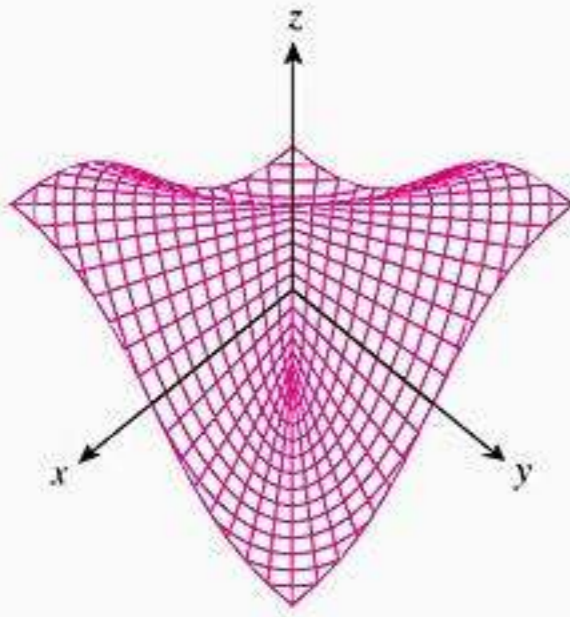


Figura 14.3.2

Solução (a) A Figura 14.3.2 mostra o gráfico de f . Note que f é parecida com a função considerada no Exemplo 1 da Seção 14.2, exceto que agora associamos a f o valor 0 em $(0, 0)$. Exceto nesse ponto, as derivadas parciais de f são

$$f_x(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad (5)$$

Não é evidente da Fórmula (3) se f tem derivadas parciais em $(0, 0)$ e, caso afirmativo, quais os valores dessas derivadas. Para responder essa questão, teremos que usar as definições das derivadas parciais (Definição 14.3.1). Aplicando as Fórmulas (1) e (2) a (3), obtemos

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

Isso mostra que f tem derivadas parciais em $(0, 0)$ e os valores de ambas derivadas parciais são 0 nesse ponto.

Solução (b) Vimos no Exemplo 3 da Seção 14.2 que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe. Assim, f não é contínua em $(0, 0)$. ◀

O Exemplo 5 mostra que, contrastando com o caso de funções de uma única variável, a existência de derivadas parciais de funções de várias variáveis não garante a continuidade da função. Voltaremos a esse assunto na próxima seção.

■ NOTAÇÃO DE DERIVADA PARCIAL

Se $z = f(x, y)$, então as derivadas parciais f_x e f_y são também denotadas pelos símbolos

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Algumas notações típicas para as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) são

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

► **Exemplo 6** Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = x^4 \text{sen}(xy^3)$.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[x^4 \text{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial x}[\text{sen}(xy^3)] + \text{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^4) \\ &= x^4 \cos(xy^3) \cdot y^3 + \text{sen}(xy^3) \cdot 4x^3 = x^4 y^3 \cos(xy^3) + 4x^3 \text{sen}(xy^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}[x^4 \text{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial y}[\text{sen}(xy^3)] + \text{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^4) \\ &= x^4 \cos(xy^3) \cdot 3xy^2 + \text{sen}(xy^3) \cdot 0 = 3x^5 y^2 \cos(xy^3) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

O símbolo ∂ é chamado de sinal da derivada parcial. É derivado do alfa-beto cirílico.

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h)

Tabela 14.3.1
TEMPERATURA T (°F)

	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Para funções dadas através de tabelas, podemos estimar as derivadas parciais usando entradas adjacentes da tabela.

► **Exemplo 7** Use os valores da função índice de sensação térmica $W(T, v)$ dados na Tabela 14.3.1 para estimar a derivada parcial de W em relação a v no ponto $(T, v) = (25, 10)$. Compare essa estimativa ao valor da derivada parcial obtida no Exemplo 3.

Solução Como

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

podemos aproximar a derivada parcial por

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

Com $\Delta v = 5$, essa aproximação é

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 + 5) - 15}{5} = \frac{W(25, 15) - 15}{5} = \frac{13 - 15}{5} = -\frac{2}{5} \frac{^\circ\text{F}}{\text{milhas/h}}$$

e com $\Delta v = -5$, é

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 - 5) - 15}{-5} = \frac{W(25, 5) - 15}{-5} = \frac{19 - 15}{-5} = -\frac{4}{5} \frac{^\circ\text{F}}{\text{milhas/h}}$$

Consideremos a média dessas duas aproximações, $-\frac{3}{5} = -0,6^\circ \text{F}/(\text{milhas/hora})$, como nossa estimativa de $(\partial W/\partial v)(25, 10)$. Isso está próximo do valor

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = (-4,01)10^{-0,84} \approx -0,58 \frac{^\circ\text{F}}{\text{milhas/h}}$$

encontrado do Exemplo 3. ◀

■ DERIVAÇÃO PARCIAL IMPLÍCITA

► **Exemplo 8** Determine a inclinação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ na direção y nos pontos $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ (Figura 14.3.3).

Solução O ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ situa-se no hemisfério superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e o ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ no hemisfério inferior $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Poderíamos encontrar as inclinações derivando cada expressão para z separadamente em relação a y e, então, calcular as derivadas em $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{3}$. Contudo, é mais eficiente derivar a equação dada

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

implicitamente em relação a y , uma vez que isso nos dará ambas as inclinações com uma diferenciação. Para efetuar a derivação implícita, vemos z como uma função de x e y e derivamos ambos lados em relação a y , mantendo x fixado. Os cálculos são:

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 + z^2] = \frac{\partial}{\partial y}[1]$$

$$0 + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

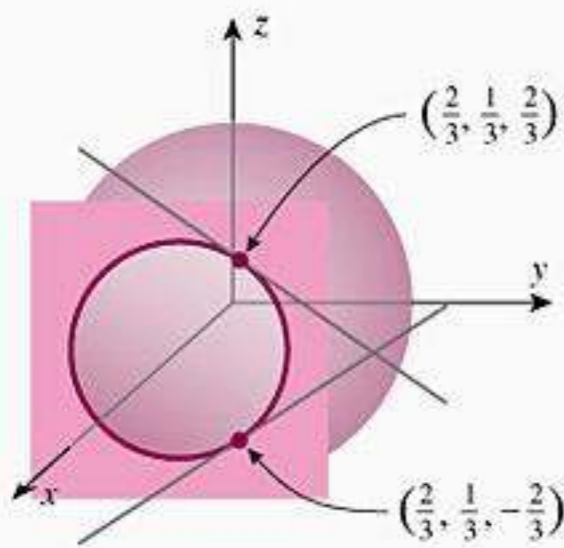


Figura 14.3.3

Verifique o resultado obtido no Exemplo 8 derivando as funções

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

e

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

diretamente.

Substituindo as coordenadas y e z dos pontos $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ nessa expressão, vemos que a inclinação no ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é $-\frac{1}{2}$ e a inclinação no ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ é $\frac{1}{2}$. ◀

► **Exemplo 9** Suponha que $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ seja o comprimento da diagonal de um retângulo, cujos lados têm comprimentos x e y que podem variar. Determine uma fórmula para a taxa de variação de D em relação a x se x varia com y considerado constante, e use essa fórmula para determinar a taxa de variação de D em relação a x no ponto em que $x = 3$ e $y = 4$.

Solução Derivando ambos lados da equação $D^2 = x^2 + y^2$ em relação a x , obtemos

$$2D \frac{\partial D}{\partial x} = 2x \quad \text{e, assim,} \quad D \frac{\partial D}{\partial x} = x$$

Como $D = 5$ quando $x = 3$ e $y = 4$, segue que

$$5 \frac{\partial D}{\partial x} \Big|_{x=3, y=4} = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial D}{\partial x} \Big|_{x=3, y=4} = \frac{3}{5}$$

Assim, D está crescendo a uma taxa de $\frac{3}{5}$ unidades por aumento de unidade de x no ponto $(3, 4)$. ◀

■ DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES COM MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Para uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis, há três *derivadas parciais*:

$$f_x(x, y, z), \quad f_y(x, y, z), \quad f_z(x, y, z)$$

A derivada parcial f_x é calculada mantendo y e z constantes e derivando em relação a x . Para f_y , as variáveis x e z mantêm-se constantes, e para f_z as variáveis x e y são mantidas constantes. Se uma variável dependente

$$w = f(x, y, z)$$

for usada, então as três derivadas parciais de f podem ser denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

► **Exemplo 10** Se $f(x, y, z) = x^3 y^2 z^4 + 2xy + z$, então

$$f_x(x, y, z) = 3x^2 y^2 z^4 + 2y$$

$$f_y(x, y, z) = 2x^3 y z^4 + 2x$$

$$f_z(x, y, z) = 4x^3 y^2 z^3 + 1$$

$$f_z(-1, 1, 2) = 4(-1)^3 (1)^2 (2)^3 + 1 = -31 \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 11** Se $f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos \phi \sin \theta$, então

$$f_\rho(\rho, \theta, \phi) = 2\rho \cos \phi \sin \theta$$

$$f_\theta(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos \phi \cos \theta$$

$$f_\phi(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2 \sin \phi \sin \theta \quad \blacktriangleleft$$

Em geral, se $f(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ for uma função de n variáveis, há n derivadas parciais de f , cada uma das quais foi obtida fixando $n - 1$ variáveis e derivando a função em relação

à variável não-fixada. Se $w = f(v_1, v_2, \dots, v_n)$, então essas derivadas parciais são denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial v_1}, \frac{\partial w}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial v_n}$$

onde $\partial w/\partial v_i$ é obtida fixando todas as variáveis exceto v_i e derivando em relação a v_i .

► **Exemplo 12** Determine

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right]$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Solução Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right] &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} [2x_i] \\ &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \end{aligned}$$

Todos os termos exceto x_i^2 são constantes.

■ **DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES**

Suponha que f seja uma função de duas variáveis x e y . Como as derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ também são funções de x e y , essas funções podem elas mesmas ter derivadas parciais. Isso origina quatro possíveis derivadas parciais **de segunda ordem** de f , que são definidas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}$$

Derivando duas vezes em relação a x .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

Derivando duas vezes em relação a y .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy}$$

Derivando, primeiro em relação a x e, então, em relação a y .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

Derivando, primeiro em relação a y e, então, em relação a x .

Os dois últimos casos são denominados **derivadas parciais de segunda ordem mistas**. Além disso, as derivadas $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são chamadas freqüentemente de **derivadas parciais de primeira ordem**, quando for necessário distingui-las das derivadas parciais de ordem superior. Convenções análogas se aplicam a derivadas parciais de segunda ordem de uma função de três variáveis.

ADVERTÊNCIA

Observe que as duas notações para as parciais de segunda ordem mistas têm convenção oposta quanto à ordem de diferenciação. Na notação "∂", as derivadas são feitas da direita para a esquerda e, na notação "subscrito", elas são tomadas da esquerda para a direita. Contudo, a convenção faz sentido se inserirmos os parênteses:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Da direita para a esquerda. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

Da esquerda para a direita. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

► **Exemplo 13** Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$.

Solução Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3 \quad \blacktriangleleft$$

As derivadas parciais de terceira ordem, de quarta ordem e de ordens superiores podem ser obtidas derivando sucessivamente. Algumas possibilidades são

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = f_{xxx} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) = f_{yyyy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = f_{xyy} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \right) = f_{xxyy}$$

► **Exemplo 14** Seja $f(x, y) = y^2e^x + y$. Determine f_{xyy} .

Solução

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2e^x) = \frac{\partial}{\partial y} (2ye^x) = 2e^x \quad \blacktriangleleft$$

■ IGUALDADE DAS PARCIAIS MISTAS

Poderíamos esperar que uma função $f(x, y)$ tivesse quatro derivadas parciais de segunda ordem distintas: f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} e f_{yy} . Contudo, observe que as derivadas parciais de segunda ordem mistas no Exemplo 13 são iguais. O teorema a seguir (demonstrado em cursos avançados), explica o motivo dessa igualdade.

14.3.2 TEOREMA *Seja f uma função de duas variáveis. Se f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.*

Segue desse teorema que se $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ forem contínuas em toda parte, então $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todos os valores de x e y . Como os polinômios são contínuos em toda parte, isso explica por que as parciais de segunda ordem mistas do Exemplo 13 são iguais.

■ A EQUAÇÃO DA ONDA

Considere uma corda de comprimento L fortemente esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$ sobre um eixo x e suponha que coloquemos a corda em movimento vibratório por um puxão

Se f for uma função de três variáveis, então o análogo do Teorema 14.3.2 vale para cada par de derivadas parciais de segunda ordem mistas se trocarmos "disco aberto" por "bola aberta". Quantas derivadas parciais de segunda ordem possui uma função $f(x, y, z)$?

no instante $t = 0$ (Figura 14.3.4a). O deslocamento de um ponto sobre a corda depende de sua coordenada x e do tempo decorrido t e, portanto, é descrito por uma função $u(x, t)$ de duas variáveis. Para um valor fixado t , a função $u(x, t)$ depende somente de x e o gráfico de u versus x descreve a forma da corda – pense nele como uma foto instantânea da corda no instante t (Figura 6.3.4b). Segue que num tempo fixado t , a derivada parcial $\partial u / \partial x$ representa a inclinação da corda no ponto x , e o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 u / \partial x^2$ nos diz se a corda é côncava para cima ou para baixo no ponto x (Figura 14.3.4c).

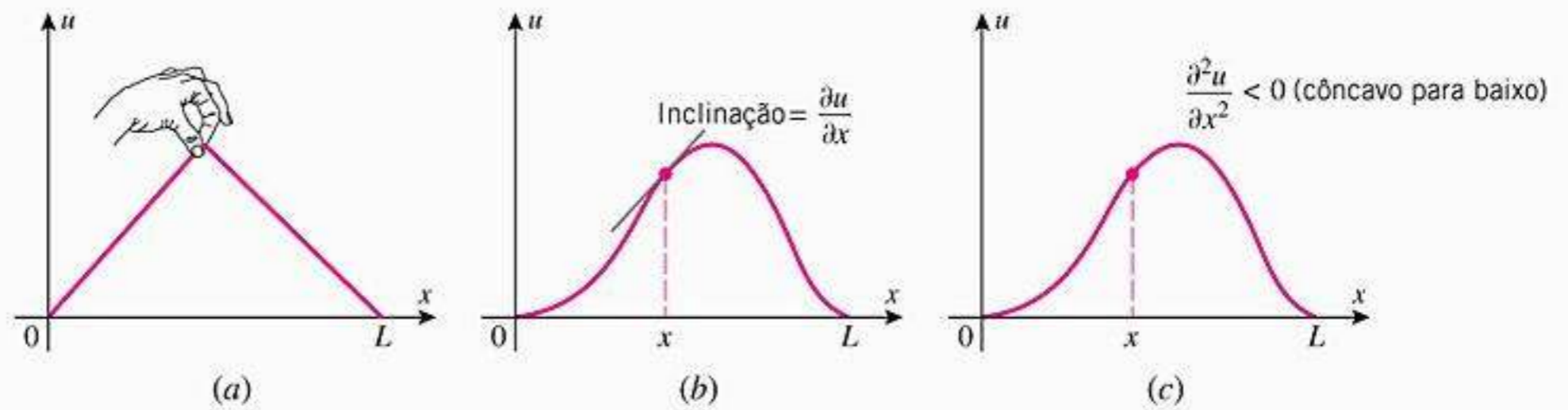


Figura 14.3.4

Para um valor fixado de x , a função $u(x, t)$ depende apenas de t , e o gráfico de u versus t é a curva posição versus tempo do ponto sobre a corda com a coordenada x . Assim, para um valor fixado x , a derivada parcial $\partial u / \partial t$ é a velocidade do ponto com a coordenada x e $\partial^2 u / \partial t^2$ é a aceleração daquele ponto.

Pode ser provado que, sob condições apropriadas, a função $u(x, t)$ satisfaz uma equação da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

onde c é uma constante positiva que depende das características físicas da corda. Essa equação, que é denominada **equação da onda unidimensional**, envolve as derivadas parciais da função desconhecida $u(x, t)$ e, portanto, é classificada como uma **equação diferencial parcial**. Técnicas para resolver equações diferenciais parciais são estudadas em cursos avançados e não serão discutidas neste texto.



A vibração de uma corda dedilhada é governada pela equação da onda.

► **Exemplo 15** Mostre que a função $u(x, t) = \text{sen}(x - ct)$ é uma solução da Equação (6).

Solução Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos(x - ct), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\text{sen}(x - ct) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \cos(x - ct), & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -c^2 \text{sen}(x - ct) \end{aligned}$$

Assim, $u(x, t)$ satisfaz (6). ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.3** (Ver página 959 para respostas.)

1. Seja $f(x, y) = x \text{ sen } xy$. Então $f_x(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ e $f_y(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. A inclinação da superfície $z = xy^2$ na direção x no ponto $(2, 3)$ é $\underline{\hspace{2cm}}$ e a inclinação dessa superfície na direção y no ponto $(2, 3)$ é $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. O volume V de um cone circular reto de raio r e altura h é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- (a) Encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a r se r variar e h permanecer constante.
- (b) Encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a h se h variar e r permanecer constante.
4. Encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x, y) = x^2 y^3$.

EXERCÍCIOS 14.3 Recurso Gráfico

1. Seja $f(x, y) = 3x^3 y^2$. Determine
- (a) $f_x(x, y)$ (b) $f_y(x, y)$ (c) $f_x(1, y)$
 (d) $f_x(x, 1)$ (e) $f_y(1, y)$ (f) $f_y(x, 1)$
 (g) $f_x(1, 2)$ (h) $f_y(1, 2)$
2. Seja $z = e^{2x} \sin y$. Determine
- (a) $\partial z/\partial x$ (b) $\partial z/\partial y$ (c) $\partial z/\partial x|_{(0, y)}$
 (d) $\partial z/\partial x|_{(x, 0)}$ (e) $\partial z/\partial y|_{(0, y)}$ (f) $\partial z/\partial y|_{(x, 0)}$
 (g) $\partial z/\partial x|_{(\ln 2, 0)}$ (h) $\partial z/\partial y|_{(\ln 2, 0)}$
3. Seja $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$.
- (a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção x no ponto $(4, 2)$.
- (b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção y no ponto $(4, 2)$.
4. Seja $f(x, y) = xe^{-y} + 5y$.
- (a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção x no ponto $(3, 0)$.
- (b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção y no ponto $(3, 0)$.
5. Seja $z = \sin(y^2 - 4x)$.
- (a) Determine a taxa de variação de z em relação a x no ponto $(2, 1)$ com y fixado.
- (b) Determine a taxa de variação de z em relação a y no ponto $(2, 1)$ com x fixado.
6. Seja $z = (x + y)^{-1}$.
- (a) Determine a taxa de variação de z em relação a x no ponto $(-2, 4)$ com y fixado.
- (b) Determine a taxa de variação de z em relação a y no ponto $(-2, 4)$ com x fixado.

ENFOCANDO CONCEITOS

7. Use a informação fornecida na figura abaixo para encontrar os valores das derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto $(1, 2)$.

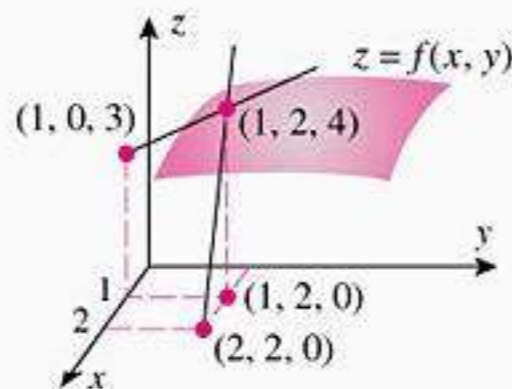


Figura Ex-7

8. A figura a seguir mostra o mapa de contornos para um função não-especificada $f(x, y)$. Faça uma conjectura sobre

os sinais das derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e explique seu raciocínio.

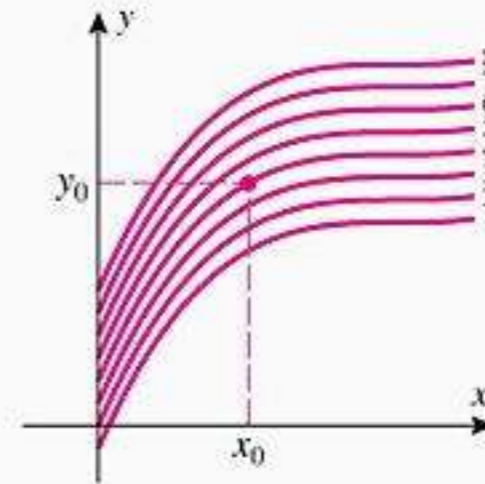


Figura Ex-8

9. Suponha que Nolan arremesse uma bola de beisebol para Ryan e que a bola deixe a mão de Nolan à mesma altura que é apanhada por Ryan. Se ignorarmos a resistência do ar, o alcance horizontal r da bola de beisebol é uma função da velocidade v da bola quando deixa a mão de Nolan e o ângulo θ com a horizontal em que é lançada. Use a tabela abaixo e o método do Exemplo 7 para estimar
- (a) a derivada parcial de r em relação a v quando $v = 80$ pés/s e $\theta = 40^\circ$;
- (b) a derivada parcial de r em relação a θ quando $v = 80$ pés/s e $\theta = 40^\circ$.

		VELOCIDADE v (pés/s)			
		75	80	85	90
ÂNGULO θ (graus)	35	165	188	212	238
	40	173	197	222	249
	45	176	200	226	253
	50	173	197	222	249

Tabela Ex-9

10. Use a tabela do Exercício 9 e o método do Exemplo 7 para estimar
- (a) a derivada parcial de r em relação a v quando $v = 85$ pés/s e $\theta = 45^\circ$;
- (b) a derivada parcial de r em relação a θ quando $v = 85$ pés/s e $\theta = 45^\circ$.
11. A figura na próxima página mostra os gráficos de uma função não-especificada $f(x, y)$ e suas derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$. Determine qual gráfico é qual e explique seu raciocínio.

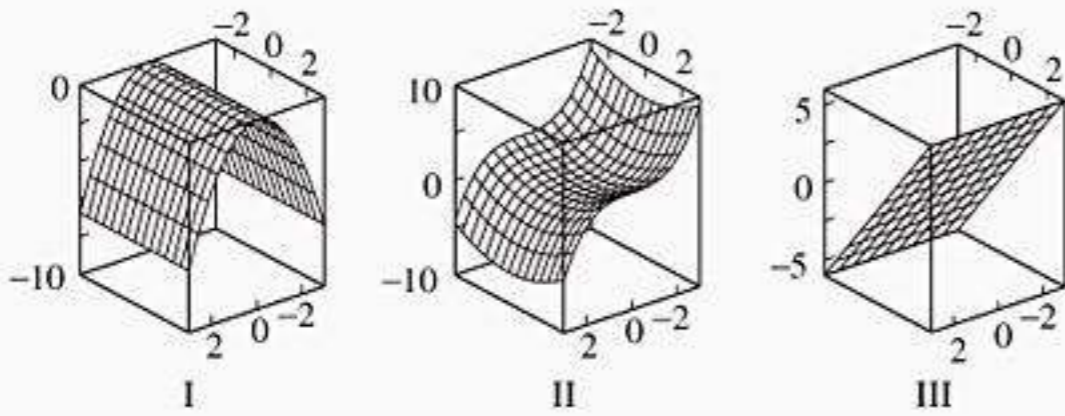


Figura Ex-11

12. O que pode ser dito sobre o sinal de $\partial z/\partial x$, $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial z/\partial y$ e $\partial^2 z/\partial y^2$ no ponto P na figura abaixo? Explique seu raciocínio.

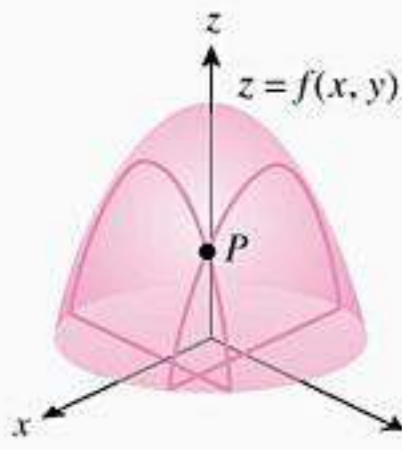


Figura Ex-12

13-18 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

- 13. $z = 4e^{x^2y^3}$
- 14. $z = \cos(x^5y^4)$
- 15. $z = x^3 \ln(1 + xy^{-3/5})$
- 16. $z = e^{xy} \sin 4y^2$
- 17. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- 18. $z = \frac{x^2y^3}{\sqrt{x+y}}$

19-24 Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

- 19. $f(x, y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$
- 20. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$
- 21. $f(x, y) = y^{-3/2} \operatorname{arc\,tg}(x/y)$
- 22. $f(x, y) = x^3e^{-y} + y^3 \sec \sqrt{x}$
- 23. $f(x, y) = (y^2 \operatorname{tg} x)^{-4/3}$
- 24. $f(x, y) = \cosh(\sqrt{x}) \sinh^2(xy^2)$

25-28 Calcule as derivadas parciais indicadas.

- 25. $f(x, y) = 9 - x^2 - 7y^3$; $f_x(3, 1)$, $f_y(3, 1)$
- 26. $f(x, y) = x^2ye^{xy}$; $\partial f/\partial x(1, 1)$, $\partial f/\partial y(1, 1)$
- 27. $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$; $\partial z/\partial x(1, 2)$, $\partial z/\partial y(1, 2)$
- 28. $w = x^2 \cos xy$; $\partial w/\partial x(\frac{1}{2}, \pi)$, $\partial w/\partial y(\frac{1}{2}, \pi)$
- 29. Seja $f(x, y, z) = x^2y^4z^3 + xy + z^2 + 1$. Determine
 - (a) $f_x(x, y, z)$
 - (b) $f_y(x, y, z)$
 - (c) $f_z(x, y, z)$
 - (d) $f_x(1, y, z)$
 - (e) $f_y(1, 2, z)$
 - (f) $f_z(1, 2, 3)$
- 30. Seja $w = x^2y \cos z$. Determine
 - (a) $\partial w/\partial x(x, y, z)$
 - (b) $\partial w/\partial y(x, y, z)$
 - (c) $\partial w/\partial z(x, y, z)$
 - (d) $\partial w/\partial x(2, y, z)$
 - (e) $\partial w/\partial y(2, 1, z)$
 - (f) $\partial w/\partial z(2, 1, 0)$

31-34 Determine f_x , f_y e f_z .

- 31. $f(x, y, z) = z \ln(x^2y \cos z)$
- 32. $f(x, y, z) = y^{-3/2} \sec\left(\frac{xz}{y}\right)$
- 33. $f(x, y, z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{xy^2z^3}\right)$
- 34. $f(x, y, z) = \cosh(\sqrt{z}) \sinh^2(x^2yz)$

35-38 Determine $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$.

- 35. $w = ye^z \sin xz$
- 36. $w = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + z^2}$
- 37. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- 38. $w = y^3 e^{2x+3z}$
- 39. Seja $f(x, y, z) = y^2 e^{xz}$. Determine
 - (a) $\partial f/\partial x|_{(1,1,1)}$
 - (b) $\partial f/\partial y|_{(1,1,1)}$
 - (c) $\partial f/\partial z|_{(1,1,1)}$
- 40. Seja $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$. Determine
 - (a) $\partial w/\partial x|_{(2,1,-1)}$
 - (b) $\partial w/\partial y|_{(2,1,-1)}$
 - (c) $\partial w/\partial z|_{(2,1,-1)}$

- 41. Seja $f(x, y) = e^x \cos y$. Use um recurso computacional para obter o gráfico das funções $f_x(0, y)$ e $f_y(x, \pi/2)$.
- 42. Seja $f(x, y) = e^x \sin y$. Use um recurso computacional para obter o gráfico das funções $f_x(0, y)$ e $f_y(x, 0)$.
- 43. Um ponto move-se ao longo da interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $y = 1$. Qual é a taxa de variação de z em relação a x quando o ponto estiver em $(2, 1, 7)$?
- 44. Um ponto move-se ao longo da interseção do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $x = 2$. Qual é a taxa de variação de z em relação a y quando o ponto estiver em $(2, 1, 7)$?
- 45. Um ponto move-se ao longo da interseção do plano $y = 3$ e a superfície $z = \sqrt{29 - x^2 - y^2}$. A que taxa z está variando em relação a x quando o ponto está em $(4, 3, 2)$?
- 46. Determine a inclinação da reta tangente em $(-1, 1, 5)$ da curva de interseção da superfície $z = x^2 + 4y^2$
 - (a) o plano $x = -1$
 - (b) o plano $y = 1$.
- 47. O volume V de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$ onde r é o raio e h é a altura.
 - (a) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a r se r variar e h permanecer constante.
 - (b) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a h se h variar e r permanecer constante.
 - (c) Suponha que h tenha um valor constante de 4 pol, mas que r varie. Determine a taxa de variação de V em relação a r no ponto onde $r = 6$ pol.
 - (d) Suponha que r tenha um valor constante de 8 pol, mas que h varie. Determine a taxa de variação instantânea de V em relação a h no ponto onde $h = 10$ pol.
- 48. O volume V de um cone circular reto é dado por

$$V = \frac{\pi}{24} d^2 \sqrt{4s^2 - d^2}$$
 onde s é a altura inclinada e d é o diâmetro da base.

- (a) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a s se d permanecer constante.
- (b) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a d se s permanecer constante.
- (c) Suponha que d tenha um valor constante de 16 cm, mas s varie. Determine a taxa de variação de V em relação a s quando $s = 10$ cm.
- (d) Suponha que s tenha um valor constante de 10 cm, mas d varie. Determine a taxa de variação de V em relação a d quando $d = 16$ cm.
- 49.** De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão, a temperatura e o volume de um gás estão relacionados por $P = kT/V$, onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que V seja medido em polegadas cúbicas (pol^3), T seja medido em kelvins (K), e que para um certo gás a constante de proporcionalidade seja $k = 10 \text{ pol} \cdot \text{lb/K}$.
- (a) Determine a taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 80 K e o volume permanecer constante em 50 pol^3 .
- (b) Determine a taxa de variação instantânea do volume em relação à pressão se o volume for 50 pol^3 e a temperatura permanecer constante em 80 K.
- 50.** A temperatura em um ponto (x, y) sobre uma placa de metal no plano xy é $T(x, y) = x^3 + 2y^2 + x$ graus. Suponha que a distância seja medida em centímetros e determine a taxa na qual a temperatura varia com a distância se iniciarmos no ponto $(1, 2)$ e movermos
- (a) para a direita e paralelamente ao eixo x
- (b) para cima e paralelamente ao eixo y .
- 51.** O comprimento, a largura e a altura de uma caixa retangular são $l = 5$, $w = 2$ e $h = 3$, respectivamente.
- (a) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação ao comprimento se w e h permanecerem constantes.
- (b) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação à largura se l e h permanecerem constantes.
- (c) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação à altura se l e w permanecerem constantes.
- 52.** A área de um triângulo é dada por $A = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ onde a e b são os comprimentos de dois dos lados e θ o ângulo entre eles. Suponha que $a = 5$, $b = 10$ e $\theta = \pi/3$.
- (a) Encontre a taxa segundo a qual A varia em relação a a se b e θ forem mantidos constantes.
- (b) Encontre a taxa segundo a qual A varia em relação a θ se a e b forem mantidos constantes.
- (c) Encontre a taxa segundo a qual b varia em relação a a se A e θ forem mantidos constantes.
- 53.** O volume de um cone circular reto de raio r e altura h é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Mostre que se a altura permanecer constante enquanto que o raio varia, então o volume satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2V}{r}$$

- 54.** Determine as equações paramétricas para a reta tangente em $(1, 3, 3)$ para a curva de interseção da superfície $z = x^2 y$ e
- (a) o plano $x = 1$ (b) o plano $y = 3$.
- 55.** (a) Derivando implicitamente, determine a inclinação do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ na direção x nos pontos $(3, 4, 2\sqrt{6})$ e $(3, 4, -2\sqrt{6})$.
- (b) Verifique os resultados da parte (a) resolvendo para z e derivando as funções resultantes diretamente.
- 56.** (a) Derivando implicitamente, determine a inclinação do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ na direção y nos pontos $(3, 4, 2\sqrt{6})$ e $(3, 4, -2\sqrt{6})$.
- (b) Verifique os resultados da parte (a) resolvendo para z e derivando as funções resultantes diretamente.

57-60 Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ usando diferenciação implícita. Deixe suas respostas em termos de x, y e z .

- 57.** $(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = 1$ **58.** $\ln(2x^2 + y - z^3) = x$
- 59.** $x^2 + z \sin xyz = 0$ **60.** $e^{xy} \sinh z - z^2 x + 1 = 0$

61-64 Determine $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$ usando diferenciação implícita. Deixe suas respostas em termos de x, y, z e w .

- 61.** $(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^{3/2} = 4$
- 62.** $\ln(2x^2 + y - z^3 + 3w) = z$
- 63.** $w^2 + w \sin xyz = 1$
- 64.** $e^{xy} \sinh w - z^2 w + 1 = 0$

65-66 Determine f_x e f_y .

- 65.** $f(x, y) = \int_y^x e^{t^2} dt$ **66.** $f(x, y) = \int_1^{xy} e^{t^2} dt$
- 67.** Seja $z = \sqrt{x} \cos y$. Determine
- (a) $\partial^2 z/\partial x^2$ (b) $\partial^2 z/\partial y^2$
- (c) $\partial^2 z/\partial x \partial y$ (d) $\partial^2 z/\partial y \partial x$
- 68.** Seja $f(x, y) = 4x^2 - 2y + 7x^4 y^5$. Determine
- (a) f_{xx} (b) f_{yy} (c) f_{xy} (d) f_{yx}

69-76 Confirme que as derivadas parciais de segunda ordem mistas de f são iguais.

- 69.** $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$
- 70.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **71.** $f(x, y) = e^x \cos y$
- 72.** $f(x, y) = e^{x-y^2}$ **73.** $f(x, y) = \ln(4x - 5y)$
- 74.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- 75.** $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$
- 76.** $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$
- 77.** Expresse as seguintes derivadas em notação "∂".
- (a) f_{xxx} (b) f_{xyy} (c) f_{yyxx} (d) f_{yyyy}
- 78.** Expresse as derivadas em notação "subscrito".

- (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ (b) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ (c) $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$ (d) $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$

79. Dado $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$, determine
 (a) f_{xy} (b) f_{yx} (c) f_{yyy}
80. Dado $z = (2x - y)^5$, determine
 (a) $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$ (b) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ (c) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$
81. Dado $f(x, y) = y^3 e^{-5x}$, determine
 (a) $f_{xy}(0, 1)$ (b) $f_{xx}(0, 1)$ (c) $f_{yyx}(0, 1)$
82. Dado $w = e^y \cos x$, determine
 (a) $\left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right|_{(\pi/4, 0)}$ (b) $\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{(\pi/4, 0)}$
83. Seja $f(x, y, z) = x^3y^5z^7 + xy^2 + y^3z$. Determine
 (a) f_{xy} (b) f_{yz} (c) f_{xz} (d) f_{zz}
 (e) f_{zy} (f) f_{xy} (g) f_{zyx} (h) f_{xyz}
84. Seja $w = (4x - 3y + 2z)^5$. Determine
 (a) $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ (b) $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ (c) $\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial y \partial z}$
85. Mostre que a função satisfaz a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

- (a) $z = x^2 - y^2 + 2xy$
 (b) $z = e^x \sin y + e^y \cos x$
 (c) $z = \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x)$
86. Mostre que a função satisfaz a *equação do calor*
- $$\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (c > 0, \text{ constante})$$
- (a) $z = e^{-t} \sin(x/c)$ (b) $z = e^{-t} \cos(x/c)$
87. Mostre que a função $u(x, t) = \sin c\omega t \sin \omega x$ satisfaz a equação da onda [Equação (6)] para todos os valores reais de ω .
88. Em cada parte, mostre que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as *equações de Cauchy - Riemann*.
- $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
- (a) $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$
 (b) $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$
 (c) $u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x)$
89. Mostre que se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ cada uma tem parciais de segunda ordem mistas iguais, e se u e v satisfizerem as equações de Cauchy-Riemann (Exercício 88), então u, v e $u + v$ satisfazem as equações de Laplace (Exercício 85).
90. Quando dois resistores de resistências R_1 ohms e R_2 ohms são conectados em paralelo, sua resistência combinada R em ohms é $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2} \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \frac{4R^2}{(R_1 + R_2)^4}$$

91-94 Encontre as derivadas parciais indicadas.

91. $f(v, w, x, y) = 4v^2w^3x^4y^5; \quad \partial f/\partial v, \partial f/\partial w, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y$
92. $w = r \cos st + e^u \operatorname{sen} ur; \quad \partial w/\partial r, \partial w/\partial s, \partial w/\partial t, \partial w/\partial u$
93. $f(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_3^2 + v_4^2}; \quad \partial f/\partial v_1, \partial f/\partial v_2, \partial f/\partial v_3, \partial f/\partial v_4$
94. $V = xe^{2x-y} + we^{zw} + yw; \quad \partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z, \partial V/\partial w$
95. Seja $u(w, x, y, z) = xe^{yw} \operatorname{sen}^2 z$. Encontre
 (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0, 1, \pi)$ (b) $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0, 1, \pi)$
 (c) $\frac{\partial u}{\partial w}(0, 0, 1, \pi)$ (d) $\frac{\partial u}{\partial z}(0, 0, 1, \pi)$
 (e) $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial w \partial z}$ (f) $\frac{\partial^4 u}{\partial w \partial z \partial y^2}$
96. Seja $f(v, w, x, y) = 2v^{1/2}w^4x^{1/2}y^{2/3}$. Encontre $f_v(1, -2, 4, 8)$, $f_w(1, -2, 4, 8)$, $f_x(1, -2, 4, 8)$ e $f_y(1, -2, 4, 8)$.

97-98 Determine $\partial w/\partial x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

97. $w = \cos(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$
98. $w = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$

99-100 Descreva o maior conjunto aberto no qual o Teorema 14.3.2 possa ser usado para provar que f_{xy} e f_{yx} são iguais naquele conjunto. Então confirme que $f_{xy} = f_{yx}$ naquele conjunto por cálculo direto.

99. (a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$ (b) $f(x, y) = x^3/y$
100. (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
 (b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^3)$
101. Seja $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$. Use a Definição 14.3.1 para determinar $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$. Então, verifique sua resposta calculando a derivada de maneira usual.
102. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Fonte: Este problema, devido a Don Cohen, apareceu em *Mathematics and Computer Education*, vol 25, N° 2, 1991 p. 179.

103. Seja $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$.
 (a) Mostre que $f_y(0, 0) = 1$.
 (b) Em que pontos, se houver, $f_y(x, y)$ deixa de existir?

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.3

1. $\sin xy + xy \cos xy; x^2 \cos xy$ 2. 9; 12 3. (a) $\frac{2}{3}\pi rh$ (b) $\frac{1}{3}\pi r^2 s$
 4. $f_{xx}(x, y) = 2y^3, f_{yy}(x, y) = 6x^2y, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6xy^2$

14.4 DIFERENCIABILIDADE, DIFERENCIAIS E LINEARIDADE LOCAL

Nesta seção, estenderemos a noção de diferenciabilidade para funções de duas ou três variáveis. Nossa definição de diferenciabilidade será baseada na idéia de que uma função é diferenciável num ponto se na proximidade desse ponto puder ser bem aproximada por uma função linear. Ao longo da seção expandiremos o conceito de diferencial para funções de mais do que uma variável e definiremos a aproximação linear local de uma função.

■ DIFERENCIABILIDADE

Lembre que dizemos que uma função f de uma variável é derivável ou diferenciável em x_0 se tiver uma derivada em x_0 , ou seja, se existir o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Como uma consequência de (1), uma função diferenciável possui algumas propriedades importantes:

- O gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente não-vertical no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- f pode ser bem aproximada por uma função linear perto de x_0 (Seção 3.8);
- f é contínua em x_0 .

Nesta seção, nosso objetivo principal é estender a noção de diferenciabilidade para funções de duas ou três variáveis, de tal modo que valham propriedades análogas a essas. Por exemplo, se uma função $f(x, y)$ de duas variáveis for diferenciável num ponto (x_0, y_0) , vamos querer que

- a superfície $z = f(x, y)$ tenha um plano tangente não-vertical no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Figura 14.4.1);
- os valores de f possam ser bem aproximados pelos valores de uma função linear na proximidade de (x_0, y_0) ;
- f seja contínua em (x_0, y_0) .

Seria razoável conjecturar que uma função f de duas ou três variáveis deveria ser chamada diferenciável num ponto em que existissem todas as derivadas parciais de primeira ordem da função. Infelizmente, essa condição não é suficientemente forte para garantir que as propriedades arroladas valham. Por exemplo, vimos no Exemplo 5 da Seção 14.3 que a mera existência de ambas derivadas parciais de primeira ordem de uma função não é suficiente para garantir a continuidade da função. Para determinar o que mais deveria ser incluído na nossa definição, é útil reexaminar uma das consequências da diferenciabilidade de uma função $f(x)$ a uma variável. Suponha que $f(x)$ seja diferenciável em $x = x_0$ e denotemos por

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a variação de f que corresponde à variação Δx em x de x_0 até $x_0 + \Delta x$. Vimos na Seção 3.8 que

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

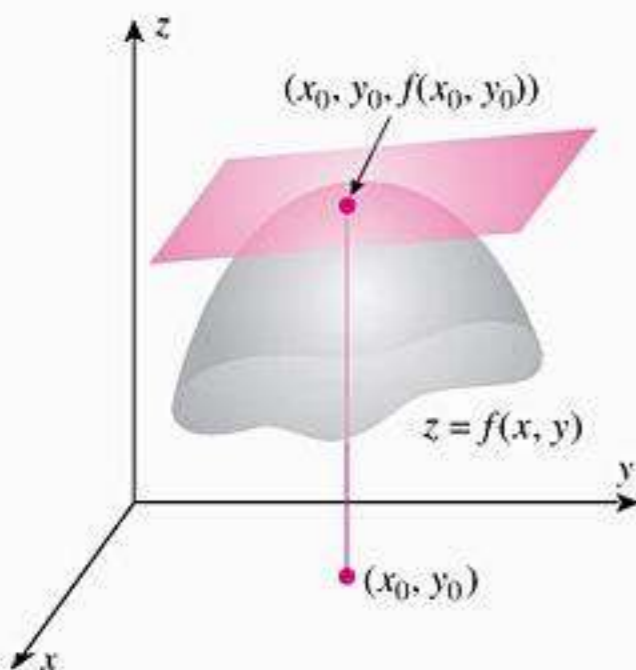


Figura 14.4.1

desde que Δx esteja próximo de zero. De fato, para Δx próximo de 0, o erro $\Delta f - f'(x_0)\Delta x$ nessa expressão terá magnitude muito menor do que Δx pois

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Como a magnitude de Δx é simplesmente a distância entre os pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$, podemos ver que quando esses dois pontos estiverem próximos, a magnitude do erro na aproximação será muito menor do que a distância entre os dois pontos (Figura 14.4.2). O “ingrediente adicional” que falta na nossa definição de diferenciabilidade de funções a várias variáveis é a extensão dessa idéia a funções de duas ou três variáveis.

Para uma função $f(x, y)$, o símbolo Δf , chamado **incremento** de f , denota a variação do valor de $f(x, y)$ que resulta quando (x, y) varia de algum ponto inicial (x_0, y_0) para uma alguma posição nova $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$; assim,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{2}$$

(ver Figura 14.4.3). [Se for usada uma variável dependente $z = f(x, y)$, podemos escrever Δz em vez de Δf .] Vamos supor que ambas $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existam e façamos (analogamente ao caso de uma variável) a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{3}$$

Para Δx e Δy próximos de 0, queremos que o erro

$$\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

dessa aproximação seja muito menor do que a distância $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ entre (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Isso pode ser garantido pela exigência de que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Mostre que se $f(x, y)$ for uma função linear, então (3) torna-se uma igualdade.

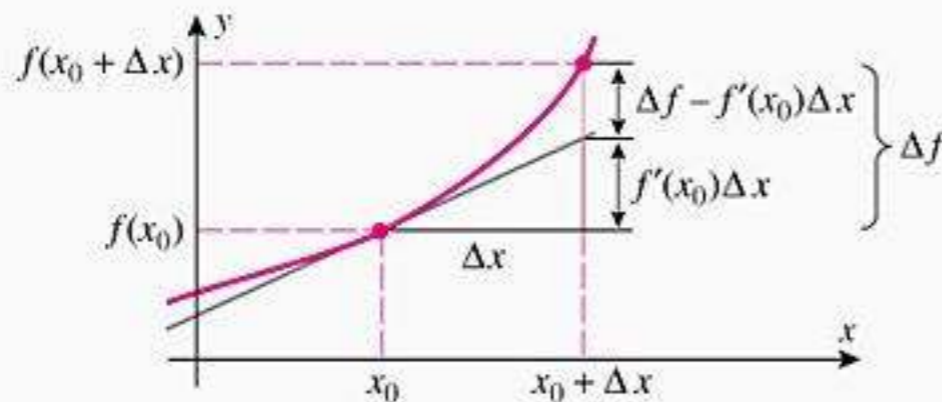


Figura 14.4.2

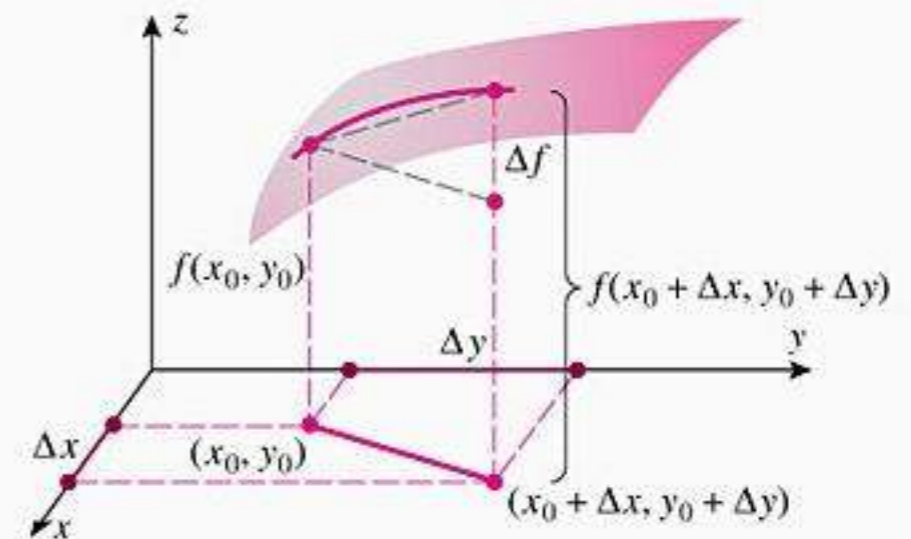


Figura 14.4.3

Usando essas idéias, podemos dar, agora, nossa definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

14.4.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f de duas variáveis é **diferenciável** em (x_0, y_0) se ambas $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \tag{4}$$

Assim como no caso de uma variável, a verificação da diferenciabilidade a partir da definição envolve o cálculo de um limite.

► **Exemplo 1** Use a Definição 14.4.1 para provar que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução O incremento é

$$\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Como $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = 2y$, temos $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ e (4) significa

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

Portanto, f é diferenciável em $(0, 0)$. ◀

Deduziremos, agora, uma importante consequência do limite (4). Defina uma função

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \quad \text{para } (\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$$

e defina $\epsilon(0, 0)$ como sendo 0. A Equação (4) então implica que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Além disso, segue imediatamente da definição de ϵ que

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (5)$$

Em outras palavras, se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então Δf pode ser expresso como em (5), onde $\epsilon \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ e onde $\epsilon = 0$ se $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$.

Para funções de três variáveis temos a definição análoga de diferenciabilidade em termos do incremento

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

14.4.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f de três variáveis é *diferenciável* em (x_0, y_0, z_0) se existem $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ e $f_z(x_0, y_0, z_0)$ e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y - f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0 \quad (6)$$

De maneira análoga ao caso bidimensional, podemos expressar o limite (6) em termos de uma função $\epsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ que se anula em $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0, 0, 0)$ e é contínua nesse ponto. Deixamos os detalhes a cargo do leitor como exercício.

Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em cada ponto de uma região R do plano xy , dizemos que f é *diferenciável em R* ; se f for diferenciável em cada ponto do plano xy , dizemos que f é *diferenciável em toda parte*. A terminologia para funções de três variáveis é análoga.

■ **DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE**

Lembre que queremos que funções sejam contínuas em cada ponto de diferenciabilidade. O próximo resultado mostra que isso ocorre.

14.4.3 TEOREMA *Se uma função é diferenciável num ponto, então ela é contínua nesse ponto.*

DEMONSTRAÇÃO Apresentamos a demonstração para $f(x, y)$ no caso de duas variáveis, por revelar as idéias essenciais. Suponha que f seja diferenciável em (x_0, y_0) . Para provar que f é contínua em (x_0, y_0) , devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

que, escrevendo $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, é equivalente a

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

Pela Equação (2), isso é equivalente a

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f = 0$$

Contudo, pela Equação (5),

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &\quad + \epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}] \\ &= 0 + 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$



Pode ser difícil verificar se uma função é diferenciável num ponto diretamente a partir da definição. O próximo teorema, cuja demonstração costuma ser estudada em disciplinas mais avançadas, fornece uma condição simples para a diferenciabilidade de uma função num ponto.

14.4.4 TEOREMA *Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existem e são contínuas num ponto, então f é diferenciável nesse ponto.*

Por exemplo, considere a função

$$f(x, y, z) = x + yz$$

Como $f_x(x, y, z) = 1$, $f_y(x, y, z) = z$ e $f_z(x, y, z) = y$ estão definidas e são contínuas em toda parte, concluímos, pelo Teorema 14.4.4, que f é diferenciável em toda parte.

■ DIFERENCIAIS

Como no caso de uma variável, a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

de uma função de duas variáveis e a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z$$

de uma função de três variáveis têm uma formulação conveniente na linguagem de diferenciais. Se $z = f(x, y)$ é diferenciável num ponto (x_0, y_0) , denotamos por

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy \tag{7}$$

uma nova função de variável dependente dz e variáveis independentes dx e dy . Dizemos que essa função, que também é denotada por df , é a **diferencial total de z** em (x_0, y_0) , ou então, a

A recíproca do Teorema 14.4.3 é falsa. Explique, por exemplo, por que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é contínua em $(0, 0)$ mas não é diferenciável em $(0, 0)$.

diferencial total de f em (x_0, y_0) . Analogamente, para uma função $w = f(x, y, z)$ de três variáveis, temos a **diferencial total de w** em (x_0, y_0, z_0) ,

$$dw = f_x(x_0, y_0, z_0) dx + f_y(x_0, y_0, z_0) dy + f_z(x_0, y_0, z_0) dz \quad (8)$$

também denominada **diferencial total de f** em (x_0, y_0, z_0) . É usual omitir os subscritos 0 e escrever as Equações (7) e (8) como

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy \quad (9)$$

e

$$dw = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz \quad (10)$$

No caso de duas variáveis, a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

pode ser escrita na forma

$$\Delta f \approx df \quad (11)$$

com $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Equivalentemente, podemos escrever a aproximação (11) como

$$\Delta z \approx dz \quad (12)$$

Em outras palavras, podemos estimar a variação Δz de z pelo valor da diferencial dz , em que dx é a variação em x e dy é a variação em y . Além disso, segue de (4) que se Δx e Δy estiverem perto de 0, então a magnitude do erro da aproximação (12) é muito menor do que a distância $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ entre (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Exemplo 2 Use (12) para aproximar a variação em $z = xy^2$ do seu valor em $(0,5; 1,0)$ para seu valor em $(0,503; 1,004)$. Compare a magnitude do erro dessa aproximação com a distância entre os pontos $(0,5; 1,0)$ e $(0,503; 1,004)$.

Solução Para $z = xy^2$ temos $dz = y^2 dx + 2xy dy$. Calculando essa diferencial em $(x, y) = (0,5; 1,0)$, com $dx = \Delta x = 0,503 - 0,5 = 0,003$ e $dy = \Delta y = 1,004 - 1,0 = 0,004$, obtemos

$$dz = 1,0^2(0,003) + 2(0,5)(1,0)(0,004) = 0,007$$

Como $z = 0,5$ em $(x, y) = (0,5; 1,0)$ e $z = 0,507032048$ em $(x, y) = (0,503; 1,004)$, temos

$$\Delta z = 0,507032048 - 0,5 = 0,007032048$$

e o erro da aproximação de Δz por dz tem magnitude

$$|dz - \Delta z| = |0,007 - 0,007032048| = 0,000032048$$

Como a distância entre $(0,5; 1,0)$ e $(0,503; 1,004) = (0,5 + \Delta x, 1,0 + \Delta y)$ é

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0,003)^2 + (0,004)^2} = \sqrt{0,000025} = 0,005$$

temos

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0,000032048}{0,005} = 0,0064096 < \frac{1}{150}$$

Assim, a magnitude do erro da nossa aproximação é menor do que $\frac{1}{150}$ da distância entre os dois pontos. ◀

A análise precedente pode ser estendida a funções de três ou mais variáveis com uma mudança de notação apropriada.

► **Exemplo 3** Um cimento, a largura e a altura de uma caixa retangular são medidas com um erro máximo de 5% e uma incerteza total de 10% em cada medida. Qual é a incerteza máxima na diagonal da caixa?

Solução A diagonal D de uma caixa com comprimento x , largura y e altura z é dada por

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se em x_0, y_0, z_0 e $D_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ as medidas de comprimento, largura, altura e diagonal da caixa são precisas e dD é a diferencial de D em (x_0, y_0, z_0) é dada por

$$dD = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} dx + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} dy + \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} dz$$

Se x, y, z e $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representam medidas exatas de comprimento, largura, altura e diagonal da caixa, respectivamente, então $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$, e

$$\left| \frac{\Delta x}{x_0} \right| \leq 0,05, \quad \left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| \leq 0,05, \quad \left| \frac{\Delta z}{z_0} \right| \leq 0,05$$

E também procuramos uma estimativa para o tamanho máximo de $\Delta D/D_0$ máx. Então

$$\begin{aligned} \frac{\Delta D}{D_0} &\approx \frac{dD}{D_0} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} [x_0 \Delta x + y_0 \Delta y + z_0 \Delta z] \\ &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \left[x_0^2 \frac{\Delta x}{x_0} + y_0^2 \frac{\Delta y}{y_0} + z_0^2 \frac{\Delta z}{z_0} \right] \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta D}{D_0} \right| &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \left| x_0^2 \frac{\Delta x}{x_0} + y_0^2 \frac{\Delta y}{y_0} + z_0^2 \frac{\Delta z}{z_0} \right| \\ &\leq \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \left(x_0^2 \left| \frac{\Delta x}{x_0} \right| + y_0^2 \left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| + z_0^2 \left| \frac{\Delta z}{z_0} \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} (x_0^2(0,05) + y_0^2(0,05) + z_0^2(0,05)) = 0,05 \end{aligned}$$

Então a incerteza máxima em D é de 5%. ◀

■ APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL

Então, agora, vamos considerar uma função de duas variáveis e um ponto, então vamos considerar bem a aproximação linear na vizinhança de um ponto P e em (x_0, y_0) , onde $f(x, y)$ é a função e (x_0, y_0) é o ponto. Então a aproximação 3 é escrita na forma

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

mas $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, então a aproximação é dada por

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{13}$$

Então, precisamos uma aproximação linear de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) e a aproximação é igual a erro da aproximação 3, portanto, se x, y estão perto de (x_0, y_0) , o erro em (13) será muito menor que a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) . Quando f é diferenciável em (x_0, y_0) , temos

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{14}$$

Então dizemos que $L(x, y)$ é a **aproximação linear local de f em (x_0, y_0)**

Mostre que se $f(x, y)$ for uma função linear, então (13) torna-se uma igualdade.

Explique por que o erro da aproximação (13) é igual ao erro da aproximação (3).

► **Exemplo 4** Se a $L(x, y)$ a a r imaçã inear ca e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ n nt 3,4 m are err a a r imaçã e

$$f(3,04 \ 3,98) = \sqrt{(3,04)^2 + (3,98)^2}$$

r $L(3,04 \ 3,98)$ c m a i tância entre nt 3,4 e 3,04 3,98

Solução em

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

c m $f_x(3, 4) = \frac{3}{5}$ e $f_y(3, 4) = \frac{4}{5}$ P rtant , a a r imaçã inear ca e f em 3, 4 é a a r

$$L(x, y) = 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

n e üentemente,

$$f(3,04 \ 3,98) \approx L(3,04 \ 3,98) = 5 + \frac{3}{5}(0,04) + \frac{4}{5}(-0,02) = 5,008$$

m

$$f(3,04 \ 3,98) = \sqrt{(3,04)^2 + (3,98)^2} \approx 5,00819$$

err a a r imaçã e tá ert e $5,00819 - 5,008 = 0,00019$ é bem men ue $\frac{1}{200}$ a i tância

$$\sqrt{(3,04 - 3)^2 + (3,98 - 4)^2} \approx 0,045$$

entre nt 3,4 e 3,04 3,98 ◀

na gamente, ara uma unçã $f(x, y, z)$ ue é i erenciá e em (x_0, y_0, z_0) , a a r i maçã inear ca é

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \quad 15$$

n a efiniçõe ne ta eçã ram rmu a a e ta m ue a c ntinui a e e a ineari a e ca ã c n e üência a i erenciabi i a e a Seçã 14.7 m trarem ue e uma unçã $f(x, y)$ r i erenciá e num nt (x_0, y_0) , então gráfic e $L(x, y)$ é um an tangente nã ertica a gráfic e f n nt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.4** (Ver página 967 para respostas.)

1. Su nha ue $f(x, y)$ e a i erenciá e em (x_0, y_0) e e a Δf a ariaçã e f e eu a r em (x_0, y_0) ara eu a r em $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$
 - a $\Delta f \approx$ _____
 - b imite ue garante ue err a a r imaçã em a é muit e uen uan amb Δx e Δy e tá ert e 0 é _____
2. a cu e a i erencia e ca a unçã
 - a $z = xe^{y^2}$
 - b $w = x \ln yz$
3. Se f r i erenciá e em (x_0, y_0) , então a a r imaçã inear ca e f em (x_0, y_0) é $L(x, y) =$ _____
4. Su nha ue $f(1, -2) = 4$ e ue $f(x, y)$ e a i erenciá e em $(1, -2)$ c m $f_x(1, -2) = 2$ e $f_y(1, -2) = -3$ E time a r e $f(0,9 \ -1,950)$

EXERCÍCIOS 14.4

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Su nha ue uma unçã $f(x, y)$ e a i erenciá e n nt $(3, 4)$ c m $f_x(3, 4) = 2$ e $f_y(3, 4) = -1$ Se $f(3, 4) = 5$, e time a r e $f(3,01 \ 3,98)$
2. Su nha ue uma unçã $f(x, y)$ e a i erenciá e n nt $(-1, 2)$ c m $f_x(-1, 2) = 1$ e $f_y(-1, 2) = 3$ Se $f(-1, 2) = 2$, e time a r e $f(-0,99 \ 2,02)$

3. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ e a diferencial em $(1, 2, 3)$ com $f_x(1, 2, 3) = 1$, $f_y(1, 2, 3) = 2$ e $f_z(1, 2, 3) = 3$. Se $df(1, 2, 3) = 4$, então $\Delta f(1, 2, 3) \approx 4,01$, $2,02$, $3,03$.
4. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ e a diferencial em $(2, 1, -2)$ com $f_x(2, 1, -2) = -1$, $f_y(2, 1, -2) = 1$ e $f_z(2, 1, -2) = -2$. Se $df(2, 1, -2) = 0$, então $\Delta f(2, 1, -2) \approx 1,98$, $0,99$, $-1,97$.
5. Use a Definição 14.4.1 e 14.4.2 para mostrar que uma função constante de duas variáveis é diferenciável em (a, b) .
6. Use a Definição 14.4.1 e 14.4.2 para mostrar que uma função linear de duas variáveis é diferenciável em (a, b) .
7. Use a Definição 14.4.2 para mostrar que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

8. Use a Definição 14.4.2 para determinar a diferencial df de $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^r$ e a diferencial em $(0, 0, 0)$.

9-20 Calcule a diferencial dz ou dw da função dada.

9. $z = 7x - 2y$
10. $z = e^{xy}$
11. $z = x^3 y^2$
12. $z = 5x^2 y^5 - 2x + 4y + 7$
13. $z = \arctan xy$
14. $z = e^{x^2} x - 3y$
15. $w = 8x - 3y + 4z$
16. $w = e^{xyz}$
17. $w = x^3 y^2 z$
18. $w = 4x^2 y^3 z^7 - 3xy + z + 5$
19. $w = \arctan xyz$
20. $w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

21-26 Use a diferencial para aproximar a área da região R entre as curvas P e Q em (a, b) e (c, d) da área real R .

21. $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x$, $P(1, 2)$, $Q(1,01; 2,04)$
22. $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/2}$, $P(8, 9)$, $Q(7,78; 9,03)$
23. $f(x, y) = \frac{x+y}{xy}$; $P(-1, -2)$, $Q(-1,02; -2,04)$
24. $f(x, y) = \ln \sqrt{1+xy}$; $P(0, 2)$, $Q(-0,09; 1,98)$
25. $f(x, y, z) = 2xy^2 z^3$, $P(1, -1, 2)$, $Q(0,99; -1,02; 2,02)$
26. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$, $P(-1, -2, 4)$, $Q(-1,04; -1,98; 3,97)$
27. Um retângulo R com vértices (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ aumenta, resultando num retângulo R' com vértices $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ e $(x_0 + \Delta x + \Delta x, y_0 + \Delta y + \Delta y)$. Qual a figura resultante? Aumentou a área do retângulo? Qual a figura resultante? Aumentou a área?

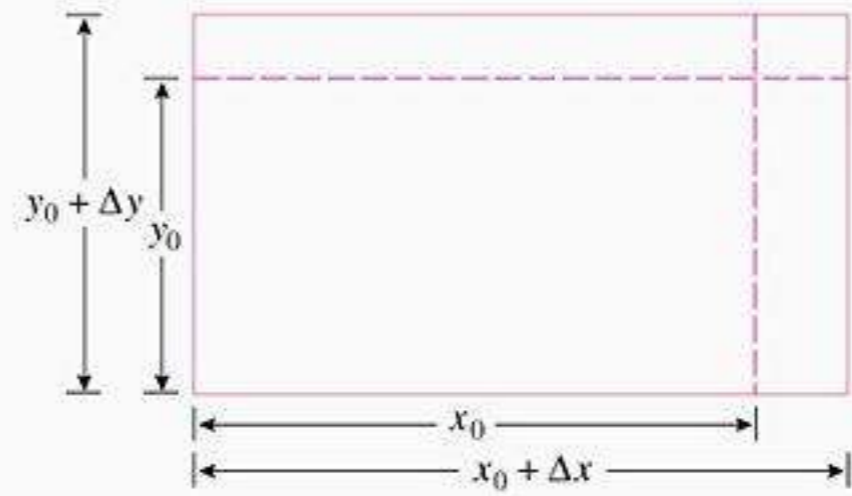


Figure Ex-27

28. Um cone V tem um círculo retangular de raio r e altura h . Se a altura h aumenta de 20 cm para $19,95$ cm, enquanto o raio cresce de 4 cm para $4,05$ cm, então a mudança na área da superfície lateral é

29-36 Encontre a aproximação linear da função f em (a, b, c) em $(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c)$ e compare com a distância entre P e Q .

29. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P(4, 3)$, $Q(3,92; 3,01)$
30. $f(x, y) = x^{0,5} y^{0,3}$; $P(1, 1)$, $Q(1,05; 0,97)$
31. $f(x, y) = x \sin y$; $P(0, 0)$, $Q(0,003; 0,004)$
32. $f(x, y) = \ln xy$; $P(1, 2)$, $Q(1,01; 2,02)$
33. $f(x, y, z) = xyz$; $P(1, 2, 3)$, $Q(1,001; 2,002; 3,003)$
34. $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$; $P(-1, 1, 1)$, $Q(-0,99; 0,99; 1,01)$
35. $f(x, y, z) = xe^{yz}$; $P(1, -1, -1)$, $Q(0,99; -1,01; -0,99)$
36. $f(x, y, z) = \ln(x + yz)$; $P(2, 1, -1)$, $Q(2,02; 0,97; -1,01)$
37. Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear da função f em (a, b, c) .
 - a. e^x em $y \approx y$
 - b. $\frac{2x+1}{y+1} \approx 1 + 2x - y$
38. Use a aproximação linear da função $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ em $(1, 1)$ para obter a fórmula $x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x-1) + \beta(y-1)$.
39. Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear da função f em $(1, 1, 1)$.
 - a. $xyz + 2 \approx x + y + z$
 - b. $\frac{4x}{y+z} \approx 2x - y - z + 2$
40. Usando o Exercício 38, verifique que a aproximação linear da função $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ em $(1, 1, 1)$ é $x^\alpha y^\beta z^\gamma \approx 1 + \alpha(x-1) + \beta(y-1) + \gamma(z-1)$.
41. Suponha que uma função $f(x, y)$ e a diferencial em $(1, 1)$ com $f_x(1, 1) = 2$ e $f_y(1, 1) = 3$. Se a $L(x, y)$ a aproximação linear de f em $(1, 1)$ se $L(1,1) = 3,15$, então $df(1, 1) \approx 3,15$.
42. Suponha que uma função $f(x, y)$ e a diferencial em $(0, -1)$ com $f_x(0, -1) = -2$ e $f_y(0, -1) = 3$. Se a $L(x, y)$ a aproximação linear de f em $(0, -1)$ se $L(0, -1) = 3,15$, então $df(0, -1) \approx 3,15$.

imação linear ca f em $0, -1$ Se $L(0,1) - 1,1 = 3,3$,
 encntre a r e $f_x(0, -1)$

43. Su nha ue uma unção $f(x, y, z)$ e a ierenciá e n nt
 t $3, 2, 1$ e ue $L(x, y, z) = x - y + 2z - 2$ e a a a r imação
 linear ca f em $3, 2, 1$ Encntre $f(3, 2, 1)$, $f_x(3, 2, 1)$,
 $f_y(3, 2, 1)$ e $f_z(3, 2, 1)$
44. Su nha ue uma unção $f(x, y, z)$ e a ierenciá e n nt
 $0, -1, -2$ e ue $L(x, y, z) = x + 2y + 3z + 4$ e a a a r imação i
 near ca f em $0, -1, -2$ Encntre $f(0, -1, -2)$, $f_x(0, -1, -2)$,
 $f_y(0, -1, -2)$ e $f_z(0, -1, -2)$

45-48 São a a uma unção ierenciá e f unt c m uma a r
 imação linear ca L e f num nt P e a in rmação a a
 ara eterminar nt P

45. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $L(x, y) = 2y - 2x - 2$
46. $f(x, y) = x^2y$; $L(x, y) = 4y - 4x + 8$
47. $f(x, y, z) = xy + z^2$; $L(x, y, z) = y + 2z - 1$
48. $f(x, y, z) = xyz$; $L(x, y, z) = x - y - z - 2$
49. c m riment e a argura e um retângu ã me i
 c m err e, n má im , 3 e 5 , re ecti amente e
 ierenciai ara a r imar err ercentua má im na
 área ca cu a a
50. rai e a a tura e um c ne circu ar ret ã me i c m
 err e, n má im , 1 e 4 , re ecti amente e i e
 renciai ara a r imar err ercentua má im n ume
 ca cu a
51. c m riment e a argura e um retângu ã me i c m
 err e, n má im , r , n e r é e uen e ierenciai
 ara a r imar err ercentua má im n c m riment a
 iag na ca cu a a
52. catet e um triângu retângu ram me i c m
 ten 3cm e 4 cm, c m um err má im e 0,05 cm em ca a
 me i a e ierenciai ara a r imar err í e má
 im n a r ca cu a a a hi tenu a e b a área
 triângu
53. erí T e um ên u im e c m e uena ci ação é
 ca cu a a órmu a $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, n e L é c m riment
 ên u e g é a ace eração e i a à gra i a e Su nha ue
 a re e L e g tenham err e, n má im , 0,5 e 0,1 ,

re ecti amente e ierenciai ara a r imar err er
 centua má im n a r ca cu a e T

54. De ac r c ma ei ga e i eai , a re ã , a tem eratura e
 ume e um gá c n fina e tã re aci na r $P = kTV$,
 n e k é uma c n tante e ierenciai ara a r imar a a
 riação ercentua na re ã e a tem eratura e um gá ti er
 cre ci em 3 e ume ti er cre ci em 5
55. Su nha ue x e y e am uanti a e me i a ue tenham err
 e, n má im , r e s , re ecti amente Para ca a uma a
 eguinte órmu a em x e y , u e ierenciai ara a r imar
 err í e má im n re u ta ca cu a
 a xy b x/y c x^2y^3 $x^3\sqrt{y}$
56. re i tência t ta R e trê re i tência R_1, R_2 e R_3 c necta a
 em ara e é a a r

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Su nha ue R_1, R_2 e R_3 tenham i me i a c m 100 hm ,
 200 hm e 500 hm , re ecti amente, c m um err má im
 e 10 em ca a um e ierenciai ara a r imar err
 ercentua má im n a r ca cu a e R

57. área e um triângu e e er ca cu a a e a órmu a
 $A = \frac{1}{2}ab \sin \theta$, na ua a e b ã c m riment e i
 a e θ é ângu entre e e Su nha ue a, b e θ tenham
 i me i c m 40 cm, 50 cm e 30° , re ecti amente e
 ierenciai ara a r imar err má im n a r ca cu a
 e A e err má im em a, b e θ ã $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm e 2° , re
 ecti amente
58. c m riment , argura e a a tura e uma cai a retangu ar ã
 me i c m err e, n má im , r n e r é e uen e
 ierenciai ara a r imar err ercentua má im n a r
 ca cu a ume
59. e e rema 1444 ara r ar ue $f(x, y) = x^2$ en y é i e
 rencia e em t a arte
60. e e rema 1444 ara r ar ue $f(x, y, z) = xy$ en z é
 ierencia e em t a arte
61. Su nha ue $f(x, y)$ e a uma unção ierenciá e n nt
 (x_0, y_0) e e a $z_0 = f(x_0, y_0)$ Pr e ue a unção $g(x, y, z) =$
 $z - f(x, y)$ é ierenciá e em (x_0, y_0, z_0)
62. Su nha ue Δf ati aça uma e uação ti 5 , em ue
 $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ é c ntínua em $(\Delta x, \Delta y) = 0, 0$, c m $\epsilon(0, 0) = 0$
 Pr e ue f é ierenciá e em (x_0, y_0)

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.4

1. a $f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ b $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ 2. a $dz = e^{y^2} dx + 2xye^{y^2} dy$
 b $dw = \sin(yz) dx + xz \cos(yz) dy + xy \cos(yz) dz$ 3. $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ 4. 3, 5

14.5 REGRA DA CADEIA

Nesta seção, deduziremos versões da regra da cadeia para funções de duas ou três variáveis. Essas novas versões nos permitirão gerar relações úteis entre derivadas e derivadas parciais de várias funções.

REGRA DA CADEIA PARA DERIVADAS

Se y for uma função diferenciável de x e x for uma função diferenciável de t , então a regra da cadeia para a função y afirma que, na notação, y representa uma função diferenciável de t em

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

geraremos uma versão da regra da cadeia para a função z de x e y .

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função de x e y e que x e y sejam funções de t . Assim,

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

então $z = f(x(t), y(t))$ é uma função de t . Queremos determinar a derivada dz/dt e a relação com as derivadas $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, dx/dt e dy/dt . Se Δx , Δy e Δz representam variações em x , y e z , respectivamente, decorrentes de uma variação Δt em t , então

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Segue-se da Seção 14.4 que

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \tag{1}$$

na relação anterior, dividamos ambos os lados por Δt , obtemos

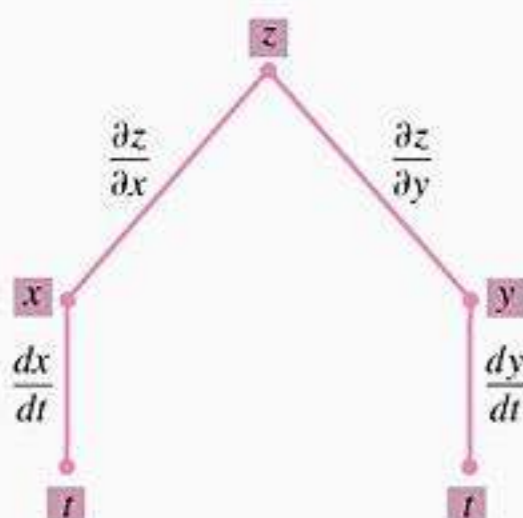
$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{2}$$

quando tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$ em ambos os lados da equação 2, obtemos a seguinte relação:

14.5.1 TEOREMA (Regra da Cadeia de Duas Variáveis) Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x, y) = (x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \tag{3}$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as derivadas parciais são calculadas em x, y .



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Figura 14.5.1

A fórmula 3 é representada esquematicamente por um “diagrama de árvore” que é construído como segue (Figura 14.5.1). Imagine o nó z no topo da árvore e os nós x e y no meio, unindo cada variável intermediária à variável independente t . Em seguida, unimos diretamente z a x e y e a t . Em seguida, unimos cada ramo com uma derivada com a variável independente t e cada ramo com a derivada com a variável independente t .

do mesmo ramo. Isso completa a “árvore”. Para encontrar a fórmula para dz/dt , siga os dois caminhos através da árvore que começam em z e terminam em t . Cada um desses caminhos corresponde a um termo na Fórmula (3).

► **Exemplo 1** Suponha que

$$z = x^2y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

Use a regra da cadeia para encontrar dz/dt e verifique o resultado expressando z como uma função de t e derivando diretamente.

Solução Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) \\ &= (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos expressar z diretamente como uma função de t ,

$$z = x^2y = (t^2)^2(t^3) = t^7$$

e então derivar para obter $dz/dt = 7t^6$. Contudo, este procedimento nem sempre será conveniente. ◀

► **Exemplo 2** Suponha que

$$z = \sqrt{xy + y}, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

Use a regra da cadeia para encontrar $dz/d\theta$ quando $\theta = \pi/2$.

Solução Pela regra da cadeia com θ no lugar de t ,

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{d\theta}$$

obtemos

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{2}(xy + y)^{-1/2}(y)(-\sin \theta) + \frac{1}{2}(xy + y)^{-1/2}(x + 1)(\cos \theta)$$

Quando $\theta = \pi/2$, temos

$$x = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad y = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Substituindo $x = 0$, $y = 1$, $\theta = \pi/2$ na fórmula para $dz/d\theta$, obtemos

$$\left. \frac{dz}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2}(1)(1)(-1) + \frac{1}{2}(1)(1)(0) = -\frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft$$

Confirme o resultado do Exemplo 2 expressando z diretamente como função de θ .

Há muitas variações nas notações da derivada, cada uma das quais dá à regra da cadeia uma forma diferente. Se $z = f(x, y)$, onde x e y são funções de t , então algumas possibilidades são

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ \frac{df}{dt} &= f_x x'(t) + f_y y'(t) \end{aligned}$$

o Teorema 14.5.1 tem uma extensão natural para a função $w = f(x, y, z)$ e três variáveis:

14.5.2 TEOREMA (Regra da Cadeia de Três Variáveis) Se cada uma das funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ forem diferenciáveis em t e se $w = f(x, y, z)$ for diferenciável no ponto $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$, então $w = f(x(t), y(t), z(t))$ é diferenciável em t e

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad 4$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as derivadas parciais são calculadas em x, y, z .

Para aplicar a regra da cadeia para a função $w = f(x, y, z)$ e uma variável t , usamos a fórmula para a derivada da composição de funções dadas no Teorema 14.5.1 e 14.5.2. É importante não tentar determinar a fórmula usando a regra da cadeia diretamente. Para ilustrar, vamos considerar o exemplo clássico de uma reação química:

■ DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Suponha que a equação $z = f(x, y)$ define uma superfície e x e y são variáveis independentes. Então a Equação 3 define

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad 5$$

Essa equação pode ser usada para encontrar a derivada da função z em relação a x implicitamente. Por exemplo, se a equação é

$$f(x, y) = c$$

então y é implicitamente uma função de x e podemos encontrar a derivada dy/dx . Derivando ambos os lados em relação a x , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Logo, se $\partial f / \partial y \neq 0$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

e um número, temos a seguinte

Mostre que a função $y = x$ está definida implicitamente pela equação

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

mas que o Teorema 14.5.3 não pode ser aplicado para descobrir dy/dx .

14.5.3 TEOREMA Se a equação $f(x, y) = c$ definir y implicitamente como uma função diferenciável de x , e se $\partial f / \partial y \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \quad 7$$

► **Exemplo 3** Dado que

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

determine dy/dx usando a Equação 7 e verifique se a resposta é a mesma que a encontrada implicitamente.

Solução Por (7) com $f(x, y) = x^3 + y^2x - 3$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Alternativamente, derivando implicitamente a equação dada, obtemos

$$3x^2 + y^2 + x \left(2y \frac{dy}{dx} \right) - 0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

o que é consistente com o resultado obtido por (7). ◀

■ PROBLEMAS DE TAXAS RELACIONADAS

Os Teoremas 14.5.1 e 14.5.2 nos fornecem uma perspectiva adicional sobre problemas de taxas relacionadas, como os que vimos na Seção 3.7.

► **Exemplo 4** A que taxa está variando o volume de uma caixa retangular se seu comprimento é de 8 cm e está aumentando a 3 cm/s, sua largura é de 6 cm e está aumentando a 2 cm/s e sua altura é de 4 cm e está aumentando a 1 cm/s?

Solução Sejam x , y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa, respectivamente, e seja t o tempo, em segundos. Podemos interpretar as taxas dadas como as derivadas

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dt} = 1 \tag{8}$$

no instante em que

$$x = 8, \quad y = 6 \quad \text{e} \quad z = 4 \tag{9}$$

Queremos encontrar dV/dt nesse instante. Para isso, usamos a fórmula $V = xyz$ do volume para obter

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = yz \frac{dx}{dt} + xz \frac{dy}{dt} + xy \frac{dz}{dt}$$

Substituindo (8) e (9) nessa equação, resulta

$$\frac{dV}{dt} = (6)(4)(3) + (8)(4)(2) + (8)(6)(1) = 184$$

Assim, o volume está crescendo a uma taxa de 184 cm³/s no instante dado. ◀

Refaça o Exemplo 4 usando os métodos da Seção 3.7. Que regra de derivação substitui a regra da cadeia em sua solução?

■ REGRA DA CADEIA PARA DERIVADAS PARCIAIS

No Teorema 14.5.1, cada uma das variáveis x e y é função de uma única variável t . Consideraremos, agora, o caso em que x e y , são funções de duas variáveis. Seja

$$z = f(x, y) \tag{10}$$

e suponha que x e y sejam funções de u e v , digamos

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Substituindo essas funções de u e v em (10), obtemos a relação

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

que expressa z como uma função das duas variáveis u e v . Assim, podemos perguntar pelas derivadas parciais $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$ e podemos indagar sobre a relação entre essas derivadas e as derivadas $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ e $\partial y/\partial v$.

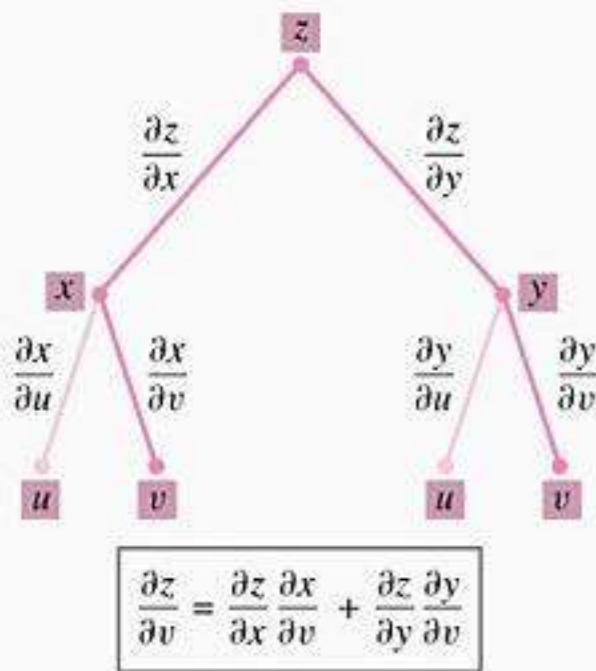
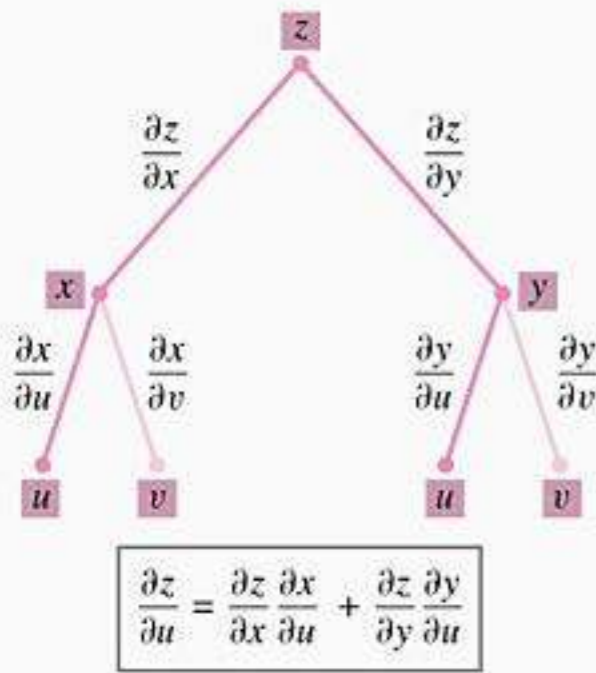


Figura 14.5.2

14.5.4 TEOREMA (Regra da Cadeia de Duas Variáveis) Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x(u, v), y(u, v))$, então $z = f(x(u, v), y(u, v))$ tem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

DEMONSTRAÇÃO Se v for mantido fixo, então $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ tornam-se funções somente de u . Assim, voltamos ao caso do Teorema 14.5.1. Se aplicarmos esse teorema com u no lugar de t , e se usarmos ∂ em vez de d para indicar que a variável v está fixada, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

A fórmula para $\partial z/\partial v$ é deduzida de maneira análoga. ■

A Figura 14.5.2 mostra os diagramas de árvore para as fórmulas do Teorema 14.5.4. A fórmula para $\partial z/\partial u$ pode ser obtida traçando todos os caminhos através da árvore que começam em z e terminam em u , e a fórmula para $\partial z/\partial v$ pode ser obtida traçando todos os caminhos através da árvore que começam em z e terminam em v .

► **Exemplo 5** Dado que

$$z = e^{xy}, \quad x = 2u + v, \quad y = u/v$$

encontre $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$ usando a regra da cadeia.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (ye^{xy})(2) + (xe^{xy})\left(\frac{1}{v}\right) = \left[2y + \frac{x}{v}\right]e^{xy} \\ &= \left[\frac{2u}{v} + \frac{2u+v}{v}\right]e^{(2u+v)(u/v)} = \left[\frac{4u}{v} + 1\right]e^{(2u+v)(u/v)} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})\left(-\frac{u}{v^2}\right) \\ &= \left[y - x\left(\frac{u}{v^2}\right)\right]e^{xy} = \left[\frac{u}{v} - (2u+v)\left(\frac{u}{v^2}\right)\right]e^{(2u+v)(u/v)} \\ &= -\frac{2u^2}{v^2}e^{(2u+v)(u/v)} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

O Teorema 14.5.4 tem uma extensão natural para funções $w = f(x, y, z)$ de três variáveis, que enunciamos sem prova.

14.5.5 TEOREMA (Regra da Cadeia de Três Variáveis) Se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) e se a função $w = f(x, y, z)$ for diferenciável no ponto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então a função $w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ tem derivadas parciais de primeira ordem em (u, v) dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

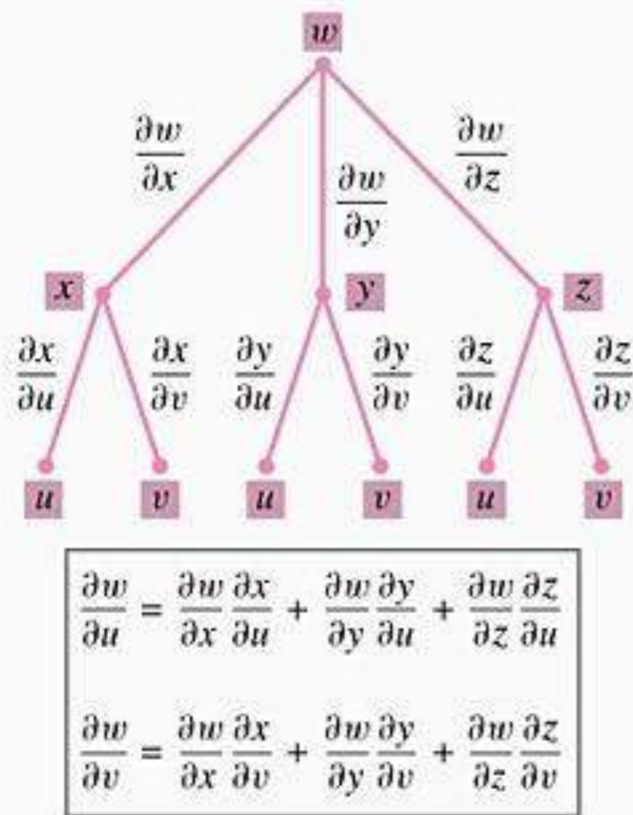


Figura 14.5.3

► **Exemplo 6** Suponha que

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v$$

Use formas apropriadas da regra da cadeia para determinar $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.

Solução Do diagrama de árvore e das correspondentes fórmulas na Figura 14.5.3, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial u} = yze^{xyz}(3) + xze^{xyz}(3) + xye^{xyz}(2uv) = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial v} = yze^{xyz}(1) + xze^{xyz}(-1) + xye^{xyz}(u^2) = e^{xyz}(yz - xz + xyu^2)$$

Se desejarmos, podemos expressar $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$ em termos de u e v apenas substituindo x , y e z por suas expressões em termos de u e v . ◀

■ **OUTRAS VERSÕES DA REGRA DA CADEIA**

A regra da cadeia pode ser estendida a funções $w = f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n variáveis, mas não demonstramos essas extensões. Por exemplo, se cada v_i é uma função de t , para $i = 1, 2, \dots, n$, a fórmula pertinente é

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v_n} \frac{dv_n}{dt} \tag{11}$$

Observe que (11) é uma extensão natural das Fórmulas (3) e (4) dos Teoremas 14.5.1 e 14.5.2, respectivamente.

Existe uma infinidade de variações da regra da cadeia, dependendo do número de variáveis e da escolha das variáveis independentes e dependentes. Um bom procedimento prático é utilizar diagramas de árvores para deduzir novas versões à medida que forem necessárias. Para as funções que costumamos encontrar, essa abordagem dá resultados corretos.

► **Exemplo 7** Suponha que $w = x^2 + y^2 - z^2$ e

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Use formas apropriadas da regra da cadeia para determinar $\partial w/\partial \rho$ e $\partial w/\partial \theta$.

Solução Do diagrama de árvore e das fórmulas correspondentes na Figura 14.5.4, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \rho} &= 2x \sin \phi \cos \theta + 2y \sin \phi \sin \theta - 2z \cos \phi \\ &= 2\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2\rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta - 2\rho \cos^2 \phi \\ &= 2\rho \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2\rho \cos^2 \phi \\ &= 2\rho (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \\ &= -2\rho \cos 2\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= (2x)(-\rho \sin \phi \sin \theta) + (2y)\rho \sin \phi \cos \theta \\ &= -2\rho^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta + 2\rho^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

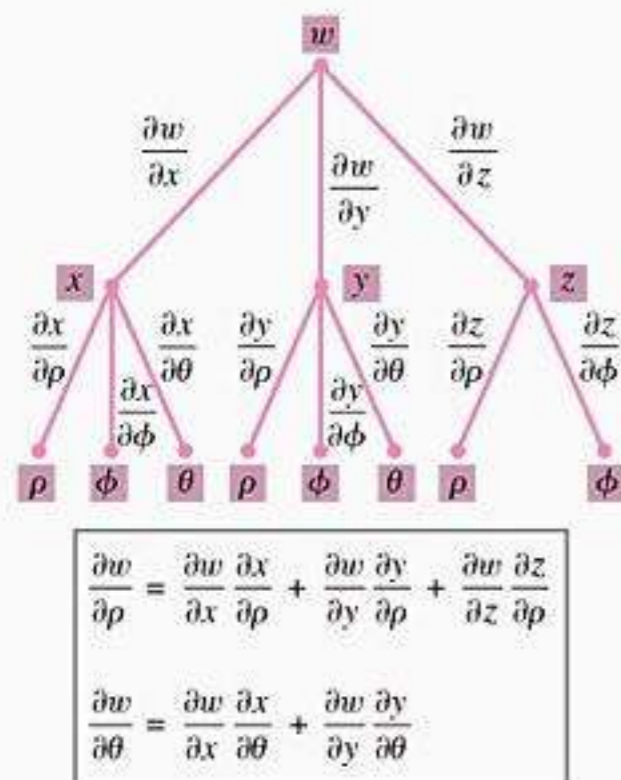


Figura 14.5.4

Esse resultado é explicado pelo fato que w não varia com θ . Podemos ver isso diretamente expressando as variáveis x , y e z em termos de ρ , ϕ e θ na fórmula para w . (Verifique que $w = -\rho^2 \cos 2\phi$.) ◀

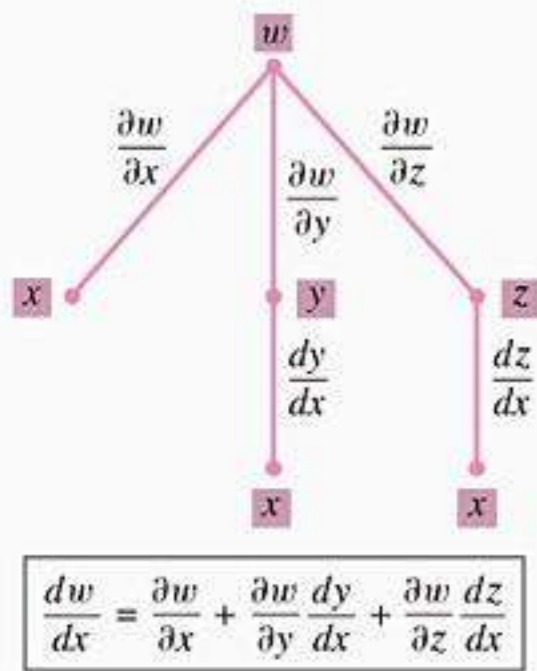


Figura 14.5.5

► **Exemplo 8** Suponha que

$$w = xy + yz, \quad y = \text{sen } x, \quad z = e^x$$

Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar dw/dx .

Solução Do diagrama de árvore e das fórmulas correspondentes na Figura 14.5.5, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= y + (x + z) \cos x + ye^x \\ &= \text{sen } x + (x + e^x) \cos x + e^x \text{sen } x \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser obtido também expressando w explicitamente em termos de x como

$$w = x \text{sen } x + e^x \text{sen } x$$

e, então, derivando em relação a x ; contudo, uma tal substituição direta nem sempre é possível. ◀

ADVERTÊNCIA

O símbolo ∂z , ao contrário da diferencial dz , não tem significado próprio. Por exemplo, se fôssemos “cancelar” símbolos de derivadas parciais na fórmula da regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

obteríamos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}$$

o que é falso no caso em que $\partial z/\partial u \neq 0$.

Em cada uma das expressões

$$z = \text{sen } xy, \quad z = \frac{xy}{1 + xy}, \quad z = e^{xy}$$

as variáveis independentes ocorrem apenas na combinação xy , logo a substituição $t = xy$ reduz a expressão para uma função de uma variável:

$$z = \text{sen } t, \quad z = \frac{t}{1 + t}, \quad z = e^t$$

Reciprocamente, se começarmos com uma função de uma variável $z = f(t)$ e substituirmos $t = xy$, obtemos uma função $z = f(xy)$ na qual as variáveis aparecem apenas na combinação xy . Nas aplicações, freqüentemente surgem funções cujas variáveis ocorrem em combinações fixas.

► **Exemplo 9** Mostre que se f for diferenciável, então uma função da forma $z = f(xy)$ satisfaz a equação

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solução Tomando $t = xy$, temos $z = f(t)$. Do diagrama de árvore na Figura 14.5.6 obtemos as fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = y \frac{dz}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = x \frac{dz}{dt}$$

das quais segue

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = xy \frac{dz}{dt} - yx \frac{dz}{dt} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

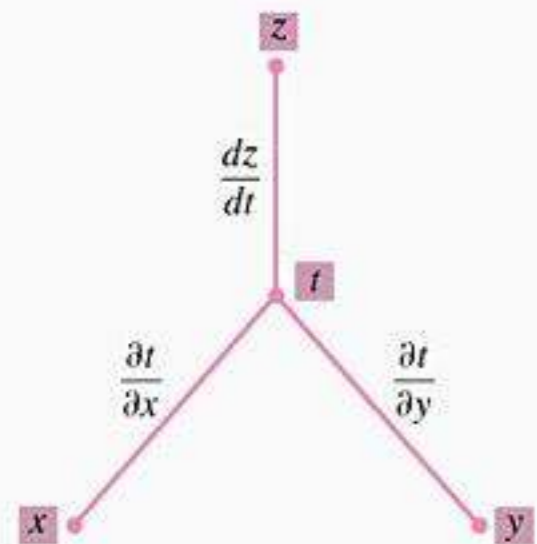


Figura 14.5.6

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.5 (Ver página 978 para respostas.)

- Suponha que $z = xy^2$ e que x e y sejam funções diferenciáveis de t com $x = 1$, $y = -1$, $dx/dt = -2$ e $dy/dt = 3$ quando $t = -1$. Então $dz/dt =$ _____ quando $t = -1$.
- Suponha que C seja o gráfico da equação $f(x, y) = 1$ e que essa equação defina y implicitamente como uma função diferenciável de x . Se o ponto $(2, 1)$ pertence a C com $f_x(2, 1) = 3$ e $f_y(2, 1) = -1$, então a reta tangente a C no ponto $(2, 1)$ tem inclinação _____.
- Um retângulo está crescendo de tal modo que, quando seu comprimento mede 5 cm e sua largura 2 cm, o comprimento está crescendo a uma taxa de 3 cm/s e a largura está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Nesse instante, a área do retângulo está crescendo a uma taxa de _____.
- Suponha que $z = x/y$, onde x e y são funções diferenciáveis de u e v tais que $x = 3$, $y = 1$, $\partial x/\partial u = 4$, $\partial x/\partial v = -2$, $\partial y/\partial u = 1$ e $\partial y/\partial v = -1$ quando $u = 2$ e $v = 1$. Se $u = 2$ e $v = 1$, então $\partial z/\partial u =$ _____ e $\partial z/\partial v =$ _____.

EXERCÍCIOS 14.5

1-6 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar dz/dt .

- $z = 3x^2y^3$; $x = t^4$, $y = t^2$
- $z = \ln(2x^2 + y)$; $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$
- $z = 3 \cos x - \sin xy$; $x = 1/t$, $y = 3t$
- $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}$; $x = \ln t$, $y = t$
- $z = e^{1-xy}$; $x = t^{1/3}$, $y = t^3$
- $z = \cosh^2 xy$; $x = t/2$, $y = e^t$

7-10 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar dw/dt .

- $w = 5x^2y^3z^4$; $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$
- $w = \ln(3x^2 - 2y + 4z)^3$; $x = t^{1/2}$, $y = t^{2/3}$, $z = t^{-2}$
- $w = 5 \cos xy - \sin xz$; $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$
- $w = \sqrt{1 + x - 2yz^4x}$; $x = \ln t$, $y = t$, $z = 4t$

ENFOCANDO CONCEITOS

11. Suponha que

$$w = x^3y^2z^4; \quad x = t^2, \quad y = t + 2, \quad z = 2t^4$$

Encontre a taxa de variação de w em relação a t em $t = 1$ usando a regra da cadeia e então confira sua resposta expressando w como uma função de t e derivando.

12. Suponha que

$$w = x \sin yz^2; \quad x = \cos t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$$

Encontre a taxa de variação de w em relação a t em $t = 0$ usando a regra da cadeia e então confira sua resposta expressando w como uma função de t e derivando.

13. Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre dz/dt para $t = 2$.

14. Suponha que $w = f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(1, 0, 2)$ com $f_x(1, 0, 2) = 1$, $f_y(1, 0, 2) = 2$ e $f_z(1, 0, 2) = 3$.

Se $x = t$, $y = \sin(\pi t)$ e $z = t^2 + 1$, encontre dw/dt para $t = 1$.

15. Explique como a regra da derivada do produto de funções de uma só variável pode ser vista como uma decorrência da regra da cadeia aplicada a uma função particular de duas variáveis.

16. Um aluno tenta derivar a função x^x usando a regra da derivada de potências, obtendo o resultado errado $x \cdot x^{x-1}$. Um outro aluno tenta derivar x^x tratando-a como uma função exponencial, obtendo o resultado errado $(\ln x)x^x$. Use a regra da cadeia para explicar por que a derivada correta é a soma desses dois resultados errados.

17-22 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$.

- $z = 8x^2y - 2x + 3y$; $x = uv$, $y = u - v$
- $z = x^2 - y \operatorname{tg} x$; $x = u/v$, $y = u^2v^2$
- $z = x/y$; $x = 2 \cos u$, $y = 3 \sin v$
- $z = 3x - 2y$; $x = u + v \ln u$, $y = u^2 - v \ln v$
- $z = e^{x^2y}$; $x = \sqrt{uv}$, $y = 1/v$
- $z = \cos x \sin y$; $x = u$, $y = u^2 + v^2$

23-30 Use formas apropriadas da regra da cadeia para encontrar as derivadas.

- Seja $T = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Encontre $\partial T/\partial r$ e $\partial T/\partial \theta$.
- Sejam $R = e^{2s-t^2}$; $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$. Encontre $dR/d\phi$.
- Sejam $t = u/v$; $u = x^2 - y^2$, $v = 4xy^3$. Encontre $\partial t/\partial x$ e $\partial t/\partial y$.
- Sejam $w = rs/(r^2 + s^2)$; $r = uv$, $s = u - 2v$. Encontre $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.
- Seja $z = \ln(x^2 + 1)$, onde $x = r \cos \theta$. Encontre $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial \theta$.

28. Seja $u = rs^2 \ln t$, $r = x^2$, $s = 4y + 1$, $t = xy^3$. Determine $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$.
29. Seja $w = 4x^2 + 4y^2 + z^2$, $x = \rho \cos \phi \cos \theta$, $y = \rho \cos \phi \sin \theta$, $z = \rho \sin \phi$. Determine $\partial w/\partial \rho$, $\partial w/\partial \phi$ e $\partial w/\partial \theta$.
30. Seja $w = 3xy^2z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x - 1}$. Encontre dw/dx .
31. Use uma regra da cadeia para determinar o valor de $\frac{dw}{ds} \Big|_{s=1/4}$ se $w = r^2 - r \operatorname{tg} \theta$; $r = \sqrt{s}$, $\theta = \pi s$.

32. Use uma regra da cadeia para determinar o valor de

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=1, v=-2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{u=1, v=-2}$$

se $f(x, y) = x^2y^2 - x + 2y$; $x = \sqrt{u}$, $y = uv^3$.

33. Use uma regra da cadeia para determinar o valor de

$$\frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{r=2, \theta=\pi/6} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} \Big|_{r=2, \theta=\pi/6}$$

se $z = xy e^{x/y}$; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

34. Use uma regra da cadeia para determinar $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=3}$ se $z = x^2y$; $x = t^2$, $y = t + 7$.

35-38 Use o Teorema 14.5.3 para encontrar dy/dx e verifique seu resultado usando diferenciação implícita.

35. $x^2y^3 + \cos y = 0$ 36. $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 5$
37. $e^{xy} + ye^y = 1$ 38. $x - \sqrt{xy} + 3y = 4$
39. Suponha que $F(x, y, z) = 0$ defina z implicitamente como uma função de x e y . Mostre que se $\partial F/\partial z \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

40. Suponha que $F(x, y, z) = 0$ defina z implicitamente como uma função de x e y . Mostre que se $\partial F/\partial z \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

41-44 Encontre $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ por derivação implícita e confirme que o resultado obtido é consistente com os antecipados pelas fórmulas nos Exercícios 39 e 40.

41. $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$
42. $\ln(1+z) + xy^2 + z = 1$
43. $ye^x - 5 \operatorname{sen} 3z = 3z$
44. $e^{xy} \cos yz - e^{yz} \operatorname{sen} xz + 2 = 0$
45. Duas rodovias intersectam em um ângulo reto. O carro A, movendo-se sobre uma das rodovias, aproxima-se da interseção a 25 km/h, e o carro B, movendo-se sobre a outra rodovia, aproxima-se da interseção a 30 km/h. Com que taxa está variando a distância entre os carros quando A está a 0,3 km da interseção e B está a 0,4 km da interseção?
46. Use a lei dos gases ideais $P = kT/V$ com V em polegadas cúbicas (pol^3), T em kelvins (K) e $k = 10 \text{ pol} \cdot \text{lb/K}$ para determinar a taxa segundo a qual a temperatura de um gás está variando

quando o volume for de 200 pol^3 e crescendo a uma taxa de $4 \text{ pol}^3/\text{s}$, enquanto a pressão for 5 lb/pol^2 e decrescendo a uma taxa de $1 \text{ lb/pol}^2/\text{s}$.

47. Dois lados de um triângulo têm comprimentos $a = 4 \text{ cm}$ e $b = 2 \text{ cm}$, mas estão crescendo a uma taxa de 1 cm/s . Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa está variando o ângulo θ entre a e b quando $\theta = \pi/6$?
48. Dois lados de um triângulo têm comprimentos $a = 5 \text{ cm}$ e $b = 10 \text{ cm}$, e o ângulo entre eles é $\theta = \pi/3$. Se a estiver crescendo a uma taxa de 2 cm/s , b estiver crescendo a uma taxa de 1 cm/s , e θ mantendo-se constante, a que taxa está crescendo ou decrescendo o terceiro lado? [Sugestão: Use a lei dos cossenos.]
49. Suponha que a parte de uma árvore que é utilizável como madeira seja um cilindro circular reto. Se a altura utilizável da árvore cresce a uma taxa de 2 pés por ano e o diâmetro utilizável cresce a 3 pol por ano, com que velocidade cresce o volume da madeira utilizável quando a altura utilizável da árvore for de 20 pés e o diâmetro utilizável for de 30 pol? [1 pé = 12 pol.]
50. Suponha que uma partícula movendo-se ao longo de uma placa de metal no plano xy tenha a velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (cm/s) no ponto $(3, 2)$. Dado que a temperatura da placa nos pontos do plano xy é $T(x, y) = y^2 \ln x$, $x \geq 1$, em graus Celsius, determine dT/dt no ponto $(3, 2)$.
51. O comprimento, a largura e a altura de uma caixa retangular crescem a uma taxa de 1 pol/s , 2 pol/s e 3 pol/s , respectivamente.
- (a) A que taxa o volume está crescendo quando o comprimento é 2 pol, a largura 3 pol e a altura 6 pol?
- (b) A que taxa está crescendo o comprimento da diagonal naquele instante?
52. Considere a caixa do Exercício 51. A que taxa está aumentando a área da superfície da caixa no dado instante?

53-54 Uma função $f(x, y)$ é denominada *homogênea de grau n* se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para $t > 0$. Essa terminologia é necessária nesses exercícios.

53. Em cada parte, mostre que a função é homogênea e determine seu grau.
- (a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (c) $f(x, y) = x^2y - 2y^3$ (d) $f(x, y) = \frac{5}{(x^2 + 2y^2)^2}$

54. (a) Mostre que se $f(x, y)$ for uma função homogênea de grau n , então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

[Sugestão: tome $u = tx$ e $v = ty$ em $f(tx, ty)$ e derive ambos os lados de $f(u, v) = t^n f(x, y)$ em relação a t .]

- (b) Confirme que as funções do Exercício 53 satisfazem a equação da parte (a).
55. (a) Suponha que $z = f(u)$ e $u = g(x, y)$. Desenhe um diagrama de árvore e use-o para construir as regras da cadeia que expressam $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ em termos de dz/du , $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$.

(b) Mostre que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 z}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{d^2 z}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{dz}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{d^2 z}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

56. (a) Seja $z = f(x^2 - y^2)$. Use o resultado do Exercício 55 (a) para mostrar que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(b) Seja $z = f(x y)$. Use o resultado do Exercício 55 (a) para mostrar que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(c) Confirme o resultado da parte (a) no caso em que $z = \sin(x^2 - y^2)$.

(d) Confirme o resultado da parte (b) no caso em que $z = e^{xy}$.

57. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x + 2y)$. Mostre que

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

58. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x^2 + y^2)$. Mostre que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

59. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $w = f(u)$, onde $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6 \frac{dw}{du}$$

60. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $w = f(\rho)$, onde $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2$$

61. Seja $z = f(x - y, y - x)$. Mostre que $\partial z / \partial x + \partial z / \partial y = 0$.

62. Seja f uma função diferenciável de três variáveis e suponha que $w = f(x - y, y - z, z - x)$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

63. Nas partes (a)-(e), suponha que a equação $z = f(x, y)$ seja expressa na forma polar $z = g(r, \theta)$ fazendo a substituição $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

(a) Considere r e θ como funções de x e y e use derivação implícita para mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

(b) Considere r e θ como funções de x e y e use derivação implícita para mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \cos \theta\end{aligned}$$

(d) Use o resultado da parte (c) para mostrar que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(e) Use o resultado da parte (c) para mostrar que se $z = f(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

então $z = g(r, \theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

e reciprocamente. A última equação acima é chamada de **forma polar da equação de Laplace**.

64. Mostre que a função

$$z = \arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

satisfaz a equação de Laplace; então, faça a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e mostre que a função resultante de r e θ satisfaz a forma polar da equação de Laplace, dada na parte (e) do Exercício 63.

65. (a) Mostre que se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (Exercício 88, Seção 14.3) e se $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, então

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Isso é chamado de **forma polar das equações de Cauchy-Riemann**.

(b) Mostre que as funções

$$u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = 2 \arctg (y/x)$$

satisfazem as equações de Cauchy-Riemann; então, faça a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e mostre que as funções resultantes de r e θ satisfazem a forma polar das equações de Cauchy-Riemann.

66. Nas partes (a)-(d), lembre da Fórmula (6) da Seção 14.3 que, sob condições apropriadas, uma corda dedilhada satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde c é uma constante positiva.

(a) Mostre que uma função da forma $u(x, t) = f(x + ct)$ satisfaz a equação da onda.

(b) Mostre que uma função da forma $u(x, t) = g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.

(c) Mostre que uma função da forma

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

satisfaz a equação da onda.

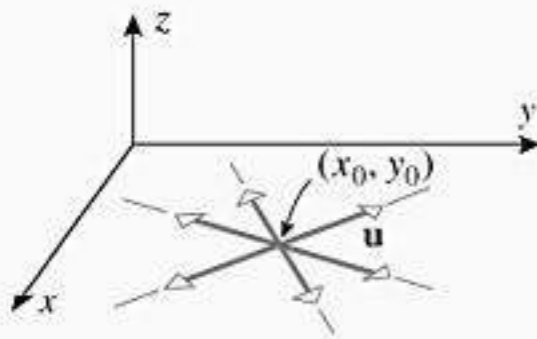


Figura 14.6.1

Suponha que queiramos calcular a taxa de variação instantânea de uma função $f(x, y)$ em relação à distância num certo ponto (x_0, y_0) em alguma direção. Como há uma infinidade de direções nas quais um ponto pode se mover no plano (x_0, y_0) , precisamos de algum método para descrever uma direção especificada começando em (x_0, y_0) . Uma maneira de fazer isso é usar um vetor unitário

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$$

que tenha ponto inicial em (x_0, y_0) e aponte na direção desejada (Figura 14.6.1). Esse vetor determina uma reta l no plano xy que pode ser expressa parametricamente como

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2 \tag{1}$$

onde s é o parâmetro comprimento de arco que tem seu ponto de referência em (x_0, y_0) e tem valores positivos na direção e sentido de \mathbf{u} . Para $s = 0$, o ponto (x, y) está no ponto de referência (x_0, y_0) e ele se move ao longo da reta l na direção e sentido de \mathbf{u} , quando s cresce. A variável $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é uma função do parâmetro s na reta l . Então o valor da derivada dz/ds em $s = 0$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x, y)$ em relação à distância de (x_0, y_0) na direção e sentido de \mathbf{u} .

14.6.1 DEFINIÇÃO Se $f(x, y)$ for uma função de x e y e se $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$ for um vetor unitário, então a *derivada direcional de f na direção e sentido de \mathbf{u}* em (x_0, y_0) é denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ e definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0} \tag{2}$$

desde que esse limite exista.

Inclinação na direção \mathbf{u} = taxa de variação de z em relação a s .

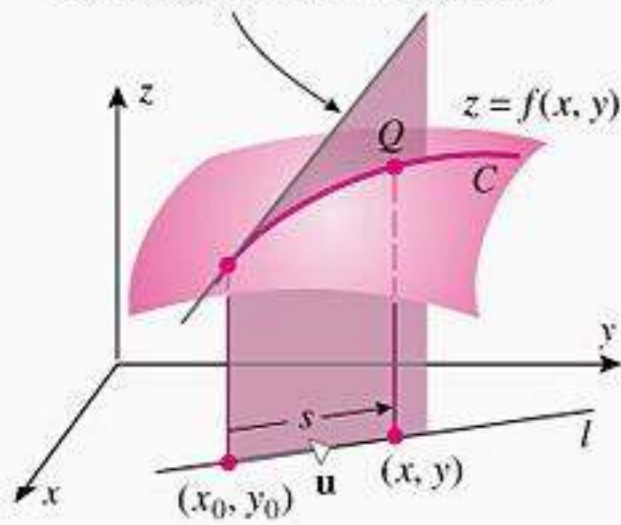


Figura 14.6.2

Geometricamente, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ pode ser interpretada como a *inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção de \mathbf{u}* no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Figura 14.6.2). Em geral, o valor de $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ dependerá tanto do ponto (x_0, y_0) quanto da direção e sentido do vetor \mathbf{u} . Assim, num ponto fixado da superfície, a inclinação dessa superfície varia com a direção e o sentido (Figura 14.6.3). Analiticamente, a derivada direcional representa a *taxa de variação instantânea de $z = f(x, y)$ em relação à distância na direção e sentido de \mathbf{u}* no ponto (x_0, y_0) .

► **Exemplo 1** Dada $f(x, y) = xy$, encontre $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$, onde $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$.

Solução Segue da Equação (2) que

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \frac{d}{ds} \left[f \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2} \right) \right]_{s=0}$$

Como

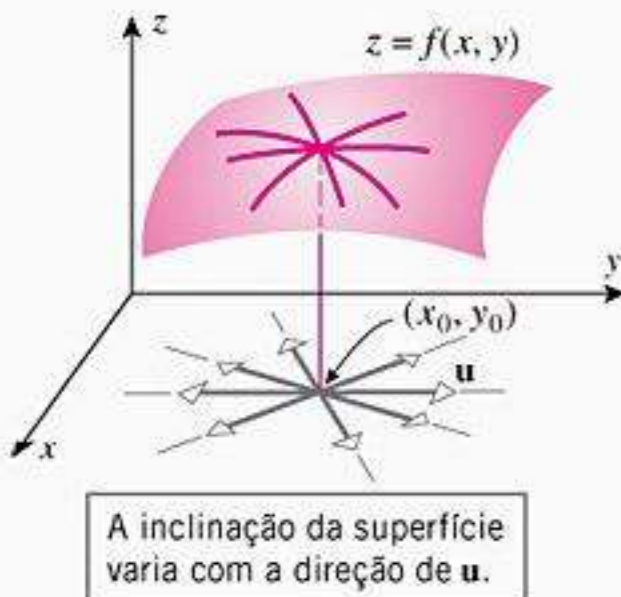
$$f \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2} \right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2} \right) \left(2 + \frac{s}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right) s + 2$$

temos

$$\frac{d}{ds} \left[f \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

e, assim,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \frac{d}{ds} \left[f \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2} \right) \right]_{s=0} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$



A inclinação da superfície varia com a direção de \mathbf{u} .

Figura 14.6.3

Como $\frac{1}{2} + \sqrt{3} \approx 2,23$, concluímos que se percorrermos uma pequena distância a partir do ponto $(1, 2)$ na direção e sentido de \mathbf{u} , então a função $f(x, y) = xy$ cresce cerca de 2,23 vezes a distância percorrida. ◀

A definição de derivada direcional de uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis é análoga à Definição 14.6.1.

14.6.2 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ for um vetor unitário e se $f(x, y, z)$ for uma função de x, y e z , então a *derivada direcional de f na direção e sentido de \mathbf{u}* em (x_0, y_0, z_0) é denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ e definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)]_{s=0} \quad (3)$$

desde que esse limite exista.

Quais são as dificuldades para interpretar (3) como uma “inclinação”?

Embora a Equação (3) não tenha uma interpretação geométrica conveniente, ainda podemos interpretar as derivadas direcionais de funções de três variáveis em termos de taxas de variação instantâneas em direções e sentidos especificados.

As derivadas direcionais de uma função que é diferenciável num ponto, existem em qualquer direção e sentido nesse ponto e podem ser calculadas diretamente em termos das derivadas parciais de primeira ordem da função.

14.6.3 TEOREMA

(a) Se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0) e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ existe e é dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \quad (4)$$

(b) Se $f(x, y, z)$ for diferenciável em (x_0, y_0, z_0) e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ existe e é dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3 \quad (5)$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos dar a prova de (a); a de (b) é análoga e será omitida. A função $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é a composição da função $z = f(x, y)$ com as funções

$$x = x(s) = x_0 + su_1 \quad \text{e} \quad y = y(s) = y_0 + su_2$$

Por isso, a regra da cadeia do Teorema 14.5.1 fornece imediatamente

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0} \\ &= \frac{dz}{ds}(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Podemos usar o Teorema 14.6.3 para confirmar o resultado do Exemplo 1. Para $f(x, y) = xy$ temos $f_x(1, 2) = 2$ e $f_y(1, 2) = 1$ (verifique). Com

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

a Equação (4) fornece

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

o que está de acordo com nossa solução no Exemplo 1.

Lembre que na Fórmula (13) da Seção 12.2 vimos que todo vetor unitário \mathbf{u} do plano xy pode ser expresso como

$$\mathbf{u} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (6)$$

onde ϕ é o ângulo do eixo x positivo para \mathbf{u} . Assim, a Fórmula (4) também pode se expressa como

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cos \phi + f_y(x_0, y_0) \sin \phi \quad (7)$$

► **Exemplo 2** Obtenha a derivada direcional de $f(x, y) = e^{xy}$ em $(-2, 0)$ na direção e sentido do vetor unitário que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x positivo.

Solução As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= ye^{xy}, & f_y(x, y) &= xe^{xy} \\ f_x(-2, 0) &= 0, & f_y(-2, 0) &= -2 \end{aligned}$$

O vetor unitário \mathbf{u} que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x positivo é

$$\mathbf{u} = \cos(\pi/3) \mathbf{i} + \sin(\pi/3) \mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j}$$

Assim, por (7)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(-2, 0) &= f_x(-2, 0) \cos(\pi/3) + f_y(-2, 0) \sin(\pi/3) \\ &= 0(1/2) + (-2)(\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

É importante que a direção da derivada direcional seja especificada por um *vetor unitário* quando aplicarmos tanto a Equação (4) quanto a Equação (5).

► **Exemplo 3** Obtenha a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z$ no ponto $(1, -2, 0)$ na direção e sentido do vetor $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solução As derivadas direcionais de f são

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2xy, & f_y(x, y, z) &= x^2 - z^3, & f_z(x, y, z) &= -3yz^2 + 1 \\ f_x(1, -2, 0) &= -4, & f_y(1, -2, 0) &= 1, & f_z(1, -2, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Como \mathbf{a} não é um vetor unitário, normalizamos \mathbf{a} e encontramos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Então, pela Fórmula (5) obtemos

$$D_{\mathbf{u}}f(1, -2, 0) = (-4) \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -3 \quad \blacktriangleleft$$

■ O GRADIENTE

A Fórmula (4) pode ser dada em termos do produto escalar como

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \\ &= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Analogamente, a Fórmula (5) pode ser expressa por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}$$

Em ambos casos, a derivada direcional é dada em termos do produto escalar do vetor de direção \mathbf{u} com um novo vetor construído a partir das derivadas parciais de f .

Lembre que o símbolo ∇f não é o produto de ∇ com f . Pense em ∇ como um "operador" que age sobre funções f para produzir o gradiente ∇f .

14.6.4 DEFINIÇÃO

(a) Se f for uma função de x e y , então o **gradiente de f** é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{8}$$

(b) Se f for uma função de x, y e z , então o **gradiente de f** é definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \tag{9}$$

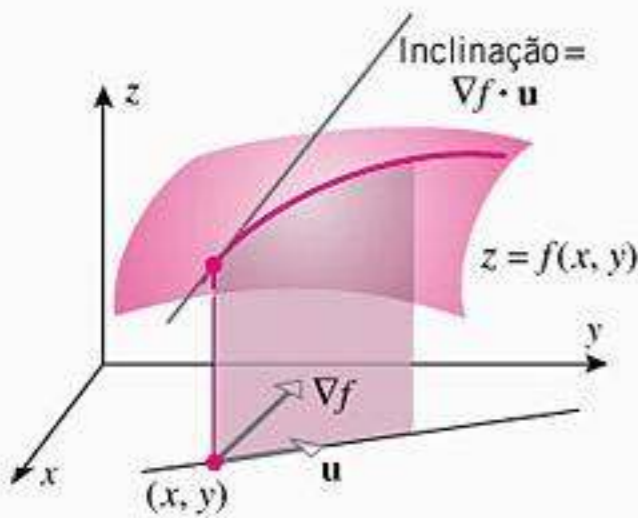


Figura 14.6.4

O símbolo ∇ é um delta invertido. (Esse símbolo costuma ser lido como "del", ou então "nabla", que vem a ser o nome de uma antiga harpa hebraica de dez cordas desse formato.)

As Fórmulas (4) e (5) agora podem ser escritas como

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \tag{10}$$

e

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{u} \tag{11}$$

respectivamente. Por exemplo, usando a Fórmula (11), nossa solução do Exemplo 3 toma a forma

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, -2, 0) &= \nabla f(1, -2, 0) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ &= (-4)\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -3 \end{aligned}$$

A Fórmula (10) pode ser interpretada como significando que a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) na direção de \mathbf{u} é o produto escalar do gradiente com \mathbf{u} (Figura 14.6.4).

■ PROPRIEDADES DO GRADIENTE

O gradiente não é meramente um dispositivo notacional para simplificar a fórmula para a derivada direcional: veremos que o comprimento e a direção do gradiente ∇f fornecem informação importante sobre a função f e a superfície $z = f(x, y)$. Por exemplo, suponha que $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$ e usemos a Fórmula (4) da Seção 12.3 para reescrever (10) como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(x, y)\| \cos \theta \tag{12}$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x, y)$ e \mathbf{u} . Essa equação nos diz que o valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$ e esse máximo ocorre quando $\theta = 0$, isto é, quando \mathbf{u} está na direção e sentido de $\nabla f(x, y)$. Geometricamente, isso significa que a superfície $z = f(x, y)$ tem sua inclinação máxima em um ponto (x, y) na direção do gradiente e a inclinação máxima é $\|\nabla f(x, y)\|$ (Figura 14.6.5). Analogamente, (12) nos diz que o valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$ e esse valor ocorre quando $\theta = \pi$, isto é, quando \mathbf{u} está no sentido oposto a $\nabla f(x, y)$. Ge-

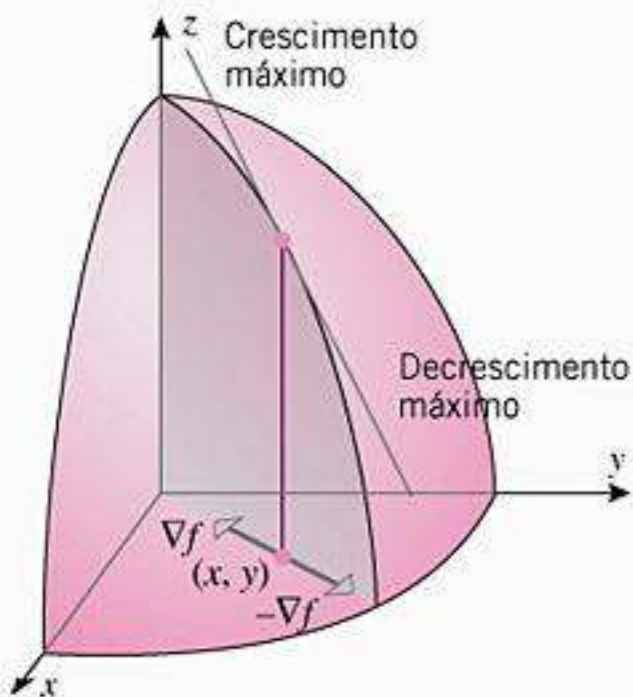


Figura 14.6.5

ometricamente, isso significa que a superfície $z = f(x, y)$ tem sua inclinação mínima em um ponto (x, y) no sentido oposto ao do gradiente e a inclinação mínima é $-\|\nabla f(x, y)\|$ (Figura 14.6.5).

Finalmente, no caso em que $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, segue de (12) que $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em todas as direções no ponto (x, y) . Isto ocorre tipicamente onde a superfície $z = f(x, y)$ tiver um “máximo relativo”, um “mínimo relativo” ou um “ponto de sela”.

Uma análise parecida pode ser feita com funções de três variáveis. Conseqüentemente, temos o resultado a seguir.

14.6.5 TEOREMA *Seja f uma função de duas ou três variáveis e denotemos por P o ponto $P(x_0, y_0)$ ou $P(x_0, y_0, z_0)$, respectivamente. Suponha que f seja diferenciável em P .*

- (a) *Se $\nabla f = \mathbf{0}$ em P , então todas as derivadas direcionais de f em P são nulas.*
- (b) *Se $\nabla f \neq \mathbf{0}$ em P , então dentre todas as possíveis derivadas direcionais de f em P , a derivada em P na direção e sentido de ∇f tem o maior valor. O valor dessa derivada direcional máxima em P é $\|\nabla f\|$.*
- (c) *Se $\nabla f \neq \mathbf{0}$ em P , então dentre todas as possíveis derivadas direcionais de f em P , a derivada em P no sentido oposto ao de ∇f tem o menor valor. O valor dessa derivada direcional mínima em P é $-\|\nabla f\|$.*

► **Exemplo 4** *Seja $f(x, y) = x^2e^y$. Determine o valor máximo de uma derivada direcional em $(-2, 0)$, e determine o vetor unitário na direção e sentido do qual o valor máximo ocorre.*

Solução Uma vez que

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 2xe^y\mathbf{i} + x^2e^y\mathbf{j}$$

o gradiente de f em $(-2, 0)$ é

$$\nabla f(-2, 0) = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Pelo Teorema 14.6.5, o valor máximo da derivada direcional é

$$\|\nabla f(-2, 0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Esse máximo ocorre na direção de $\nabla f(-2, 0)$. O vetor unitário nessa direção é

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(-2, 0)}{\|\nabla f(-2, 0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \blacktriangleleft$$

Qual será o valor mínimo de uma derivada direcional de

$$f(x, y) = x^2e^y$$

em $(-2, 0)$?

■ **GRADIENTES SÃO NORMAIS ÀS CURVAS DE NÍVEL**

Vimos que o gradiente aponta na direção e sentido em que a função cresce mais rapidamente. Vejamos, agora, como essa direção e sentido da taxa de crescimento máxima podem ser determinados a partir do mapa de contornos de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis. Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto na curva de nível $f(x, y) = c$ de f e suponha que essa curva possa ser dada por uma parametrização lisa como

$$x = x(s), \quad y = y(s) \tag{13}$$

onde s é um parâmetro de comprimento de arco. Lembrando da Fórmula (6) da Seção 13.4,

temos que o vetor tangente unitário a (13) é

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j}$$

Como \mathbf{T} dá a direção ao longo da qual f é praticamente constante, é de se esperar que a taxa de variação instantânea de f em relação à distância na direção de \mathbf{T} seja 0. Isto é, estamos esperando que

$$D_{\mathbf{T}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$$

Para mostrar que isso realmente ocorre, derivamos ambos lados da equação $f(x, y) = c$ em relação a s . Supondo que f seja diferenciável em (x, y) , podemos usar a regra da cadeia para obter

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) = 0$$

ou, alternativamente, como

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{T} = 0$$

Portanto, se $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla f(x, y)$ deveria ser normal à curva de nível $f(x, y) = c$ em qualquer ponto (x, y) dessa curva.

Em disciplinas mais avançadas prova-se que se $f(x, y)$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas e se $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, então o gráfico de $f(x, y) = c$ na vizinhança de (x_0, y_0) realmente é uma curva lisa por (x_0, y_0) . Além disso, também sabemos pelo Teorema 14.4.4 que f será diferenciável em (x_0, y_0) . Portanto, temos o resultado seguinte.

Verifique o Teorema 14.6.6 para

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

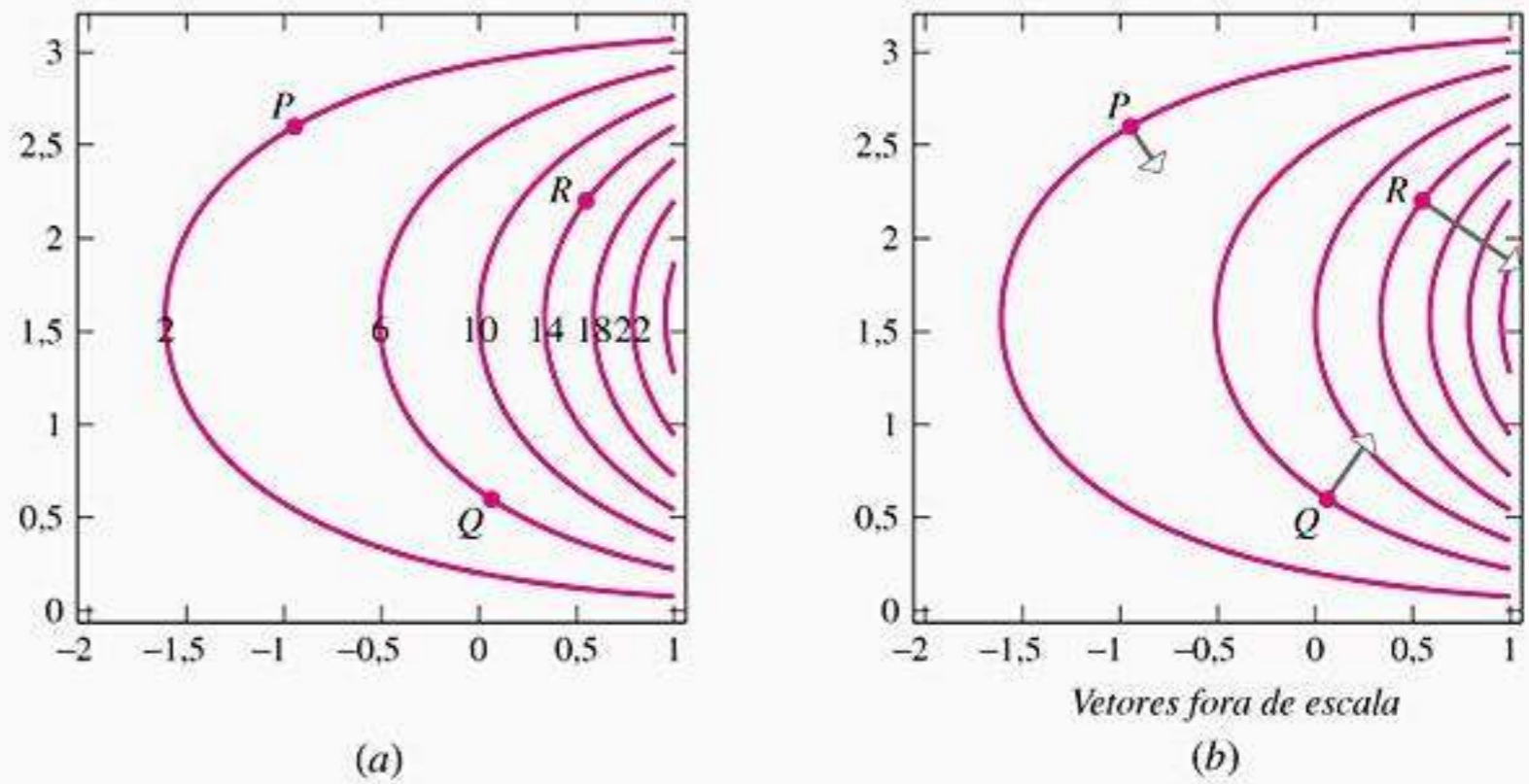
e $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

14.6.6 TEOREMA *Suponha que $z = f(x, y)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas num disco aberto centrado em (x_0, y_0) e que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Então $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva de nível de f por (x_0, y_0) .*

Quando examinamos um mapa de contornos, intuitivamente consideramos a distância entre curvas de nível adjacentes como sendo medida numa direção normal às curvas. Se os contornos corresponderem a valores igualmente espaçados de f , então quanto mais próximas aparentarem estar as curvas de nível, mais rapidamente os valores de f deverão variar nessa direção normal. Segue dos Teoremas 14.6.5 e 14.6.6 que essa taxa de variação de f é dada por $\|\nabla f(x, y)\|$. Assim, quanto mais próximas aparentarem estar as curvas de nível, maior será a magnitude do gradiente de f .

► **Exemplo 5** Na Figura 14.6.6a é dado um mapa de contornos de uma função f . Esboce as direções e sentidos dos vetores gradientes de f nos pontos P , Q e R . Em quais desses três pontos o gradiente tem magnitude máxima? E mínima?

Solução Segue dos Teoremas 14.6.5 e 14.6.6 que as direções e sentidos dos vetores gradientes serão conforme esboçado na Figura 14.6.6b. A partir da densidade das curvas de nível, podemos adivinhar que o gradiente de f tem magnitude máxima em R e mínima em P , com a magnitude em Q estando entre essas duas. ◀



Figuras 14.6.6

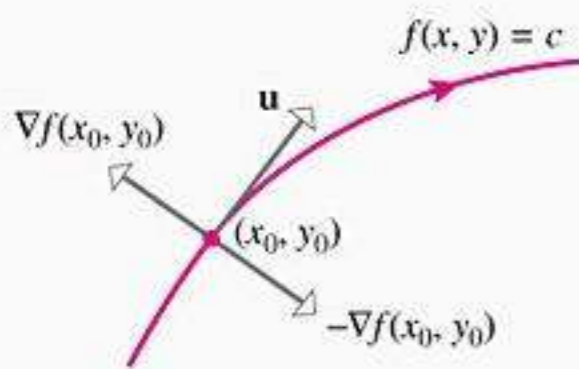


Figura 14.6.7

Se (x_0, y_0) for um ponto da curva de nível $f(x, y) = c$, então a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ nesse ponto na direção e sentido de \mathbf{u} é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

Se \mathbf{u} for tangente à curva de nível em (x_0, y_0) , então $f(x, y)$ não está crescendo nem decrescendo nessa direção, logo $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = 0$. Assim, $\nabla f(x_0, y_0)$, $-\nabla f(x_0, y_0)$ e o vetor tangente \mathbf{u} indicam a direção da inclinação máxima, inclinação mínima, e inclinação zero em um ponto (x_0, y_0) da curva de nível (Figura 14.6.7). Bons esquiadores usam esses fatos intuitivamente para controlar suas velocidades zigzagueando rampas abaixo – eles esquam pela rampa, com seus esquis tangentes a curvas de nível para parar seu movimento de descida, e eles apontam seus esquis rampa abaixo e normais à curva de nível para obter a descida mais rápida.

■ UMA APLICAÇÃO DE GRADIENTES

Há inúmeras aplicações nas quais o movimento de um objeto deve ser controlado de forma que se mova em direção a um fonte de calor. Por exemplo, em aplicações médicas, a operação de certos equipamentos para diagnósticos é projetada para localizar fontes de calor geradas por tumores ou infecções e, em aplicações militares, a trajetória de mísseis que procuram o calor é controlada para procurar e destruir aeronaves inimigas. O exemplo seguinte ilustra como os gradientes são usados para resolver tais problemas.

► **Exemplo 6** Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto $(2, 3)$ de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto (x, y) é

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$$

Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela mover-se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

Solução Suponha que a trajetória esteja representada parametricamente pelas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

onde a partícula está no ponto $(2, 3)$ no instante $t = 0$. Como a partícula se move na direção do aumento máximo da temperatura, a direção do seu movimento no instante t está na direção do gradiente de $T(x, y)$ e, portanto, seu vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ no instante t aponta na direção do

gradiente. Desse modo, existe um escalar k que depende de t tal que

$$\mathbf{v}(t) = k \nabla T(x, y)$$

de modo que temos

$$\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = k(-16x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j})$$

Equacionando os componentes obtemos

$$\frac{dx}{dt} = -16kx, \quad \frac{dy}{dt} = -4ky$$

e dividindo para eliminar k , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4ky}{-16kx} = \frac{y}{4x}$$

Assim, podemos obter a trajetória resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4x} = 0, \quad y(2) = 3$$

A equação diferencial é de primeira ordem separável e, portanto, pode ser resolvida separando as variáveis ou pelo método dos fatores integrantes discutido na Seção 9.1. Deixamos a cargo do leitor mostrar que a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{3}{\sqrt[4]{2}} x^{1/4}$$

O gráfico da trajetória e o mapa de contornos da função temperatura são mostrados na Figura 14.6.8. ◀

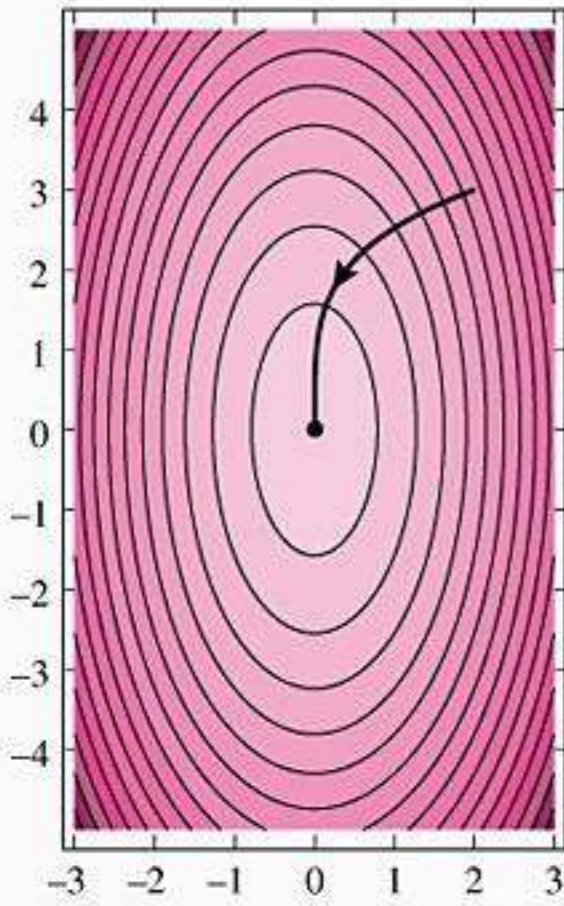


Figura 14.6.8

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.6 (Ver página 989 para respostas.)

- O gradiente de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ no ponto $(1, 1, 1)$ é _____.
- Suponha que a função diferenciável $f(x, y)$ tenha a propriedade de que

$$f\left(2 + \frac{s\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{s}{2}\right) = 3se^s$$
 A derivada direcional de f na direção e sentido de

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$
 em $(2, 1)$ é _____.
- Se o gradiente de $f(x, y)$ na origem for $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, então a derivada direcional de f na direção e sentido de $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ na origem é _____. A inclinação da reta tangente à curva de nível de f pela origem no ponto $(0, 0)$ é _____.
- Se o gradiente de $f(x, y, z)$ em $(1, 2, 3)$ for $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, então o valor máximo das derivadas direcionais de f em $(1, 2, 3)$ é _____ e o mínimo é _____.

EXERCÍCIOS 14.6 Recurso Gráfico CAS

1-8 Encontre $D_{\mathbf{u}}f$ em P .

- $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}$; $P(3, 1)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
- $f(x, y) = e^{2xy}$; $P(4, 0)$; $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
- $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y)$; $P(0, 0)$; $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$
- $f(x, y) = \frac{cx + dy}{x - y}$; $P(3, 4)$; $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$
- $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3$; $P(2, -1, 1)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$
- $f(x, y, z) = ye^{xz} + z^2$; $P(0, 2, 3)$; $\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$
- $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$; $P(-1, 2, 4)$; $\mathbf{u} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$

8. $f(x, y, z) = \text{sen } xyz$; $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi)$;
 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$

9-18 Encontre a derivada direcional de f em P na direção de \mathbf{a} .

- 9. $f(x, y) = 4x^3y^2$; $P(2, 1)$; $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
- 10. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^3$; $P(-2, 0)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
- 11. $f(x, y) = y^2 \ln x$; $P(1, 4)$; $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
- 12. $f(x, y) = e^x \cos y$; $P(0, \pi/4)$; $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
- 13. $f(x, y) = \text{arc tg } (y/x)$; $P(-2, 2)$; $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$
- 14. $f(x, y) = xe^y - ye^x$; $P(0, 0)$; $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
- 15. $f(x, y, z) = x^3z - yx^2 + z^2$; $P(2, -1, 1)$;
 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- 16. $f(x, y, z) = y - \sqrt{x^2 + z^2}$; $P(-3, 1, 4)$;
 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
- 17. $f(x, y, z) = \frac{z-x}{z+y}$; $P(1, 0, -3)$; $\mathbf{a} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- 18. $f(x, y, z) = e^{x+y+3z}$; $P(-2, 2, -1)$; $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

19-22 Encontre a derivada direcional de f em P na direção e sentido de um vetor que faça, no sentido anti-horário, um ângulo θ com o eixo x positivo.

- 19. $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P(1, 4)$; $\theta = \pi/3$
- 20. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$; $P(-1, -2)$; $\theta = \pi/2$
- 21. $f(x, y) = \text{tg } (2x + y)$; $P(\pi/6, \pi/3)$; $\theta = 7\pi/4$
- 22. $f(x, y) = \text{senh } x \cosh y$; $P(0, 0)$; $\theta = \pi$
- 23. Determine a derivada direcional de

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

em $P(1, 0)$ na direção e sentido de P a $Q(-1, -1)$.

- 24. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = e^{-x} \sec y$ em $P(0, \pi/4)$ na direção e sentido da origem.
- 25. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}e^y$ em $P(1, 1)$ na direção e sentido do eixo y negativo.
- 26. Seja

$$f(x, y) = \frac{y}{x+y}$$

Determine um vetor unitário \mathbf{u} para o qual $D_{\mathbf{u}}f(2, 3) = 0$.

- 27. Determine a derivada direcional de

$$f(x, y, z) = \frac{y}{x+z}$$

em $P(2, 1, -1)$ na direção e sentido de P a $Q(-1, 2, 0)$.

- 28. Determine a derivada direcional da função

$$f(x, y, z) = x^3y^2z^5 - 2xz + yz + 3x$$

em $P(-1, -2, 1)$ na direção e sentido do eixo z negativo.

ENFOCANDO CONCEITOS

- 29. Suponha que $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = -5$ e $D_{\mathbf{v}}f(1, 2) = 10$, onde $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Determine
 - (a) $f_x(1, 2)$
 - (b) $f_y(1, 2)$
 - (c) a derivada direcional de f em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.
- 30. Dado que $f_x(-5, 1) = -3$ e $f_y(-5, 1) = 2$, determine a derivada direcional de f em $P(-5, 1)$ na direção e sentido do vetor de P a $Q(-4, 3)$.
- 31. A figura abaixo mostra algumas curvas de nível de uma função não-especificada $f(x, y)$. Qual dos três vetores mostrados na figura é mais provavelmente o gradiente ∇f ? Explique.
- 32. A figura abaixo mostra algumas curvas de nível de uma função não-especificada $f(x, y)$. Dos gradientes em P e Q qual, provavelmente, tem o maior comprimento? Explique.

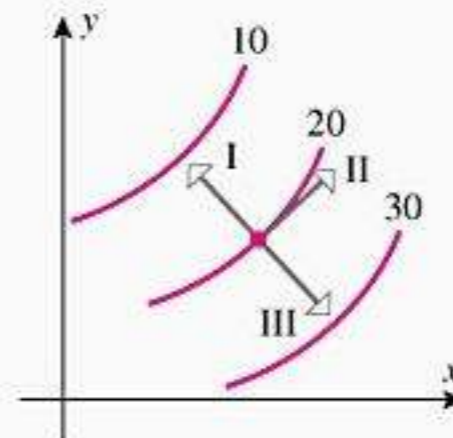


Figura Ex-31

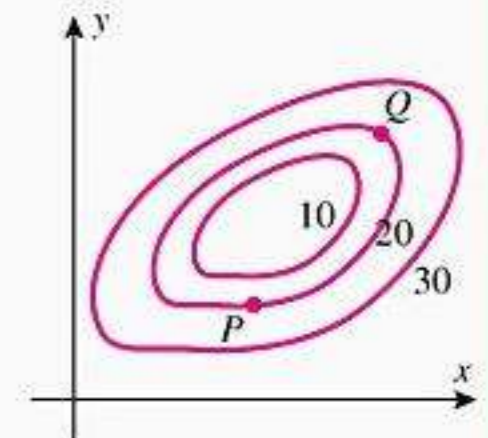


Figura Ex-32

33-36 Encontre ∇z ou ∇w .

- 33. $z = 4x - 8y$
- 34. $z = e^{-3y} \cos 4x$
- 35. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- 36. $w = e^{-5x} \sec x^2yz$

37-40 Encontre o gradiente de f no ponto indicado.

- 37. $f(x, y) = (x^2 + xy)^3$; $(-1, -1)$
- 38. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$; $(3, 4)$
- 39. $f(x, y, z) = y \ln(x + y + z)$; $(-3, 4, 0)$
- 40. $f(x, y, z) = y^2z \text{tg}^3 x$; $(\pi/4, -3, 1)$

41-44 Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa por P e desenhe o vetor gradiente em P .

- 41. $f(x, y) = 4x - 2y + 3$; $P(1, 2)$
- 42. $f(x, y) = y/x^2$; $P(-2, 2)$
- 43. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P(-2, 0)$
- 44. $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P(2, -1)$
- 45. Determine um vetor unitário \mathbf{u} que é normal em $P(1, -2)$ à curva de nível de $f(x, y) = 4x^2y$ que passa por P .
- 46. Determine um vetor unitário \mathbf{u} que é normal em $P(2, -3)$ à curva de nível de $f(x, y) = 3x^2y - xy$ que passa por P .

47-54 Encontre um vetor unitário na direção do qual f cresce mais rapidamente em P e obtenha a taxa de variação de f em P nessa direção.

- 47. $f(x, y) = 4x^3y^2; P(-1, 1)$
- 48. $f(x, y) = 3x - \ln y; P(2, 4)$
- 49. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; P(4, -3)$
- 50. $f(x, y) = \frac{x}{x + y}; P(0, 2)$
- 51. $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1; P(1, 1, -1)$
- 52. $f(x, y, z) = \sqrt{x - 3y + 4z}; P(0, -3, 0)$
- 53. $f(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y^2}; P(1, 2, -2)$
- 54. $f(x, y, z) = \arctan\left(\frac{x}{y + z}\right); P(4, 2, 2)$

55-60 Encontre um vetor unitário na direção do qual f decresce mais rapidamente em P e obtenha a taxa de variação de f em P nessa direção.

- 55. $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2; P(-1, -3)$
- 56. $f(x, y) = e^{xy}; P(2, 3)$
- 57. $f(x, y) = \cos(3x - y); P(\pi/6, \pi/4)$
- 58. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x - y}{x + y}}; P(3, 1)$
- 59. $f(x, y, z) = \frac{x + z}{z - y}; P(5, 7, 6)$
- 60. $f(x, y, z) = 4e^{yz} \cos z; P(0, 1, \pi/4)$

ENFOCANDO CONCEITOS

- 61. Dado que $\nabla f(4, -5) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine a derivada direcional da função f no ponto $(4, -5)$ na direção e sentido de $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
- 62. Dado que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = -2$, determine \mathbf{u} (duas respostas).
- 63. A figura abaixo mostra algumas curvas de nível de uma função não-especificada $f(x, y)$.
 - (a) Use a informação disponível para aproximar o comprimento do vetor $\nabla f(1, 2)$ e esboce a aproximação. Explique como você aproximou o comprimento e determinou a direção e sentido do vetor.
 - (b) Esboce uma aproximação do vetor $-\nabla f(4, 4)$.

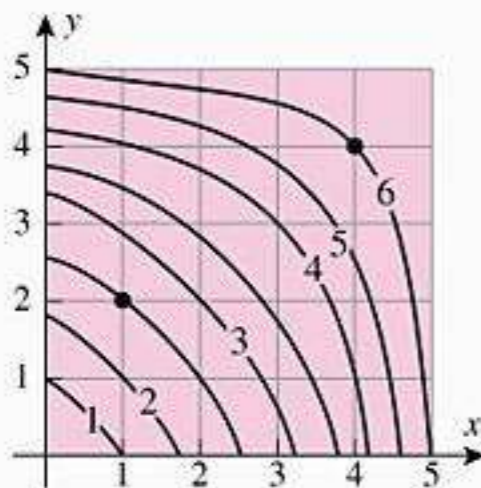


Figura Ex-63

- 64. A figura a seguir mostra um mapa topográfico de uma montanha e um ponto P em sua base. Suponha que queiramos escalar essa montanha a partir de P em direção ao topo da

montanha, de tal forma que estejamos sempre subindo na direção da inclinação mais íngreme. Esboce a projeção desse caminho sobre o mapa de contornos. Isso é chamado de **caminho de subida mais íngreme**. Explique como pode ser determinado esse caminho.

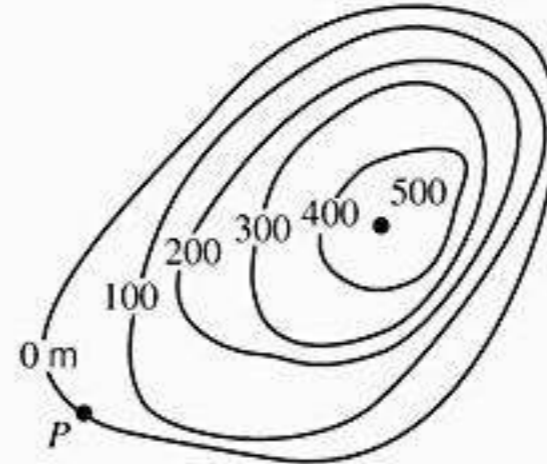


Figura Ex-64

- 65. Seja $z = 3x^2 - y^2$. Determine todos os pontos nos quais $\|\nabla z\| = 6$.
- 66. Dado que $z = 3x + y^2$, determine $\nabla\|\nabla z\|$ no ponto $(5, 2)$.
- 67. Uma partícula move-se ao longo de uma trajetória C dada pelas equações $x = t$ e $y = -t^2$. Se $z = x^2 + y^2$, determine dz/ds ao longo de C no instante em que a partícula está no ponto $(2, -4)$.
- 68. A temperatura em graus Celsius em um ponto (x, y) de uma placa de metal no plano xy é

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$
 - (a) Encontre a taxa de variação da temperatura em $(1, 1)$ na direção e sentido de $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
 - (b) Uma formiga em $(1, 1)$ precisa andar na direção na qual a temperatura baixe mais rapidamente. Encontre um vetor unitário nessa direção.
- 69. Se o potencial elétrico em um ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ então o **vetor de intensidade elétrica** no ponto (x, y) é $\mathbf{E} = -\nabla V(x, y)$. Suponha que $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$.
 - (a) Determine o vetor de intensidade elétrica em $(\pi/4, 0)$.
 - (b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor \mathbf{E} .
- 70. Numa certa montanha, a elevação z acima de um ponto (x, y) num plano xy ao nível do mar, é de $z = 2000 - 0,02x^2 - 0,04y^2$, onde x, y e z estão dados em metros. O eixo x positivo aponta para o Leste e o eixo y positivo para o Norte. Um montanhista está no ponto $(-20, 5, 1991)$.
 - (a) Se o montanhista utilizar uma bússola para caminhar em direção ao Oeste, ele estará começando a subir ou descer?
 - (b) Se o montanhista utilizar uma bússola para caminhar em direção ao Nordeste, ele estará subindo ou descendo? A que taxa?
 - (c) Em qual direção da bússola o montanhista deveria começar a caminhar para percorrer uma curva de nível (duas respostas)?
- 71. Dado que a derivada direcional de $f(x, y, z)$ no ponto $(3, -2, 1)$ e na direção de $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ é -5 e que $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, determine $\nabla f(3, -2, 1)$.
- 72. A temperatura (em graus Celsius) em um ponto (x, y, z) de um sólido metálico é

$$T(x, y, z) = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

- (a) Encontre a taxa de variação da temperatura em relação à distância em (1, 1, 1) na direção da origem.
- (b) Encontre a direção na qual a temperatura eleva-se mais rapidamente no ponto (1, 1, 1). (Expresse a sua resposta como um vetor unitário.)
- (c) Encontre a taxa na qual a temperatura eleva-se movendo de (1, 1, 1) na direção obtida na parte (b).

73. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (a) Mostre que $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- (b) Mostre que $\nabla f(r) = f'(r)\nabla r = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$

74. Use a fórmula da parte (b) do Exercício 55 para determinar

- (a) $\nabla f(r)$ se $f(r) = re^{-3r}$
- (b) $f(r)$ se $\nabla f(r) = 3r^2\mathbf{r}$ e $f(2) = 1$.

75. Seja \mathbf{u}_r um vetor unitário cujo ângulo no sentido anti-horário com o eixo x positivo é θ , e seja \mathbf{u}_θ um vetor unitário a 90° no sentido anti-horário de \mathbf{u}_r . Mostre que se $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$$

[Sugestão: use a parte (c) do Exercício 63, Seção 14.5.]

76. Prove: Se f e g forem diferenciáveis, então

- (a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- (b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ (c constante)
- (c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- (d) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
- (e) $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$.

77-78 Uma partícula que busca o calor está localizada no ponto P de um plano de metal, cuja temperatura no ponto (x, y) é $T(x, y)$. Determine as equações paramétricas para a trajetória da partícula se ela se move continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

77. $T(x, y) = 5 - 4x^2 - y^2$; $P(1, 4)$

78. $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$; $P(5, 3)$

79. Use um recurso gráfico para gerar a trajetória da partícula junto com alguma curva de nível representativa da função temperatura do Exercício 77.

80. Use um recurso gráfico para gerar a trajetória da partícula junto com alguma curva de nível representativa da função temperatura do Exercício 78.

81. (a) Use um CAS para fazer o gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

(b) Em quantos pontos será verdade que $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ para todos vetores unitários \mathbf{u} ?

(c) Use um CAS para determinar ∇f .

(d) Use um CAS para resolver a equação $\nabla f(x, y) = 0$ para x e y .

(e) Use o resultado da parte (d) junto com o Teorema 14.6.5 para verificar sua conjectura na parte (b).

82. Prove: Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são diferenciáveis em t e se $z = f(x, y)$ é diferenciável no ponto $(x(t), y(t))$, então

$$\frac{dz}{dt} = \nabla z \cdot \mathbf{r}'(t)$$

onde $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$.

83. Prove: Se f , f_x e f_y são contínuas sobre uma região circular e se $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ em toda a região, então $f(x, y)$ é constante na região. [Sugestão: ver Exercício 75, Seção 14.5.]

84. Prove: Se a função f for diferenciável em um ponto (x, y) e se $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em duas direções não-paralelas, então $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em todas as direções.

85. Dado que as equações $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ e $f(u, v, w)$ são diferenciáveis, mostre que

$$\nabla f(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.6

1. (1, 2, 3) 2. 3 3. 10; $-\frac{3}{4}$ 4. 3; -3

14.7 PLANOS TANGENTES E VETORES NORMAIS

Nesta seção, discutiremos planos tangentes a superfícies no espaço tridimensional e nos ocuparemos em responder três questões básicas: O que é um plano tangente? Quando existem planos tangentes? Como encontrar equações de planos tangentes?

PLANOS TANGENTES

Lembre que na Seção 14.4 observamos que se uma função $f(x, y)$ for diferenciável num ponto (x_0, y_0) , então é de se esperar que a superfície $z = f(x, y)$ tenha um plano tangente não vertical no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Também vimos na Seção 14.4 que a função linear

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

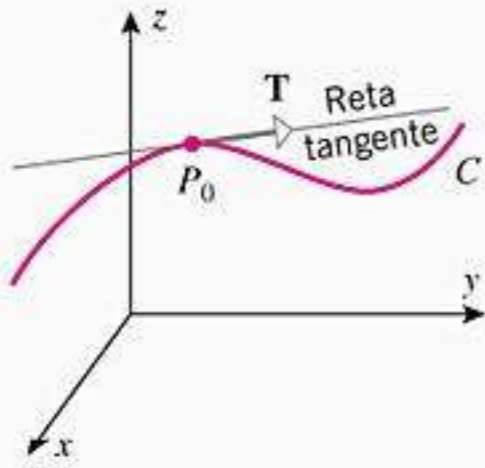


Figura 14.7.1

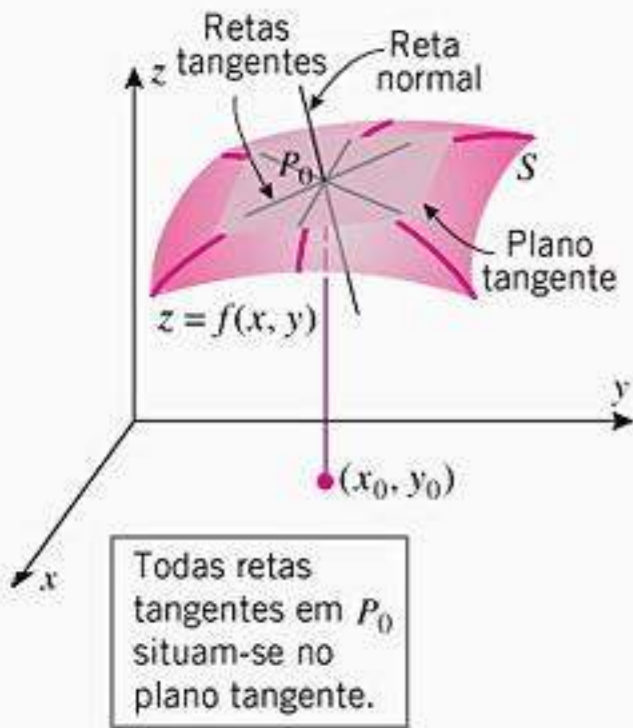


Figura 14.7.2

aproxima bem a função $f(x, y)$ perto de (x_0, y_0) e que o gráfico de L é um plano não vertical que passa pelo ponto P_0 . Isso sugere que o gráfico de L seja o plano tangente que procuramos. Agora estamos em condições de fornecer alguma justificativa *geométrica* para essa conclusão.

Nosso conceito de plano tangente a uma superfície $S: z = f(x, y)$ será baseado na noção mais elementar de reta tangente a uma curva C no espaço tridimensional (Figura 14.7.1). Intuitivamente, percebemos que um plano tangente a S num ponto P_0 deva ser composto das retas tangentes em P_0 de todas as curvas em S que passam por P_0 (Figura 14.7.2). O teorema a seguir mostra que, nesse sentido geométrico, o gráfico da aproximação linear local realmente é tangente à superfície $z = f(x, y)$.

14.7.1 TEOREMA *Suponha que a função $f(x, y)$ seja diferenciável em (x_0, y_0) e seja $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o ponto correspondente no gráfico de f . Seja T o gráfico da aproximação linear local*

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (1)$$

de f em (x_0, y_0) . Então uma reta é tangente em P_0 a uma curva C na superfície $z = f(x, y)$ se, e somente se, a reta está contida em T .

DEMONSTRAÇÃO O gráfico T de (1) é o plano

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

para o qual

$$\mathbf{n} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

é um vetor normal (verifique). Seja C uma curva na superfície $z = f(x, y)$ que passa por P_0 e suponha que C seja parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

com

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad f(x_0, y_0) = z(t_0)$$

A reta l tangente a C em P_0 é, então, paralela ao vetor

$$\mathbf{r}' = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$$

onde estamos supondo que $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ (Definição 13.2.7). Para provar que l está contida em T , basta provar que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' = 0$. Como C está no gráfico de f , temos

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

Usando a regra da cadeia para calcular a derivada de $z(t)$ em t_0 , obtemos

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0)$$

ou, equivalentemente,

$$(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}) = 0$$

Mas isso é simplesmente a equação $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' = 0$, o que completa a prova de que l está contida em T .

Reciprocamente, seja $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ o vetor diretor de uma reta l por P_0 contida em T . Então

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = a_1 f_x(x_0, y_0) + a_2 f_y(x_0, y_0) - a_3$$

o que implica que

$$a_3 = a_1 f_x(x_0, y_0) + a_2 f_y(x_0, y_0)$$

Seja C a curva de equações paramétricas

$$x = x(t) = x_0 + a_1 t, \quad y = y(t) = y_0 + a_2 t, \quad z = z(t) = f(x(t), y(t))$$

A curva C passa por P_0 quando $t = 0$ e a reta tangente a C em P_0 tem vetor diretor

$$\mathbf{r}' = x'(0)\mathbf{i} + y'(0)\mathbf{j} + z'(0)\mathbf{k} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + z'(0)\mathbf{k}$$

Segue pela regra da cadeia que

$$z'(0) = a_1 f_x(x_0, y_0) + a_2 f_y(x_0, y_0) = a_3$$

e portanto

$$\mathbf{r}' = x'(0)\mathbf{i} + y'(0)\mathbf{j} + z'(0)\mathbf{k} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{a}$$

Assim, o vetor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ é o vetor diretor \mathbf{r}' da reta tangente em P_0 de C . Portanto, essa reta é l , o que completa a prova de que l é tangente em P_0 à curva C na superfície $z = f(x, y)$. ■

Use o Teorema 14.7.1 para mostrar que se uma curva estiver contida num plano, então o mesmo ocorre com qualquer reta tangente a essa curva.

A partir do Teorema 14.7.1 estabelecemos a definição seguinte.

14.7.2 DEFINIÇÃO Se $f(x, y)$ for diferenciável no ponto (x_0, y_0) , então o *plano tangente* à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é o plano

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2)$$

A reta pelo ponto P_0 paralela ao vetor $\mathbf{n} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é perpendicular ao plano tangente (2). Essa reta é denominada *reta normal* à superfície $z = f(x, y)$ em P_0 . Segue que essa reta normal pode ser expressa parametricamente como

$$x = x_0 + f_x(x_0, y_0)t, \quad y = y_0 + f_y(x_0, y_0)t, \quad z = f(x_0, y_0) - t \quad (3)$$

► **Exemplo 1** Encontre uma equação do plano tangente e equações paramétricas da reta normal à superfície $z = x^2y$ no ponto $(2, 1, 4)$.

Solução As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy, & f_y(x, y) &= x^2 \\ f_x(2, 1) &= 4, & f_y(2, 1) &= 4 \end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente tem equação

$$z = 4 + 4(x - 2) + 4(y - 1) = 4x + 4y - 8$$

e a reta normal tem equações

$$x = 2 + 4t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 4 - t \quad \blacktriangleleft$$

■ PLANOS TANGENTES E DIFERENCIAIS TOTAIS

Lembre que, para uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis, a aproximação por diferenciais é

$$\Delta z = \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx dz = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

O plano tangente fornece uma interpretação geométrica dessa aproximação. Vemos na Figura 14.7.3 que Δz é a variação de z ao longo da superfície $z = f(x, y)$ do ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ao ponto $P(x, y, f(x, y))$ e dz é a variação de z ao longo do plano tangente de P_0 a $Q(x, y, L(x, y))$. O pequeno deslocamento vertical em (x, y) entre a superfície e o plano representa o erro da aproximação linear local de f em (x_0, y_0) . Vimos

Observe que o plano tangente na Figura 14.7.3 é análogo ao plano tangente na Figura 14.7.2.

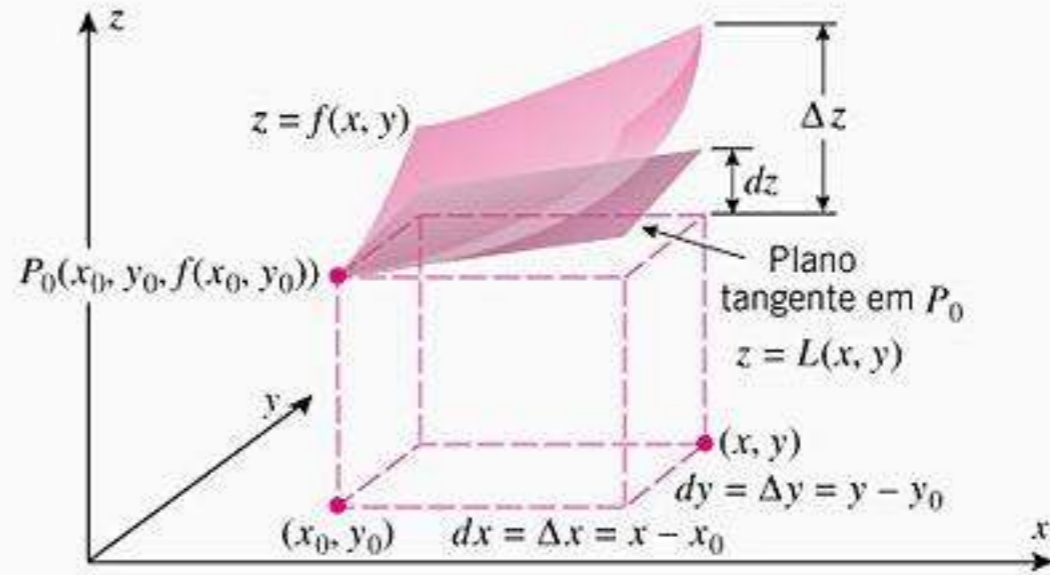


Figura 14.7.3

que, perto de (x_0, y_0) , esse erro tem uma magnitude muito menor do que a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) .

■ PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Passamos a considerar o problema de encontrar planos tangentes a superfícies que possam ser representadas implicitamente por equações da forma $F(x, y, z) = c$. Vamos supor que sejam contínuas as derivadas parciais de primeira ordem de F . Essa hipótese não impõe sérias restrições às funções que costumamos encontrar e tem uma consequência geométrica importante. Em disciplinas avançadas prova-se que se F tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ então, perto de $P_0(x_0, y_0, z_0)$, o gráfico de $F(x, y, z) = c$ realmente é o gráfico de uma função implicitamente definida de uma (pelo menos) das seguintes formas:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z) \tag{4}$$

Isso garante que perto de P_0 o gráfico de $F(x, y, z) = c$ realmente é uma “superfície” (em vez de algum conjunto exótico de pontos do espaço) e segue do Teorema 14.7.1 que existe um plano tangente à superfície no ponto P_0 .

Felizmente, não precisamos resolver a equação $F(x, y, z) = c$ para uma das funções de (4) para poder encontrar o plano tangente em P_0 . (Na prática, isso pode até ser impossível.) Sabemos do Teorema 14.7.1 que uma reta por P_0 está no plano tangente se, e somente se, é uma reta tangente em P_0 a uma curva C na superfície $F(x, y, z) = c$. Suponha que C seja parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

com

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0)$$

A reta l tangente a C em P_0 é, então, paralela ao vetor

$$\mathbf{r}' = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$$

onde estamos supondo que $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ (Definição 13.2.7). Como C está na superfície $F(x, y, z) = c$, temos

$$c = F(x(t), y(t), z(t)) \tag{5}$$

Calculando a derivada em t_0 de ambos lados de (5), pela regra da cadeia obtemos

$$0 = F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)$$

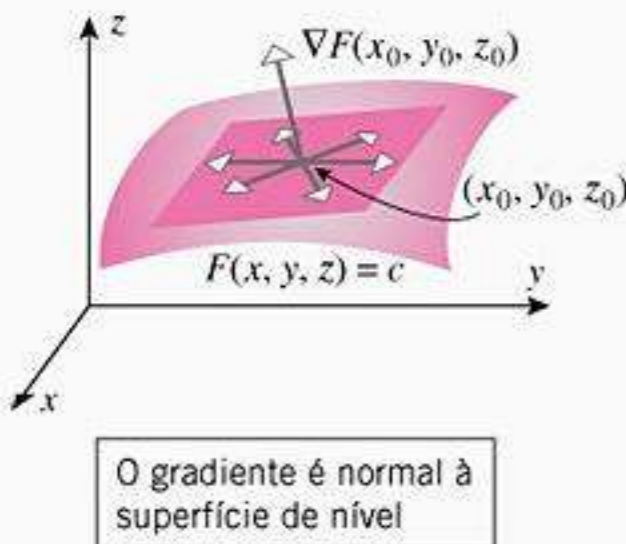
Podemos escrever essa equação em forma vetorial como

$$0 = (F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}) \cdot (x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k})$$

ou

$$0 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'$$

Segue que se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é normal à reta l . Concluímos que se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é normal a qualquer reta por P_0 que esteja contida no plano tangente à superfície $F(x, y, z) = c$ em P_0 . Segue que $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é um vetor normal a esse plano e portanto é normal à superfície de nível (Figura 14.7.4).



O gradiente é normal à superfície de nível

Figura 14.7.4

Agora podemos expressar a equação do plano tangente à superfície de nível em P_0 na forma ponto-normal como

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

[ver Fórmula (3) da Seção 12.6]. A partir dessa análise temos o teorema seguinte.

O Teorema 14.7.3 pode ser visto como uma extensão do Teorema 14.6.6, de curvas para superfícies.

14.7.3 TEOREMA *Suponha que $F(x, y, z)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas e seja $c = F(x_0, y_0, z_0)$. Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é um vetor normal à superfície $F(x, y, z) = c$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o plano tangente a essa superfície em P_0 é o plano dado pela equação*

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (6)$$

► **Exemplo 2** Encontre uma equação do plano tangente ao elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$ no ponto $(1, 2, 1)$ e determine o ângulo agudo que esse plano faz com o plano xy .

Solução O elipsóide é uma superfície de nível da função $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$, portanto começamos determinando o gradiente dessa função no ponto $(1, 2, 1)$. Os cálculos são

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1, 2, 1) = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim,

$$F_x(1, 2, 1) = 2, \quad F_y(1, 2, 1) = 16, \quad F_z(1, 2, 1) = 2$$

e portanto, de (6), a equação do plano tangente é

$$2(x - 1) + 16(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 8y + z = 18$$

Para determinar o ângulo agudo θ entre o plano tangente e o plano xy , aplicaremos a Fórmula (9) da Seção 12.6 com $\mathbf{n}_1 = \nabla F(1, 2, 1) = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$. Disso resulta

$$\cos \theta = \frac{|\nabla F(1, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(1, 2, 1)\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{2}{(2\sqrt{66})(1)} = \frac{1}{\sqrt{66}}$$

Assim,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{66}}\right) \approx 83^\circ$$

(Figura 14.7.5). ◀

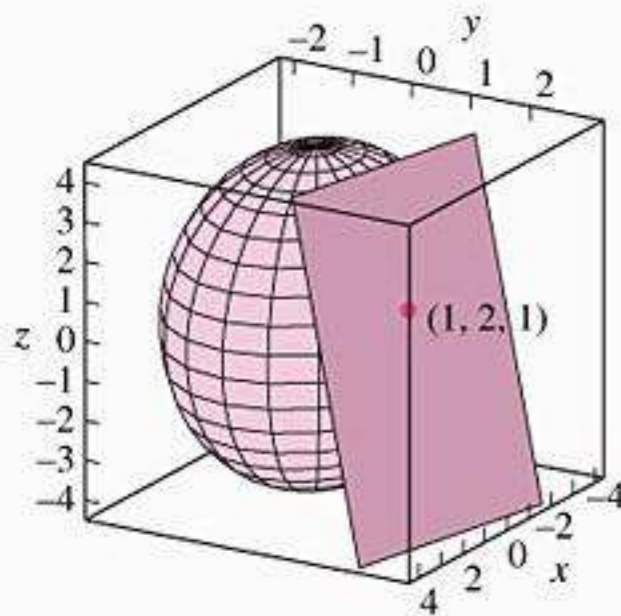


Figura 14.7.5

■ USANDO GRADIENTES PARA ENCONTRAR RETAS TANGENTES A INTERSEÇÕES DE SUPERFÍCIES

Em geral, a interseção de duas superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ será uma curva no espaço tridimensional. Se (x_0, y_0, z_0) for um ponto nessa curva, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ será normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ em (x_0, y_0, z_0) e $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ será normal à superfície $G(x, y, z) = 0$ em (x_0, y_0, z_0) . Assim, se a curva de interseção puder ser dada por uma parametrização lisa, então seu vetor tangente unitário \mathbf{T} em (x_0, y_0, z_0) será ortogonal a ambos $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ (Figura 14.7.6). Conseqüentemente, se

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$$

então esse produto vetorial será paralelo a \mathbf{T} e, portanto, será tangente à curva de interseção. Esse vetor tangente pode ser usado para determinar a direção da reta tangente à curva de interseção no ponto (x_0, y_0, z_0) .

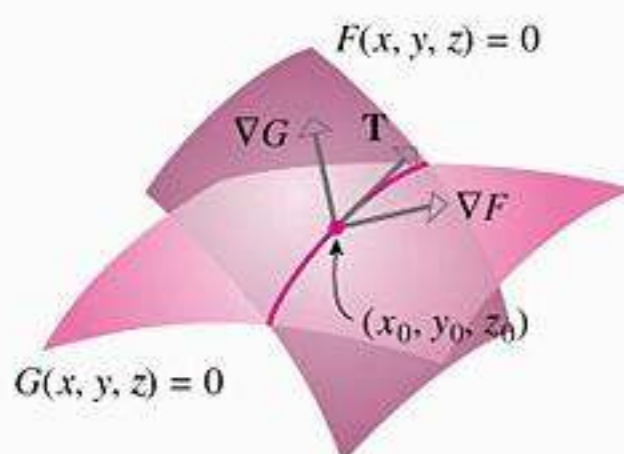


Figura 14.7.6

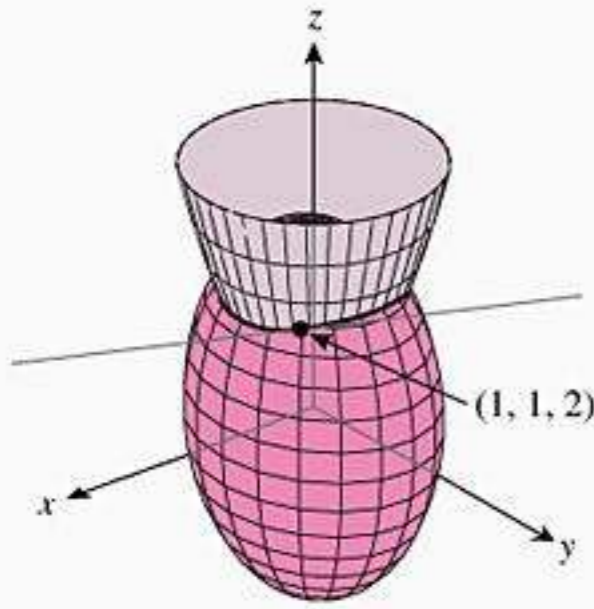


Figura 14.7.7

► **Exemplo 3** Obtenha as equações paramétricas da reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(1, 1, 2)$ (Figura 14.7.7).

Solução Começamos reescrevendo as equações das superfícies como

$$x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{e} \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e tomamos

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9$$

Precisaremos dos gradientes dessas funções no ponto $(1, 1, 2)$. Os cálculos são

$$\nabla F(x, y, z) = 2xi + 2yj - k, \quad \nabla G(x, y, z) = 6xi + 4yj + 2zk$$

$$\nabla F(1, 1, 2) = 2i + 2j - k, \quad \nabla G(1, 1, 2) = 6i + 4j + 4k$$

Assim, o vetor tangente em $(1, 1, 2)$ à curva de interseção é

$$\nabla F(1, 1, 2) \times \nabla G(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Como qualquer múltiplo escalar deste vetor fará exatamente o mesmo, podemos multiplicar por $\frac{1}{2}$ para reduzir o tamanho dos coeficientes e usar o vetor $6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ para determinar a direção da reta tangente. Esse vetor e o ponto $(1, 1, 2)$ fornecem as equações paramétricas

$$x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 7t, \quad z = 2 - 2t \quad \blacktriangleleft$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.7** (Ver página 996 para respostas.)

- Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(3, 1)$ com $f(3, 1) = 4$, $f_x(3, 1) = 2$ e $f_y(3, 1) = -3$. Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, 4)$ é _____; $x = \text{_____}$, $y = \text{_____}$, $z = \text{_____}$ são equações paramétricas da reta normal ao gráfico de f no ponto $(3, 1, 4)$.
- Uma equação do plano tangente ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto $(2, 4, 8)$ é _____; as equações paramétricas da reta normal ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto $(2, 4, 8)$ são $x = \text{_____}$, $y = \text{_____}$, $z = \text{_____}$.
- Suponha que $f(1, 0, -1) = 2$ e que $f(x, y, z)$ seja diferenciável em $(1, 0, -1)$ com $\nabla f(1, 0, -1) = \langle 2, 1, 1 \rangle$. Uma equação do plano tangente à superfície de nível $f(x, y, z) = 2$ no ponto $(1, 0, -1)$ é _____; as equações paramétricas da reta normal à superfície de nível pelo ponto $(1, 0, -1)$ são $x = \text{_____}$, $y = \text{_____}$, $z = \text{_____}$.
- A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e o plano $x + y + z = 5$ intersectam num círculo que passa pelo ponto $(2, 1, 2)$. Equações paramétricas da reta normal a esse círculo em $(2, 1, 2)$ são $x = \text{_____}$, $y = \text{_____}$, $z = \text{_____}$.

EXERCÍCIOS 14.7 [C] CAS

1-8 Encontre uma equação para o plano tangente e equações paramétricas para a reta normal à superfície no ponto P .

- $z = 4x^3y^2 + 2y$; $P(1, -2, 12)$
- $z = \frac{1}{2}x^7y^{-2}$; $P(2, 4, 4)$
- $z = xe^{-y}$; $P(1, 0, 1)$
- $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-1, 0, 0)$
- $z = e^{3y} \sin 3x$; $P(\pi/6, 0, 1)$
- $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $P(4, 9, 5)$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $P(-3, 0, 4)$
- $x^2y - 4z^2 = -7$; $P(-3, 1, -2)$

ENFOCANDO CONCEITOS

9. Encontre todos os pontos da superfície nos quais o plano tangente é horizontal.

- (a) $z = x^3 y^2$
- (b) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

10. Encontre um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ no qual o plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.

11. Encontre um ponto da superfície $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ no qual o plano tangente é perpendicular à reta $x = 2 - 3t$, $y = 7 + 8t$, $z = 5 - t$.

12. Mostre que as superfícies

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$$

intersectam em $(3, 4, 5)$ e têm um plano tangente em comum nesse ponto.

13. (a) Encontre todos os pontos de interseção da reta

$$x = -1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2t + 7$$

e a superfície

$$z = x^2 + y^2$$

(b) Em cada ponto de interseção, determine o cosseno do ângulo agudo entre a reta dada e a reta normal à superfície.

14. Mostre que se f é diferenciável e $z = xf(x/y)$, então todos os planos tangentes ao gráfico dessa equação passam pela origem.

15. Considere o elipsóide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.

- (a) Use o método do Exemplo 2 para encontrar uma equação do plano tangente ao elipsóide no ponto $(2, 2, 1)$.
- (b) Determine equações paramétricas da reta que é normal ao elipsóide no ponto $(2, 2, 1)$.
- (c) Determine o ângulo agudo que o plano tangente no ponto $(2, 2, 1)$ faz com o plano xy .

16. Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$.

- (a) Use o método do Exemplo 2 para encontrar uma equação do plano tangente à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.
- (b) Determine equações paramétricas da reta que é normal à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.
- (c) Determine o ângulo agudo que o plano tangente no ponto $(2, -1, 1)$ faz com o plano xy .

17-18 Encontre dois vetores unitários que são normais à superfície dada no ponto P .

17. $\sqrt{\frac{z+x}{y-1}} = z^2$; $P(3, 5, 1)$

18. $\sin xz - 4 \cos yz = 4$; $P(\pi, \pi, 1)$

19. Mostre que toda reta que é normal à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

passa pela origem.

20. Encontre todos os pontos do elipsóide $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x - 2y + 3z = 5$.

21. Encontre todos os pontos da superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que passa por $P(1, -2, 1)$ e $Q(4, 0, -1)$.

22. Mostre que o elipsóide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 24 = 0$$

têm um plano tangente em comum no ponto $(1, 1, 2)$.

23. Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(1, -1, 2)$.

24. Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do plano $x + 2y + 2z = 20$ no ponto $(4, 3, 5)$.

25. Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção dos cilindros $x^2 + z^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 25$ no ponto $(3, -3, 4)$.

26. A figura abaixo mostra a interseção das superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $4x + 2y - z = 0$

- (a) Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção no ponto $(0, 2, 4)$.
- (b) Use um CAS para gerar uma reprodução razoável da figura. Não é necessário gerar as cores, mas tente obter um ponto de vista similar.

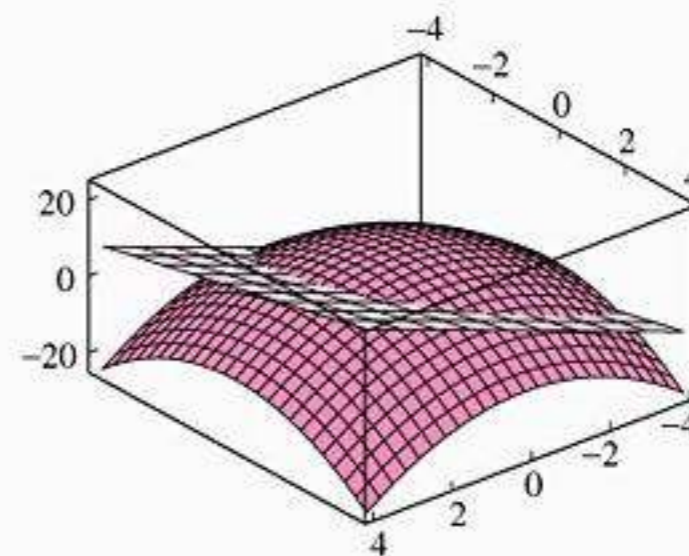


Figura Ex-26

27. Mostre que a equação do plano que é tangente ao elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita na forma

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

28. Mostre que a equação do plano que é tangente ao parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita na forma

$$z + z_0 = \frac{2x_0 x}{a^2} + \frac{2y_0 y}{b^2}$$

29. Prove: Se as superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ intersectam em $P(x_0, y_0, z_0)$ e se f e g forem diferenciáveis em (x_0, y_0) , então as retas normais em P são perpendiculares se e somente se

$$f_x(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) = -1$$

30. Use o resultado do Exercício 29 para mostrar que as retas normais aos cones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ são perpendiculares às retas normais da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ em cada ponto de interseção (ver Figura Ex-32).
31. Dizemos que duas superfícies $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ são **ortogonais** em um ponto P de interseção se ∇f e ∇g são não-nulos em P e as retas normais às superfícies são perpendiculares em P . Mostre que se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então as superfícies $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ são ortogonais no ponto (x_0, y_0, z_0) se e somente se

$$f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = 0$$

nesse ponto. [Nota: essa é uma versão mais geral do resultado do Exercício 29.]

32. Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cone $z^2 = x^2 + y^2$ são ortogonais em todo o

ponto de interseção (ver figura abaixo).

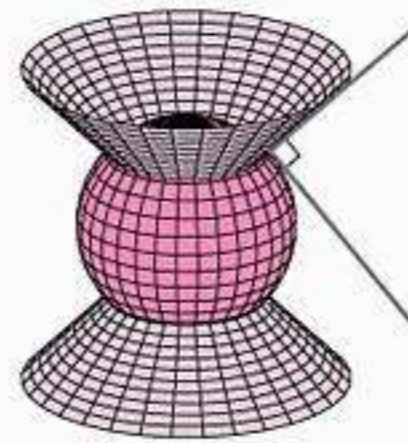


Figura Ex-32

33. Mostre que o volume do sólido limitado pelos planos coordenados e o plano tangente da parte da superfície $xyz = k$, $k > 0$, que está no primeiro octante não depende do ponto de tangência.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.7

1. $z = 4 + 2(x - 3) - 3(y - 1)$; $x = 3 + 2t$; $y = 1 - 3t$; $z = 4 - t$ 2. $z = 8 + 8(x - 2) + (y - 4)$; $x = 2 + 8t$; $y = 4 + t$; $z = 8 - t$
 3. $2(x - 1) + y + (z + 1) = 0$; $x = 1 + 2t$; $y = t$; $z = -1 + t$ 4. $x = 2 + t$; $y = 1$; $z = 2 - t$

14.8 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Anteriormente, no Volume 1, vimos como determinar máximos e mínimos de uma função de uma variável. Nesta seção, desenvolveremos técnicas similares para funções de duas variáveis.

■ EXTREMOS

Se imaginarmos o gráfico de uma função f de duas variáveis como sendo uma cadeia de montanhas (Figura 14.8.1), então os cumes, que são os pontos altos de suas vizinhanças imediatas, são chamados de *máximos relativos* de f e as bases dos vales, que são os pontos baixos de suas vizinhanças imediatas, são chamadas de *mínimos relativos* de f .

Assim como um geólogo pode estar interessado em determinar a montanha mais alta e o vale mais profundo em toda uma cadeia de montanhas, também um matemático pode estar interessado em determinar o maior e o menor valor de $f(x, y)$ sobre o domínio *inteiro* de f . Esses são chamados de *valores máximos absolutos* e *mínimos absolutos* de f . As seguintes definições dão precisão a essas idéias informais.

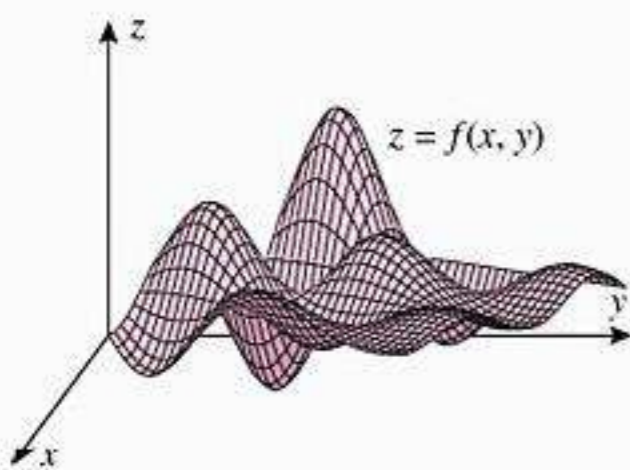


Figura 14.8.1

14.8.1 DEFINIÇÃO Diz-se que uma função de duas variáveis tem um **máximo relativo** em um ponto (x_0, y_0) se há um círculo centrado em (x_0, y_0) , de modo que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos pontos (x, y) do domínio de f que estão dentro do círculo, e diz-se que f tem um **máximo absoluto** em (x_0, y_0) se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) do domínio de f .

14.8.2 DEFINIÇÃO Diz-se que uma função f de duas variáveis tem um *mínimo relativo* em um ponto (x_0, y_0) se há um círculo centrado em (x_0, y_0) , de modo que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos pontos (x, y) do domínio de f que estão dentro do círculo, e diz-se que f tem um *mínimo absoluto* em (x_0, y_0) se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) do domínio de f .

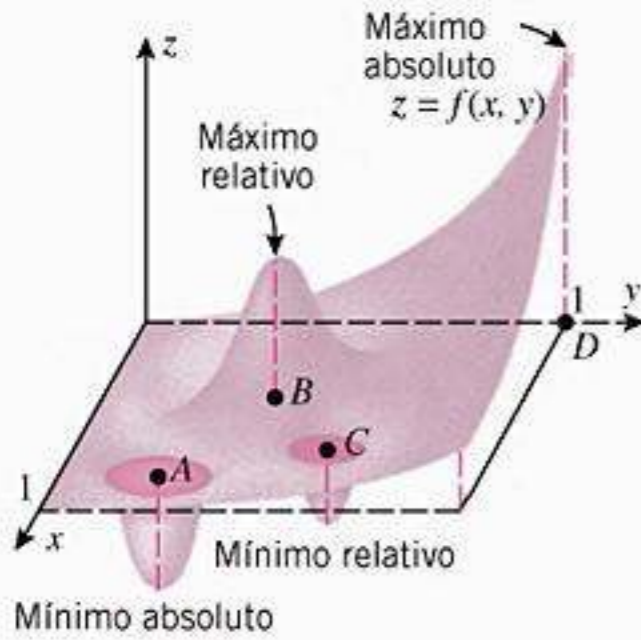


Figura 14.8.2

Se f tiver um máximo ou mínimo relativo em (x_0, y_0) , dizemos que f tem um *extremo relativo* em (x_0, y_0) , e se f tiver um máximo ou mínimo absoluto em (x_0, y_0) , dizemos que f tem um *extremo absoluto* em (x_0, y_0) .

A Figura 14.8.2 mostra o gráfico de uma função f cujo domínio é a região quadrada fechada no plano xy dos pontos que satisfazem as desigualdades $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. A função f tem mínimos relativos nos pontos A e C e um máximo relativo em B . Há um mínimo absoluto em A e um máximo absoluto em D .

Para funções de duas variáveis, estaremos interessados em duas importantes questões:

- Existem extremos relativos ou absolutos?
- Caso afirmativo, onde estão localizados?

■ **CONJUNTOS LIMITADOS**

Assim como distinguimos entre intervalos finitos e infinitos da reta real, vamos querer distinguir entre regiões de “extensão finita” e regiões de “extensão infinita” no espaço bi ou tridimensional. Um conjunto de pontos no espaço bidimensional é denominado *limitado* se o conjunto inteiro couber dentro de algum retângulo, e é denominado *ilimitado* se não houver retângulo que contenha todos os pontos do conjunto. Analogamente, um conjunto de pontos no espaço tridimensional é *limitado* se o conjunto couber dentro de alguma caixa e é *ilimitado*, caso contrário (Figura 14.8.3).

Explique por que todo subconjunto de um conjunto limitado também é limitado.

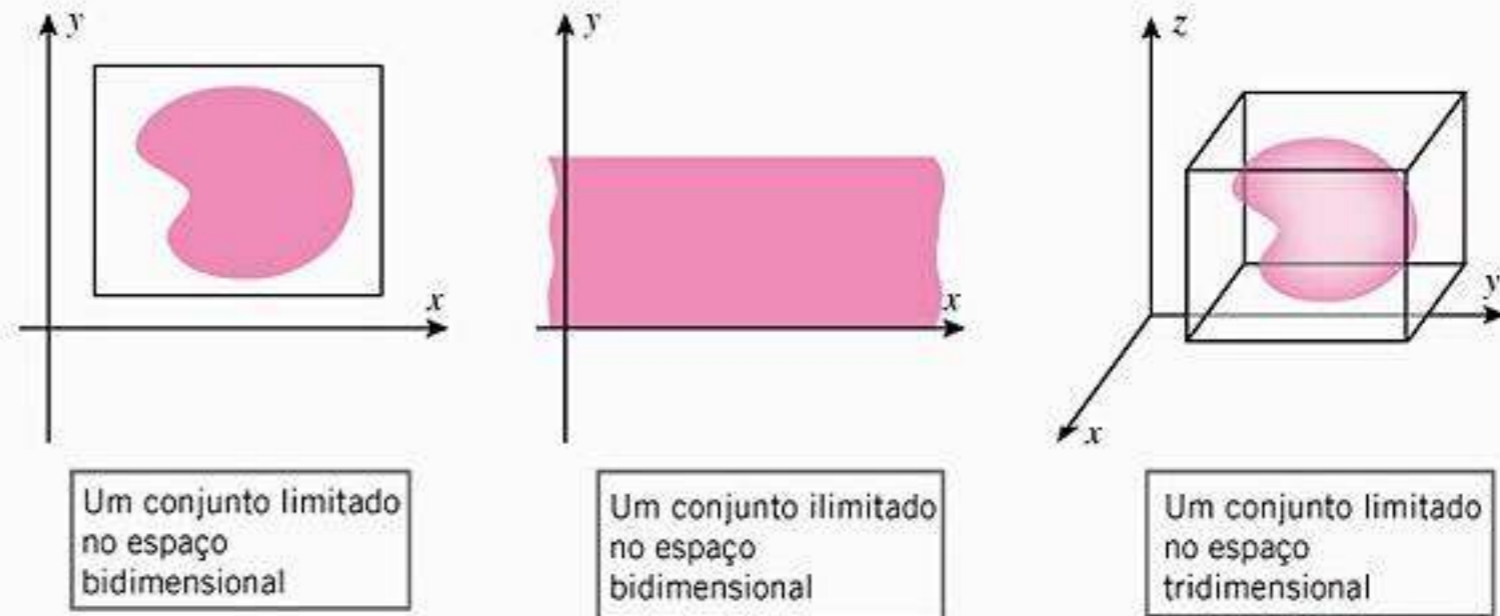


Figura 14.8.3

■ **TEOREMA DO VALOR EXTREMO**

Para funções de uma variável que são contínuas num intervalo fechado, o Teorema do Valor Extremo (Teorema 5.4.2 do Volume 1) respondeu a questão da existência dos extremos absolutos. O teorema seguinte, que enunciaremos sem demonstração, é o resultado correspondente para funções de duas variáveis.

14.8.3 DEFINIÇÃO (Teorema do Valor Extremo) Se $f(x, y)$ for contínua em um conjunto fechado e limitado R , então f tem ambos máximo e mínimo absolutos em R .

► **Exemplo 1** A região quadrada R cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano xy . A função f cujo gráfico é mostrado na Figura 14.8.2 é contínua em R ; assim, o Teorema 14.8.3 garante a existência de máximo e mínimo em R . Esses ocorrem nos pontos D e A que estão mostrados na figura. ◀

Se qualquer uma das condições do Teorema do Valor Extremo deixar de ser válida, então não há nenhuma garantia de que exista um máximo ou mínimo absoluto na região R . Assim, uma função descontínua num conjunto fechado e limitado não precisa ter extremo absoluto, e uma função contínua num conjunto que não é fechado ou limitado tampouco precisa ter algum extremo absoluto.

■ **ENCONTRANDO EXTREMOS RELATIVOS**

Lembre-se que se uma função g de uma variável tiver um extremo relativo em um ponto x_0 onde g é diferenciável, então $g'(x_0) = 0$. Para obter o análogo deste resultado para funções de duas variáveis, suponha que $f(x, y)$ tenha um máximo relativo em (x_0, y_0) e que as derivadas parciais de f existam em (x_0, y_0) . Parece plausível, geometricamente, que os traços da superfície $z = f(x, y)$ sobre os planos $x = x_0$ e $y = y_0$ tenham retas tangentes horizontais em (x_0, y_0) (Figura 14.8.4), logo

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

A mesma conclusão é válida se f tiver um mínimo relativo em (x_0, y_0) e isso tudo sugere o seguinte resultado, que enunciaremos sem prova formal.

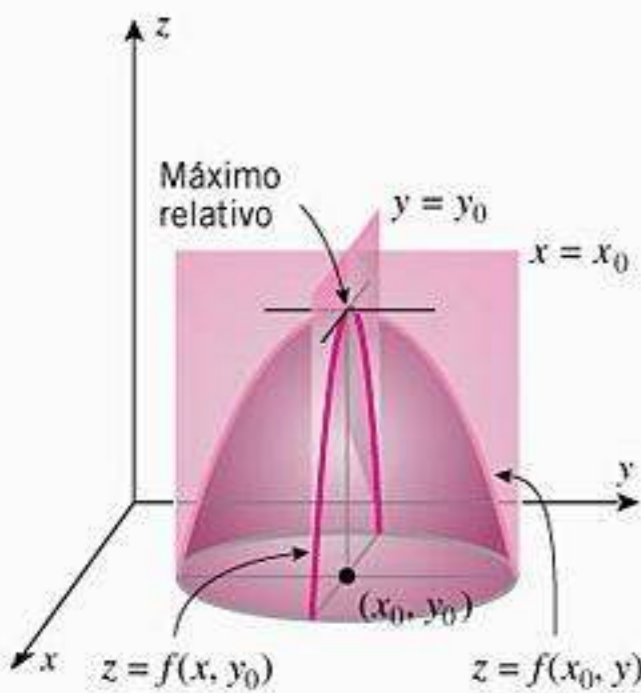


Figura 14.8.4

14.8.4 TEOREMA Se f tiver um extremo relativo em um ponto (x_0, y_0) e se as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem nesse ponto, então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Lembre-se que os *pontos críticos* de uma função f de uma variável são aqueles valores de x do domínio de f nos quais $f'(x) = 0$ ou f não é diferenciável. A definição seguinte é o análogo para funções de duas variáveis.

14.8.5 DEFINIÇÃO Um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado *ponto crítico* da função se $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ ou se uma ou ambas derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0) .

Explique por que

$$D_u f(x_0, y_0) = 0$$

para todos u se (x_0, y_0) for um ponto crítico de f e f for diferenciável em (x_0, y_0) .

Segue desta definição e do Teorema 14.8.4 que os extremos relativos ocorrem nos pontos críticos, exatamente como para uma função de uma variável. Contudo, lembre-se que para uma função de uma variável um extremo relativo não precisa ocorrer em *cada* ponto crítico. Por exemplo, a função pode ter um ponto de inflexão com uma reta tangente horizontal no ponto crítico (ver Figura 5.2.6 do Volume 1). Analogamente, uma função de duas variáveis não precisa ter um extremo relativo em cada ponto crítico. Por exemplo, considere a função

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Essa função, cujo gráfico é o parabolóide hiperbólico mostrado na Figura 14.8.5, tem um

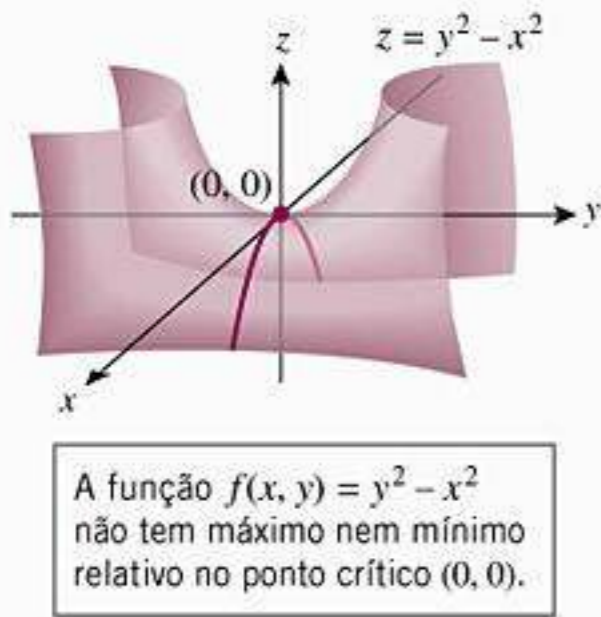


Figura 14.8.5

ponto crítico em $(0, 0)$, pois

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2y$$

do qual tem-se que

$$f_x(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0, 0) = 0$$

Entretanto, a função f não tem máximo nem mínimo relativo em $(0, 0)$. Por razões óbvias, o ponto $(0, 0)$ é chamado de *ponto de sela* de f . Em geral, diremos que uma superfície $z = f(x, y)$ tem um *ponto de sela* em (x_0, y_0) , se houver dois planos verticais distintos que passam nesse ponto, tais que o traço da superfície em um dos planos tem um máximo relativo em (x_0, y_0) e o traço no outro tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) .

► **Exemplo 2** As três funções com gráficos na Figura 14.8.6, têm todas pontos críticos em $(0, 0)$. Para o parabolóide, as derivadas parciais na origem são zero. Isso pode ser conferido algebricamente calculando as derivadas parciais em $(0, 0)$, mas pode ser visto geometricamente observando que os traços no plano xz e no plano yz têm as retas tangentes horizontais em $(0, 0)$. Para o cone, nenhuma das derivadas parciais existe na origem, pois os traços no plano xz e no planos yz têm esquinas na origem. O parabolóide da parte (a) e o cone na parte (c) têm um mínimo relativo e absoluto na origem, e o parabolóide da parte (b) tem um máximo relativo e absoluto na origem. ◀

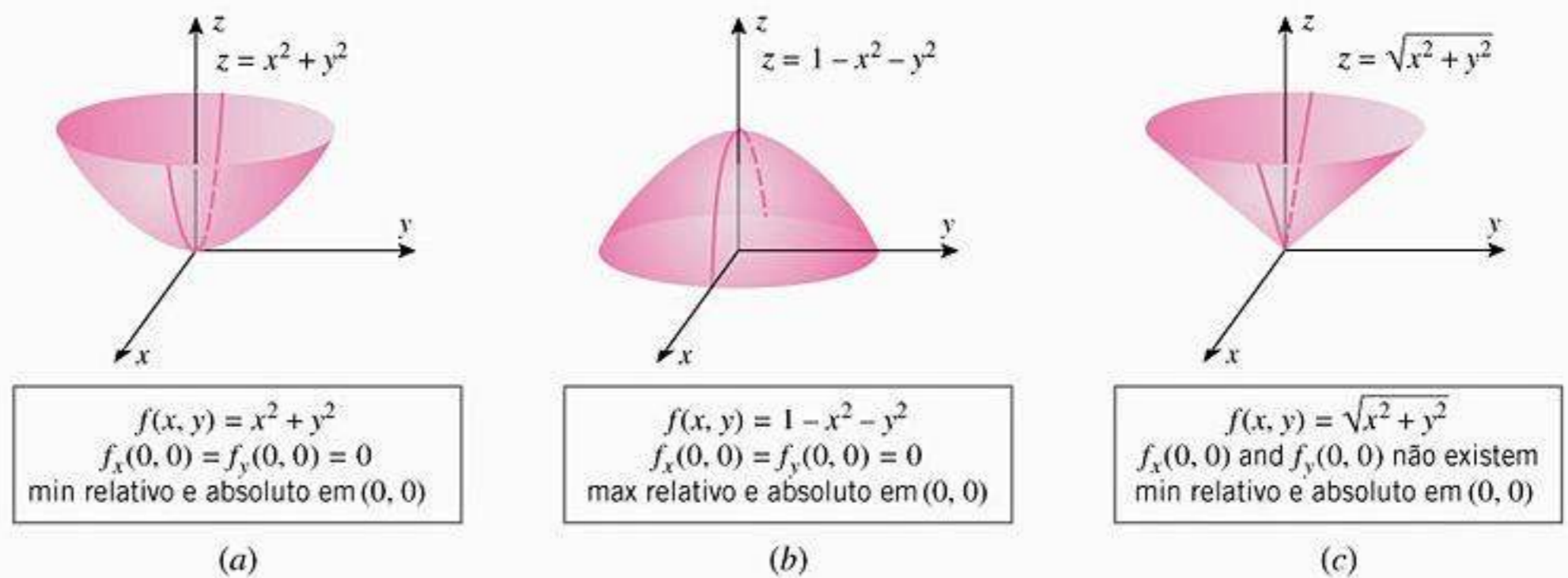


Figura 14.8.6

■ **TESTE DA DERIVADA SEGUNDA**

Para funções de uma variável, o teste da derivada segunda (Teorema 5.2.4 do Volume 1) foi usado para determinar o comportamento de uma função em um ponto crítico. O seguinte teorema, que é geralmente provado em disciplinas de cálculo avançado, é o análogo daquele teorema para funções de duas variáveis.

14.8.6 TEOREMA (Teste da Derivada Segunda) Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico (x_0, y_0) e seja

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

- (a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) .
- (b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) .
- (c) Se $D < 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0) .
- (d) Se $D = 0$, então nenhuma conclusão pode ser tirada.

Com a notação do Teorema 14.8.6, mostre que se $D > 0$, então $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $f_{yy}(x_0, y_0)$ têm o mesmo sinal. Assim, podemos trocar $f_{xx}(x_0, y_0)$ por $f_{yy}(x_0, y_0)$ nas partes (a) e (b) do teorema.

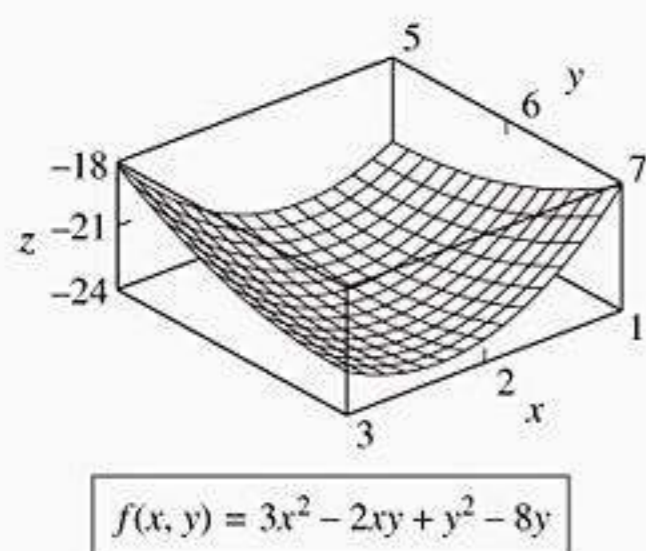


Figura 14.8.7

► **Exemplo 3** Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

Solução Como $f_x(x, y) = 6x - 2y$ e $f_y(x, y) = -2x + 2y - 8$, os pontos críticos de f satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 0 \\ -2x + 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-as para x e y , obtemos $x = 2, y = 6$ (verifique), logo $(2, 6)$ é o único ponto crítico. Para aplicar o Teorema 14.8.6, precisamos das derivadas de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = 6, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

No ponto $(2, 6)$ temos

$$D = f_{xx}(2, 6)f_{yy}(2, 6) - f_{xy}^2(2, 6) = (6)(2) - (-2)^2 = 8 > 0$$

e

$$f_{xx}(2, 6) = 6 > 0$$

logo f tem um mínimo relativo em $(2, 6)$ pela parte (a) do teste da derivada segunda. A Figura 14.8.7 mostra o gráfico de f em uma vizinhança do mínimo relativo. ◀

► **Exemplo 4** Localize todos os extremos relativos e os pontos de sela de

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

Solução Como

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4y - 4x^3 \\ f_y(x, y) &= 4x - 4y^3 \end{aligned} \tag{1}$$

os pontos críticos de f têm coordenadas que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 4y - 4x^3 &= 0 & \text{ou} & & y = x^3 \\ 4x - 4y^3 &= 0 & & & x = y^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo a equação de cima na equação de baixo obtemos $x = (x^3)^3$ ou, equivalentemente, $x^9 - x = 0$ ou $x(x^8 - 1) = 0$, a qual tem soluções $x = 0, x = 1, x = -1$. Substituindo esses valores na equação (2) de cima, obtemos os valores y correspondentes $y = 0, y = 1, y = -1$. Assim, os pontos críticos de f são $(0, 0), (1, 1)$ e $(-1, -1)$.

De (1)

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

e obtemos a seguinte tabela:

PONTO CRÍTICO (x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
$(0, 0)$	0	0	4	-16
$(1, 1)$	-12	-12	4	128
$(-1, -1)$	-12	-12	4	128

Nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, temos $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, logo ocorrem máximos relativos nesses pontos críticos. Em $(0, 0)$, há um ponto de sela, já que $D < 0$. A superfície e um mapa de contornos estão mostrados na Figura 14.8.8. ◀

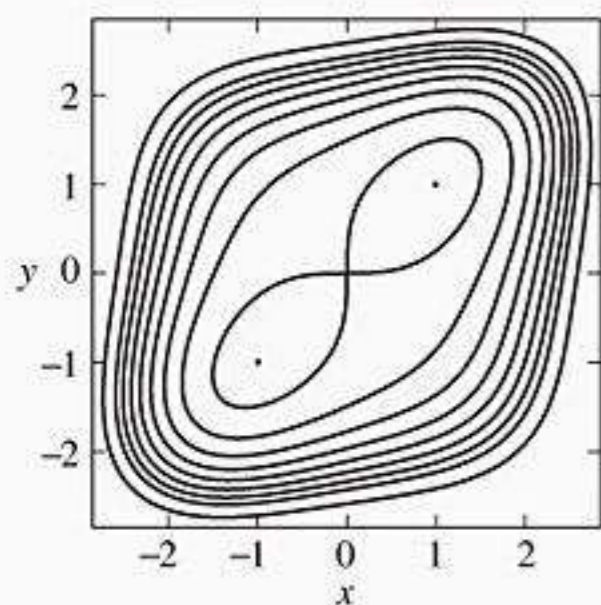
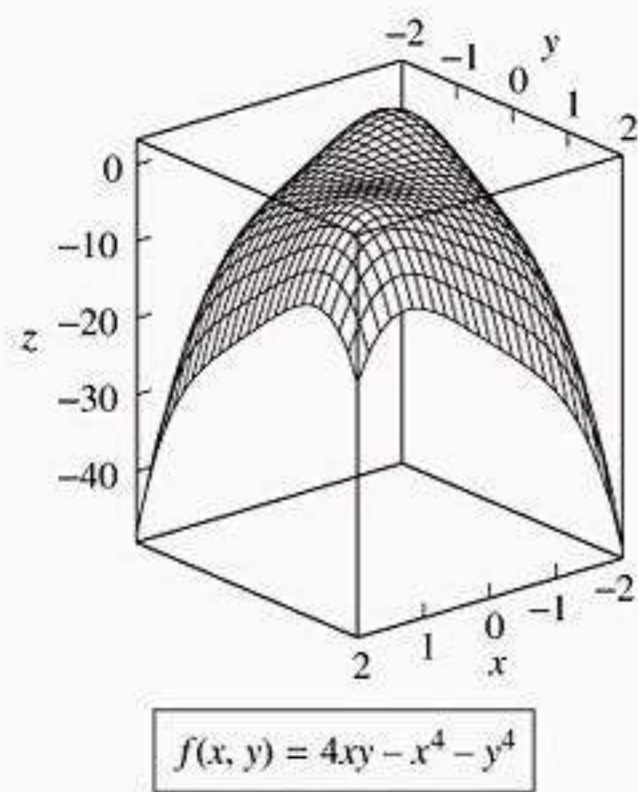


Figura 14.8.8

O padrão “número oito” em $(0, 0)$ do mapa de contornos para a superfície na Figura 14.8.8 é típico para curvas de nível que passam por um ponto de sela. Se um besouro inicia em um ponto $(0, 0, 0)$ sobre a superfície, em quantas direções pode ele andar e permanecer no plano xy ?

O seguinte teorema, que é o análogo para funções de duas variáveis do Teorema 5.4.3 do Volume 1, levará a um importante método para determinar extremos absolutos.

14.8.7 TEOREMA *Se uma função f de duas variáveis tem um extremo absoluto (ou um máximo absoluto ou um mínimo absoluto) em um ponto interior de seu domínio, então este extremo ocorre em um ponto crítico.*

DEMONSTRAÇÃO Se f tiver um máximo absoluto no ponto (x_0, y_0) do interior do domínio de f , então f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) . Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0) , então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

pelo Teorema 14.8.4, logo, (x_0, y_0) é um ponto crítico de f . Se uma das duas derivadas parciais não existir, então de novo (x_0, y_0) é um ponto crítico, logo (x_0, y_0) é um ponto crítico em todos os casos. A prova para mínimo absoluto é análoga. ■

■ **ENCONTRANDO EXTREMOS ABSOLUTOS EM CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS**

Se $f(x, y)$ for contínua num conjunto fechado e limitado R , então o Teorema do Valor Extremo (Teorema 14.8.3) garante a existência de um máximo e um mínimo absoluto de f em R . Esses extremos absolutos podem ocorrer ou na fronteira de R ou no interior de R , mas se um extremo absoluto ocorrer no interior, então ele ocorre em um ponto crítico pelo Teorema 14.8.7. Assim, somos levados ao seguinte procedimento para determinar extremos absolutos:

Compare esse procedimento com o da Seção 5.4 do Volume 1 para encontrar os valores extremos de $f(x)$ num intervalo fechado.

Como Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua de Duas Variáveis em um Conjunto Fechado e Limitado R

- Passo 1** Encontre os pontos críticos de f que estão situados no interior de R .
- Passo 2** Encontre todos os pontos de fronteira nos quais os extremos podem ocorrer.
- Passo 3** Calcule $f(x, y)$ nos pontos obtidos nos passos precedentes. O maior desses valores é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

► **Exemplo 5** Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \tag{3}$$

na região triangular fechada R de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 5)$.

Solução A região R está mostrada na Figura 14.8.9. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3$$

logo, todos os pontos críticos ocorrem onde

$$3y - 6 = 0 \quad \text{e} \quad 3x - 3 = 0$$

Resolvendo essas equações, resultam $x = 1$ e $y = 2$, logo $(1, 2)$ é o único ponto crítico. Conforme mostrado na Figura 14.8.9, esse ponto crítico está no interior de R .

Em seguida, queremos determinar as localizações dos pontos sobre a fronteira de R nos quais pode ocorrer um valor extremo. A fronteira de R consiste em três segmentos de retas, cada um dos quais trataremos separadamente:

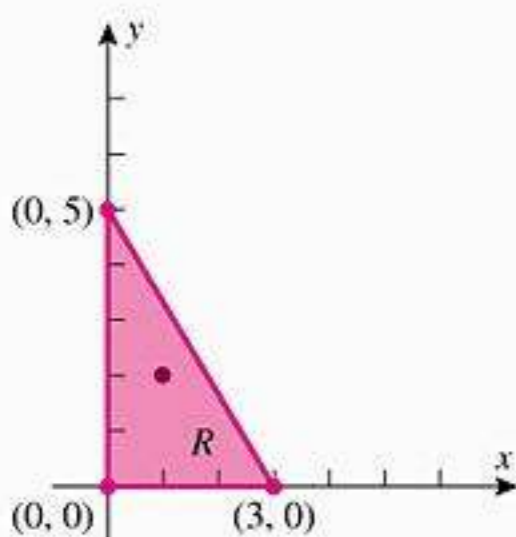


Figura 14.8.9

O segmento de reta entre (0, 0) e (3, 0): Nesse segmento de reta, temos $y = 0$, logo (3) simplifica para uma função da única variável x ,

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Essa função não tem ponto crítico, pois $u'(x) = -6$ é não-nula para todo x . Assim, os valores extremos de $u(x)$ ocorrem nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$, que correspondem aos pontos (0, 0) e (3, 0) de R .

O segmento de reta entre (0, 0) e (0, 5): Nesse segmento de reta, temos $x = 0$, logo (3) simplifica para uma função de uma única variável y ,

$$v(y) = f(0, y) = -3y + 7, \quad 0 \leq y \leq 5$$

Essa função não tem pontos críticos, pois $v'(y) = -3$ é não-nula para todo y . Assim, os valores extremos de $v(y)$ ocorrem nos pontos extremos $y = 0$ e $y = 5$, que correspondem aos pontos (0, 0) e (0, 5) de R .

O segmento de reta entre (3, 0) e (0, 5): No plano xy , uma equação para esse segmento é

$$y = -\frac{5}{3}x + 5, \quad 0 \leq x \leq 3 \tag{4}$$

logo (3) simplifica para uma função de uma única variável x ,

$$\begin{aligned} w(x) &= f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) = 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7 \\ &= -5x^2 + 14x - 8, \quad 0 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Uma vez que $w'(x) = -10x + 14$, a equação $w'(x) = 0$ fornece $x = \frac{7}{5}$ como o único ponto crítico de w . Assim, os valores extremos de w ocorrem ou no ponto crítico $x = \frac{7}{5}$ ou nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$. Os pontos extremos correspondem aos pontos (0, 5) e (3, 0) de R , e, por (4), o ponto crítico corresponde a $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Finalmente, a Tabela 14.8.1 lista os valores de $f(x, y)$ no ponto crítico interior e nos pontos de fronteira nos quais pode ocorrer um extremo absoluto. Da tabela concluímos que o valor máximo absoluto de f é $f(0, 0) = 7$ e o valor mínimo absoluto é $f(3, 0) = -11$. ◀

Tabela 14.8.1

(x, y)	(0, 0)	(3, 0)	(0, 5)	$\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$	(1, 2)
$f(x, y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

► **Exemplo 6** Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 pés³ e cuja construção requiera uma quantidade mínima de material.

Solução Sejam

x = comprimento da caixa (em pés)

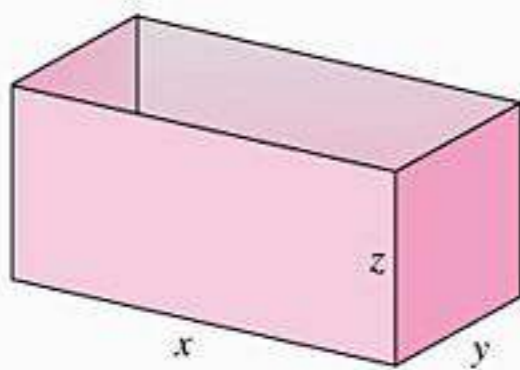
y = largura da caixa (em pés)

z = altura da caixa (em pés)

S = área da superfície da caixa (em pés ao quadrado)

É razoável supor que a caixa com a área mínima de superfície necessite de uma quantidade mínima do material, logo nosso objetivo é minimizar a área de superfície

$$S = xy + 2xz + 2yz \tag{5}$$



Dois lados têm área xz cada.
Dois lados têm área yz cada.
A base tem área xy .

Figura 14.8.10

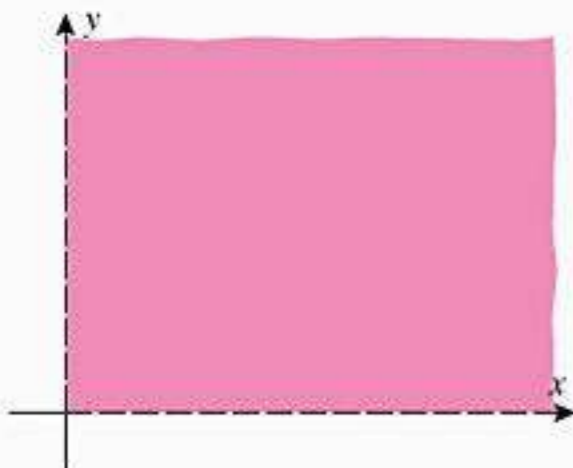


Figura 14.8.11

(Figura 14.8.10) sujeita à restrição de volume

$$xyz = 32 \tag{6}$$

De (6) obtemos $z = 32/xy$, logo (5) pode ser escrita como

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x} \tag{7}$$

que expressa S como uma função de duas variáveis. As dimensões x e y nessa fórmula, devem ser positivas mas, fora isso, não têm outras limitações, portanto nosso problema reduz-se a determinar o valor mínimo absoluto de S no primeiro quadrante: $x > 0, y > 0$ (Figura 14.8.11). Como essa região não é limitada nem fechada, não temos garantia matemática alguma nesse estágio de que exista um valor mínimo absoluto. Contudo, observe que S terá um valor grande em qualquer ponto (x, y) do primeiro quadrante para o qual o produto xy seja grande ou para o qual x ou y estejam perto de 0. Podemos usar essa observação para provar a existência de um valor mínimo absoluto de S .

Seja R a região do primeiro quadrante definida pelas desigualdades

$$\frac{1}{2} \leq x, \quad \frac{1}{2} \leq y, \quad \text{e} \quad xy \leq 128$$

Essa região é fechada e limitada (verifique) e a função S é contínua em R . Segue do Teorema 14.8.3 que S tem um mínimo absoluto em R . Além disso, observe que $S > 128$ em qualquer ponto (x, y) fora de R e que o ponto $(8, 8)$ pertence a R , com $S = 80 < 128$ nesse ponto. Concluimos que o valor mínimo de S em R é, também, o valor mínimo de S no primeiro quadrante inteiro.

Como S tem um valor mínimo absoluto no primeiro quadrante, esse valor deve ocorrer num ponto crítico de S . Derivando S obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} \tag{8}$$

logo, as coordenadas dos pontos críticos de S satisfazem

$$y - \frac{64}{x^2} = 0, \quad x - \frac{64}{y^2} = 0$$

Resolvendo a primeira equação para y resulta em

$$y = \frac{64}{x^2} \tag{9}$$

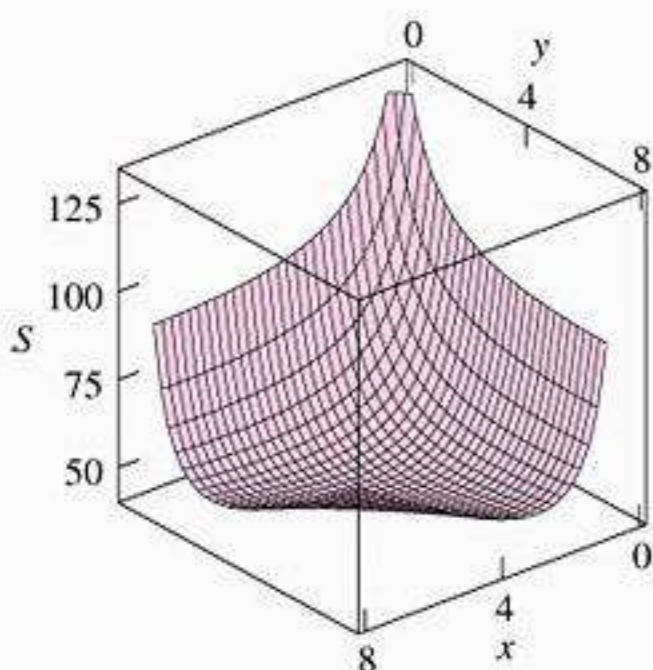
e substituindo essa expressão na segunda equação, obtemos

$$x - \frac{64}{(64/x^2)^2} = 0$$

a qual pode ser reescrita como

$$x \left(1 - \frac{x^3}{64} \right) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ e $x = 4$. Uma vez que queremos $x > 0$, a única solução significativa é $x = 4$. Substituindo este valor em (9), obtemos $y = 4$. Substituindo $x = 4$ e $y = 4$ em (6), obtemos $z = 2$, logo a caixa que usa o mínimo material tem uma altura de 2 pés e uma base quadrada cujas arestas tem comprimento 4 pés. ◀



$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Figura 14.8.12

Na nossa solução do Exemplo 6, felizmente fomos capazes de provar a existência de um mínimo absoluto de S no primeiro quadrante. O problema geral de encontrar um extremo absoluto de uma função numa região ilimitada, ou uma região que não é fechada, pode ser difícil e não será considerado neste livro. Contudo, em aplicações, algumas vezes podemos usar considerações físicas para deduzir que foi encontrado um extremo absoluto. Por exemplo, o gráfico da Equação (7) na Figura 14.8.12 sugere fortemente que o mínimo relativo em $x = 4$ e $y = 4$ é, também, um mínimo absoluto.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.8 (Ver página 1005 para respostas.)

- Os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ são _____.
- Suponha que $f(x, y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas em toda parte e que a origem seja um ponto crítico de f . Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda se
 - $f_{xx}(0, 0) = 2, f_{xy}(0, 0) = 2, f_{yy}(0, 0) = 2$
 - $f_{xx}(0, 0) = -2, f_{xy}(0, 0) = 2, f_{yy}(0, 0) = 2$
 - $f_{xx}(0, 0) = 3, f_{xy}(0, 0) = 2, f_{yy}(0, 0) = 2$
 - $f_{xx}(0, 0) = -3, f_{xy}(0, 0) = 2, f_{yy}(0, 0) = -2$
- Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda para a função $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ no ponto
 - $(0, 0)$
 - $(-1, -1)$
 - $(1, 1)$
- Uma caixa retangular tem área de superfície total de 2 m^2 . Exprese o volume da caixa como uma função das dimensões x e y da base da caixa.

EXERCÍCIOS 14.8 Recurso Gráfico CAS

1-2 Localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo.

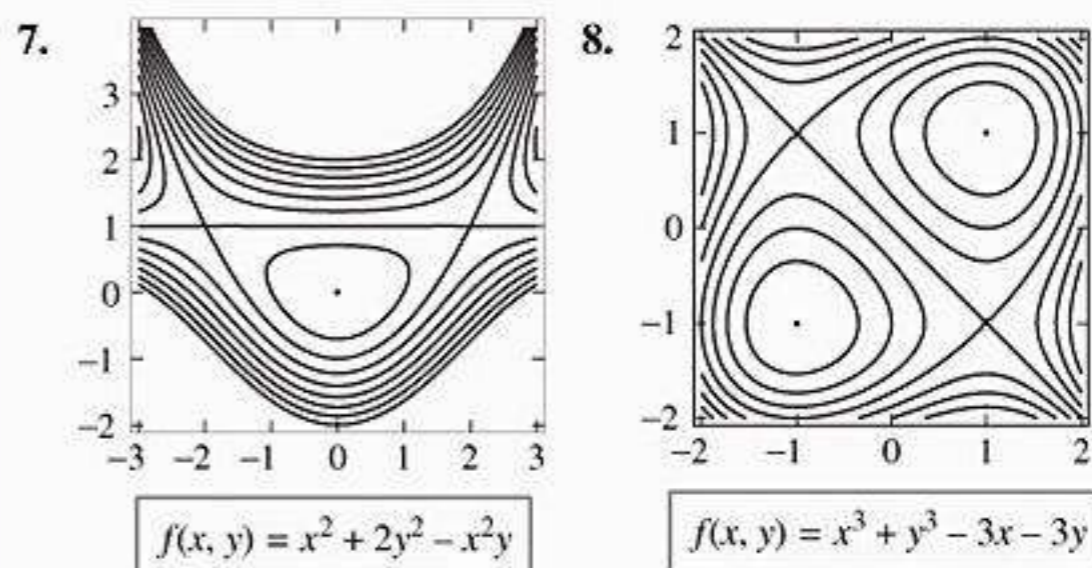
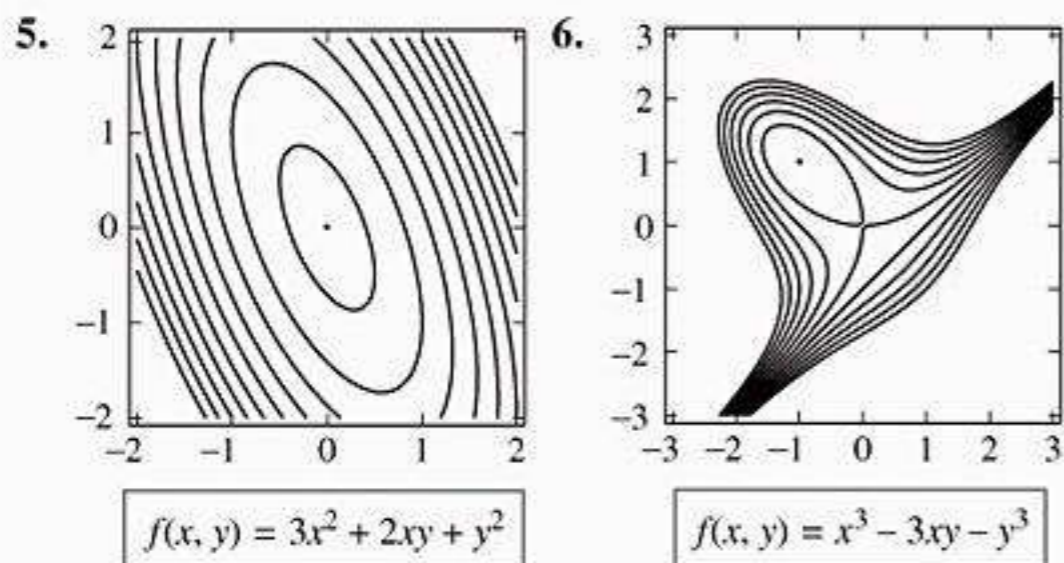
- $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$
 - $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
 - $f(x, y) = x + 2y - 5$
- $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - (y - 5)^2$
 - $f(x, y) = e^{xy}$
 - $f(x, y) = x^2 - y^2$

3-4 Complete os quadrados e localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo.

- $f(x, y) = 13 - 6x + x^2 + 4y + y^2$
- $f(x, y) = 1 - 2x - x^2 + 4y - 2y^2$

ENFOCANDO CONCEITOS

5-8 Os mapas de contornos mostram todos os aspectos significativos da função. Faça uma conjectura sobre o número e a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela, e então use Cálculo para verificar sua conjectura.



9-20 Localize todos os máximos e mínimos relativos e os pontos de sela, se houver.

- $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$
- $f(x, y) = x^2 + xy - 2y - 2x + 1$
- $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$
- $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$
- $f(x, y) = xe^y$
- $f(x, y) = x^2 + y - e^y$
- $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
- $f(x, y) = e^x \sin y$
- $f(x, y) = y \sin x$
- $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$
- $f(x, y) = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y}$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

21. Use um CAS para gerar um mapa de contornos de

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$$

para $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$ e use o mapa para aproximar a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela na região. Verifique sua resposta usando Cálculo e identifique os extremos relativos como máximo relativo ou mínimo relativo.

22. Use um CAS para gerar o mapa de contornos de

$$f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$$

para $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$, e use o mapa para aproximar a

localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela na região. Verifique sua resposta usando Cálculo e identifique os extremos relativos como máximo relativo ou mínimo relativo.

ENFOCANDO CONCEITOS

23. (a) Mostre que o teste da derivada segunda não fornece informações sobre os pontos críticos de $f(x, y) = x^4 + y^4$.
 (b) Classifique todos os pontos críticos de f como máximo ou mínimo relativo ou ponto de sela.
24. (a) Mostre que o teste da derivada segunda não fornece informações sobre os pontos críticos de $f(x, y) = x^4 - y^4$.
 (b) Classifique todos os pontos críticos de f como máximo ou mínimo relativo ou ponto de sela.
25. Lembre que, pelo Teorema 5.4.4 do Volume 1, se uma função contínua de uma variável tem exatamente um extremo relativo num intervalo, então este extremo relativo é um extremo absoluto no intervalo. Este exercício mostra que esse resultado não se estende a funções de duas variáveis.
 (a) Mostre que $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tem apenas um único ponto crítico e que nele ocorre um máximo relativo. (Ver figura abaixo.)
 (b) Mostre que f não tem máximo absoluto.

Fonte: Este exercício está baseado no artigo "The Only Critical Point in Town Test" por Ira Rosenholtz e Lowell Smylie, *Mathematics Magazine*, Vol. 58, No. 3, maio de 1985, p. 149-150.

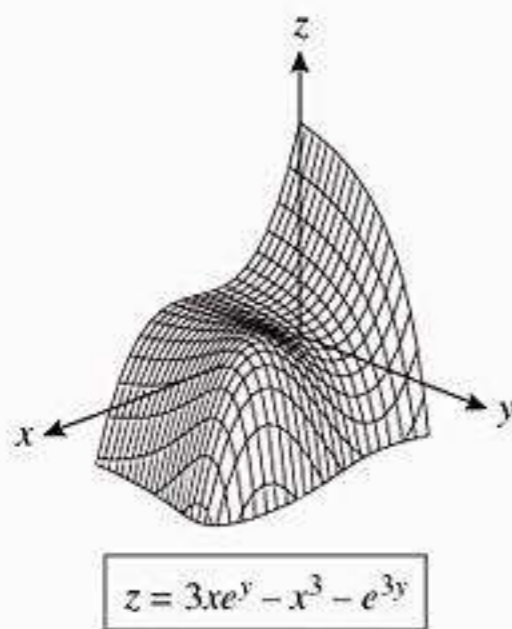


Figura Ex-25

26. Se f for uma função contínua de uma variável com dois máximos relativos num intervalo, então deve haver um mínimo relativo entre eles. (Convença-se disto fazendo algumas figuras.) O objetivo desse exercício é mostrar que esse resultado não se estende a funções de duas variáveis. Mostre que $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ tem dois máximos relativos, mas nenhum outro ponto crítico (ver figura a seguir).

Fonte: Este exercício é baseado no problema "Two Mountains Without a Valley" proposto e resolvido por Ira Rosenholtz, *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No.1, fevereiro de 1987, p. 48.

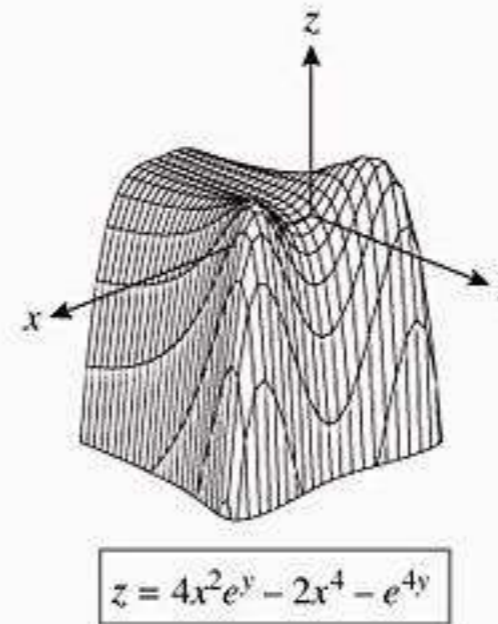


Figura Ex-26

27-32 Encontre os extremos absolutos da função dada no conjunto fechado e limitado R indicado.

27. $f(x, y) = xy - x - 3y$; R é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(5, 0)$.
28. $f(x, y) = xy - 2x$; R é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, 0)$.
29. $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$; R é a região quadrada com vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ e $(2, 0)$.
30. $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$; R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ e $(2, 0)$.
31. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$; R é a região circular $x^2 + y^2 \leq 4$.
32. $f(x, y) = xy^2$; R é a região que satisfaz as desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.
33. Determine três números positivos cuja soma seja 48 e tais que seu produto seja o maior possível.
34. Determine três números positivos cuja soma seja 27 e tais que seu produto seja o maior possível.
35. Determine todos os pontos sobre a parte do plano $x + y + z = 5$ no primeiro octante nos quais $f(x, y, z) = xy^2z^2$ tem um valor máximo.
36. Determine os pontos da superfície $x^2 - yz = 5$ que estão mais próximos da origem.
37. Determine as dimensões da caixa retangular de volume máximo que pode ser inscrita em uma esfera de raio a .
38. Determine o volume máximo da caixa retangular com três faces nos planos coordenados e o vértice do primeiro octante no plano $x + y + z = 1$.
39. Uma caixa retangular com um volume de 16 pés³ é feita de dois tipos de materiais. O topo e a base são feitos de um material que custa 10 centavos por pé quadrado e os lados de um material que custa 5 centavos por pé quadrado. Determine as dimensões da caixa de modo que o custo dos materiais seja minimizado.
40. Um fabricante faz dois modelos de um item, padrão e de luxo. Custa \$40 para fabricar um modelo padrão e \$60 o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por x dólares e o de luxo por y dólares, então o fabricante venderá $500(y - x)$ do item padrão

e $45.000 + 500(x - 2y)$ do de luxo a cada ano. Com qual preço os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?

41. Considere a função

$$f(x, y) = 4x^2 - 3y^2 + 2xy$$

no quadrado unitário $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- (a) Encontre os valores máximo e mínimo de f em cada aresta do quadrado.
 - (b) Encontre os valores máximo e mínimo de f em cada diagonal do quadrado
 - (c) Encontre os valores máximo e mínimo de f no quadrado inteiro.
42. Mostre que dentre todos paralelogramas com perímetro l , um quadrado com lados de comprimento $l/4$ tem área máxima. [Sugestão: a área de um paralelograma é dada pela fórmula $A = ab \sin \alpha$, onde a e b são os comprimentos dos dois lados adjacentes e α é ângulo entre eles.]
43. Determine as dimensões de uma caixa retangular, aberta no topo, tendo volume V , e requerendo a menor quantidade de material para sua construção.
44. Uma tira de metal de 27 cm de largura deve ser dobrada ao longo dos dois lados para formar uma calha de seção transversal trapezoidal, como na figura abaixo. Determine x e ϕ de tal forma que a seção transversal trapezoidal tenha uma área máxima.

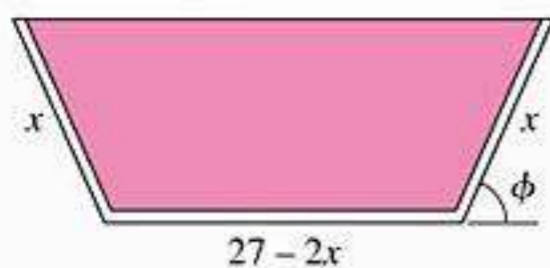


Figura Ex-44

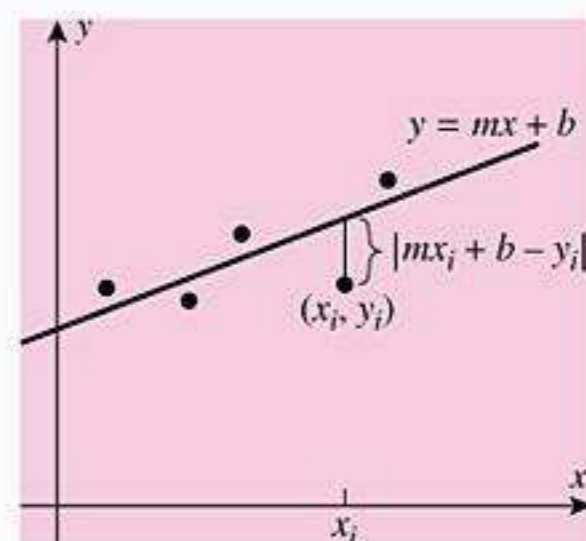
45-46 Um problema comum no trabalho experimental é obter uma relação matemática $y = f(x)$ entre duas variáveis x e y “ajustando” uma curva a pontos do plano que correspondem a valores de x e y determinados experimentalmente, digamos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

A curva $y = f(x)$ é denominada **modelo matemático** dos dados. A forma geral da função f é comumente determinada por algum princípio físico básico, mas algumas vezes é simplesmente determinada pelo padrão apresentado pelos dados. Estamos interessados em ajustar uma reta $y = mx + b$ aos dados. Geralmente, os dados não estão alinhados sobre uma reta (possivelmente devido a erros experimentais ou a variações nas condições experimentais), logo o problema é determinar uma reta que ajuste “melhor” os dados, de acordo com algum critério. Um critério para selecionar a reta de melhor ajuste é escolher m e b que minimizem a função

$$g(m, b) = \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2$$

Isso é chamado o **método dos mínimos quadrados** e a reta resultante é chamada de **reta de regressão** ou **reta de mínimos quadrados de melhor ajuste**. Geometricamente, $|mx_i + b - y_i|$ é a distância vertical entre o dado (x_i, y_i) e a reta $y = mx + b$.



Essas distâncias verticais são chamadas de **resíduos** dos dados, logo o efeito de minimizar $g(m, b)$ é minimizar a soma dos quadrados dos resíduos. Nestes exercícios, deduziremos uma fórmula para a reta de regressão. Mais informações sobre este tópico podem ser encontradas na Seção 1.7, no Volume 1.

45. O objetivo deste exercício é encontrar os valores de m e b que produzam a reta de regressão.
- (a) Para minimizar $g(m, b)$, começamos determinando os valores de m e b tais que $\partial g / \partial m = 0$ e $\partial g / \partial b = 0$. Mostre que essas equações estarão satisfeitas se m e b satisfizerem as condições

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) m + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

- (b) Seja $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$ a média aritmética de x_1, x_2, \dots, x_n . Use o fato de que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \geq 0$$

para mostrar que

$$n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0$$

com igualdade se, e somente se, todos os x_i forem iguais.

- (c) Supondo que nem todos os x_i sejam iguais, prove que as equações em (a) têm a solução única

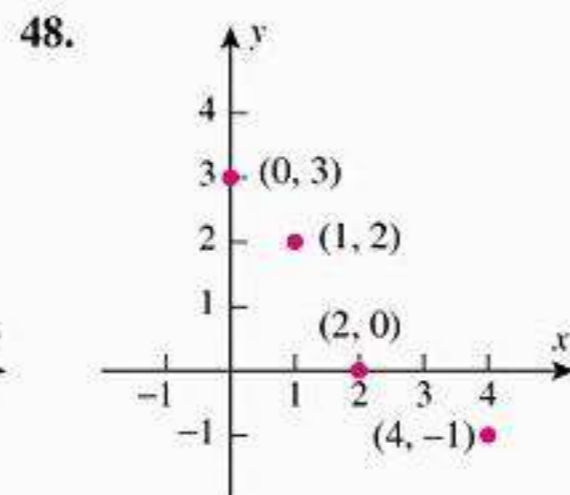
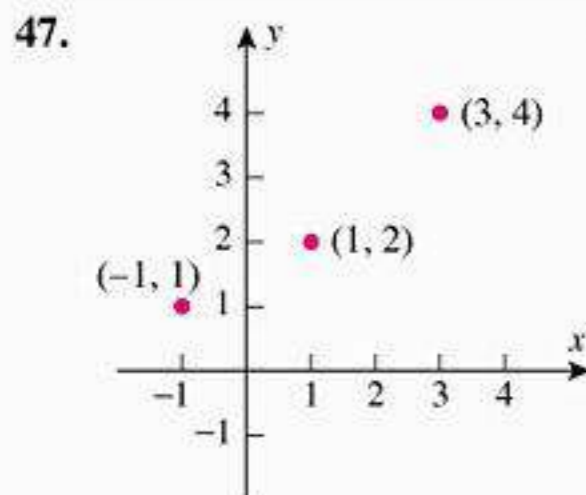
$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

[Nota: mostramos que g tem um ponto crítico nesses valores de m e b . No próximo exercício mostraremos que g tem um mínimo absoluto nesse ponto crítico. Uma vez feito isso, poderemos concluir que a reta $y = mx + b$ é a reta de regressão para esses valores de m e b .]

46. Suponha que nem todos os x_i sejam iguais, de modo que $g(m, b)$ tem um único ponto crítico nos valores de m e b obtidos no Exercício 45(c). O objetivo deste exercício é mostrar que g tem um valor mínimo absoluto nesse ponto.
- Encontre as derivadas parciais $g_{mm}(m, b)$, $g_{bb}(m, b)$ e $g_{mb}(m, b)$ e, então, aplique o teste da derivada segunda para mostrar que g tem um mínimo relativo no ponto crítico obtido no Exercício 45.
 - Mostre que o gráfico da equação $z = g(m, b)$ é uma quádrlica. [Sugestão: ver Fórmula (4) da Seção 12.7.]
 - Pode ser provado que o gráfico de $z = g(m, b)$ é um parabolóide elíptico. Aceitando isso, mostre que esse parabolóide se abre no sentido z positivo e explique por que isso mostra que g tem um mínimo absoluto no ponto crítico encontrado no Exercício 45.

47-50 Use as fórmulas obtidas no Exercício 45 para determinar e desenhar a reta de regressão. Se o leitor dispuser de uma calculadora que possa calcular retas de regressão, use-a para conferir a reta.



49.

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

50.

x	1	2	3	4	5
y	4,2	3,5	3,0	2,4	2,0

51. A seguinte tabela mostra a expectativa de vida por ano de nascimento de mulheres norte-americanas:

ANO DE NASCIMENTO	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
EXPECTATIVA DE VIDA	61,6	65,2	71,1	73,1	74,7	77,5	78,8	79,7

- (a) Tome $t = 0$ como sendo o ano 1930, e seja y a expectativa de vida por ano de nascimento t . Use a capacidade de regressão de uma calculadora para determinar a reta de regressão de y como uma função de t .

- Use um recurso gráfico para fazer um gráfico que mostre os pontos de dados e a reta de regressão.
- Use a reta de regressão para fazer uma conjectura sobre a expectativa de vida das mulheres nascidas no ano 2010.

52. Um gerente de uma companhia procura estabelecer uma relação entre as vendas de um certo produto e o preço. O departamento de pesquisa da companhia forneceu os seguintes dados:

PREÇO (x) EM DÓLARES	\$35,00	\$40,00	\$45,00	\$48,00	\$50,00
VOLUME DE VENDA DIÁRIA (y) EM UNIDADES	80	75	68	66	63

- Use uma calculadora para determinar a reta de regressão de y como uma função de x .
- Use um recurso gráfico para fazer um gráfico que mostre os pontos de dados e a reta de regressão.
- Use a reta de regressão para fazer uma conjectura sobre o número de unidades que seriam vendidas a um preço de \$60,00.

53. Se um gás for resfriado com seu volume mantido constante, então segue da *lei dos gases ideais* da Física que sua pressão cai proporcionalmente à queda da temperatura. A temperatura que, em teoria, corresponde a uma pressão zero é chamada de **zero absoluto**. Suponha que um experimento produza os seguintes dados para a pressão P versus a temperatura T , com o volume mantido constante:

P (QUILO PASCAL)	134	142	155	160	171	184
T (°CELSIUS)	0	20	40	60	80	100

- Use uma calculadora para determinar a reta de regressão de P como uma função de T .
- Use um recurso gráfico para fazer o gráfico que mostre os pontos dados e a reta de regressão.
- Use a reta de regressão para estimar o valor do zero absoluto em graus Celsius.

54. Encontre:

- uma função contínua $f(x, y)$ que esteja definida em todo o plano xy e que não tenha extremo absoluto no plano xy ;
- uma função $f(x, y)$ que esteja definida em todo o retângulo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e que não tenha extremo absoluto no retângulo.

55. Mostre que se f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) , então $G(x) = f(x, x_0)$ tem um máximo relativo em $x = x_0$ e $H(y) = f(x_0, y)$ tem um máximo relativo em $y = y_0$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.8

- $(0, 0)$ e $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$
- (a) nenhuma informação (b) ponto de sela em $(0, 0)$ (c) mínimo relativo em $(0, 0)$ (d) máximo relativo em $(0, 0)$
- (a) ponto de sela em $(0, 0)$ (b) nenhuma informação, pois $(-1, -1)$ não é um ponto crítico (c) um mínimo relativo em $(1, 1)$
- $V = \frac{xy(1-xy)}{x+y}$

14.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nesta seção, estudaremos um novo e poderoso método para maximizar e minimizar uma função sujeita a restrições sobre as variáveis. Esse método nos ajudará a resolver certos problemas de otimização que são difíceis ou impossíveis de resolver usando os métodos estudados na seção anterior.

PROBLEMAS DE EXTREMOS COM RESTRIÇÕES

No Exemplo 6 da última seção, resolvemos o problema de minimizar

$$S = xy + 2xz + 2yz \tag{1}$$

sujeita à restrição

$$xyz - 32 = 0 \tag{2}$$

Este é um caso especial do seguinte problema geral:

14.9.1 Problema do Extremo a Três Variáveis com uma Restrição

Maximize ou minimize a função $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$.

Estaremos interessados também na seguinte versão de duas variáveis deste problema:

14.9.2 Problema do Extremo a Duas Variáveis com uma Restrição

Maximize ou minimize a função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$.

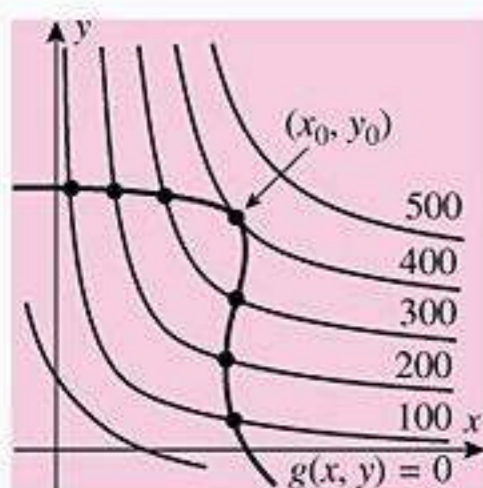
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Uma maneira de atacar problemas desses tipos é resolver a equação de restrição para uma das variáveis em termos das outras e substituir o resultado em f . Isso produz uma nova função de uma ou duas variáveis que incorpora a restrição e pode ser maximizada ou minimizada aplicando os métodos tradicionais. Por exemplo, para resolver o problema no Exemplo 6 da última seção nós substituímos (2) dentro de (1) para obter

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

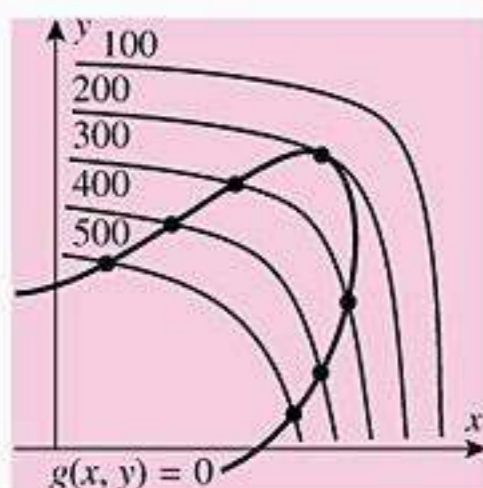
a qual, então, minimizamos encontrando os pontos críticos e aplicando o teste da derivada segunda. Contudo, esta abordagem depende de nossa habilidade de resolver a equação restrita para uma das variáveis em termos das outras. Se isso não puder ser feito, então outros métodos devem ser usados. Um destes métodos, chamado de *método dos multiplicadores de Lagrange*, será discutido nesta seção.

Para motivar o método dos multiplicadores de Lagrange, suponha que estejamos tentando maximizar uma função $f(x, y)$ sujeita a uma restrição $g(x, y) = 0$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando um ponto (x_0, y_0) sobre o gráfico da curva de restrição no qual $f(x, y)$ seja tão grande quanto possível. Para ajudar a localizar tal ponto, vamos construir um mapa de contornos de $f(x, y)$ no mesmo sistema de coordenadas que o gráfico de $g(x, y) = 0$. Por exemplo, a Figura 14.9.1a mostra algumas curvas de nível típicas de $f(x, y) = c$, na qual marcamos $c = 100, 200, 300, 400$ e 500 com o objetivo de ilustração. Nessa figura, cada ponto de interseção de $g(x, y) = 0$ com uma curva de nível é uma candidata para uma solução, uma vez que esses pontos situam-se na curva de restrição. Entre as sete dessas interseções mostradas na figura, o valor máximo de $f(x, y)$ ocorre na interseção (x_0, y_0) , em que $f(x, y)$ tem um valor de 400. Note que, em (x_0, y_0) , a curva de restrição e a curva de nível só se tocam e, portanto, têm uma reta tangente comum nesse ponto. Como



Máximo de $f(x, y)$ é 400

(a)



Mínimo de $f(x, y)$ é 200

(b)

Figura 14.9.1

em (x_0, y_0) e $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$, segue que

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$$

que implica que o gradiente é $\mathbf{0}$ ou normal à curva e restrição em um extremo relativo restrito. Portanto, a curva e restrição $g(x, y) = 0$ é uma curva e neste ponto a função $g(x, y)$, $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla g(x_0, y_0)$ é normal à curva em (x_0, y_0) . Diálogo que existe a seguinte equação

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \tag{4}$$

Dizem que o λ é um **multiplicador de Lagrange** ou, **método dos multiplicadores de Lagrange** para determinar extremos relativos restritos consiste em procurar pontos na curva e restrição $g(x, y) = 0$ onde a equação (4) é satisfeita para algum λ .

14.9.3 TEOREMA Princípio do Extremo Restrito para Duas Variáveis e Uma Restrição Sejam f e g funções de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a curva de restrição $g(x, y) = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da curva. Se f tiver um extremo relativo restrito, então esse extremo ocorre em um ponto (x_0, y_0) da curva de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são paralelos; isto é, existe algum número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

► **Exemplo 1** Em um círculo $x^2 + y^2 = 1$ tem $f(x, y) = xy$ um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

Solução O círculo $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto fechado e limitado e $f(x, y) = xy$ é uma função contínua, portanto, segue o Teorema 14.8.3 que f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto no círculo. Para encontrar os extremos, utilizamos o método de Lagrange para encontrar extremos relativos restritos, então, calculamos f nos extremos relativos para determinar os extremos absolutos.

Queremos maximizar $f(x, y) = xy$ sujeita à restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Primeiramente, procuramos os extremos relativos restritos. Para isso, calculamos o gradiente

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

Da fórmula (5), em que $\nabla g = \mathbf{0}$ e somente em $x = 0$ e $y = 0$, $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todo o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Assim, num extremo relativo restrito em qualquer ponto

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{ou} \quad y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

que é equivalente a seguinte equação

$$y = 2x\lambda \quad \text{e} \quad x = 2y\lambda$$

Segue a seguinte equação que $x = 0$, então $y = 0$ e $y = 0$, então $x = 0$. Em qualquer caso, tem $x^2 + y^2 = 0$, logo a equação restrita $x^2 + y^2 = 1$ não é satisfeita, em outras palavras, x e y não são ambos zero em qualquer ponto da curva.

$$\lambda = \frac{y}{2x} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{x}{2y}$$

Assim, temos

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

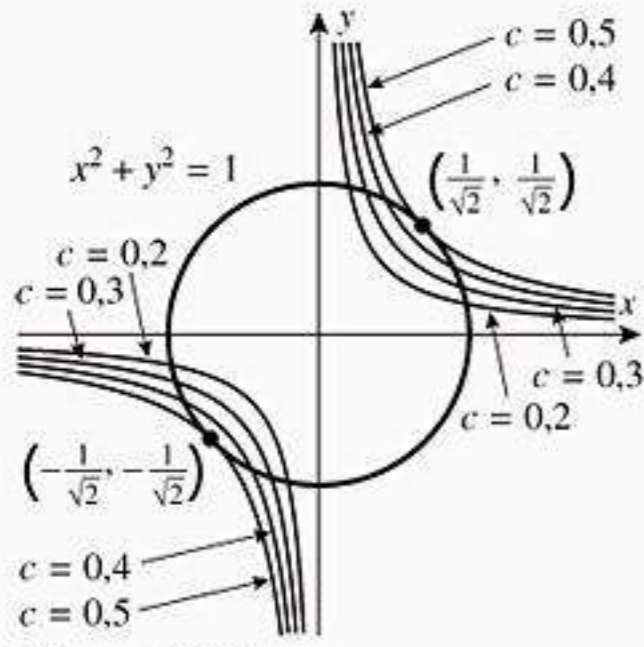


Figura 14.9.3

Dê uma outra solução para o Exemplo 1 usando a parametrização

$$x = c \cos \theta, \quad y = c \sin \theta$$

e a identidade

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

u

$$y^2 = x^2$$

Substitua $y = \pm x$ em $x^2 + y^2 = 1$

$$2x^2 - 1 = 0$$

Assim, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Portanto, os pontos críticos são $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. A restrição é xy , portanto, conclui-se:

x, y	$1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$
xy	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$

De fato, a função $f(x, y) = xy$ tem um máximo absoluto $1/2$ nos pontos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Embora não tenha interesse aqui, também se pode verificar que f tem um mínimo absoluto $-1/2$ nos pontos $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. A Figura 14.9.3 mostra a curva $xy = c$ e a curva restrita na vizinhança do máximo da função f na figura anterior para $c = 1/2$.

Se c for uma constante, então as funções $g(x, y) = xy + c$ e $g(x, y) = xy - c$ têm o mesmo gradiente, uma vez que a constante c desaparece quando diferenciamos. Conseqüentemente, não é essencial reescrever uma restrição da forma $g(x, y) = c$ como $g(x, y) - c = 0$ para poder aplicar o princípio do extremo restrito. Assim, no último exemplo, poderíamos ter mantido a restrição na forma $x^2 + y^2 = 1$ e, então, tomar $g(x, y) = x^2 + y^2$ em vez de $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Exemplo 2 Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a dimensão do retângulo com perímetro p e área máxima.

Solução Sejam

$$x = \text{comprimento do retângulo}, \quad y = \text{largura do retângulo}, \quad A = \text{área do retângulo}$$

Queremos maximizar $A = xy$ sujeito à restrição

$$2x + 2y = p, \quad 0 \leq x, y \tag{7}$$

onde c é o perímetro. A função objetivo $f(x, y) = xy$ é uma função contínua, logo é razoável esperar que exista um máximo relativo restrito. Como f é 0 na fronteira, o máximo relativo restrito deve ocorrer no interior. Se $g(x, y) = 2x + 2y$, então temos

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

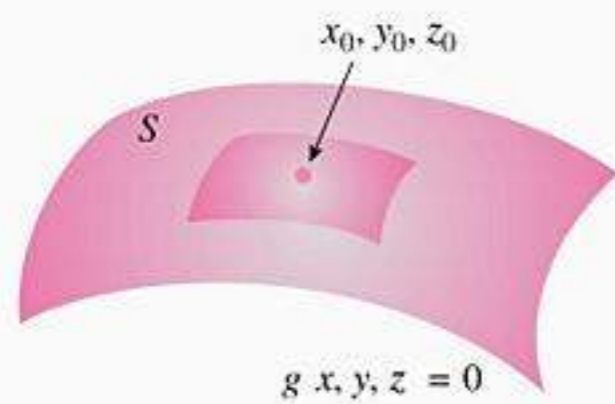
Então, $\nabla f = \lambda \nabla g$, segue-se que

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

em um máximo relativo restrito, λ é diferente de zero. Portanto, temos

$$y = 2\lambda \quad \text{e} \quad x = 2\lambda$$

Eliminando λ da equação (7), obtemos $x = y$, ou seja, o retângulo é realmente um quadrado. Substituindo $x = y$ em (7), obtemos $x = p/4$ e $y = p/4$.



Um máximo relativo restrito ocorre em (x_0, y_0, z_0) se $f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$ em todos pontos de S próximos de (x_0, y_0, z_0)

Figura 14.9.4

■ TRÊS VARIÁVEIS E UMA RESTRIÇÃO

mét multica re e Lagrange e também er u a ara ma imi zar u minimizar uma unçã e três ariá ei $f(x, y, z)$ u eita à re triçã $g(x, y, z) = 0$ m regra, gráfíc e $g(x, y, z) = 0$ erá a guma u er ície S n e aç tri imen i na im, nt e i ta ge métric , r b ema é ma imizar u minimizar $f(x, y, z)$, uan x, y, z ariá bre a u er ície S Figura 14.9.4 m e c tume, i tinguirem entre e trem re ati e ab ut Direm ue f tem um **máximo mínimo absoluto restrito** em (x_0, y_0, z_0) e $f(x_0, y_0, z_0)$ é mai r men r a r e $f(x, y, z)$ em S , e irem ue f tem um **máximo mínimo relativo restrito** em (x_0, y_0, z_0) e $f(x_0, y_0, z_0)$ r mai r men r a r e $f(x, y, z)$ em t nt e S ue e tã “ ró i m ” e (x_0, y_0, z_0)

eguinte te rema, ue enunciam em r a, é aná g tri imen i na e rema 14.9.3

14.9.4 TEOREMA Princípio do Extremo Restrito para Três Variáveis e Uma Restrição Sejam f e g funções de três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a superfície de restrição $g(x, y, z) = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto dessa superfície. Se f tiver um extremo relativo restrito, então este extremo ocorre em um ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ são paralelos isto é, existe algum número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

► **Exemplo 3** Determine nt a e era $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ue e tã mai ró im e mai a a ta nt 1, 2, 2

Solução Para e itar ra icai , eterminarem nt a e era ue minimizem e ma imizem *quadrado* a i tância a nt 1, 2, 2 im, uerem enc ntrar e trem re ati e

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

u eita à re triçã

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \tag{8}$$

Se t marm $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, então $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ De em , $\nabla g = \mathbf{0}$ e e mente e $x = y = z = 0$ Segue ue $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em ua uer nt a e era 8 e, rtant , e trem re ati re trit e em c rrrer em nt n uai

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

t é,

$$2(x - 1)\mathbf{i} + 2(y - 2)\mathbf{j} + 2(z - 2)\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

ue e a à e uaçõe

$$2(x - 1) = 2x\lambda, \quad 2(y - 2) = 2y\lambda, \quad 2(z - 2) = 2z\lambda \tag{9}$$

P em u r ue x, y e z ã ã nu , uma ez ue $x = 0$ ã ati az a rimeira e uaçã , $y = 0$ ã ati az a egun a e $z = 0$ ã ati az a terceira im, em ree cre er 9 c m

$$\frac{x - 1}{x} = \lambda, \quad \frac{y - 2}{y} = \lambda, \quad \frac{z - 2}{z} = \lambda$$

ua rimeira e uaçõe im icam ue

$$\frac{x - 1}{x} = \frac{y - 2}{y}$$

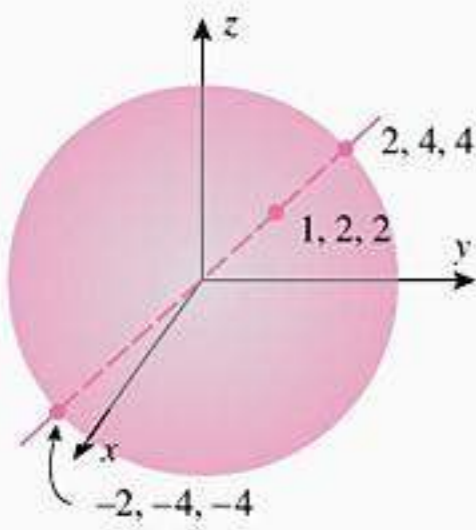


Figura 14.9.5

ue egue

$$y = 2x \tag{10}$$

na gamente, a rimeira e a terceira e uaçõe im ícam ue

$$z = 2x \tag{11}$$

Sub tituin 10 e 11 na e uaçã e re triçã 8, btem

$$9x^2 = 36 \text{ ou } x = \pm 2$$

Sub tituin e e a re em 10 e 11, btem í nt

$$(2, 4, 4) \text{ e } (-2, -4, -4)$$

ma ez ue $f(2, 4, 4) = 9$ e $f(-2, -4, -4) = 81$, egue ue $(2, 4, 4)$ é nt a e era mai ró im a $(1, 2, 2)$ e $(-2, -4, -4)$ é nt ue e tá mai a a ta **Figura 14.9.5** ◀

eguir u arem mu tí íca re e Lagrange ara re er r b ema E em a eçã anteri r

► **Exemplo 4** e mu tí íca re e Lagrange ara eterminar a ímen õe e uma cai a retangu ar aberta n t , c m um ume e 32 é 3 e cu a c n truçã re ueira uma uanti a e mínima e materia

Solução m a n taçã intr uzi a n E em a ú tima eçã , r b ema é minimi zar a área e u er ície

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

u eita à re triçã ume

$$xyz = 32 \tag{12}$$

Se t marm $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ e $g(x, y, z) = xyz$, entã

$$\nabla f = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k} \text{ e } \nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

Segue e ue $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em ua uer nt a u er ície $xyz = 32$, uma ez ue x, y e z ã nã nu ne ta u er ície ím, num e trem re ati re trit e em ter $\nabla f = \lambda \nabla g$, í t é,

$$(y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k} = \lambda(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$$

E a c n içã rnece a trê e uaçõe

$$y + 2z = \lambda yz, \quad x + 2z = \lambda xz, \quad 2x + 2y = \lambda xy$$

m x, y e z ã nã nu , e a e uaçõe em er ree crita c m

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \lambda, \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = \lambda, \quad \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = \lambda$$

Da ua rimeira e uaçõe ,

$$y = x \tag{13}$$

e a rimeira e terceira e uaçõe

$$z = \frac{1}{2}x \tag{14}$$

Sub tituin 13 e 14 na re triçã e ume 12 btem

$$\frac{1}{2}x^3 = 32$$

E a e uaçã , unt c m 13 e 14, rnece

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2$$

ue é c n í tente c m re u ta ue í btí n E em a ú tima eçã ◀

á ariaçõe n mét mu tí íca re e Lagrange ue em er u a a ara re er r b ema c m ua u mai re triçõe ntu , nã í cutirem a uie e tó íc

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.9 (Ver página 1015 para respostas.)

- (a) Suponha que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam diferenciáveis na origem, que tenham gradientes não-nulos nesse ponto e que $g(0, 0) = 0$. Se o valor máximo de $f(x, y)$ condicionado à restrição $g(x, y) = 0$ ocorrer na origem, qual é a relação entre a reta tangente ao gráfico de $g(x, y) = 0$ e a reta tangente na origem à curva de nível de f por $(0, 0)$?
- (b) Suponha que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sejam diferenciáveis na origem, que tenham gradientes não-nulos nesse ponto e que $g(0, 0, 0) = 0$. Se o valor máximo de $f(x, y, z)$ condicionado à restrição $g(x, y, z) = 0$ ocorrer na origem, qual é a relação entre o plano tangente ao gráfico da restrição $g(x, y, z) = 0$ e o plano tangente na origem à superfície de nível de f por $(0, 0, 0)$?
- O valor máximo de $x + y$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$ é _____.
- O valor máximo de $x + y + z$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é _____.
- Os valores máximo e mínimo de $2x + 3y$ sujeitos à restrição $x + y = 1$, onde $0 \leq x, 0 \leq y$, são _____ e _____, respectivamente.

EXERCÍCIOS 14.9 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

- A figura abaixo mostra o gráfico da reta $x + y = 4$ e as curvas de nível de altura $c = 2, 4, 6$ e 8 para a função $f(x, y) = xy$.
 - Use a figura para encontrar o valor máximo da função $f(x, y) = xy$ sujeita à restrição $x + y = 4$ e explique seu raciocínio.
 - Como podemos dizer a partir da figura que a resposta em (a) não é o valor mínimo de f sujeita à restrição?
 - Use multiplicadores de Lagrange para verificar seu trabalho.
- A figura abaixo mostra o gráfico da reta $3x + 4y = 25$ e as curvas de nível de altura $c = 9, 16, 25, 36$ e 49 para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.
 - Use a figura para encontrar o valor mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição $3x + 4y = 25$ e explique seu raciocínio.
 - Como podemos dizer a partir da figura que a resposta em (a) não é o valor máximo de f sujeito à restrição?
 - Use multiplicadores de Lagrange para verificar seu trabalho.

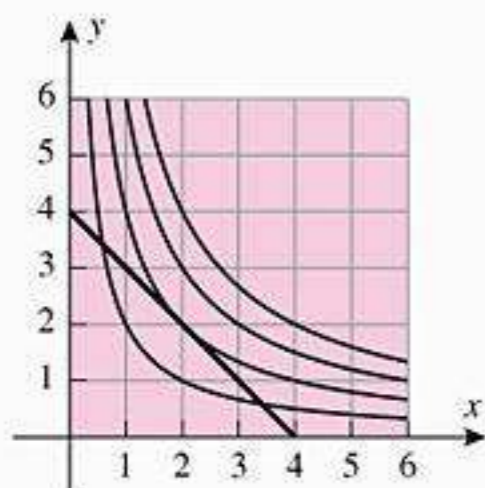


Figura Ex-1

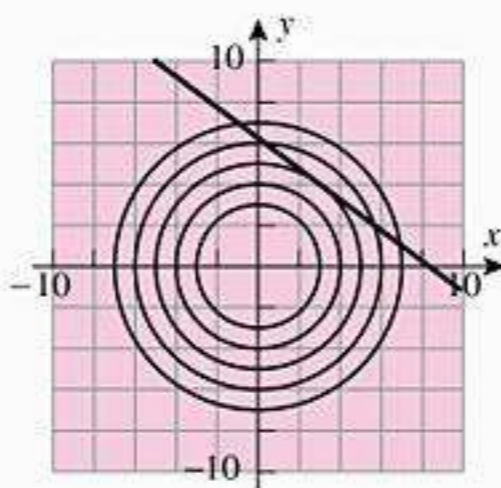


Figura Ex-2

- Use um recurso gráfico para gerar o círculo $x^2 + y^2 = 25$ e duas curvas de nível distintas de $f(x, y) = x^2 - y$ que somente toquem o círculo.
 - Use os resultados obtidos na parte (a) para aproximar os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 25$.

- Verifique as suas aproximações da parte (b) usando multiplicadores de Lagrange.
- Se o leitor dispuser de um CAS que possa gerar curvas implícitas, use-o para fazer o gráfico do círculo $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$ e duas curvas de nível distintas de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ que somente toquem o círculo.
 - Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar o valor mínimo de f sujeita à restrição $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$.
 - Confirme graficamente que o valor encontrado em (b) é um mínimo e não um máximo.
 - Verifique suas aproximações usando multiplicadores de Lagrange e resolvendo as equações necessárias numericamente.

5-12 Use multiplicadores de Lagrange para obter os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição dada. Além disso, encontre os pontos nos quais esses valores extremos ocorrem.

- $f(x, y) = xy; 4x^2 + 8y^2 = 16$
- $f(x, y) = x^2 - y^2; x^2 + y^2 = 25$
- $f(x, y) = 4x^3 + y^2; 2x^2 + y^2 = 1$
- $f(x, y) = x - 3y - 1; x^2 + 3y^2 = 16$
- $f(x, y, z) = 2x + y - 2z; x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- $f(x, y, z) = 3x + 6y + 2z; 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$
- $f(x, y, z) = xyz; x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13-20 Resolva usando multiplicadores de Lagrange.

- Determine o ponto da reta $2x - 4y = 3$ que está mais próximo da origem.
- Encontre o ponto da reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo de $(4, 2)$.
- Encontre o ponto do plano $x + 2y + z = 1$ que está mais próximo da origem.
- Encontre o ponto do plano $4x + 3y + z = 2$ que está mais próximo de $(1, -1, 1)$.

- 17. Enc ntre nt círculo $x^2 + y^2 = 45$ ue e tã mai ró im e a a ta e 1, 2
- 18. Enc ntre nt a u er ície $xy - z^2 = 1$ ue e tã mai ró im a rigem
- 19. Enc ntre um et rn e aç tri imen i na cu c m riment e a 5 e cu c m nente têm a mai r ma í e
- 20. Su nha ue a tem eratura em um nt x, y e uma aca e meta e a $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ ma rmiga, an an bre a aca, erc rre um círculo e rai 5 centra na rigem Qua é a mai r e a men r tem eratura enc ntra a e a rmiga

21-28 e mu tí ica re e Lagrange ara re er r be ma in ica a Seção 14.8

- 21. E erc íci 34
- 22. E erc íci 35
- 23. E erc íci 3
- 24. E erc íci 37
- 25. E erc íci 39
- 26. E erc íci 41 a e b
- 27. E erc íci 42
- 28. E erc íci 43

- c** 29. Se am α, β e γ ângu e um triângu
 a e mu tí ica re e Lagrange ara eterminar a r má im e $f(\alpha, \beta, \gamma) = c$ $\alpha < c$ $\beta < c$ $\gamma < c$ e etermine ângu ara uai má im c rre

- b E re e $f(\alpha, \beta, \gamma)$ c m uma unção a ena e α e β e u e um S ara azer gráfico e a unção e ua ariá ei n firme ue re u ta bti na arte a é c n i tente c m gráfico

30. figura abai m tra a inter eção arab ói e e í tic $z = x^2 + 4y^2$ e ci in r círculo ar ret $x^2 + y^2 = 1$ e mu tí ica re e Lagrange ara eterminar nt mai a t e mai bai a cur a e inter eção

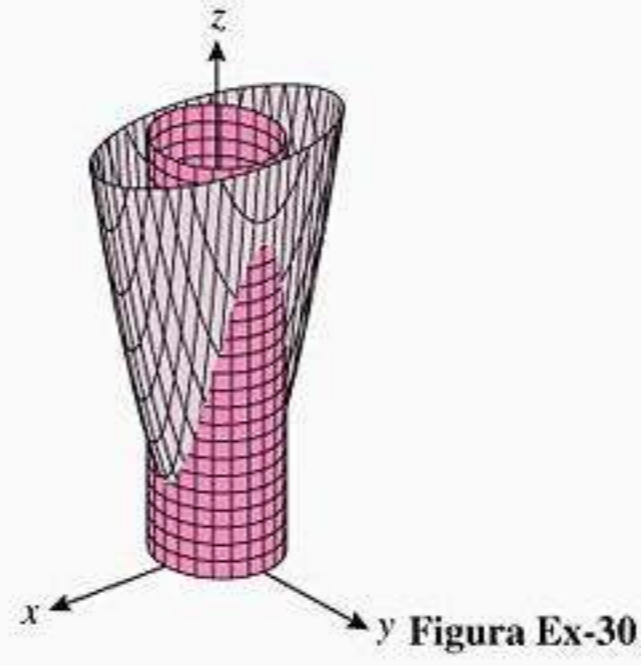


Figura Ex-30

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.9

1. a Sã a me ma reta b Sã me m an 2. $\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{3}$ 4. 3 2

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO Recurso Gráfico

- 1. Se a $f(x, y) = e^x \ln y$ btenha
 a $f_x(x, y)$, e^x b $f_r + s, rs$
- 2. E b ce míni e f u an inha c ntínua ara a arte a r nteira inc úí a n míni e inha trace a a ara a arte nã inc úí a
 a $f(x, y) = \ln xy - 1$ b $f(x, y) = \arcsen x / e^y$
- 3. tre ue a cur a e ní e c ne $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a arab ói e $z = x^2 + y^2$ ã círculo e aç a um e b ç ue i u tre a i erença entre ma a e c nt rn a ua unçãoe
- 4. a Em a a ra , e cre a a u er ície e ní e a unção $f(x, y, z) = a^2x^2 + a^2y^2 + z^2$, n e $a > 0$
 b Enc ntre uma unção $f(x, y, z)$ cu a u er ície e ní e rmem uma am íia e arab ói e círculo ue e abrem na ireção z iti a

5-6 a btenha imite a unção $f(x, y)$ uan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ e e e i tire b etermine e f é c ntínua em $(0, 0)$

5. $f(x, y) = \frac{x^4 - x + y - x^3y}{x - y}$

6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- 7. a ma c m anhia abrica i tí e m nit re e c m uta re : a rã e e a ta re ução Su nha ue $P(x, y)$ e a ucr ue re u ta a r ução e a en a e x m ní t re a rã e y m nit re e a ta re ução ue re re entam a ua eri a a arciai $\partial P / \partial x$ e $\partial P / \partial y$
 b Su nha ue a tem eratura n in tante t em um nt (x, y) bre a u er ície e um ag e a $T(x, y, t)$ ue re re entam a eri a a arciai $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$ e $\partial T / \partial t$
- 8. Se a $z = f(x, y)$
 a E re e $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$ c m imite
 b Em a a ra , ue a eri a a $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ izem bre a u er ície $z = f(x, y)$
 c Em a a ra , ue a eri a a $\partial z / \partial x(x_0, y_0)$ e $\partial z / \partial y(x_0, y_0)$ izem bre a ta a e ariacã e z em re açã a x e y

9. A pressão em N/m^2 de um gás em um cilindro é dada por $P = 10T/V$ com T em kelvins (K) e V em m^3 .
- (a) Se T crescer a uma taxa de 3K/min com V mantido fixado em $2,5 \text{ m}^3$, determine a taxa à qual a pressão está variando quando $T = 50\text{K}$.
- (b) Se T for mantido fixado em 50 K enquanto que V está decrescendo a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{min}$, determine a taxa à qual a pressão está variando quando $V = 2,5 \text{ m}^3$.
10. Obtenha a inclinação da reta tangente no ponto $(1, -2, -3)$ da curva de interseção da superfície $z = 5 - 4x^2 - y^2$ com
- (a) o plano $x = 1$ (b) o plano $y = -2$.

11–14 Verifique a afirmação.

11. Se $w = \text{tg}(x^2 + y^2) + x\sqrt{y}$, então $w_{xy} = w_{yx}$.
12. Se $w = \ln(3x - 3y) + \cos(x + y)$ então $\partial^2 w / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial y^2$.
13. Se $F(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$, então F satisfaz a equação $F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0$.
14. Se $f(x, y, z) = xyz + x^2 + \ln(y/z)$, então $f_{xyz} = f_{zxy}$.
15. O que Δf e df representam e como se relacionam?
16. Se $w = x^2y - 2xy + y^2x$, encontre o incremento Δw e a diferencial dw se (x, y) varia de $(1, 0)$ para $(1,1; -0,1)$.
17. Use diferenciais para estimar a variação no volume $V = \frac{1}{3}x^2h$ de uma pirâmide com uma base quadrada, quando sua altura h está crescendo de 2 a $2,2 \text{ m}$, enquanto a dimensão x da base está decrescendo de 1 a $0,9 \text{ m}$. Compare isso com ΔV .
18. Encontre a aproximação linear local de $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ em $(\frac{1}{3}, \pi)$.
19. Suponha que z seja uma função diferenciável de x e y com

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 2$$

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis de t com $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $x'(0) = -\frac{1}{2}$ e (na composição) $z'(0) = 2$, encontre $y'(0)$.

20. Em cada parte, use o Teorema 14.5.3 para determinar dy/dx .
- (a) $3x^2 - 5xy + \text{tg } xy = 0$
- (b) $x \ln y + \text{sen}(x - y) = \pi$
21. Dado que $f(x, y) = 0$, use o Teorema 14.5.3 para expressar d^2y/dx^2 em termos das derivadas parciais de f .
22. Seja $z = f(x, y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$.
- (a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{dt}$$

- (b) Use as fórmulas da parte (a) para ajudar a encontrar uma fórmula para d^2z/dt^2 .

23. (a) Como estão relacionados a derivada direcional e o gradiente de uma função?
- (b) Sob quais condições a derivada direcional de uma função diferenciável é 0 ?
- (c) Em que direções e sentidos a derivada direcional de uma função diferenciável tem seu valor máximo? E o valor mínimo?
24. Em palavras, o que a derivada $D_u f(x_0, y_0)$ nos diz sobre a superfície $z = f(x, y)$?
25. Encontre $D_u f(-3, 5)$ para $f(x, y) = y \ln(x + y)$ se $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.
26. Suponha que $\nabla f(0, 0) = 2\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$.

- (a) Encontre um vetor unitário \mathbf{u} tal que $D_u f(0, 0)$ seja um máximo. Qual é esse valor máximo?
- (b) Encontre um vetor unitário \mathbf{u} tal que $D_u f(0, 0)$ seja um mínimo. Qual é esse valor mínimo?
27. No ponto $(1, 2)$, a derivada direcional $D_u f$ é $2\sqrt{2}$ na direção e sentido de $P_1(2, 3)$ e é -3 na direção e sentido de $P_2(1, 0)$. Determine $D_u f(1, 2)$ na direção e sentido da origem.
28. Obtenha equações para o plano tangente e a reta normal para a dada superfície em P_0 .
- (a) $z = x^2 e^{2y}$; $P_0(1, \ln 2, 4)$
- (b) $x^2 y^3 z^4 + xyz = 2$; $P_0(2, 1, -1)$
29. Encontre todos os pontos da superfície $z = 2 - xy$ nos quais a reta normal passa pela origem.
30. Mostre que para todos os planos tangentes à superfície

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$$

a soma dos quadrados das coordenadas dos pontos de corte com os eixos x, y e z é 1 .

31. Determine todos os pontos do parabolóide $z = 9x^2 + 4y^2$ nos quais a reta normal é paralela à reta que passa pelos pontos $P(4, -2, 5)$ e $Q(-2, -6, 4)$.
32. Suponha que as equações do movimento de uma partícula sejam $x = t - 1$, $y = 4e^{-t}$, $z = 2 - \sqrt{t}$, onde $t > 0$. Determine, até o décimo de grau mais próximo, o ângulo agudo entre o vetor velocidade e a reta normal à superfície $(x^2/4) + y^2 + z^2 = 1$ nos pontos em que a partícula colide com a superfície. Use uma calculadora com a capacidade de encontrar raízes, quando necessário.

33–36 Localize todos os mínimos relativos, máximos relativos e os pontos de sela.

33. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$
34. $f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$
35. $f(x, y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$.
36. $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

37–39 Resolva estes exercícios de duas maneiras:

(a) Use restrições para eliminar uma variável.

(b) Use multiplicadores de Lagrange.

37. Encontre todos extremos relativos de x^2y^2 sujeitos à restrição $4x^2 + y^2 = 8$.

38. Determine a dimensão da caixa retangular e o volume máximo em função da área crítica xy e z da seguinte forma:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$$

39. Encontre a corrente na figura abaixo, onde I é a corrente e I_1, I_2, I_3 são as correntes através dos resistores R_1, R_2, R_3 , respectivamente, e a potência dissipada em cada resistor é um mínimo. Determine a razão $I_1 : I_2 : I_3$ e a energia dissipada em R_i e $I_i^2 R_i (i = 1, 2, 3)$ e $I_1 + I_2 + I_3 = I$.

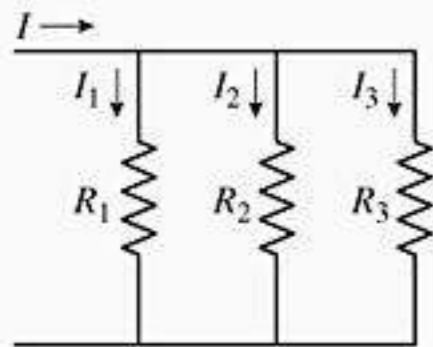


Figura Ex-39

40-42 Em Economia, um *modelo de produção* é uma relação matemática entre o produto e uma combinação de trabalho e equipamento. A seguinte equação foi usada em 1920, quando Paul Douglas, a primeira equação de produção, para determinar a produção P em função do trabalho L e do equipamento K numa economia:

$$P = cL^\alpha K^\beta$$

onde c é uma constante e α e β são constantes tais que $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$. É chamado *modelo de produção de Cobb-Douglas*. Tipicamente, P, L e K são medidos em termos de dólares. Este exercício examina a elasticidade

40. a) Encontre a elasticidade da produção em relação ao trabalho e ao equipamento $P = L^{0.75} K^{0.25}$. Encontre a curva de nível $P = L, K = 1, P = L, K = 2$ e $P = L, K = 3$ em um sistema de coordenadas LK . Linearize a curva de nível em $(1, 1)$ e compare numericamente e graficamente, mas não tente encontrar a curva de nível a partir da equação.

b) Faça um esboço gráfico para fazer um mapa de contorno mais preciso.

41. a) Encontre $\partial P / \partial L$ e $\partial P / \partial K$ para a equação de produção $P = cL^\alpha K^\beta$.

b) A derivada $\partial P / \partial L$ é chamada *produtividade marginal do trabalho* e a derivada $\partial P / \partial K$ é chamada *produtividade marginal do capital*. Encontre a quantidade e o significado em termos relativos.

c) Se $\alpha + \beta = 1$, então P atende a equação de homogeneidade

$$K \frac{\partial P}{\partial K} + L \frac{\partial P}{\partial L} = P$$

42. Encontre a elasticidade da produção

$$P = 1000 L^{0.6} K^{0.4}$$

a) Encontre a máxima produção P com o trabalho custando 50,00 dólares e o equipamento custando 100,00 dólares e o custo total do trabalho e do equipamento é fixado em 200.000,00.

b) Distribua os 200.000,00 entre o trabalho e o equipamento para atingir a máxima produção P .

INTEGRAIS MÚTIPLAS

Pois as coisas deste mundo não podem ser reveladas sem um conhecimento de Matemática.

— **Roger Bacon**
Matemático e Cientista

Neste capítulo ampliaremos o conceito de integral definida para funções de duas e três variáveis. Enquanto as funções de uma variável são, geralmente, integradas em intervalos, as funções de duas variáveis são usualmente integradas em regiões do espaço bidimensional e as funções de três variáveis em regiões do espaço tridimensional. O cálculo de tais integrais requer algumas técnicas novas que serão o foco central deste capítulo. Uma vez que tenhamos desenvolvido os métodos básicos para integrar funções de duas e três variáveis, mostraremos como essas integrais podem ser usadas para calcular áreas de superfícies e volumes de sólidos; e mostraremos, também, como elas podem ser usadas para determinar massas e centros de gravidade de chapas planas e sólidos tridimensionais. Além do nosso estudo de integração, generalizaremos o conceito de curva paramétrica no espaço bidimensional para o de superfície paramétrica no espaço tridimensional. Isso nos permitirá trabalhar com uma variedade maior de superfícies do que era possível anteriormente e proporcionará uma ferramenta poderosa para gerar superfícies usando computadores e outros recursos computacionais gráficos.

Foto: Os métodos de integração estudados neste capítulo são necessários para encontrar a área de superfícies complexas como as utilizadas no projeto do Aeroporto Internacional de Denver, nos EUA.

15.1 INTEGRAIS DUPLAS

A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Nesta seção, discutiremos a integral dupla, que é a extensão para funções de duas variáveis.

■ VOLUME

Lembre-se que a integral definida de uma função de uma variável

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \quad (1)$$

originou-se do problema da determinação de áreas sob curvas. [Na expressão à direita em (1), usamos o “limite quando $n \rightarrow +\infty$ ” para sintetizar o processo pelo qual aumentamos o número de subintervalos de $[a, b]$ de tal modo que os comprimentos dos subintervalos tendam a zero.] As integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema da determinação de volumes sob superfícies:

15.1.1 O PROBLEMA DO VOLUME Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região R do plano xy , encontrar o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = f(x, y)$ e a região R (Figura 15.1.1).

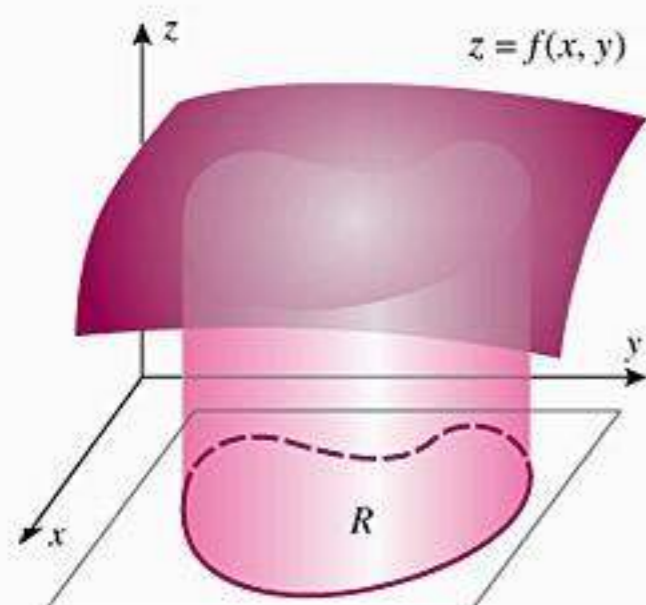


Figura 15.1.1

Adiante, adicionaremos mais restrições à região R , mas por enquanto vamos supor tão-somente que a região inteira possa ser envolvida por um retângulo apropriadamente grande cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados. Isto assegura que R não se estende indefinidamente em qualquer direção.

O procedimento para calcular o volume V do sólido da Figura 15.1.1 é similar ao processo limitante usado para determinar áreas, exceto que, agora, os elementos de aproximação são paralelepípedos retangulares em vez de retângulos. Procedemos como segue:

- Usando retas paralelas aos eixos coordenados, divida o retângulo que envolve a região R em sub-retângulos e exclua das considerações todos os sub-retângulos que contêm quaisquer pontos fora de R . Sobram somente retângulos que são subconjuntos de R (Figura 15.1.2). Suponha que haja n desses sub-retângulos e denote a área do k -ésimo retângulo por ΔA_k .
- Escolha um ponto arbitrário em cada sub-retângulo e denote o ponto do k -ésimo sub-retângulo por (x_k^*, y_k^*) . Como mostrado na Figura 15.1.3, o produto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ é o volume de um paralelepípedo retangular com área da base ΔA_k e altura $f(x_k^*, y_k^*)$, de modo que o somatório

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

pode ser considerado como uma aproximação do volume V do sólido inteiro.

- Há duas fontes de erro na aproximação: em primeiro lugar, os paralelepípedos têm topo plano, enquanto que a superfície $z = f(x, y)$ pode ser curva; em segundo lugar, os retângulos que formam as bases dos paralelepípedos não cobrem completamente a região R . Entretanto, se repetirmos o processo acima com cada vez mais subdivisões, de modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos retângulos da base tendam para zero, então é plausível que os erros de ambos tipos tendam para zero e o volume exato do sólido seja

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

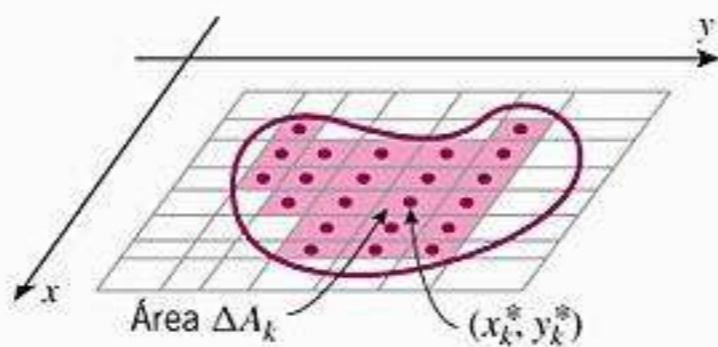


Figura 15.1.2

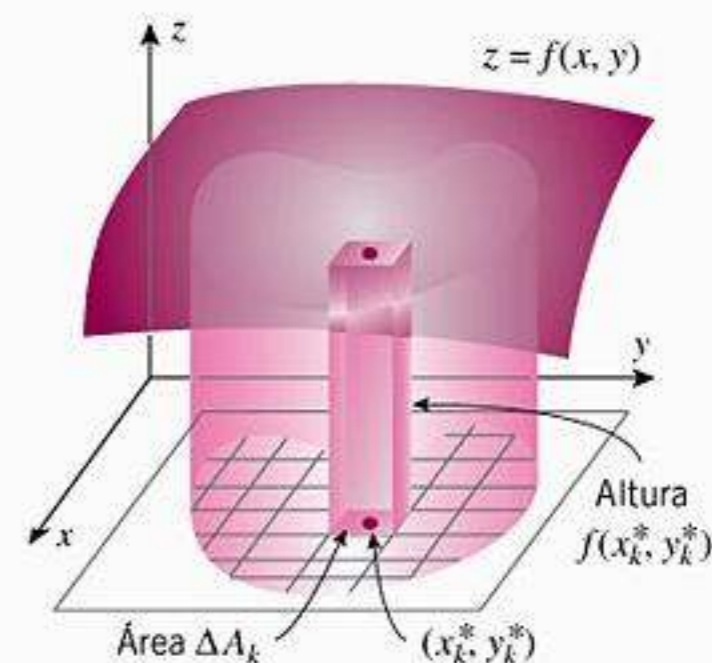


Figura 15.1.3

Essa fórmula sugere a definição seguinte.

Apesar da Definição 15.1.2 ser satisfatória para nossos propósitos atuais, há vários problemas que precisam ser resolvidos antes que possa ser considerada como uma definição matematicamente rigorosa. Por exemplo, teríamos de provar que o limite existe realmente e que seu valor independe de como os pontos $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$ são escolhidos. Prova-se que isso é verdadeiro se a função f for contínua na região R e se essa região não for muito "complicada". Os detalhes escapam ao escopo deste livro.

15.1.2 DEFINIÇÃO (Volume sob uma Superfície) Se f é uma função de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região R do plano xy , então o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = f(x, y)$ e a região R é definido por

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad (2)$$

Aqui, $n \rightarrow +\infty$ indica o processo de aumentar o número de sub-retângulos do retângulo que envolve R de tal modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos sub-retângulos tendam a zero.

Supõe-se na Definição 15.1.2 que f seja não-negativa na região R . Se f for contínua em R e possuir tanto valores positivos como negativos, então o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad (3)$$

não representa mais o volume entre R e a superfície $z = f(x, y)$; representa, sim, uma diferença de volumes – o volume entre R e a parte da superfície acima do plano xy menos o volume entre R e a parte da superfície abaixo do plano xy . Chamamos essa diferença de **volume líquido com sinal** entre a região R e a superfície $z = f(x, y)$.

■ DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL DUPLA

A notação $n \rightarrow +\infty$ em (3), da mesma forma que na Definição 15.1.2, contém todo o processo pelo qual o retângulo que envolve a região R é, repetidamente, subdividido de tal modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos sub-retângulos tendam a zero. Note que, subdividindo de tal modo que os comprimentos dos sub-retângulos tendam a zero, forçamos a norma da partição do comprimento do retângulo que envolve R tender a zero. Analogamente, subdividindo de tal modo que as larguras dos sub-retângulos tendam a zero, forçamos a norma da partição da largura do retângulo que envolve R tender a zero. Assim, estendemos o conceito transmitido pela Fórmula (1), em que a integral definida de uma função de uma variável é expressa como um limite de somas de Riemann. Por extensão, as somas em (3) também são denominadas **somas de Riemann** e o limite das somas de Riemann é denotado por

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad (4)$$

que é denominada **integral dupla** de $f(x, y)$ em R .

Se f for contínua e não-negativa na região R , então a Fórmula (2) do volume pode ser expressa como

$$V = \iint_R f(x, y) dA \quad (5)$$

Se f possui tanto valores positivos como negativos em R , então um valor positivo para a integral dupla de f em R significa que há mais volume acima do que abaixo de R ; um valor negativo para a integral dupla significa que há mais volume abaixo do que acima de R ; e o valor zero significa que o volume acima é igual ao volume abaixo de R .

■ CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS

Com exceção dos casos mais simples, é impraticável obter o valor de uma integral dupla pelo limite (4). Entretanto, vamos mostrar, agora, como calcular integrais duplas através do cálculo

lo de duas integrais simples sucessivas. No restante desta seção, vamos limitar nossa discussão ao caso em que R é um retângulo; na próxima seção, consideraremos integrais duplas em regiões mais complicadas.

As derivadas parciais de uma função $f(x, y)$ são calculadas mantendo-se uma das variáveis fixa e diferenciando em relação à outra variável. Consideremos o inverso deste processo, *integração parcial*. Os símbolos

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad \text{e} \quad \int_c^d f(x, y) dy$$

denotam *integrais definidas parciais*; a primeira integral, chamada *integral definida parcial em relação a x* , é calculada mantendo y fixo e integrando em relação a x e a segunda integral, chamada *integral definida parcial em relação a y* , é calculada mantendo x fixo e integrando em relação a y . Como mostra o exemplo a seguir, a integral definida parcial em relação a x é uma função de y e a integral definida parcial em relação a y é uma função de x .

► **Exemplo 1**

$$\int_0^1 xy^2 dx = y^2 \int_0^1 x dx = \frac{y^2 x^2}{2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 xy^2 dy = x \int_0^1 y^2 dy = \frac{xy^3}{3} \Big|_{y=0}^1 = \frac{x}{3} \blacktriangleleft$$

Uma integral definida parcial em relação a x é uma função de y e, portanto, pode ser integrada em relação a y ; de modo similar, uma integral definida parcial em relação a y pode ser integrada em relação a x . Esse processo de integração em dois estágios é chamado *integração iterada* (ou *repetida*). Introduzimos a seguinte notação:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \tag{6}$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \tag{7}$$

Essas integrais são chamadas *integrais iteradas*.

► **Exemplo 2** Calcule

(a) $\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx$ (b) $\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy$

Solução (a)

$$\begin{aligned} \int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx &= \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy) dy \right] dx \\ &= \int_1^3 (40y - xy^2) \Big|_{y=2}^4 dx \\ &= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)] dx \\ &= \int_1^3 (80 - 12x) dx \\ &= (80x - 6x^2) \Big|_1^3 = 112 \end{aligned}$$

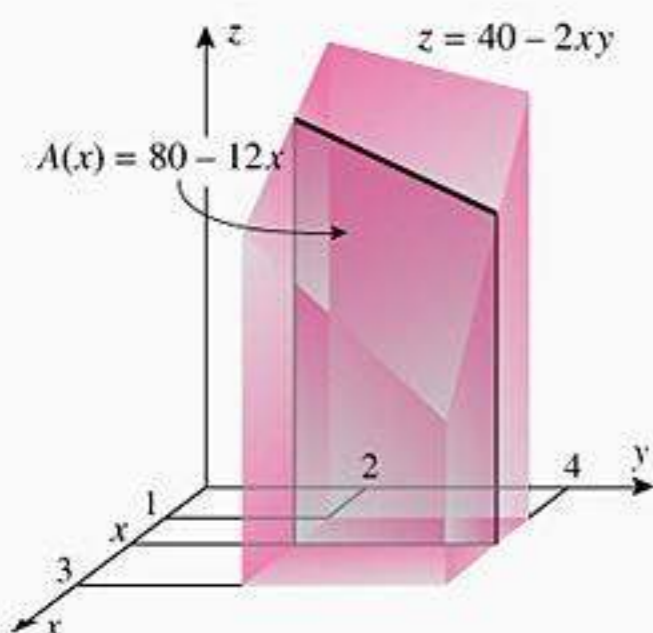


Figura 15.1.4

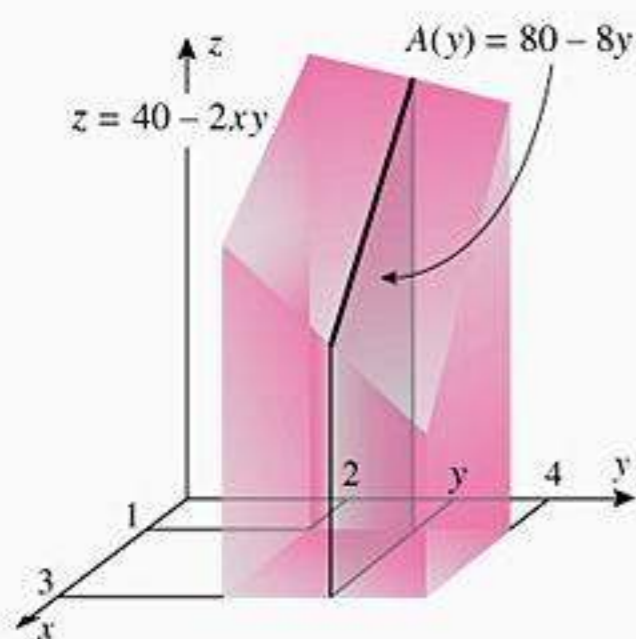


Figura 15.1.5

Muitas vezes, para simplificar, denotamos o retângulo

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

por $[a, b] \times [c, d]$.

Solução (b)

$$\begin{aligned} \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy &= \int_2^4 \left[\int_1^3 (40 - 2xy) dx \right] dy \\ &= \int_2^4 (40x - x^2y) \Big|_{x=1}^3 dy \\ &= \int_2^4 [(120 - 9y) - (40 - y)] dy \\ &= \int_2^4 (80 - 8y) dy \\ &= (80y - 4y^2) \Big|_2^4 = 112 \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Não é por acaso que ambas partes do Exemplo 2 tenham produzido a mesma resposta. Considere o sólido S limitado acima pela superfície $z = 40 - 2xy$ e abaixo pelo retângulo R definido por $1 \leq x \leq 3$ e $2 \leq y \leq 4$. Pelo método de fatiamento discutido na Seção 7.2 do Volume 1, o volume de S é dado por

$$V = \int_1^3 A(x) dx$$

onde $A(x)$ é a área da seção transversal vertical de S tomada perpendicularmente ao eixo x (Figura 15.1.4). Para um valor fixado de x , com $1 \leq x \leq 3$, $z = 40 - 2xy$ é uma função de y , portanto a integral

$$A(x) = \int_2^4 (40 - 2xy) dy$$

representa a área sob o gráfico dessa função de y . Assim,

$$V = \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy) dy \right] dx = \int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx$$

é o volume de S . Analogamente, pelo método de fatiamento com seções transversais verticais de S tomadas perpendicularmente ao eixo y , o volume de S é dado por

$$V = \int_2^4 A(y) dy = \int_2^4 \left[\int_1^3 (40 - 2xy) dx \right] dy = \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy$$

(Figura 15.1.5). Assim, ambas integrais iteradas em (a) e (b) do Exemplo 2 medem o volume de S que, pela Fórmula (5), é a integral dupla de $z = 40 - 2xy$ em R , ou seja,

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx = \iint_R (40 - 2xy) dA = \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) dx dy$$

O argumento geométrico que acabamos de apresentar pode ser aplicado a qualquer função contínua $f(x, y)$ que seja não-negativa num retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, como foi o caso de $f(x, y) = 40 - 2xy$ em $[1, 3] \times [2, 4]$. A conclusão de que a integral dupla de $f(x, y)$ em R tenha o mesmo valor em qualquer uma das duas possíveis integrais iteradas é verdadeira mesmo se f for negativa em alguns pontos de R . Enunciamos esse resultado no teorema a seguir, sem apresentar uma prova formal.

15.1.3 TEOREMA Seja R o retângulo definido pelas desigualdades

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

Se $f(x, y)$ for contínua nesse retângulo, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

O Teorema 15.1.3 permite calcular uma integral dupla num retângulo convertendo-a para uma integral iterada. Isso pode ser feito de duas maneiras, ambas produzindo o mesmo valor para a integral dupla.

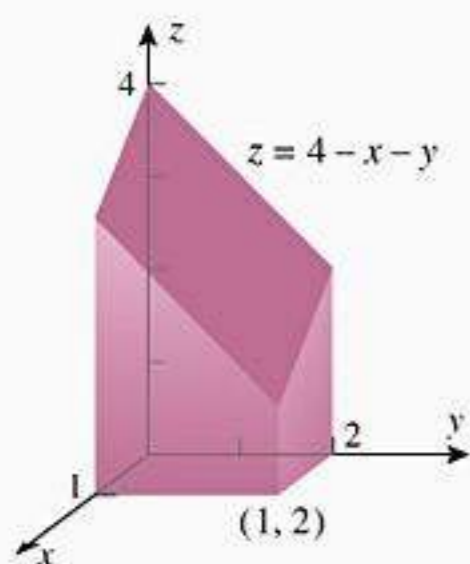


Figura 15.1.6

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso computacional capaz de efetuar integrais duplas iteradas, use-o para conferir o Exemplo 3.

► **Exemplo 3** Use uma integral dupla para encontrar o volume do sólido delimitado acima pelo plano $z = 4 - x - y$ e abaixo pelo retângulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ (Figura 15.1.6).

Solução O volume é a integral dupla de $z = 4 - x - y$ em R . Usando o Teorema 15.1.3, isso pode ser obtido de qualquer uma das integrais iteradas

$$\int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dx dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dy dx \quad (8)$$

Usando a primeira dessas, obtemos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4 - x - y) dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - y \right) dy \\ &= \left[\frac{7}{2}y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser conferido calculando a segunda integral em (8). ◀

O Teorema 15.1.3 garante que a integral dupla no Exemplo 4 também pode ser calculada integrando primeiro em relação a y e depois em relação a x . Confira isso.

► **Exemplo 4** Calcule a integral dupla

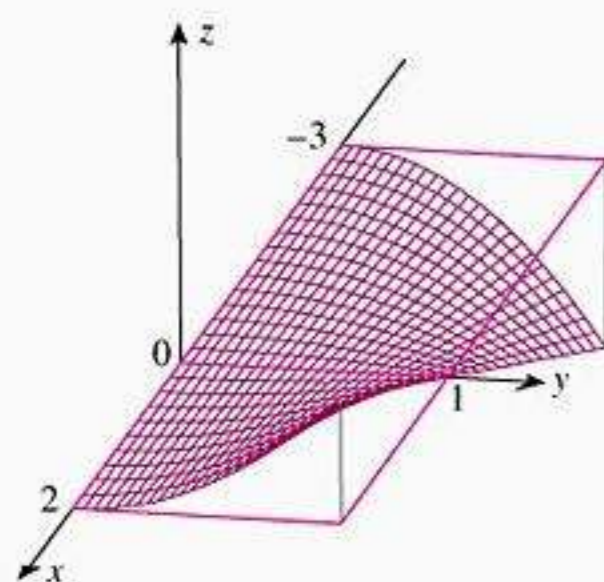
$$\iint_R y^2 x dA$$

no retângulo $R = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Solução Em virtude do Teorema 15.1.3, o valor da integral dupla pode ser obtido calculando uma de duas possíveis integrais iteradas. Escolhemos integrar primeiro em relação a x e depois em relação a y .

$$\begin{aligned} \iint_R y^2 x dA &= \int_0^1 \int_{-3}^2 y^2 x dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=-3}^2 dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{5}{2} y^2 \right) dy = -\frac{5}{6} y^3 \Big|_0^1 = -\frac{5}{6} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A integral no Exemplo 4 pode ser interpretada como o volume líquido com sinal entre o retângulo $[-3, 2] \times [0, 1]$ e a superfície $z = y^2 x$. Ou seja, é o volume abaixo de $z = y^2 x$ e acima de $[0, 2] \times [0, 1]$ menos o volume acima de $z = y^2 x$ e abaixo de $[-3, 0] \times [0, 1]$ (Figura 15.1.7).



$z = y^2 x$ em $[-3, 2] \times [0, 1]$

Figura 15.1.7

■ **PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DUPLAS**

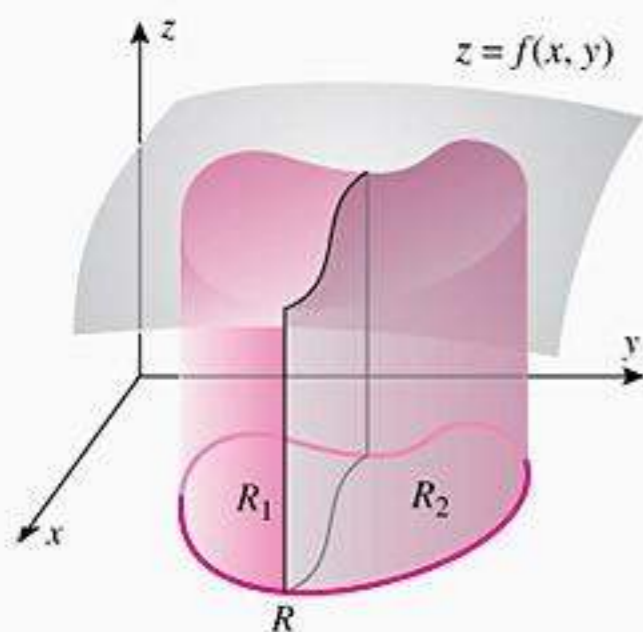
Para distinguir entre integrais duplas de funções de duas variáveis e integrais definidas de funções de uma variável, vamos referir-nos a estas como *integrais simples*. Visto que as integrais duplas, da mesma maneira que as integrais simples, são definidas como limites, elas

herdam muitas das propriedades dos limites. Os resultados a seguir, que enunciamos sem provas, são análogos aos do Teorema 6.5.4 do Volume 1.

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA \quad (c \text{ uma constante}) \quad (9)$$

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA \quad (10)$$

$$\iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA - \iint_R g(x, y) dA \quad (11)$$



O volume do sólido inteiro é a soma dos volumes dos sólidos acima de R_1 e R_2 .

Figura 15.1.8

É intuitivamente evidente que se $f(x, y)$ for não-negativa na região R , então subdividindo R em duas regiões R_1 e R_2 traz como efeito a subdivisão do sólido entre R e $z = f(x, y)$ em dois sólidos e a soma dos volumes desses dois sólidos é igual ao volume do sólido inteiro (Figura 15.1.8). Isso sugere o seguinte resultado, que é verdadeiro mesmo que f possua valores negativos:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \quad (12)$$

A demonstração desse resultado será omitida.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.1 (Ver página 1026 para respostas.)

1. A integral dupla é definida como um limite de somas de Riemann por

$$\iint_R f(x, y) dA = \text{_____}$$

2. A integral iterada

$$\int_1^5 \int_2^4 f(x, y) dx dy$$

integra f no retângulo definido por

$$\text{_____} \leq x \leq \text{_____}, \text{_____} \leq y \leq \text{_____}$$

3. Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam.

$$\int_1^5 \int_2^4 (3x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{\square} \text{_____} dy$$

4. O volume do sólido englobado pela superfície $z = x/y$ e o retângulo $0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e^2$ do plano xy é _____.

EXERCÍCIOS 15.1 CAS

1-12 Calcule as integrais iteradas.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_0^1 \int_0^2 (x + 3) dy dx$ | 2. $\int_1^3 \int_{-1}^1 (2x - 4y) dy dx$ |
| 3. $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$ | 4. $\int_{-2}^0 \int_{-1}^2 (x^2 + y^2) dx dy$ |
| 5. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$ | 6. $\int_0^2 \int_0^1 y \text{sen } x dy dx$ |
| 7. $\int_{-1}^0 \int_2^5 dx dy$ | 8. $\int_4^6 \int_{-3}^7 dy dx$ |

- | | |
|---|---|
| 9. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy + 1)^2} dy dx$ | 10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x \cos xy dy dx$ |
| 11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x} dy dx$ | 12. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x + y)^2} dy dx$ |

13-16 Calcule as integrais duplas na região retangular R .

13. $\iint_R 4xy^3 dA; R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$

14. $\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dA;$
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
15. $\iint_R x\sqrt{1-x^2} dA; R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$
16. $\iint_R (x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x) dA;$
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/3\}$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. (a) Seja $f(x, y) = x^2 + y$ e, como mostrado na figura abaixo, seja o retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ subdividido em 16 sub-retângulos. Escolha (x_k^*, y_k^*) como o centro do k -ésimo retângulo e aproxime a integral dupla de f em R pela soma de Riemann resultante.
- (b) Compare o resultado da parte (a) com o valor exato da integral.

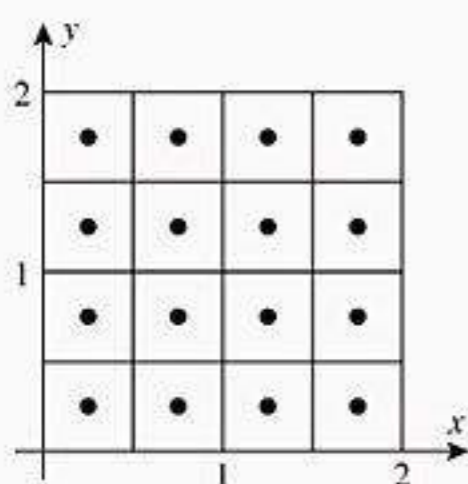


Figura Ex-17

18. (a) Seja $f(x, y) = x - 2y$ e considere uma subdivisão do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ em 16 retângulos menores, como no Exercício 17. Tome (x_k^*, y_k^*) como sendo o centro do k -ésimo retângulo e aproxime a integral dupla de f em R pela soma de Riemann resultante.
- (b) Compare o resultado de (a) com o valor exato da integral.

19-20 Cada integral iterada representa o volume de um sólido. Faça um esboço do sólido. (Não é preciso calcular o volume.)

19. (a) $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$
 (b) $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25 - x^2 - y^2} dy dx$
20. (a) $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y) dy dx$
 (b) $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2 + y^2) dx dy$

21-24 Use uma integral dupla para calcular o volume.

21. O volume sob o plano $z = 2x + y$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 2\}$.
22. O volume sob a superfície $z = 3x^3 + 3x^2 y$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.
23. O volume do sólido compreendido pela superfície $z = x^2$ e os planos $x = 0, x = 2, y = 3, y = 0$ e $z = 0$.
24. O volume no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, o plano $y = 4$ e o plano $(x/3) + (z/5) = 1$
25. Calcule a integral escolhendo uma ordem de integração conveniente:

$$\iint_R x \cos(xy) \cos^2 \pi x dA; R = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$$

26. (a) Faça um esboço do sólido no primeiro octante compreendido pelos planos $x = 0, z = 0, x = 5, z - y = 0$ e $z = -2y + 6$.
- (b) Calcule o volume sólido dividindo-o em duas partes.

27-30 O valor médio de uma função contínua $f(x, y)$ num retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ é definido como

$$f_m = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

onde $A(R) = (b - a)(d - c)$ é a área do retângulo R (comparar com a Definição 7.6.1 do Volume 1). Use essa definição nestes exercícios.

27. Calcule o valor médio de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ no retângulo $[0, 1] \times [0, \pi/2]$.
28. Calcule o valor médio de $f(x, y) = x(x^2 + y)^{1/2}$ no intervalo $[0, 1] \times [0, 3]$.
29. Suponha que a temperatura, em graus Celsius, num ponto (x, y) de uma chapa metálica plana seja $T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$, onde x e y são em metros. Calcule a temperatura média da porção retangular da chapa dada por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.
30. Mostre que se $f(x, y)$ é constante no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, digamos, $f(x, y) = k$, então $f_m = k$ em R .

31-32 A maioria dos CAS possui comandos para a aproximação de integrais duplas numericamente. Leia a documentação correspondente e use um CAS para encontrar uma aproximação numérica da integral dupla nesses exercícios.

- C** 31. $\int_0^2 \int_0^1 \operatorname{sen} \sqrt{x^3 + y^3} dx dy$
- C** 32. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

33. Neste exercício, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Mostre que

$$\iint_R f(x, y) dA = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]$$

34. Use o resultado do Exercício 33 para calcular a integral

$$\int_0^{\ln 2} \int_{-1}^1 \sqrt{e^y + 1} \operatorname{tg} x \, dx \, dy$$

por inspeção. Explique seu raciocínio.

35. Use um CAS para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} \, dx \, dy \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} \, dy \, dx$$

Há violação do Teorema 15.1.3? Explique.

36. Use um CAS para mostrar que o volume V sob a superfície $z = xy^3$ sen xy e acima do retângulo mostrado na figura ao lado é $V = 3/\pi$.

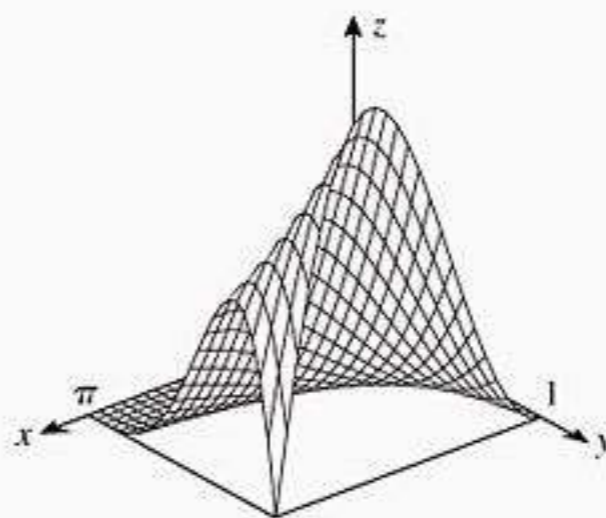


Figura Ex-36

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.1

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ 2. $2 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 5$ 3. $\int_1^5 (56 - 12y + 2y^2) \, dy$ 4. 16

15.2 INTEGRAIS DUPLAS EM REGIÕES NÃO-RETANGULARES

Nesta seção, mostraremos como calcular integrais duplas em regiões que não são retangulares.

INTEGRAIS ITERADAS COM LIMITES DE INTEGRAÇÃO NÃO-CONSTANTES

Mais adiante nesta seção, veremos que as integrais duplas em regiões não-retangulares podem ser calculadas como integrais iteradas dos seguintes tipos:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx \tag{1}$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy \tag{2}$$

Começamos com um exemplo que ilustra como calcular tais integrais.

Exemplo 1 Calcule

(a) $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx$ (b) $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y \, dx \, dy$

Solução (a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \right] dx = \int_0^1 \left. \frac{y^3 x}{3} \right|_{y=-x}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^7}{3} + \frac{x^4}{3} \right] dx = \left(\frac{x^8}{24} + \frac{x^5}{15} \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{120} \end{aligned}$$

Solução (b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \int_0^c y \, x \, \text{em } y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/3} \left[\int_0^c y \, x \, \text{em } y \, dx \right] dy = \int_0^{\pi/3} \left. \frac{x^2}{2} \, \text{em } y \right|_{x=0}^c dy \\ &= \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} \cos^2 y \, \text{sen } y \right] dy = -\frac{1}{6} \cos^3 y \Big|_0^{\pi/3} = \frac{7}{48} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

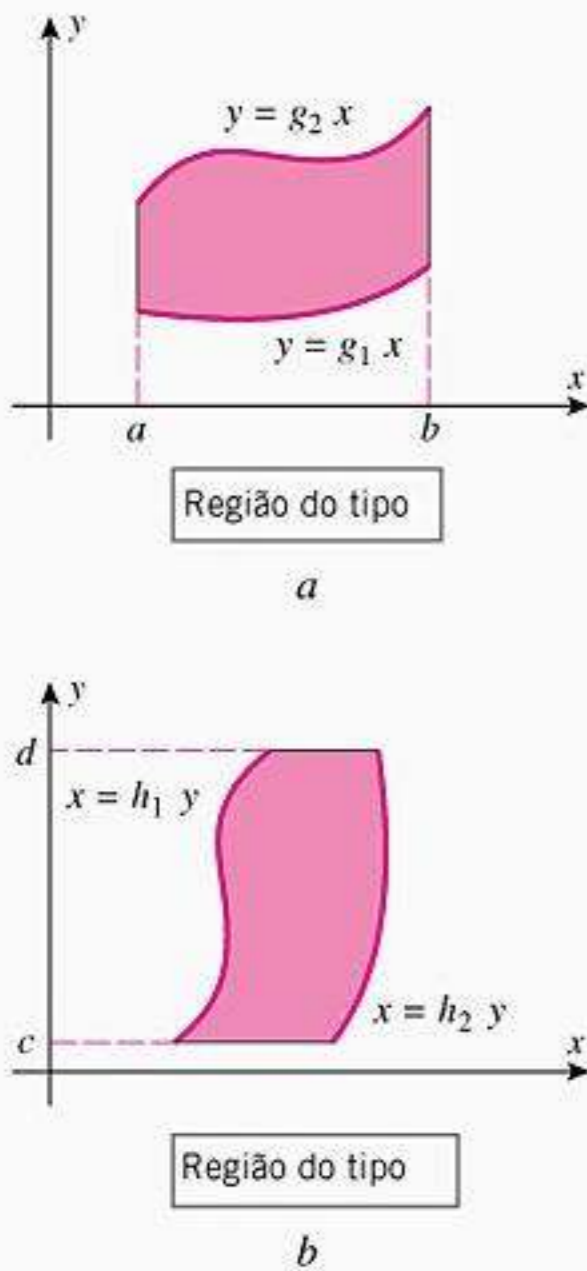


Figura 15.2.1

INTEGRAIS DUPLAS EM REGIÕES NÃO-RETANGULARES

Uma região plana em um plano cartesiano pode ser descrita por uma integral dupla em uma região muito geral. Este é um tópico importante na análise matemática. Limitaremos neste capítulo a integral dupla a duas regiões básicas: a região tipo I e a região tipo II. As definições são as seguintes:

15.2.1 DEFINIÇÃO

- a) Uma **região do tipo I** é limitada lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e é limitada superior e inferiormente por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ para $a \leq x \leq b$. (Figura 15.2.1a)
- b) Uma **região do tipo II** é limitada superior e inferiormente pelas retas horizontais $y = c$ e $y = d$ e é limitada lateralmente por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, onde $h_1(y) \leq h_2(y)$ para $c \leq y \leq d$. (Figura 15.2.1b)

Para determinar a ordem da integração dupla em uma região tipo I e tipo II, use a seguinte regra: a integração deve ser feita primeiro em relação à variável que define os limites internos da região.

15.2.2 TEOREMA

a) Se R é uma região do tipo I na qual $f(x, y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad (3)$$

b) Se R é uma região do tipo II na qual $f(x, y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \quad (4)$$

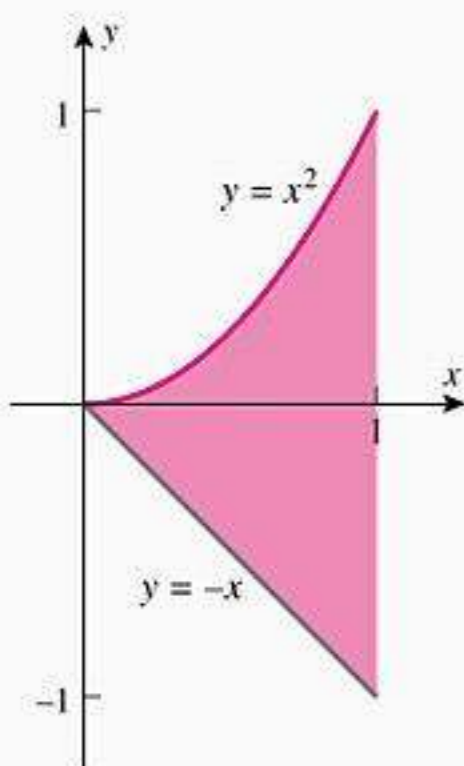


Figura 15.2.2

De acordo com o Teorema 15.2.2, a integral dupla em (1a) é a integral dupla da função $f(x, y) = y^2x$ na região tipo I limitada lateralmente pela reta vertical $x = 0$ e $x = 1$ e superior e inferiormente pelas curvas $y = -x$ e $y = x^2$. (Figura 15.2.2) Além disso, a integral dupla em (1b) é a integral dupla da função $f(x, y) = x \, \text{sen } y$ na região tipo II limitada superior e inferiormente pelas retas horizontais $y = 0$ e $y = \pi/3$ e lateralmente pelas curvas $x = 0$ e $x = c$. (Figura 15.2.3)

Embora não possamos aplicar o Teorema 15.2.2, não podemos esquecer que $f(x, y)$ é não negativa na região R , e é aceitável atrair um raciocínio geométrico semelhante ao utilizado no Teorema 15.1.3. Se $f(x, y)$ é não negativa, a integral dupla será

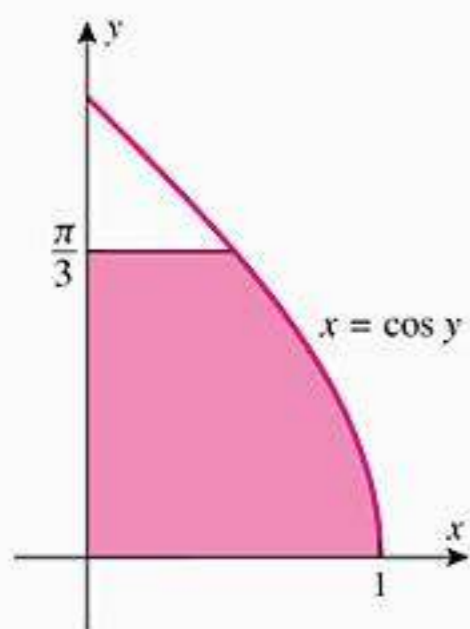


Figura 15.2.3

interpretada como o volume do sólido S que é limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R , de modo que é suficiente mostrar que a integral iterada representa esse volume. Considere, por exemplo, a integral iterada (3). Para um valor fixo de x , a função $f(x, y)$ é uma função de y e, então, a integral

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

representa a área sob o gráfico dessa função de y entre os pontos $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$. Essa área, mostrada em azul escuro na Figura 15.2.4, é a área da seção transversal do sólido S em x e, então, pelo método de fatiamento, o volume V do sólido S é

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

que mostra que a integral iterada (3) é igual à integral dupla. Analogamente para (4).

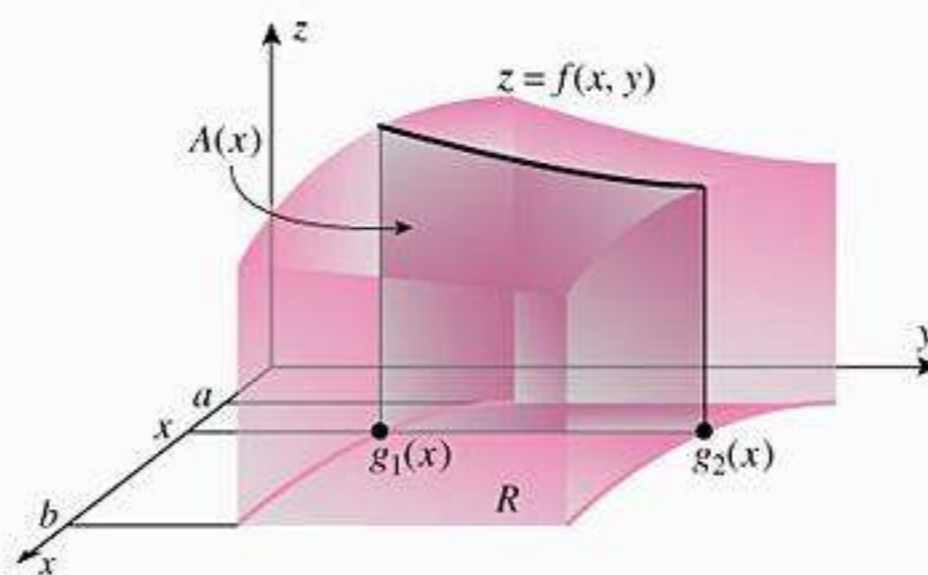


Figura 15.2.4

■ DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO PARA O CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS

Para aplicar o Teorema 15.2.2, é conveniente começar com um esboço bidimensional da região R . [Não é necessário fazer o gráfico de $f(x, y)$.] Para uma região do tipo I, os limites de integração da Fórmula (3) podem ser obtidos com segue:

Determinação dos Limites de Integração: Região do Tipo I

Passo 1 Como x é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta vertical através da região R num ponto x arbitrário fixado (Figura 15.2.5). Essa reta cruza a fronteira de R duas vezes. O ponto inferior da interseção está na curva $y = g_1(x)$ e o ponto superior está na curva $y = g_2(x)$. Essas duas interseções determinam os limites de integração inferior e superior de y na Fórmula (3).

Passo 2 Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para a esquerda e depois para a direita (Figura 15.2.5). A posição extrema à esquerda na qual a reta intersecta a região R é $x = a$ e a posição extrema à direita na qual a reta intersecta a região R é $x = b$. Obtemos, assim, os limites de integração de x na Fórmula (3).

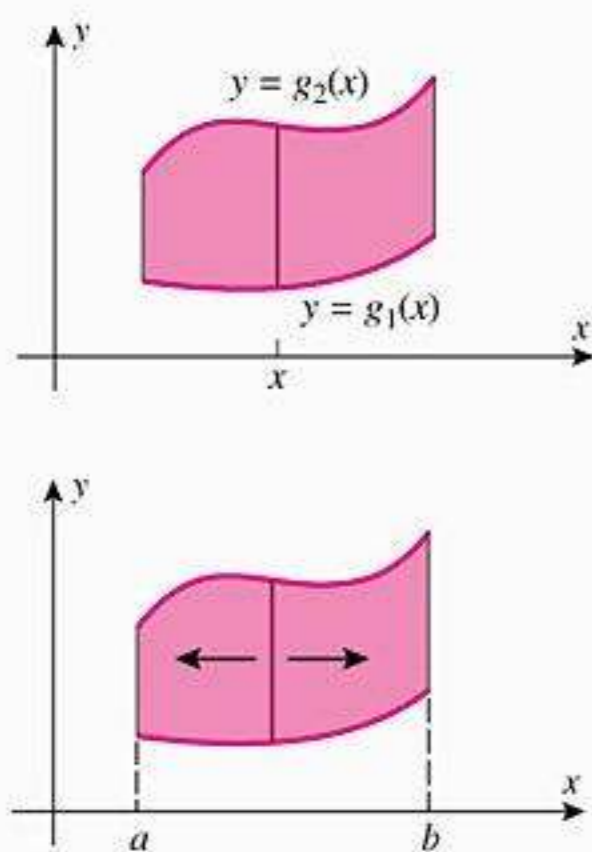


Figura 15.2.5

► **Exemplo 2** Calcule

$$\iint_R xy dA$$

na região R compreendida pelas curvas $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$.

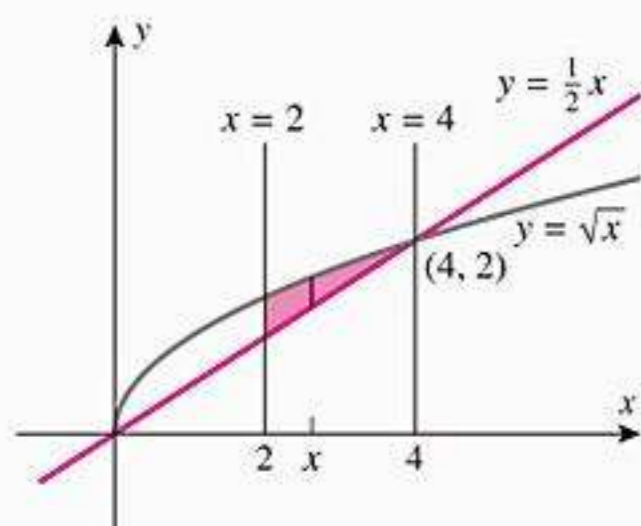


Figura 15.2.6

Solução Consideramos R como uma região do tipo I. A região R e a vertical correspondente ao ponto x fixado são mostradas na Figura 15.2.6. A reta intersecta a região R na fronteira inferior $y = \frac{1}{2}x$ e na fronteira superior $y = \sqrt{x}$. Esses são os limites de integração de y . Movendo a reta primeiro à esquerda e depois à direita produz os limites de integração $x = 2$ e $x = 4$ de x . Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dA &= \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx = \int_2^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x/2}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_2^4 = \left(\frac{64}{6} - \frac{256}{32} \right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{32} \right) = \frac{11}{6} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Se R for uma região do tipo II, os limites de integração da Fórmula (4) podem ser obtidos como segue:

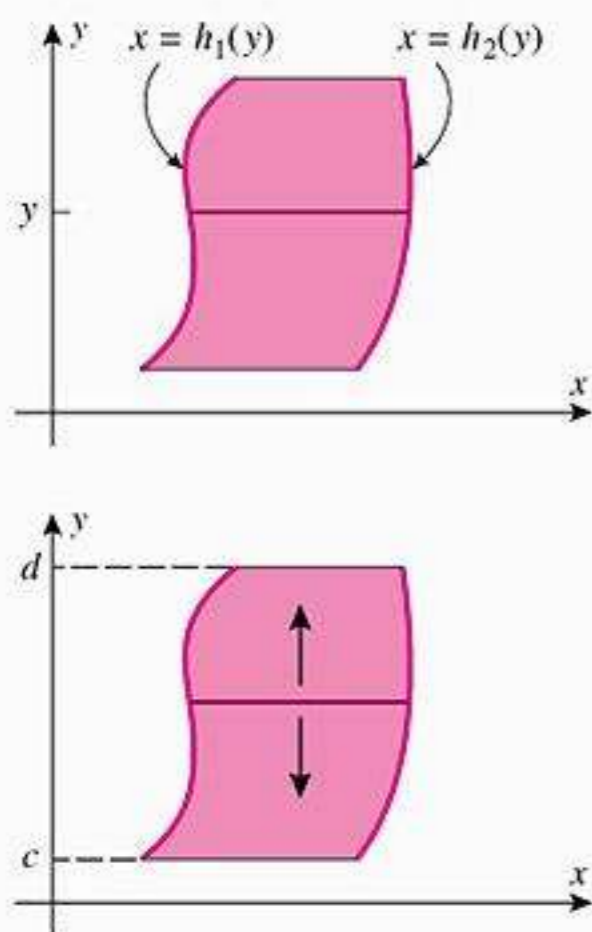


Figura 15.2.7

Determinação dos Limites de Integração: Região do Tipo II

Passo 1 Como y é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta horizontal através da região R pelo ponto fixado y (Figura 15.2.7). Essa reta corta a fronteira de R duas vezes. O ponto de interseção mais à esquerda está na curva $x = h_1(y)$ e o ponto mais à direita está na curva $x = h_2(y)$. Essas interseções determinam os limites de integração de x na Fórmula (4).

Passo 2 Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para baixo e depois para cima (Figura 15.2.7). A posição mais baixa na qual a reta intersecta a região R é $y = c$ e a posição mais alta na qual a reta intersecta a região R é $y = d$. Obtemos, assim, os limites de integração de y na Fórmula (4).

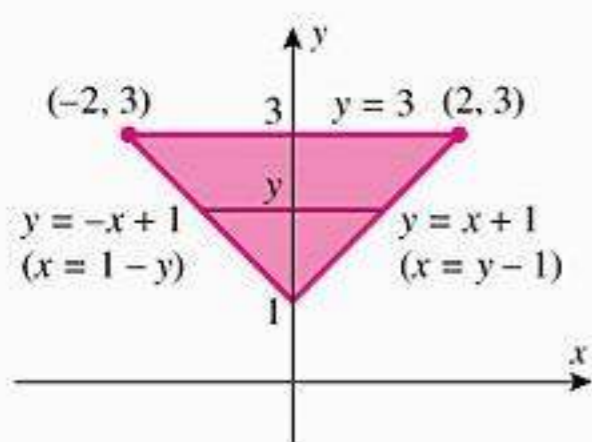


Figura 15.2.8

► **Exemplo 3** Calcule

$$\iint_R (2x - y^2) \, dA$$

na região triangular R compreendida pelas retas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.

Solução Consideramos R como uma região do tipo II. A região R e a reta horizontal correspondente ao ponto fixado y são mostradas na Figura 15.2.8. A reta intersecta a região R na fronteira à esquerda $x = 1 - y$ e na fronteira à direita $x = y - 1$. Esses são os limites de integração de x . Movendo a reta primeiro para baixo e depois para cima produz os limites $y = 1$ e $y = 3$ de y . Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R (2x - y^2) \, dA &= \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) \, dx \, dy = \int_1^3 [x^2 - y^2x]_{x=1-y}^{y-1} dy \\ &= \int_1^3 [(1 - 2y + 2y^2 - y^3) - (1 - 2y + y^3)] dy \\ &= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3) \, dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_1^3 = -\frac{68}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Para integrar numa região do tipo II, os limites esquerdo e direito devem ser expressos sob a forma $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$. Por isso, reescrevemos as equações dos limites

$$y = -x + 1 \text{ e } y = x + 1$$

como

$$x = 1 - y \text{ e } x = y - 1$$

no Exemplo 3.

No Exemplo 3 poderíamos ter tratado R como uma região do tipo I, porém com uma complicação adicional: considerada como uma região do tipo I, a fronteira superior de R é a reta $y = 3$ (Figura 15.2.9) e a fronteira inferior consiste de duas partes, a reta $y = -x + 1$ à

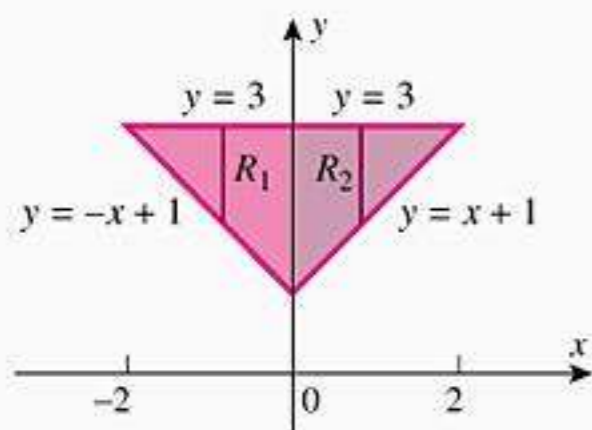


Figura 15.2.9

esquerda e a reta $y = x + 1$ à direita do eixo y . Para fazer a integração, é necessário decompor a região R em duas partes R_1 e R_2 , como mostrado na Figura 15.2.9, e escrever

$$\begin{aligned} \iint_R (2x - y^2) dA &= \iint_{R_1} (2x - y^2) dA + \iint_{R_2} (2x - y^2) dA \\ &= \int_{-2}^0 \int_{-x+1}^3 (2x - y^2) dy dx + \int_0^2 \int_{x+1}^3 (2x - y^2) dy dx \end{aligned}$$

Isto fornecerá o mesmo resultado que foi obtido no Exemplo 3. (Verifique.)

► **Exemplo 4** Use uma integral dupla para calcular o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $z = 4 - 4x - 2y$.

Solução O tetraedro em questão é limitado acima pelo plano

$$z = 4 - 4x - 2y \tag{5}$$

e abaixo pela região triangular R mostrada na Figura 15.2.10. Assim, o volume é dado por

$$V = \iint_R (4 - 4x - 2y) dA$$

A região R é limitada pelo eixo x , o eixo y e a reta $y = 2 - 2x$ [faça $z = 0$ em (5)], então, considerando R como uma região do tipo I, temos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4 - 4x - 2y) dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (4 - 4x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 [4y - 4xy - y^2]_{y=0}^{2-2x} dx = \int_0^1 (4 - 8x + 4x^2) dx = \frac{4}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

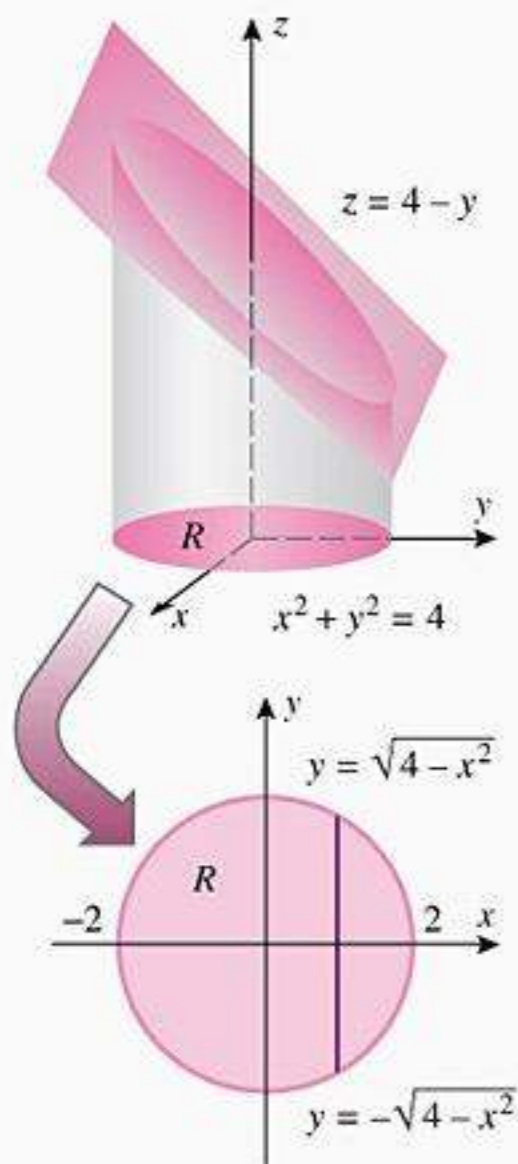


Figura 15.2.11

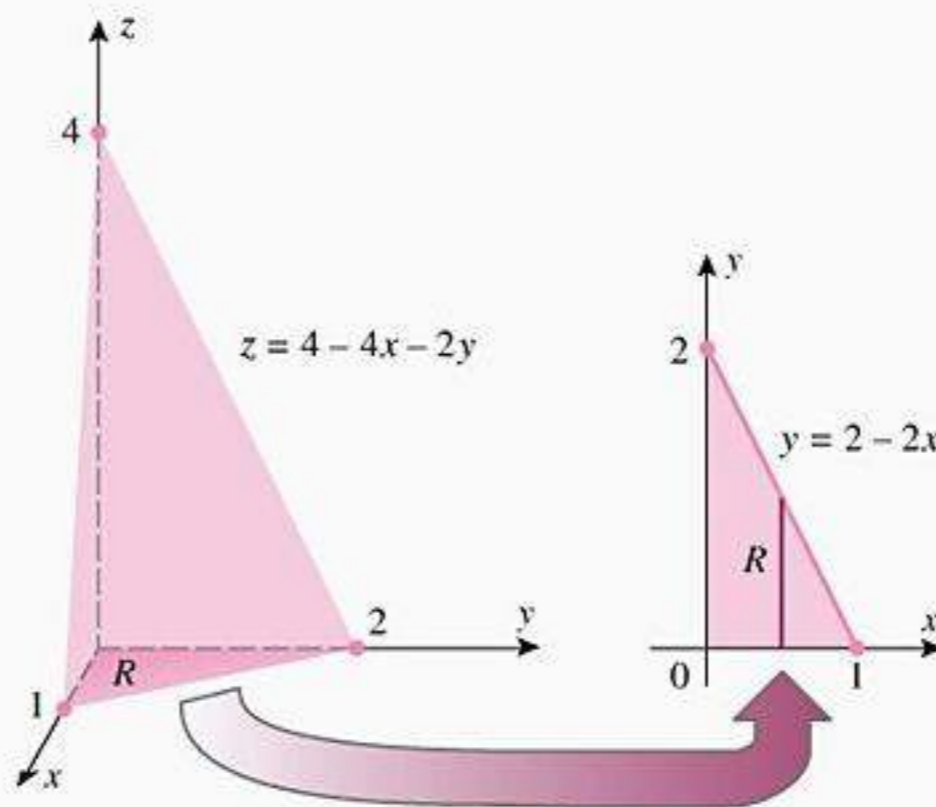


Figura 15.2.10

► **Exemplo 5** Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

Solução O sólido mostrado na Figura 15.2.11 é limitado acima pelo plano $z = 4 - y$ e abaixo pela região R contida no círculo $x^2 + y^2 = 4$. O volume é dado por

$$V = \iint_R (4 - y) dA$$

Considerando R como uma região do tipo I, obtemos

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx = \int_{-2}^2 \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= \int_{-2}^2 8\sqrt{4-x^2} dx = 8(2\pi) = 16\pi \quad \text{Ver Fórmula (3) na Seção 8.4. do Volume I} \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

■ INVERSÃO DA ORDEM DE INTEGRAÇÃO

Às vezes, o cálculo de uma integral iterada pode ser simplificado invertendo-se a ordem de integração. O próximo exemplo ilustra como isso é feito.

► **Exemplo 6** Como não há antiderivada elementar de e^{x^2} , a integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$$

não pode ser calculada integrando primeiro em relação a x . Calcule essa integral expressando-a como uma integral iterada equivalente com ordem de integração invertida.

Solução Na integração interna, y é fixado e x varia entre as retas $x = y/2$ e $x = 1$ (Figura 15.2.12). Na integração externa, y varia de 0 a 2, de modo que a integral iterada dada é igual à integral dupla na região triangular R da Figura 15.2.12.

Para inverter a ordem de integração, consideramos R como uma região do tipo I, o que nos permite escrever a integral dada como

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy &= \iint_R e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [e^{x^2} y]_{y=0}^{2x} dx \\
 &= \int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1 \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

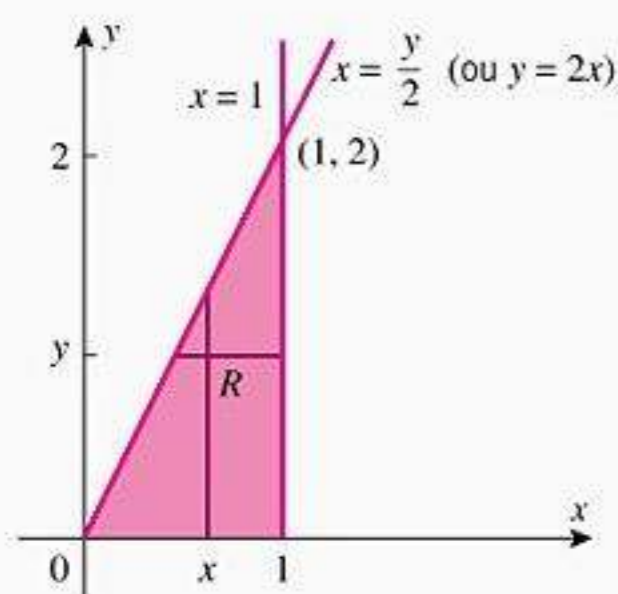
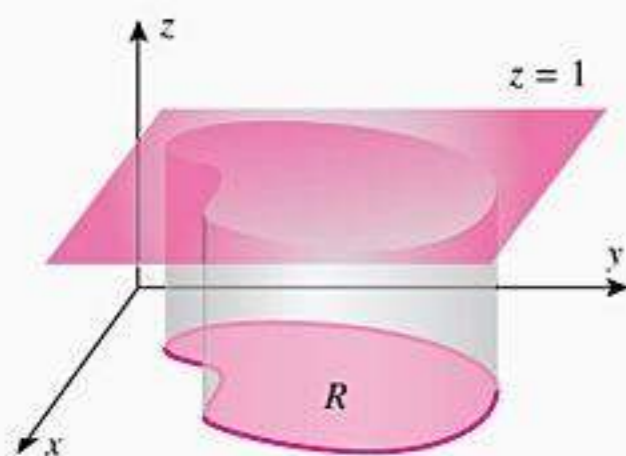


Figura 15.2.12



Cilindro com base R e altura 1

Figura 15.2.13

■ ÁREA CALCULADA COMO UMA INTEGRAL DUPLA

Apesar das integrais duplas terem surgido no contexto do cálculo de volumes, elas também podem ser usadas para calcular áreas. Para ver isso, lembre-se que um *cilindro reto* é um sólido gerado quando uma região do plano é transladada ao longo de uma reta perpendicular à região. Na Fórmula (2) da Seção 7.2 do Volume 1, afirmamos que o volume V de um cilindro reto com área da seção transversal A e altura h é

$$V = A \cdot h \tag{6}$$

Agora, suponha que estejamos interessados em calcular a área de uma região R do plano xy . Se transladarmos a região R uma unidade para cima, então o sólido resultante será um cilindro reto que tem área da seção transversal A , base R e o plano $z = 1$ como topo (Figura 15.1.13). Desse modo, segue-se de (6) que

$$\iint_R 1 dA = (\text{área de } R) \cdot 1$$

o que pode ser reescrito como

$$\text{área de } R = \iint_R 1 dA = \iint_R dA \tag{7}$$

A Fórmula (7) pode gerar confusão porque iguala uma área e um volume; a fórmula pretende equacionar tão-somente os valores numéricos da área e do volume e não as unidades de medida, que, naturalmente, devem ser diferentes.

► **Exemplo 7** Use uma integral dupla para calcular a área da região R compreendida pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $y = 2x$.

Solução A região R pode ser considerada igualmente como do tipo I (Figura 15.2.14a) ou do tipo II (Figura 15.2.14b). Considerando R como do tipo I, obtemos

$$\begin{aligned} \text{área de } R &= \iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy dx = \int_0^4 [y]_{y=x^2/2}^{2x} dx \\ &= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Considerando R como do tipo II, obtemos

$$\begin{aligned} \text{área de } R &= \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx dy = \int_0^8 [x]_{x=y/2}^{\sqrt{2y}} dy \\ &= \int_0^8 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{2}y \right) dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^8 = \frac{16}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

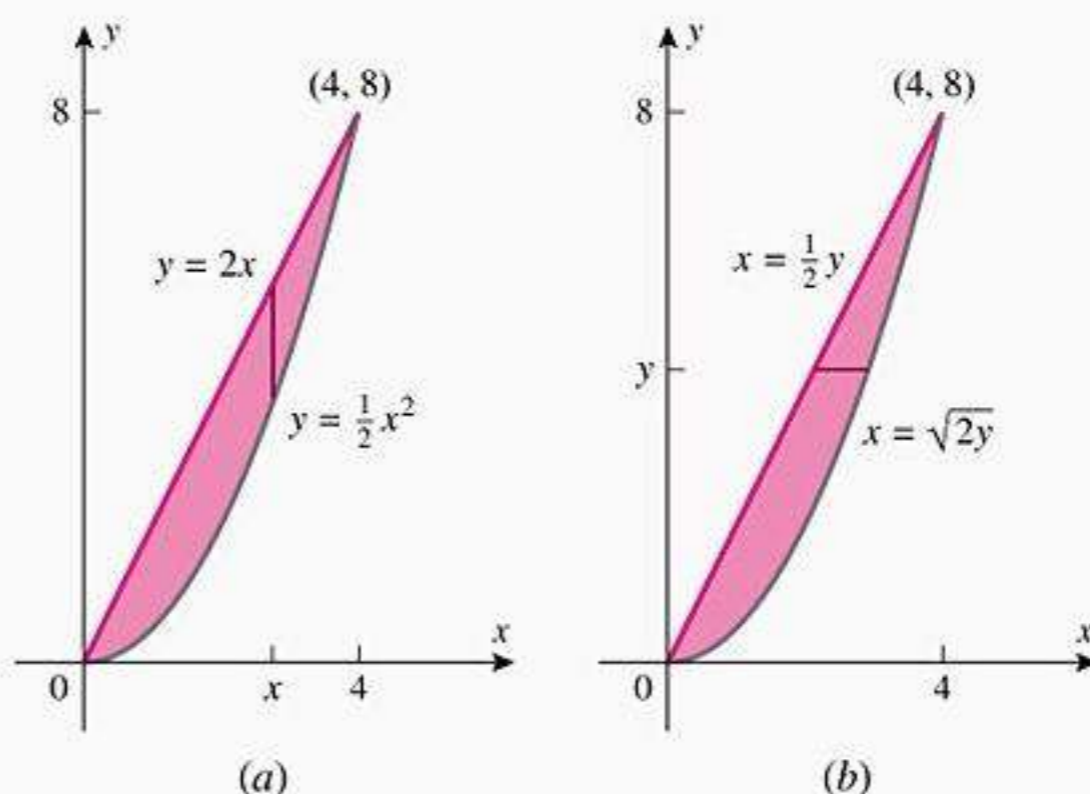


Figura 15.2.14

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.2** (Ver página 1035 para respostas.)

1. Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam.

(a) $\int_1^5 \int_2^{y/2} 6x^2y dx dy = \int_{\square}^{\square} \text{_____} dy$

(b) $\int_1^5 \int_2^{x/2} 6x^2y dy dx = \int_{\square}^{\square} \text{_____} dx$

2. Seja R a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 4)$ do plano xy . Preencha as lacunas das integrais.

(a) Tratando R como uma região do tipo I,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y) \text{_____}$$


(b) Tratando R como uma região do tipo II,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y) \text{_____}$$

3. Seja R a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(0, 4)$ do plano xy . Expressa como uma integral iterada dupla, a área de R é $A(R) = \text{_____}$.

4. A reta $y = 2 - x$ e a parábola $y = x^2$ intersectam nos pontos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$. Se R denotar a região englobada por $y = 2 - x$ e $y = x^2$, então

$$\iint_R (1 + 2y) dA = \text{_____}$$

EXERCÍCIOS 15.2  

1-10 Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$
2. $\int_1^{3/2} \int_y^{3-y} y dx dy$
3. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y dx dy$
4. $\int_{1/4}^1 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{x}{y}} dy dx$
5. $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \operatorname{sen} \frac{y}{x} dy dx$
6. $\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y) dy dx$
7. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dy dx$
8. $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$
9. $\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2 - y^2} dy dx$
10. $\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2} dx dy$

ENFOCANDO CONCEITOS

11. Seja R a região dada na figura abaixo. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dy dx$

(b) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dx dy$

12. Seja R a região dada na figura abaixo. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dy dx$

(b) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dx dy$

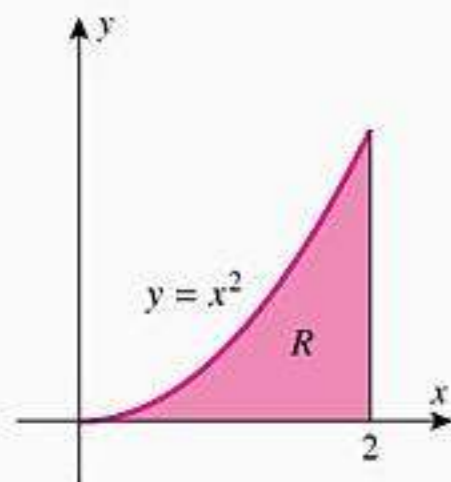


Figura Ex-11

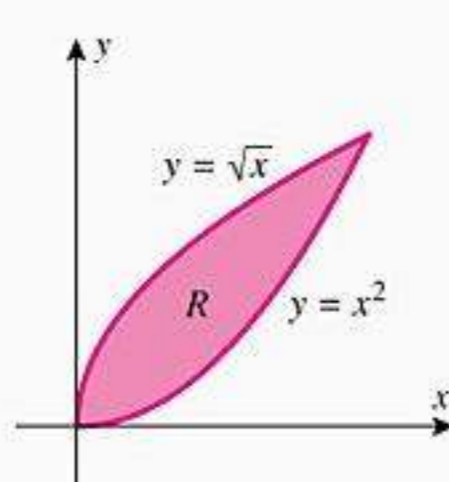


Figura Ex-12

13. Seja R a região dada na figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iint_R f(x, y) dA = \int_1^2 \int_{\square} f(x, y) dy dx$
 $+ \int_2^4 \int_{\square} f(x, y) dy dx$
 $+ \int_4^5 \int_{\square} f(x, y) dy dx$

(b) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dx dy$

14. Seja R a região dada na figura abaixo. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dy dx$

(b) $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dx dy$

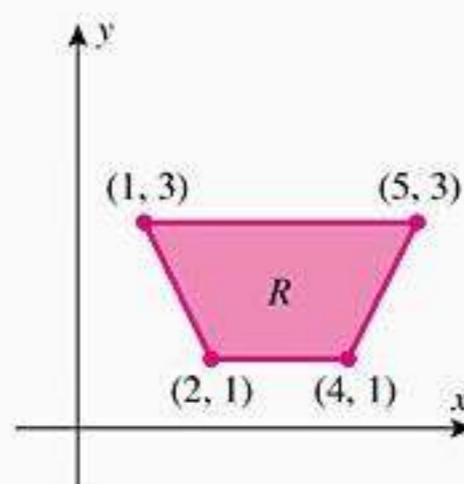


Figura Ex-13

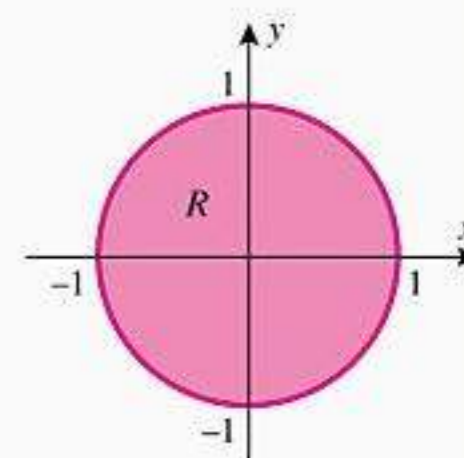


Figura Ex-14

15. Calcule $\iint_R xy dA$, onde R é a região no

- (a) Exercício 11 (b) Exercício 13

16. Calcule $\iint_R (x + y) dA$, onde R é a região no

- (a) Exercício 12 (b) Exercício 14

17-20 Calcule as integrais duplas de duas maneiras usando integrais iteradas: (a) tratando R como uma região do tipo I e (b) tratando R como uma região do tipo II.

17. $\iint_R x^2 dA$; R é a região delimitada por $y = 16/x$, $y = x$ e $x = 8$.

18. $\iint_R xy^2 dA$; R é a região compreendida por $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ e $y = x$.

19. $\iint_R (3x - 2y) dA$; R é a região compreendida pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$.

20. $\iint_R y dA$; R é a região do primeiro quadrante compreendida pelo círculo $x^2 + y^2 = 25$ e a reta $x + y = 5$.

21-26 Calcule as integrais duplas.

21. $\iint_R x(1 + y^2)^{-1/2} dA$; R é a região do primeiro quadrante compreendida por $y = x^2$, $y = 4$ e $x = 0$.

22. $\iint_R x \cos y \, dA$; R é a região triangular delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = \pi$.

23. $\iint_R xy \, dA$; R é a região compreendida por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ e $y = 0$.

24. $\iint_R x \, dA$; R é a região compreendida por $y = \arcsen x$, $x = 1/\sqrt{2}$ e $y = 0$.

25. $\iint_R (x - 1) \, dA$; R é a região do primeiro quadrante compreendida por $y = x$ e $y = x^3$.

26. $\iint_R x^2 \, dA$; R é a região do primeiro quadrante compreendida por $xy = 1$, $y = x$ e $y = 2x$.

27. (a) Trace à mão livre, ou com a ajuda de um recurso gráfico, um esboço da região R compreendida pelas curvas $y = x + 2$ e $y = e^x$.

(b) Obtenha uma estimativa das interseções das curvas em (a).

(c) Tratando R como uma região do tipo I, dê uma estimativa de $\iint_R x \, dA$.

(d) Tratando R como uma região do tipo II, dê uma estimativa de $\iint_R x \, dA$.

28. (a) Trace à mão livre, ou com a ajuda de um recurso gráfico, um esboço da região R compreendida pelas curvas $y = 4x^3 - x^4$ e $y = 3 - 4x + 4x^2$.

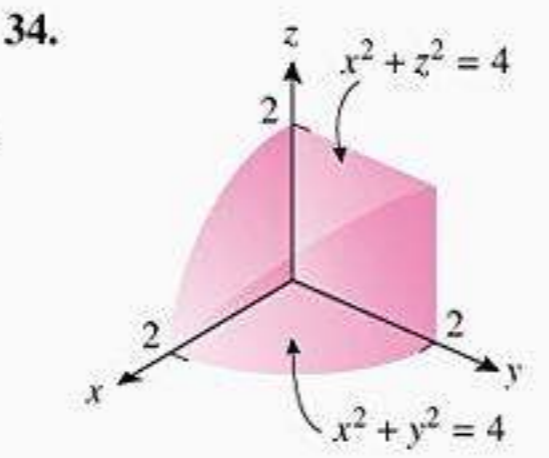
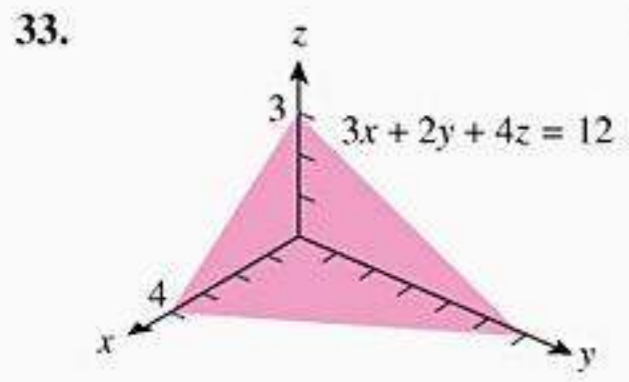
(b) Encontre as interseções das curvas da parte (a).

(c) Calcule $\iint_R x \, dA$.

29-32 Use integração dupla para calcular a área da região plana compreendida pelas curvas dadas.

- 29. $y = \sen x$ e $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq \pi/4$
- 30. $y^2 = -x$ e $3y - x = 4$.
- 31. $y^2 = 9 - x$ e $y^2 = 9 - 9x$.
- 32. $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $x = 0$ e $x = 1$.

33-34 Use integração dupla para calcular o volume do sólido.



35-42 Use integração dupla para calcular o volume do sólido.

- 35. O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 3 - x$
- 36. O sólido no primeiro octante limitado acima pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente por $y = x^2$ e $y = x$.
- 37. O sólido limitado acima pelo parabolóide $z = 9x^2 + y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ e $y = 2$.
- 38. O sólido compreendido por $y^2 = x$, $z = 0$ e $x + z = 1$
- 39. A cunha seccionada do cilindro $4x^2 + y^2 = 9$ pelos planos $z = 0$ e $z = y + 3$.
- 40. O sólido no primeiro octante limitado acima por $z = 9 - x^2$, abaixo por $z = 0$ e lateralmente por $y^2 = 3x$.
- 41. O sólido comum aos cilindros $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + z^2 = 25$.
- 42. O sólido limitado acima pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, lateralmente pelo cilindro circular $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e abaixo pelo plano xy .

43-44 Use uma integral dupla e um CAS para calcular o volume do sólido.

- 43. O sólido limitado acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo plano xy .
- 44. O sólido no primeiro octante limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos coordenados.

45-50 Expresse a integral como uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.

45. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$ 46. $\int_0^4 \int_{2y}^8 f(x, y) \, dx \, dy$
 47. $\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) \, dx \, dy$ 48. $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy \, dx$
 49. $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} f(x, y) \, dx \, dy$ 50. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy$

51-54 Calcule a integral invertendo antes a ordem de integração.

51. $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} \, dy \, dx$ 52. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2) \, dx \, dy$
 53. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} \, dx \, dy$ 54. $\int_1^3 \int_0^{\ln x} x \, dy \, dx$

55. Calcule $\iint_R \sen(y^3) \, dA$, onde R é a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$. [Sugestão: escolha a ordem de integração com cuidado.]

56. Calcule $\iint_R x \, dA$ onde R é a região limitada por $x = \ln y$, $x = 0$ e $y = e$.

57. Tente calcular a integral com um CAS usando a ordem de integração indicada e, depois, invertendo a ordem de integração.

(a) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^3 \, dy \, dx$

(b) $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \sec^2(\cos x) \, dx \, dy$

58. Use a fórmula de Wallis apropriada (ver última contracapa) para calcular o volume do sólido compreendido entre o parabolóide circular $z = x^2 + y^2$, o cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 4$ e o plano xy (veja o corte na figura abaixo).

59. Calcule $\iint_R xy^2 \, dA$ na região R mostrada na figura abaixo.

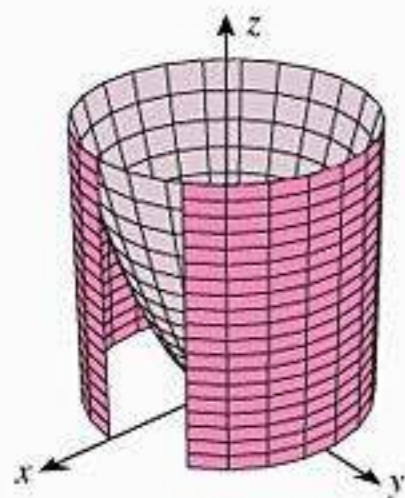


Figura Ex-58

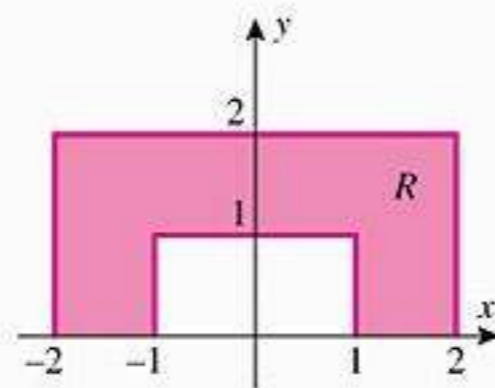


Figura Ex-59

60. Dê um argumento geométrico para mostrar que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = \frac{\pi}{6}$$

61-62 O valor médio de uma função contínua $f(x, y)$ numa região R do plano xy é definido como

$$f_m = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$

onde $A(R)$ é a área da região R (comparar com a definição anterior ao Exercício 27 da Seção 15.1). Use essa definição nestes exercícios.

61. Calcule o valor médio de $1/(1+x^2)$ na região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

62. Calcule o valor médio de $f(x, y) = x^2 - xy$ na região compreendida por $y = x$ e $y = 3x - x^2$.

63. Suponha que a temperatura em graus Celsius num ponto (x, y) de uma lâmina de metal plana seja $T(x, y) = 5xy + x^2$, onde x e y estão dados em metros. Encontre a temperatura média da porção da lâmina em forma de diamante determinada por $|2x + y| \leq 4$ e $|2x - y| \leq 4$.

64. Uma lente circular de raio de 2 polegadas tem uma espessura de $1 - (r^2/4)$ polegadas em todos pontos a r polegadas do centro da lente. Encontre a espessura média da lente.

65. Use um CAS para aproximar as interseções das curvas $y = \sin x$ e $y = x/2$ e depois aproxime o volume do sólido no primeiro octante que está abaixo da superfície $z = \sqrt{1+x+y}$ e acima da região do plano xy que é compreendido pelas curvas.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.2

1. (a) $\int_1^5 \left(\frac{1}{4}y^4 - 16y\right) dy$ (b) $\int_1^5 \left(\frac{3}{4}x^4 - 12x^2\right) dx$ 2. (a) $\int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} f(x, y) \, dy \, dx$ (b) $\int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{4}y+3} f(x, y) \, dx \, dy$
 3. $\int_0^3 \int_x^{-\frac{1}{3}x+4} dy \, dx$ 4. $\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} (1+2y) \, dy \, dx = 18,9$

15.3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

Nesta seção, estudaremos integrais duplas nas quais o integrando e a região de integração são expressos em coordenadas polares. Tais integrais são importantes por duas razões: primeiro, elas surgem naturalmente em muitas aplicações e, segundo, muitas integrais duplas em coordenadas retangulares podem ser calculadas mais facilmente se convertidas para coordenadas polares.

REGIÕES POLARES SIMPLES

Algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular se a região de integração for expressa em coordenadas polares. Isso é geralmente verdadeiro se a região for limitada por uma car-

Uma visão geral de coordenadas polares pode ser encontrada na Seção 11.1

dióide, uma rosácea, uma espiral ou, mais geralmente, por qualquer curva cuja equação seja mais simples em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. Além disso, as integrais duplas cujos integrandos envolvem $x^2 + y^2$ também tendem a ser mais fáceis de calcular em coordenadas polares porque essa soma é igual a r^2 quando são aplicadas as fórmulas de conversão $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

A Figura 15.3.1a mostra uma região R num sistema de coordenadas polares que é delimitada por dois raios, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e duas curvas polares $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$. Se, como mostrado na figura, as funções $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ forem contínuas e seus gráficos não se intersectarem, então a região R é chamada *região polar simples*. Se $r_1(\theta)$ for identicamente nula, então a fronteira $r = r_1(\theta)$ reduz-se a um ponto (a origem) e a região assume a forma geral mostrada na Figura 15.3.1b. Se, além disso, $\beta = \alpha + 2\pi$, então os raios coincidem e a região assume a forma mostrada na Figura 15.3.1c. A seguinte definição expressa algebricamente essas idéias geométricas.

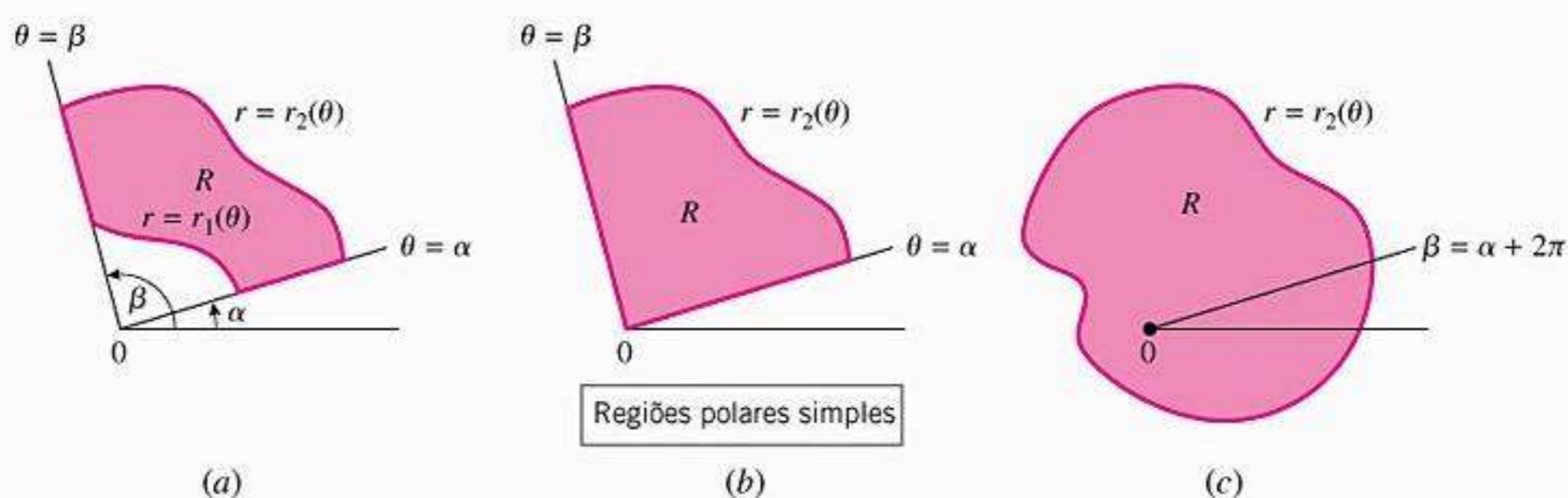


Figura 15.3.1

15.3.1 DEFINIÇÃO Uma *região polar simples* num sistema de coordenadas polares é uma região delimitada por dois raios, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e duas curvas polares contínuas, $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$, onde as equações dos raios e das curvas polares satisfazem as seguintes condições:

- (i) $\alpha \leq \beta$
- (ii) $\beta - \alpha \leq 2\pi$
- (iii) $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$

As condições (i) e (ii), em conjunto, implicam que o raio $\theta = \beta$ pode ser obtido pela rotação em sentido anti-horário do raio $\theta = \alpha$ num ângulo que é, no máximo, de 2π radianos. Isto é consistente com a Figura 15.3.1. A condição (iii) implica que as curvas de fronteira $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$ podem se tocar, mas não podem cruzar uma sobre a outra (por quê?). Assim, de acordo com a Figura 15.3.1, é apropriado descrever $r = r_1(\theta)$ como a *fronteira interna* da região e $r = r_2(\theta)$ como a *fronteira externa*.

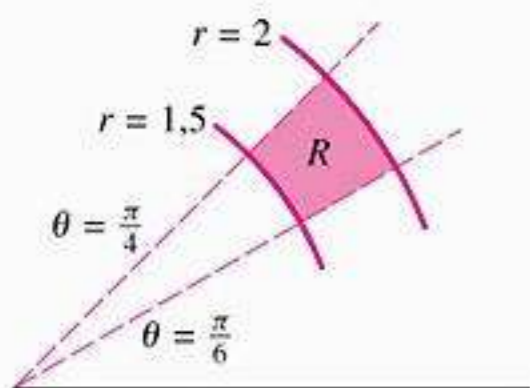


Figura 15.3.2

Um *retângulo polar* é uma região polar simples em que as curvas polares que a delimitam são arcos circulares. Por exemplo, a Figura 15.3.2 mostra o retângulo polar R dado por

$$1,5 \leq r \leq 2, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

A seguir, consideraremos a versão polar do Problema 15.1.1.

15.3.2 O PROBLEMA DO VOLUME EM COORDENADAS POLARES Dada uma função $f(r, \theta)$, contínua e não-negativa numa região polar simples R , calcular o volume do sólido delimitado pela região R e a superfície cuja equação, em coordenadas cilíndricas, é $z = f(r, \theta)$ (Figura 15.3.3).

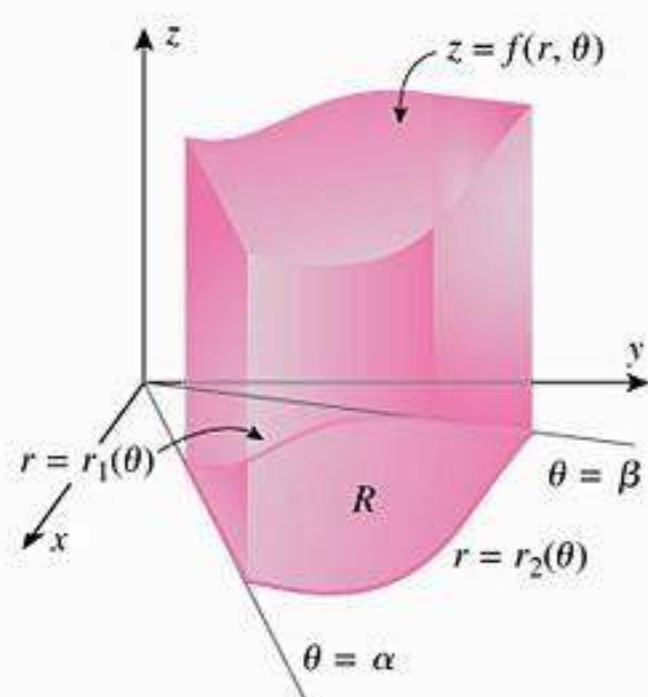


Figura 15.3.3

Para motivar uma fórmula para o volume V do sólido da Figura 15.3.3, usaremos um processo de limite semelhante ao usado para obter a Fórmula (2) da Seção 15.1, exceto que aqui vamos usar arcos de círculo e raios para subdividir a região R em retângulos polares. Como mostrado na Figura 15.3.4, excluiremos das considerações todos os retângulos polares que tenham pontos fora de R , deixando somente os retângulos polares que são subconjuntos de R . Suponha que haja n desses retângulos polares e denote a área do k -ésimo retângulo polar por ΔA_k . Seja (r_k^*, θ_k^*) qualquer ponto desse retângulo polar. Como mostrado na Figura 15.3.5, o produto $f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$ é o volume de um sólido com área da base ΔA_k e altura $f(r_k^*, \theta_k^*)$, portanto a soma

$$\sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$$

pode ser vista como uma aproximação do volume V do sólido inteiro.

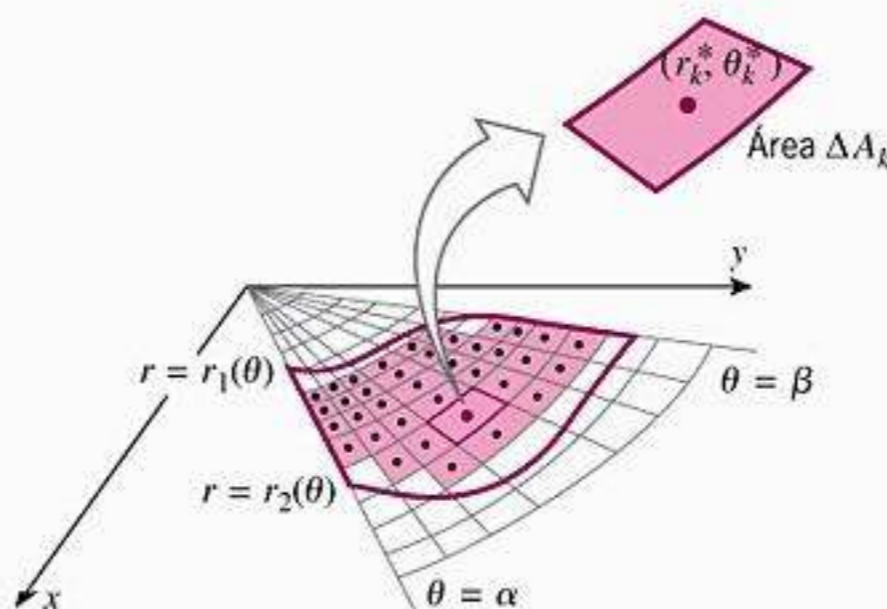


Figura 15.3.4

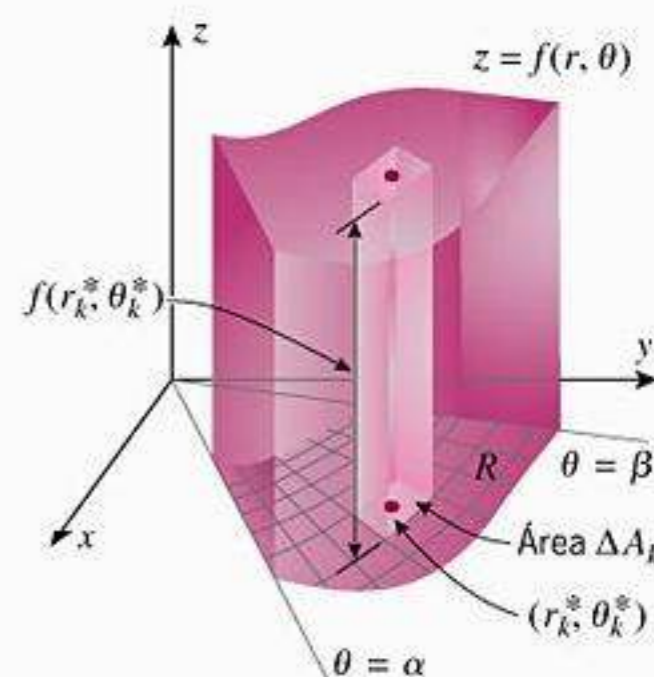


Figura 15.3.5

Agora, se aumentarmos o número de subdivisões de tal maneira que as dimensões dos retângulos polares tendam para zero, então parece plausível que os erros das aproximações tendam para zero e que o volume exato do sólido seja

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k \tag{1}$$

Se $f(r, \theta)$ for contínua em R e tiver tanto valores positivos como negativos, então o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k \tag{2}$$

representa o volume líquido com sinal entre a região R e a superfície $z = f(r, \theta)$ (como no caso das integrais duplas em coordenadas retangulares). As somas em (2) são chamadas **somas de Riemann polares** e o limite das somas de Riemann polares é denotado por

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k \tag{3}$$

As integrais duplas polares também são chamadas *integrais duplas em coordenadas polares* para distingui-las das integrais duplas em regiões no plano xy , que são chamadas *integrais duplas em coordenadas retangulares*. As integrais duplas em coordenadas polares têm as propriedades usuais das integrais, como as enunciadas pelas Fórmulas (9), (10) e (11) da Seção 15.1.

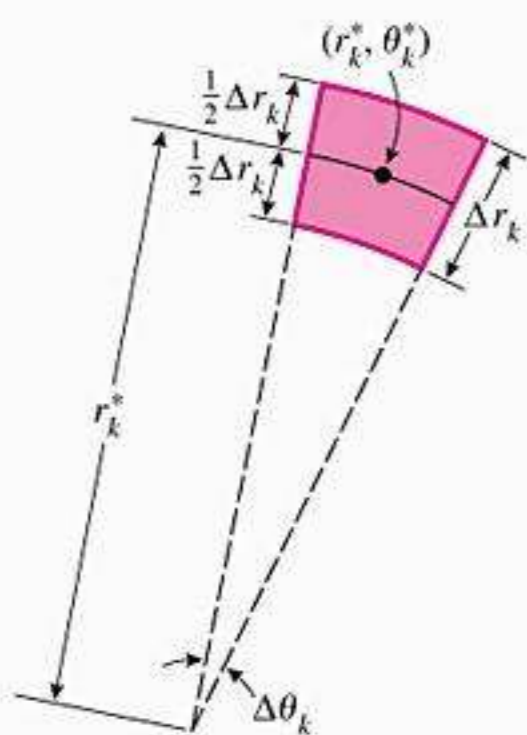


Figura 15.3.6

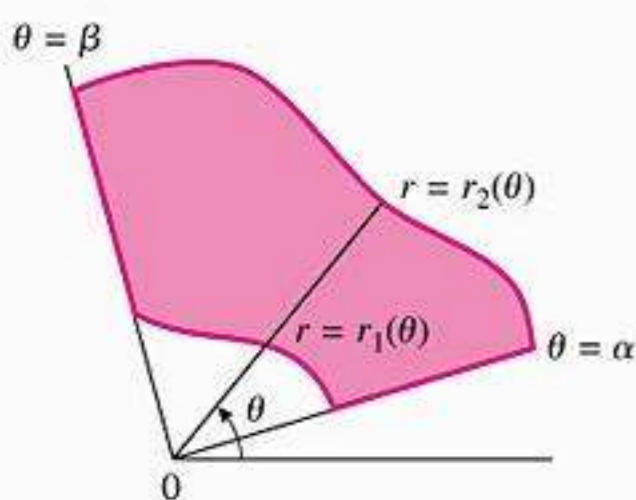


Figura 15.3.7

Observe o fator adicional de r que aparece no integrando quando escrevermos uma integral dupla polar como uma integral iterada em coordenadas polares.

que é denominada *integral dupla polar* de $f(r, \theta)$ em R . Se $f(r, \theta)$ for contínua e não-negativa em R , então o volume da Fórmula (1) pode ser expresso como

$$V = \iint_R f(r, \theta) dA \tag{4}$$

■ CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS POLARES

Nas Seções 15.1 e 15.2 calculamos integrais duplas em coordenadas retangulares expressando-as como integrais iteradas. As integrais duplas polares são calculadas da mesma maneira. Para motivar a fórmula que exprime a integral dupla polar como uma integral iterada, vamos supor que $f(r, \theta)$ seja não-negativa, de modo que possamos interpretar (3) como um volume. Entretanto, os resultados que iremos obter também são aplicáveis se f tomar valores negativos. Para iniciar, vamos escolher o ponto arbitrário (r_k^*, θ_k^*) de (3) como sendo o “centro” do k -ésimo retângulo polar, como mostra a Figura 15.3.6. Suponhamos, também, que esse retângulo polar tenha um ângulo central $\Delta\theta_k$ e uma “espessura radial” Δr_k . Assim, o raio interno desse retângulo polar é $r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k$ e o raio externo é $r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k$. Interpretando a área ΔA_k desse retângulo polar como a diferença de área entre dois setores, obtemos

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} (r_k^* + \frac{1}{2} \Delta r_k)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2} (r_k^* - \frac{1}{2} \Delta r_k)^2 \Delta\theta_k$$

que simplifica para

$$\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k \tag{5}$$

Assim, de (3) e (4)

$$V = \iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k$$

o que sugere que o volume V possa ser expresso como a integral iterada

$$V = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta \tag{6}$$

em que os limites de integração são escolhidos para cobrir a região R ; isto é, com θ fixado entre α e β , o valor de r varia de $r_1(\theta)$ a $r_2(\theta)$ (Figura 15.3.7).

Apesar de termos suposto $f(r, \theta)$ como não-negativa na dedução da Fórmula (6), pode-se provar que a relação entre a integral dupla polar e a integral iterada nesta fórmula também é verificada se f tomar valores negativos. Aceitando-se isso, obtemos o seguinte teorema, que enunciamos sem prova formal.

15.3.3 TEOREMA Se R for uma região polar simples cujos limites são os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e as curvas $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ mostrados na Figura 15.3.7 e se $f(r, \theta)$ for contínua em R , então

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta \tag{7}$$

Para aplicar esse teorema, precisamos saber como calcular os raios e as curvas que formam a fronteira da região R , uma vez que eles definem os limites de integração da integral iterada. Isso é feito da seguinte maneira:

Determinação dos Limites de Integração de uma Integral Dupla Polar: Região Polar Simples

Passo 1 Como θ é mantido fixo na primeira integração, trace uma reta radial, com ponto inicial na origem, através da região R e ângulo fixo θ (Figura 15.3.8a). Essa reta cruza a fronteira de R , no máximo, duas vezes. O ponto de interseção mais interno está na fronteira interna $r = r_1(\theta)$ e o ponto mais externo está na fronteira externa $r = r_2(\theta)$. Essas interseções determinam os limites de integração de r em (7).

Passo 2 Imagine girar o eixo x positivo uma revolução inteira no sentido anti-horário em torno da origem. O menor ângulo em que esse raio intersecta a região R é $\theta = \alpha$ e o maior ângulo é $\theta = \beta$ (Figura 15.3.8b). Isso determina os limites de integração de θ .

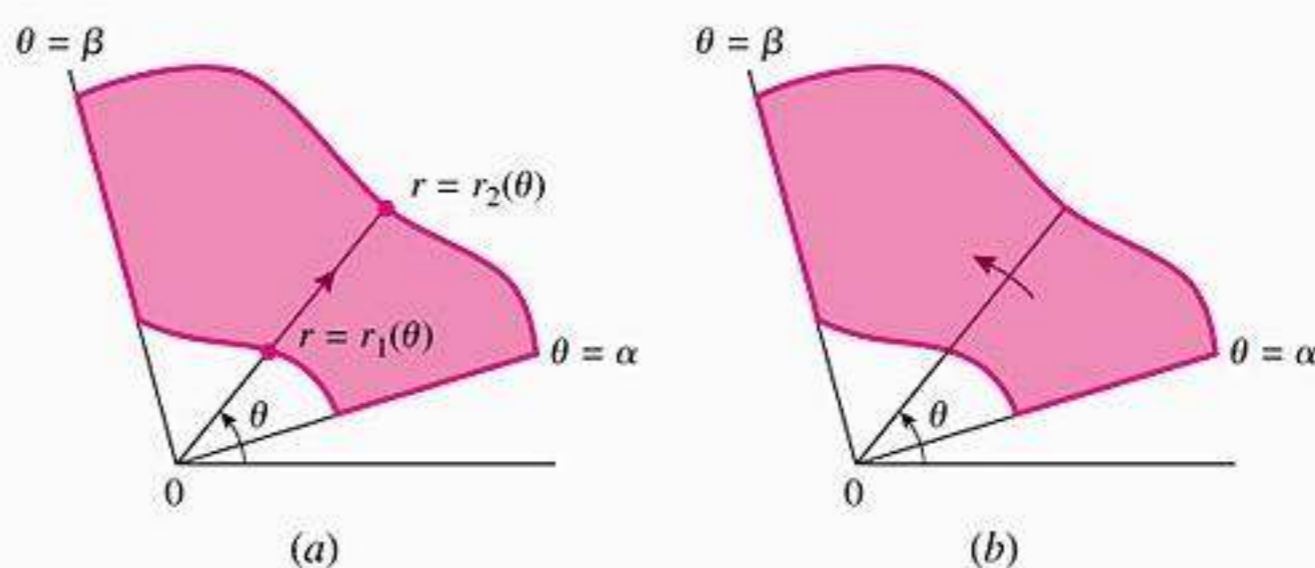


Figura 15.3.8

► **Exemplo 1** Calcule

$$\iint_R \text{sen } \theta \, dA$$

onde R é a região no primeiro quadrante fora do círculo $r = 2$ e dentro da cardióide $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Solução A região R está esboçada na Figura 15.3.9. Seguindo os dois passos descritos acima, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R \text{sen } \theta \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} (\text{sen } \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} r^2 \text{sen } \theta \right]_{r=2}^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 \text{sen } \theta - \text{sen } \theta] d\theta \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} (1 + \cos \theta)^3 + \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \frac{8}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

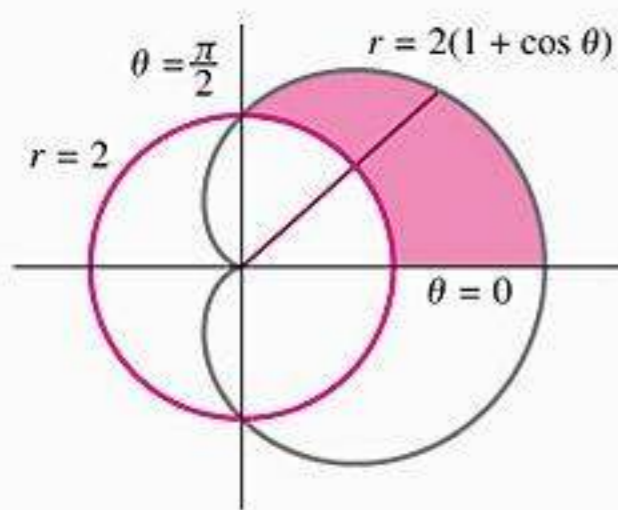


Figura 15.3.9

► **Exemplo 2** A esfera de raio a com centro na origem é expressa em coordenadas retangulares como $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e, portanto, sua equação em coordenadas cilíndricas é $r^2 + z^2 = a^2$. Use essa equação e uma integral dupla polar para calcular o volume da esfera.

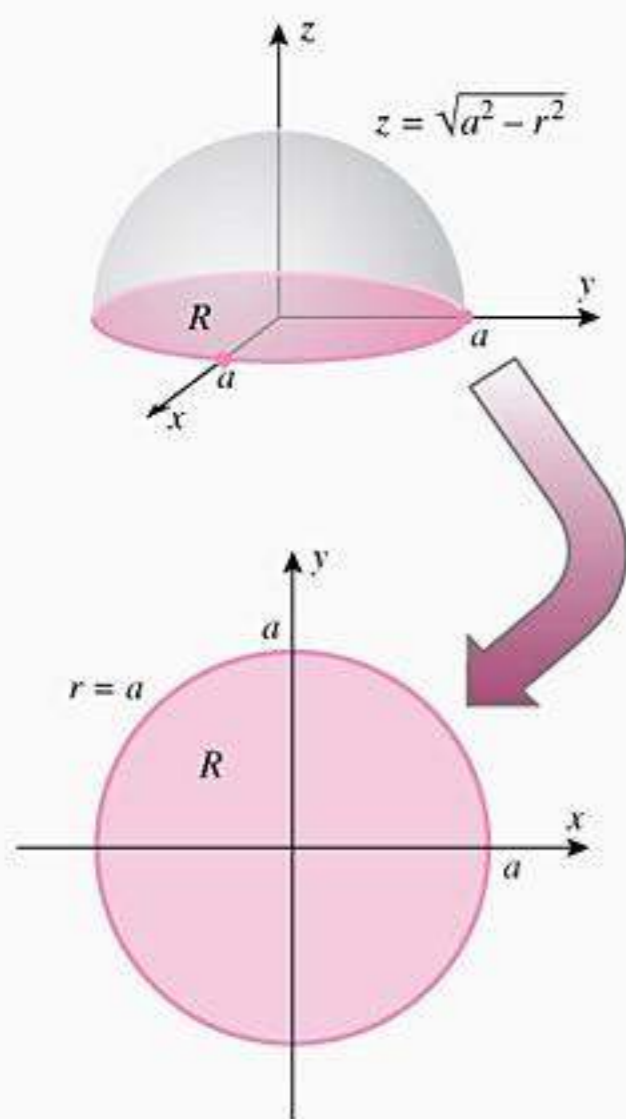


Figura 15.3.10

Solução Em coordenadas cilíndricas o hemisfério superior é dado pela equação

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

de modo que o volume de toda a esfera é

$$V = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} dA$$

onde R é a região circular mostrada na Figura 15.3.10. Assim,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} (2r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 d\theta \\ &= \left[\frac{2}{3} a^3 \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi a^3 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ CÁLCULO DE ÁREAS USANDO INTEGRAIS DUPLAS POLARES

Lembre-se que, pela Fórmula (7) da Seção 15.2, a área de uma região R do plano xy pode ser expressa como

$$\text{área de } R = \iint_R 1 dA = \iint_R dA \tag{8}$$

O raciocínio feito para deduzir esse resultado também pode ser usado para mostrar que a fórmula aplica-se às integrais duplas polares em regiões dadas em coordenadas polares.

► Exemplo 3 Use uma integral dupla polar para calcular a área compreendida pela rosácea de três pétalas $r = \text{sen } 3\theta$.

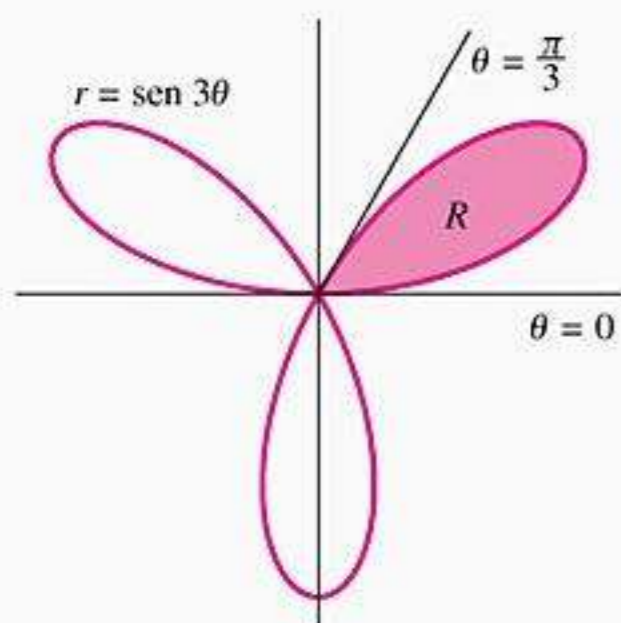


Figura 15.3.11

Solução A rosácea está esboçada na Figura 15.3.11. Usaremos a Fórmula (8) para calcular a área da pétala R no primeiro quadrante e multiplicaremos por três.

$$\begin{aligned} A &= 3 \iint_R dA = 3 \int_0^{\pi/3} \int_0^{\text{sen } 3\theta} r dr d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} \text{sen}^2 3\theta d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \left[\theta - \frac{\text{sen } 6\theta}{6} \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4} \pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ CONVERSÃO DE INTEGRAIS DUPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA POLARES

Às vezes, uma integral dupla difícil de calcular em coordenadas retangulares pode ser calculada mais facilmente em coordenadas polares, fazendo a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \text{sen } \theta$ e expressando a região de integração em forma polar; isto é, reescrevendo a integral dupla em coordenadas retangulares como

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \text{sen } \theta) dA = \iint_{\text{limites apropriados}} f(r \cos \theta, r \text{sen } \theta) r dr d\theta \tag{9}$$

► **Exemplo 4** Use coordenadas polares para calcular $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$

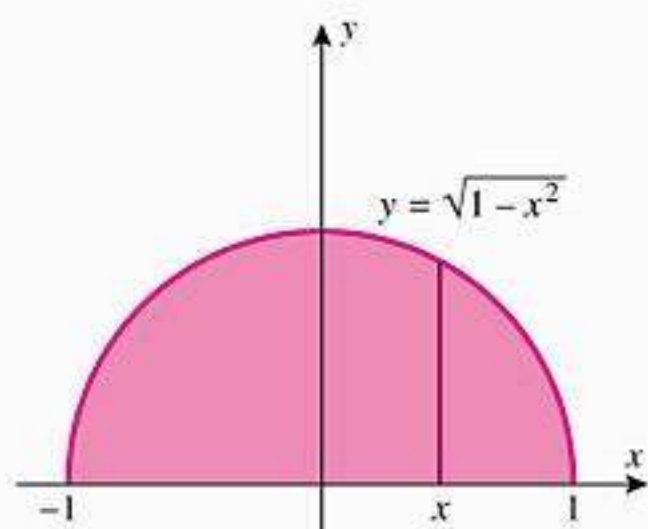


Figura 15.3.12

Solução Neste problema, começamos com uma integral iterada em coordenadas retangulares em vez de uma integral dupla, portanto antes que possamos fazer a conversão para coordenadas polares temos que identificar a região de integração. Para isso, observamos que, com x fixado, os limites de integração de y são $y = 0$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$ que nos diz que o limite inferior da região está no eixo dos x e o limite superior é um semicírculo de raio 1 com centro na origem. Pela integração em x , vemos que x varia de -1 a 1 e concluímos, então, que a região de integração é como mostra a Figura 15.3.12. Em coordenadas polares, essa é a região varrida quando r varia entre 0 e 1 e θ varia entre 0 e π . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx &= \iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^3)r dr d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{5} d\theta = \frac{\pi}{5} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A conversão para coordenadas polares funcionou tão bem nesse exemplo porque a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ reduziu a soma $x^2 + y^2$ a um único termo r^2 , simplificando, pois, o integrando. Sempre que encontrarmos uma expressão envolvendo $x^2 + y^2$ no integrando, devemos considerar a possibilidade de converter para coordenadas polares.

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.3** (Ver página 1043 para respostas.)

- A região polar dentro do círculo $r = 2 \sin \theta$ e fora do círculo $r = 1$ é uma região polar simples dada pelas desigualdades _____ $\leq r \leq$ _____ e _____ $\leq \theta \leq$ _____.
- Seja R a região do primeiro quadrante delimitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 = 100$. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.
- Seja V o volume do sólido limitado acima pelo hemisfério $z = \sqrt{1 - r^2}$ e abaixo pelo disco compreendido pelo círculo $r = \sin \theta$. Expressado como uma integral dupla em coordenadas polares, $V =$ _____.
- Expresse a integral iterada como uma integral dupla em coordenadas polares.

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(r, \theta) r dr d\theta$$

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy dx = \text{_____}$$

EXERCÍCIOS 15.3 [C] CAS

1-6 Calcule a integral iterada.

- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} r \cos \theta dr d\theta$
- $\int_0^\pi \int_0^{1+\cos \theta} r dr d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \sin \theta} r^2 dr d\theta$
- $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\cos 3\theta} r dr d\theta$
- $\int_0^\pi \int_0^{1-\sin \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r^3 dr d\theta$

7-10 Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular a área da região descrita.

- A região compreendida pela cardióide $r = 1 - \cos \theta$.
- A região compreendida pela rosácea $r = \sin 2\theta$.
- A região do primeiro quadrante limitada por $r = 1$ e $r = \sin 2\theta$, com $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$
- A região no interior do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e à direita da reta $x = 1$.

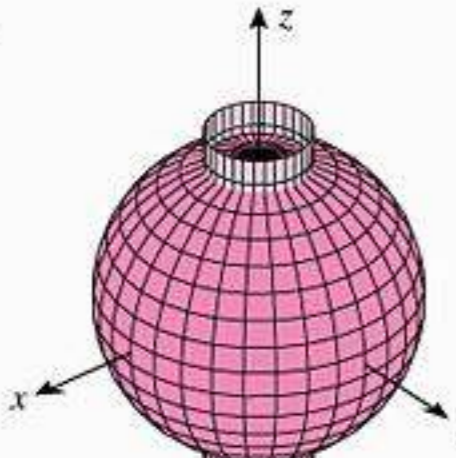
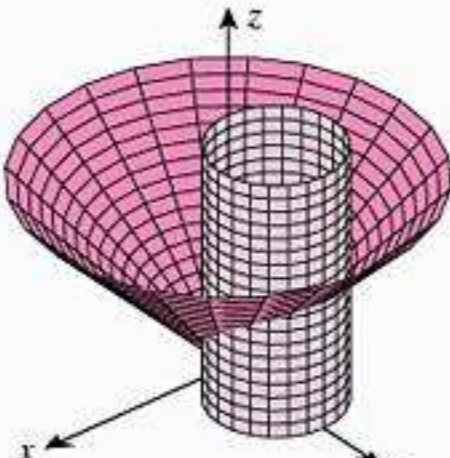
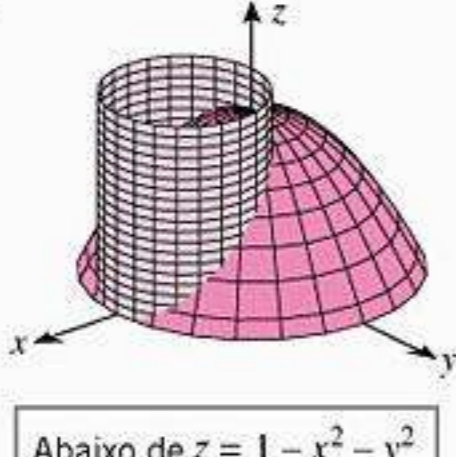
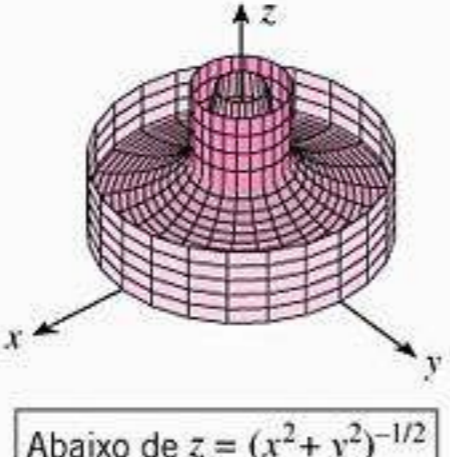
ENFOCANDO CONCEITOS

11-12 Seja R a região descrita. Esboce a região R e preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\square} \int_{\square} f(r, \theta) r dr d\theta$$

- 11. A região no interior do círculo $r = 4 \sin \theta$ e fora do círculo $r = 2$.
- 12. A região no interior do círculo $r = 1$ e fora da cardióide $r = 1 + \cos \theta$.

13-16 Expresse o volume do sólido descrito como uma integral dupla em coordenadas polares.

<p>13. </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ Fora de $x^2 + y^2 = 1$ </div>	<p>14. </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Abaixo de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Dentro de $x^2 + y^2 = 2y$ Acima de $z = 0$ </div>
<p>15. </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Abaixo de $z = 1 - x^2 - y^2$ Dentro de $x^2 + y^2 - x = 0$ Acima de $z = 0$ </div>	<p>16. </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Abaixo de $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ Fora de $x^2 + y^2 = 1$ Dentro de $x^2 + y^2 = 9$ Acima de $z = 0$ </div>

- 17. Encontre o volume do sólido descrito no Exercício 13.
- 18. Encontre o volume do sólido descrito no Exercício 14.
- 19. Encontre o volume do sólido descrito no Exercício 15.
- 20. Encontre o volume do sólido descrito no Exercício 16.
- 21. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado acima pela superfície $z = r \sin \theta$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelo plano $x = 0$ e a superfície $r = 3 \sin \theta$.
- 22. Encontre o volume do sólido contido na superfície $r^2 + z^2 = 4$ e fora da superfície $r = 2 \cos \theta$.

23-26 Use coordenadas polares para calcular a integral dupla.

23. $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$, onde R é a região contida no círculo $x^2+y^2=1$.

- 24. $\iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2} dA$, onde R é a região do primeiro quadrante contida no círculo $x^2 + y^2 = 9$.
- 25. $\iint_R \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dA$, onde R é o setor do primeiro quadrante limitado por $y = 0$, $y = x$ e $x^2 + y^2 = 4$.
- 26. $\iint_R 2y dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada acima pelo círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e abaixo pela reta $y = x$.

27-34 Calcule a integral iterada convertendo para coordenadas polares.

- 27. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$
- 28. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
- 29. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$
- 30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2) dx dy$
- 31. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (a > 0)$
- 32. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$
- 33. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy$
- 34. $\int_0^4 \int_3^{\sqrt{25-x^2}} dy dx$

- 35. Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume de um cilindro de raio a e altura h .
- 36. (a) Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume do esferóide oblato

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (0 < c < a)$$
- (b) Use o resultado da parte (a) e o Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS-84) discutido no Exercício 50 da Seção 12.7 para calcular o volume da Terra em metros cúbicos.

- 37. Use coordenadas polares para calcular o volume do sólido acima do plano xy , no interior do cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$ e contido no elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 38. Calcule a área da região compreendida pela lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.
- 39. Calcule a área do primeiro quadrante contida no interior do círculo $r = 4 \sin \theta$ e fora da lemniscata $r^2 = 8 \cos 2\theta$.

40. Mostre que a área sombreada da figura abaixo é $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$.

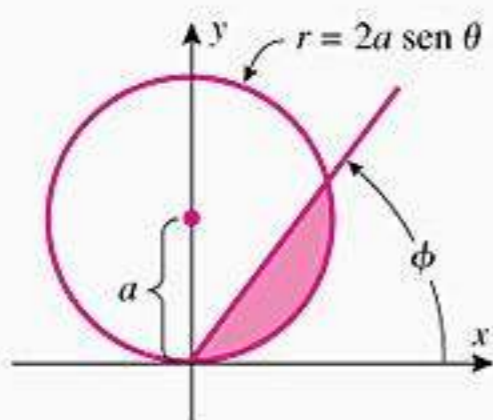


Figura Ex-40

41. A integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ que aparece na teoria das probabilidades, pode ser calculada usando-se o seguinte método. Seja I o valor da integral. Então

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

uma vez que a letra usada para a variável de integração numa integral definida não tem importância.

(a) Dê um argumento razoável para mostrar que

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(b) Calcule a integral iterada da parte (a) convertendo para coordenadas polares.

(c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que $I = \sqrt{\pi}/2$.

42. Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

[Sugestão: ver Exercício 41.]

43. (a) Use a capacidade de integração numérica de um CAS para fazer uma aproximação do valor da integral dupla

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)^2} dy dx$$

(b) Compare a aproximação obtida na parte (a) com a aproximação que resulta se a integral for convertida antes para coordenadas polares.

44. Suponha que um gêiser, com centro na origem de um sistema de coordenadas polares, esguiche água em um padrão circular de tal maneira que a profundidade D da água que atinge um ponto a uma distância de r pés da origem em uma hora é $D = ke^{-r}$. Calcule o volume total de água que o gêiser esguicha num círculo de raio R com centro na origem.

45. Calcule $\iint_R x^2 dA$ na região R mostrada na figura abaixo.

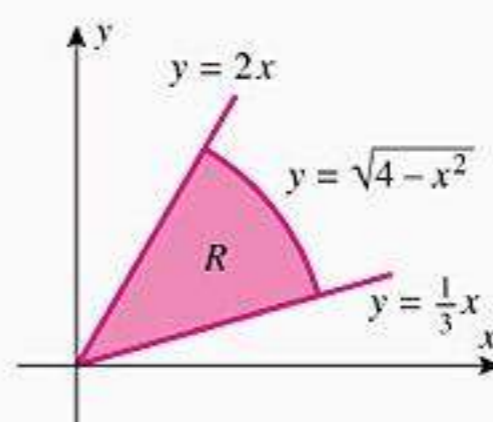


Figura Ex-45

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.3

1. $1 \leq r \leq 2 \text{ sen } \theta, \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$ 2. $\int_0^{\pi/2} \int_3^{10} f(r, \theta)r dr d\theta$ 3. $\int_0^{\pi} \int_0^{\text{sen } \theta} r\sqrt{1-r^2} dr d\theta$ 4. $\int_0^{\pi/4} \int_1^{\text{sec } \theta} \frac{1}{r} dr d\theta$

15.4 SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS; ÁREA DE SUPERFÍCIE

Em seções anteriores, consideramos curvas paramétricas no espaço bi e tridimensional. Nesta seção, discutiremos superfícies paramétricas no espaço tridimensional. Como veremos, as representações paramétricas de superfícies não são somente importantes na computação gráfica, mas também permitem-nos estudar tipos de superfícies mais gerais do que as encontradas até agora. Na Seção 7.5 do Volume 1, mostramos como determinar a área de uma superfície de revolução. Nosso trabalho com as superfícies paramétricas vai nos permitir deduzir fórmulas de áreas para tipos de superfícies mais gerais.

■ REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE SUPERFÍCIES

Vimos que curvas no espaço tridimensional podem ser representadas por três equações envolvendo um parâmetro, digamos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

As superfícies no espaço tridimensional podem ser representadas parametricamente por três equações envolvendo dois parâmetros, digamos

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

Para visualizar por que tais equações representam uma superfície, imagine (u, v) como um ponto que varia em alguma região de um plano uv . Se u for mantido constante, então v é o único parâmetro variável em (1) e as três equações representam uma curva do espaço tridimensional. Chamamos essa curva de **curva de u constante** (Figura 15.4.1). Analogamente, se v for mantido constante, então u é o único parâmetro variável em (1) e, de novo, essas três equações representam uma curva do espaço tridimensional. Chamamos essa curva de **curva de v constante**. Variando as constantes geramos uma família de curvas de u e uma família de curvas de v que, juntas, formam uma superfície.

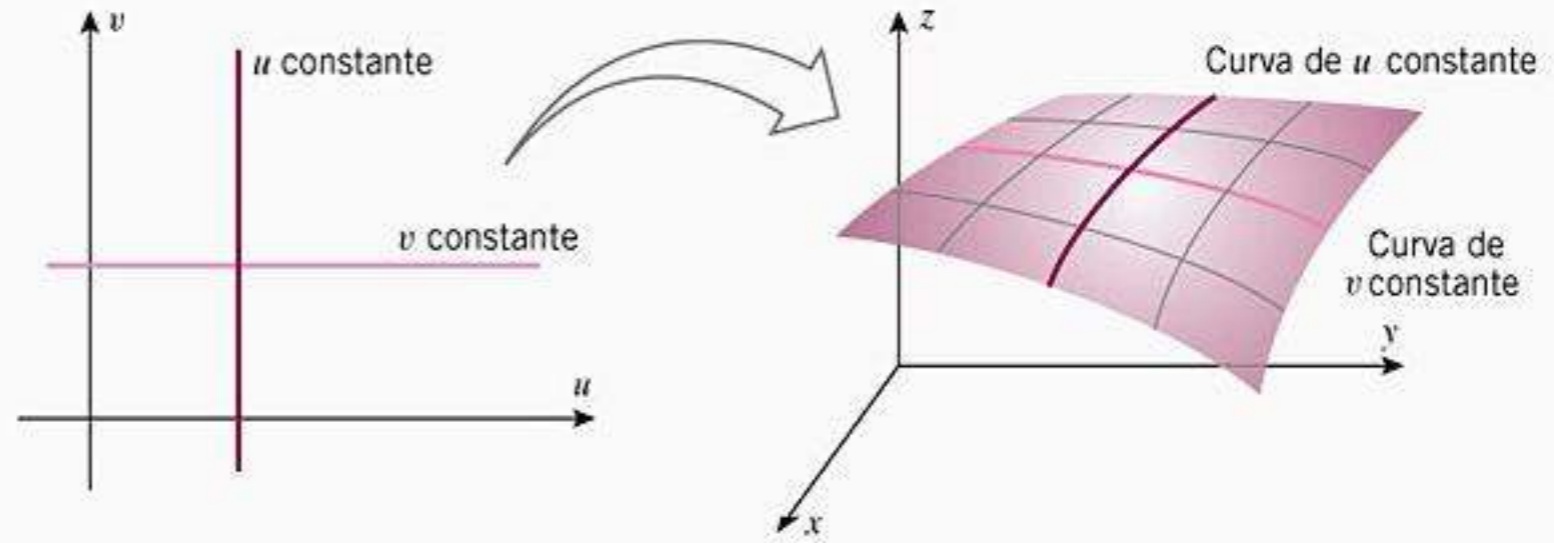


Figura 15.4.1

► **Exemplo 1** Considere o parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$. Uma maneira de parametrizar essa superfície é tomar $x = u$ e $y = v$ como os parâmetros, caso em que a superfície é representada pelas equações paramétricas

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2 \tag{2}$$

A Figura 15.4.2a mostra um gráfico dessa superfície, gerado em computador. As curvas de u constante correspondem a valores constantes de x e, portanto, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano yz . Analogamente, as curvas de v constante correspondem a valores constantes de y e, portanto, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano xz . ◀

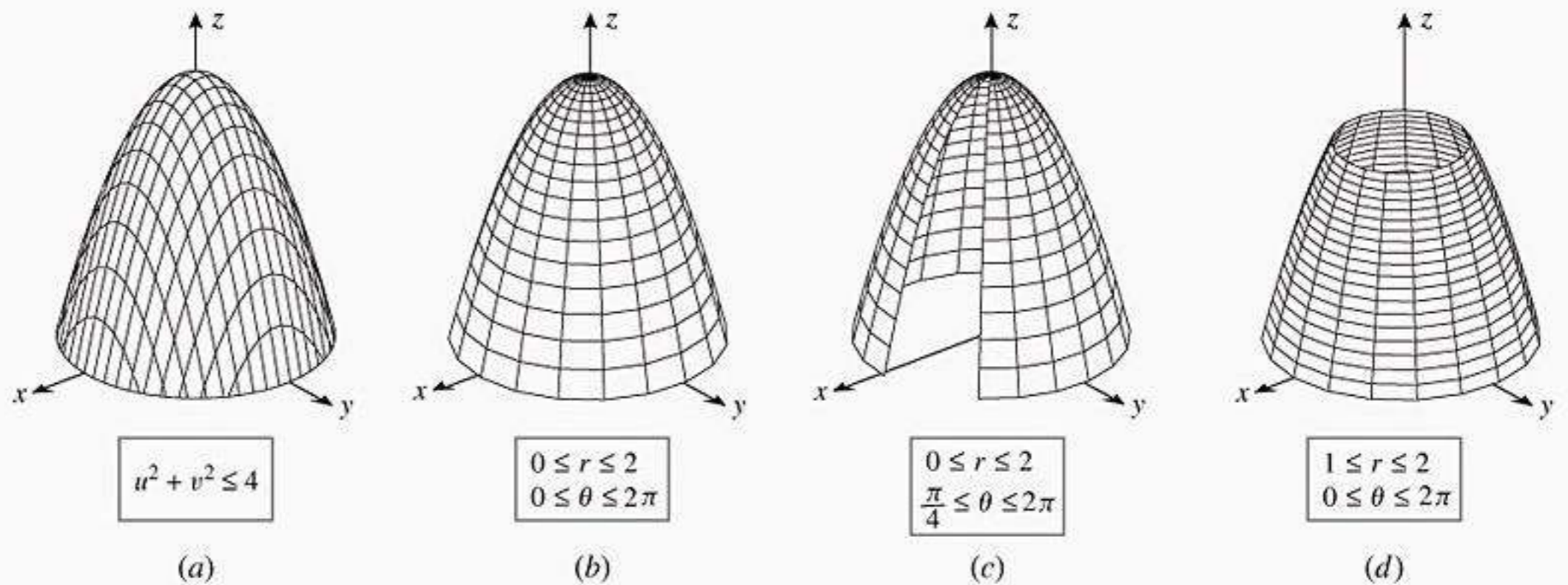


Figura 15.4.2

► **Exemplo 2** O parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, considerado no Exemplo 1, também pode ser parametrizado expressando, antes, a equação em coordenadas cilíndricas. Para isso, fazemos

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico que possa gerar superfícies paramétricas, leia a documentação pertinente e tente gerar as superfícies da Figura 15.4.2.

a substituição $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, o que dá $z = 4 - r^2$. Assim, o parabolóide pode ser representado parametricamente em função de r e θ como

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = 4 - r^2 \tag{3}$$

A Figura 15.4.2b mostra um gráfico dessa superfície, gerado em computador, para $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. As curvas de r constante correspondem a valores constantes de z e, então, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano xy . As curvas de θ constante aparecem na superfície como traços de planos verticais que passam pela origem, com ângulos variáveis em relação ao eixo dos x . As partes (c) e (d) da Figura 15.4.2 mostram o efeito de restrições nos parâmetros r e θ . ◀

► **Exemplo 3** Uma das maneiras de gerar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com um recurso gráfico é traçar os hemisférios superior e inferior

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

na mesma tela. Essa prática, no entanto, cria, em geral, uma esfera fragmentada (Figura 15.4.3a) porque, esporadicamente, o erro de arredondamento produz valores negativos sob o radical quando $1 - x^2 - y^2$ está próximo de zero. Pode ser gerado um gráfico melhor expressando a esfera, primeiro, em coordenadas esféricas como $\rho = 1$ e, depois, usando as fórmulas de conversão de coordenadas esféricas para retangulares da Tabela 12.8.1 para obter as equações paramétricas

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi$$

com parâmetros θ e ϕ . A Figura 15.4.3b mostra o gráfico dessa superfície paramétrica para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Na linguagem dos cartógrafos, as curvas de ϕ constante são as *linhas de latitude* e as curvas de θ constante são as *linhas de longitude*. ◀

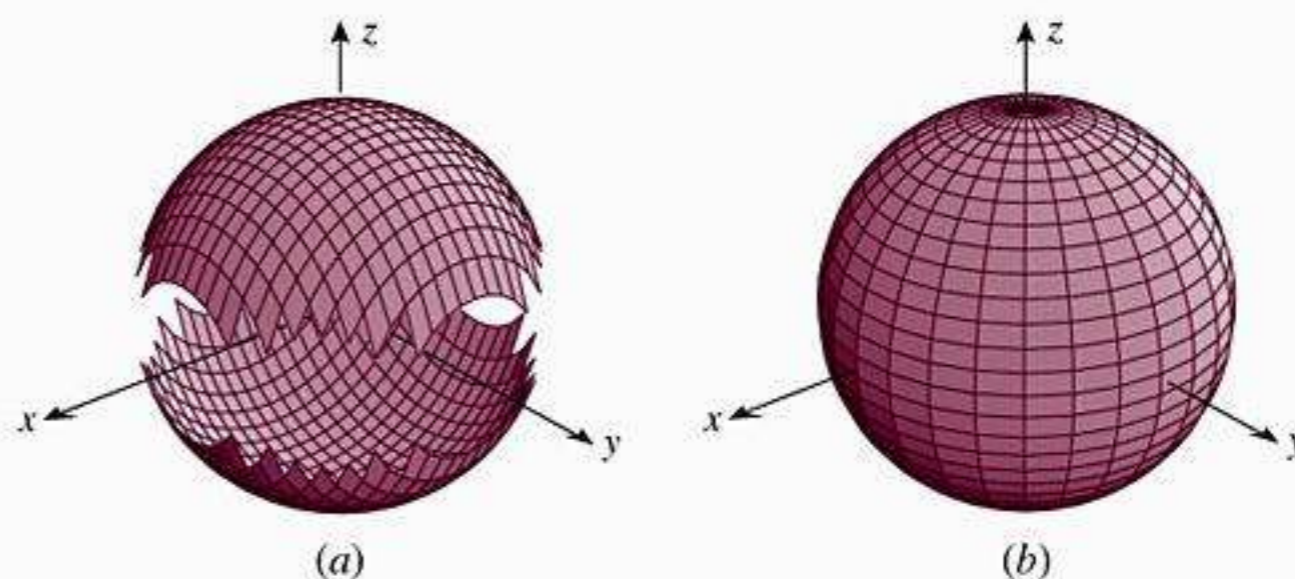
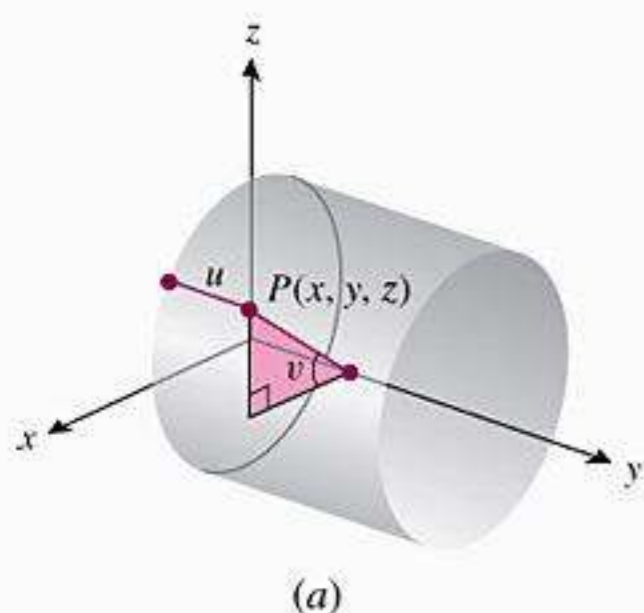


Figura 15.4.3

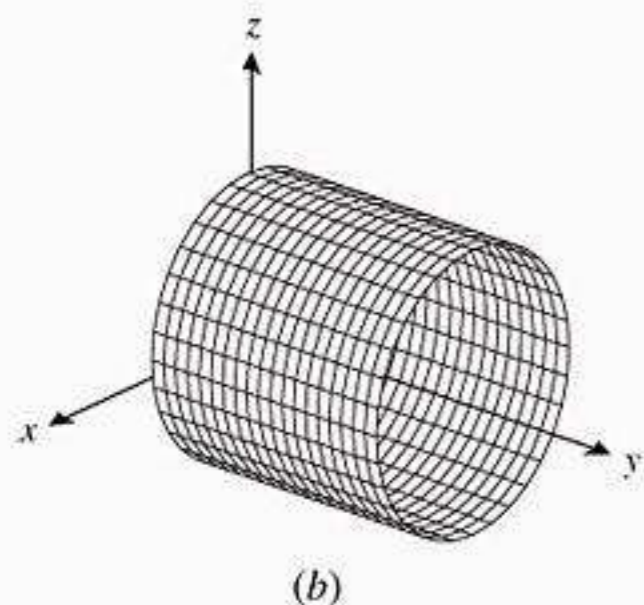


Figura 15.4.4

► **Exemplo 4** Determine equações paramétricas da parte do cilindro circular reto

$$x^2 + z^2 = 9 \quad \text{para o qual} \quad 0 \leq y \leq 5$$

em função dos parâmetros u e v mostrados na Figura 15.4.4a. O parâmetro u é a ordenada y de um ponto $P(x, y, z)$ da superfície e v é o ângulo mostrado na figura.

Solução O raio do cilindro é 3, de modo que é evidente da figura que $y = u, x = 3 \cos v$ e $z = 3 \sin v$. Então, a superfície pode ser representada parametricamente como

$$x = 3 \cos v, \quad y = u, \quad z = 3 \sin v$$

Para obter a parte da superfície de $y = 0$ a $y = 5$, deixamos o parâmetro u variar no intervalo $0 \leq u \leq 5$ e, para garantir que toda a superfície lateral seja coberta, fazemos o parâmetro v variar no intervalo $0 \leq v \leq 2\pi$. A Figura 15.4.4b mostra um gráfico da superfície gerado

em computador, no qual u e v variam nesses intervalos. As curvas de u constante aparecem como traços circulares paralelos ao plano xz e as curvas de v constante aparecem como retas paralelas ao eixo y . ◀

■ REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DAS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

A idéia básica do Exemplo 4 pode ser adaptada para obter equações paramétricas das superfícies de revolução. Suponha, por exemplo, que queiramos determinar as equações paramétricas da superfície gerada pela revolução da curva plana $y = f(x)$ em torno do eixo x . A Figura 15.4.5 sugere que a superfície possa ser representada parametricamente como

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \sin v \tag{4}$$

onde v é o ângulo mostrado. Nos exercícios, discutiremos fórmulas análogas para superfícies de revolução em torno de outros eixos.

► **Exemplo 5** Determine equações paramétricas para a superfície gerada pela revolução da curva $y = 1/x$ em torno do eixo x .

Solução Por (4), essa superfície pode ser representada parametricamente como

$$x = u, \quad y = \frac{1}{u} \cos v, \quad z = \frac{1}{u} \sin v$$

A Figura 15.4.6 mostra um gráfico da superfície, gerado em computador, para $0,7 \leq u \leq 5$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Essa superfície é uma parte da corneta de Gabriel, discutida no Exercício 49 da Seção 8.8 do Volume 1. ◀

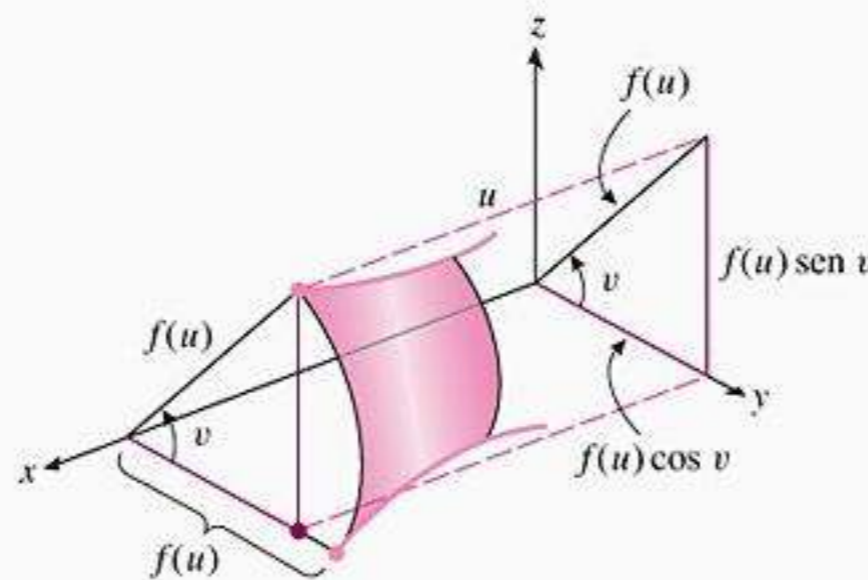


Figura 15.4.5

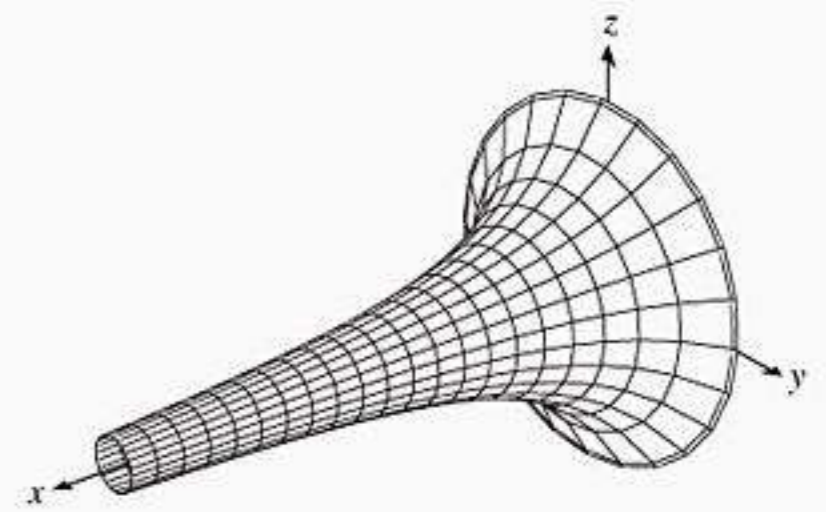


Figura 15.4.6

■ FUNÇÕES VETORIAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Lembre-se que as equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição e $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ é uma função vetorial de uma variável. Análogamente, as equações paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

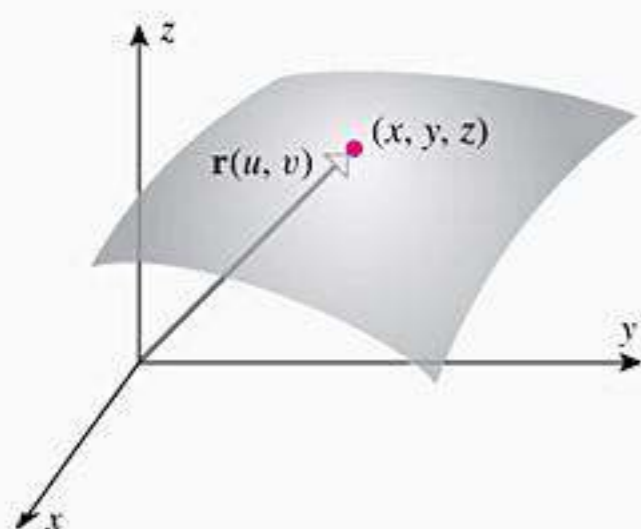


Figura 15.4.7

Aqui, a função $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ é uma *função vetorial de duas variáveis*. Definimos o *gráfico* de $\mathbf{r}(u, v)$ como o gráfico correspondente às equações paramétricas. Geometricamente, podemos interpretar \mathbf{r} como um vetor da origem a um ponto (x, y, z) que se move sobre a superfície $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, quando u e v variam (Figura 15.4.7). Como nas funções vetoriais de uma variável, dizemos que $\mathbf{r}(u, v)$ é contínua se cada componente for contínuo.

► **Exemplo 6** O parabolóide do Exemplo 1 foi dado parametricamente como

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2$$

Essas equações podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

■ DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

As derivadas parciais de funções vetoriais de duas variáveis são obtidas tomando-se as derivadas parciais dos componentes. Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Essas derivadas podem ser escritas como \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v ou $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$ e podem ser obtidas como os limites

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} = \lim_{w \rightarrow u} \frac{\mathbf{r}(w, v) - \mathbf{r}(u, v)}{w - u} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v} = \lim_{w \rightarrow v} \frac{\mathbf{r}(u, w) - \mathbf{r}(u, v)}{w - v} \quad (6)$$

► **Exemplo 7** Obtenha as derivadas parciais da função vetorial \mathbf{r} do Exemplo 6.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{i} - 2u\mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{j} - 2v\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

Nosso próximo objetivo é mostrar como encontrar planos tangentes a superfícies paramétricas. Seja σ uma superfície paramétrica no espaço tridimensional e seja P_0 um ponto de σ . Dizemos que um plano é *tangente* a σ em P_0 se, dada qualquer reta pelo ponto P_0 , essa reta está no plano se, e somente se, é a reta tangente em P_0 a alguma curva contida em σ . Na Seção 14.7 mostramos que se $z = f(x, y)$, então o gráfico de f tem um plano tangente num ponto se f for diferenciável nesse ponto. Está fora do objetivo deste livro determinar as condições precisas sob as quais uma superfície paramétrica possui um plano tangente num ponto, portanto simplesmente passamos a admitir a existência de planos tangentes nos pontos que nos interessam e nos ocuparemos com a determinação de suas equações.

Suponhamos que a superfície paramétrica σ seja o gráfico da função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ e que estejamos interessados no plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície que corresponde aos valores dos parâmetros $u = u_0$ e $v = v_0$; isto é

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Se $v = v_0$ for mantido fixado e u puder variar, então $\mathbf{r}(u, v_0)$ é uma função vetorial de uma variável, cujo gráfico é a curva de v constante que passa pelo ponto (u_0, v_0) ; semelhantemente, se $u = u_0$ for mantido fixado e v puder variar, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ é uma função vetorial de uma variável, cujo gráfico é a curva de u constante que passa pelo ponto (u_0, v_0) . Além do mais, segue da interpretação geométrica da derivada, desenvolvida na Seção 13.2, que se $\partial\mathbf{r}/\partial u \neq \mathbf{0}$ em (u_0, v_0) , então esse vetor é tangente à curva de v constante no ponto (u_0, v_0) ; e se $\partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em (u_0, v_0) , então esse vetor é tangente à curva de u constante no ponto (u_0, v_0) (Figura 15.4.8). Assim, se $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em (u_0, v_0) , então o vetor

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (7)$$

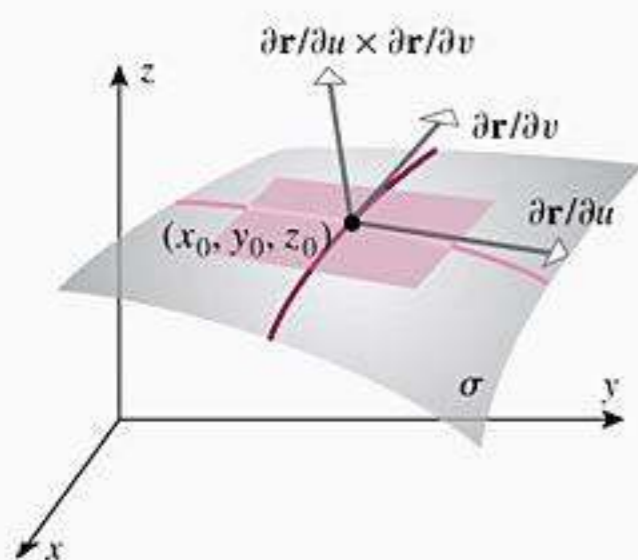


Figura 15.4.8

é ortogonal a ambos vetores tangentes no ponto (u_0, v_0) e, portanto, é normal ao plano tangente e à superfície nesse ponto (Figura 15.4.8). Em vista disso, temos a definição seguinte.

15.4.1 DEFINIÇÃO Se uma superfície paramétrica σ for o gráfico de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ e se $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ num ponto da superfície, então o **vetor normal unitário principal** à superfície naquele ponto é denotado por \mathbf{n} ou $\mathbf{n}(u, v)$ e é definido por

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \quad (8)$$

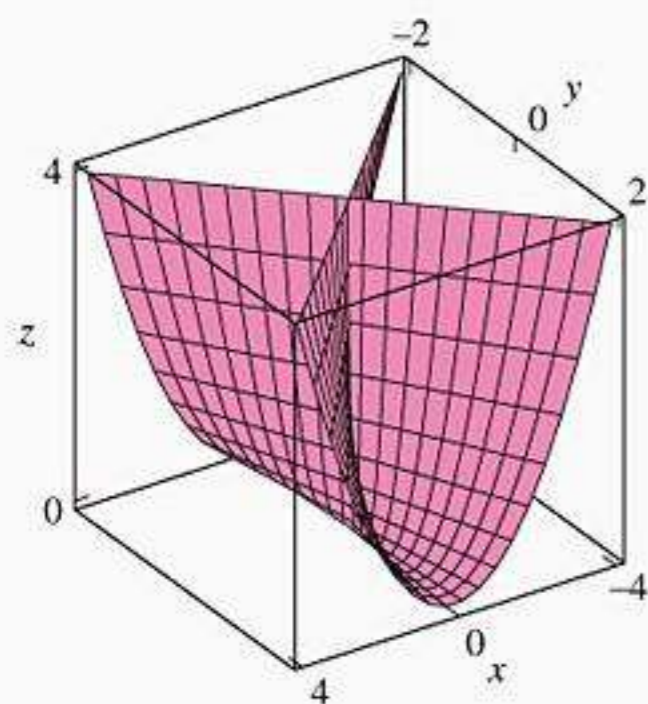


Figura 15.4.9

► **Exemplo 8** Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$

no ponto em que $u = 2$ e $v = -1$. Essa superfície, denominada *guarda-chuva de Whitney*, é um exemplo de superfície paramétrica que se auto-intersecta (Figura 15.4.9).

Solução Começamos escrevendo as equações sob a forma vetorial

$$\mathbf{r} = uv\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$$

As derivadas parciais de \mathbf{r} são

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = v\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = u\mathbf{i} + 2v\mathbf{k}$$

e, em $u = 2$ e $v = -1$, essas derivadas parciais são

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(2, -1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

Assim, por (7) e (8), uma normal à superfície nesse ponto é

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(2, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Como qualquer normal é suficiente para determinar o plano tangente, faz sentido multiplicar o vetor por $-\frac{1}{2}$ e usar a normal mais simples $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Segue das equações paramétricas dadas que o ponto da superfície correspondente a $u = 2$ e $v = -1$ é $(-2, 2, 1)$, de modo que o plano tangente nesse ponto pode ser dado sob a forma ponto-normal como

$$(x + 2) + (y - 2) + (z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + y + z = 1 \quad \blacktriangleleft$$

Convença-se de que o resultado obtido no Exemplo 8 é consistente com a Figura 15.4.9.

► Exemplo 9 A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pode ser descrita em coordenadas esféricas como $\rho = a$ e as fórmulas de conversão de coordenadas esféricas para retangulares da Tabela 12.8.1 podem, então, ser usadas para descrever a esfera como o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

onde $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (verifique). Use essa função para mostrar que, em cada ponto da esfera, o plano tangente é perpendicular ao vetor posição.

Solução Mostraremos que em cada ponto da esfera o vetor normal unitário \mathbf{n} é um múltiplo escalar de \mathbf{r} (e portanto, é paralelo a \mathbf{r}). Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 |\sin \phi| = a^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Para $\phi \neq 0$ ou π , segue por (8) que

$$\mathbf{n} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}$$

Além disso, os planos tangentes para $\phi = 0$ ou π são horizontais, e para estes, $\mathbf{r} = \pm a \mathbf{k}$ certamente é normal. \blacktriangleleft

■ ÁREA DE SUPERFÍCIE DE SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

Na Seção 7.5 do Volume 1 deduzimos fórmulas para a área de superfície de uma superfície de revolução [ver Fórmulas (4) e (5) e o Exercício 36 daquela seção]. Vamos, agora, deduzir uma fórmula para a área de superfície S de uma superfície paramétrica σ e desta fórmula deduziremos, então, uma fórmula para a área de superfícies da forma $z = f(x, y)$.

Seja σ uma superfície paramétrica cuja equação vetorial é

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Diremos que σ é uma *superfície paramétrica lisa* numa região R do plano uv se $\partial\mathbf{r}/\partial u$ e $\partial\mathbf{r}/\partial v$ forem contínuas em R e $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em R . Geometricamente, isso significa que σ tem um vetor normal unitário principal (e, portanto, um plano tangente) para todo (u, v) em R e $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ é uma função contínua em R . Assim, numa superfície paramétrica lisa, o vetor normal unitário \mathbf{n} varia continuamente e não apresenta mudanças de direção bruscas. Deduziremos uma fórmula da área de superfície para superfícies paramétricas que não tenham auto-interseções e que sejam lisas numa região R , com a possível exceção de que $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ possa ser igual a $\mathbf{0}$ na fronteira de R .

Começamos subdividindo R em regiões retangulares por meio de retas paralelas aos eixos u e v e descartando quaisquer porções não-retangulares que conttenham pontos da fronteira. Suponha que haja n retângulos e denote o k -ésimo retângulo por R_k . Seja (u_k, v_k) o canto esquerdo inferior de R_k e suponha que R_k tenha área $\Delta A_k = \Delta u_k \Delta v_k$, onde Δu_k e Δv_k são as dimensões de R_k (Figura 15.4.10a). A imagem de R_k será alguma *porção curvilínea* σ_k na superfície σ que tem um canto em $\mathbf{r}(u_k, v_k)$; denote a área dessa porção por ΔS_k (Figura 15.4.10b).

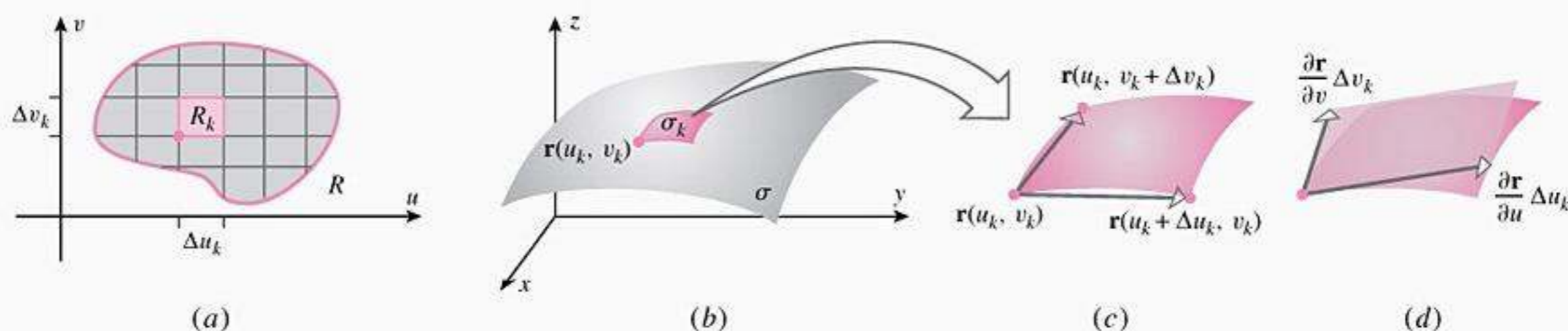


Figura 15.4.10

Como sugerido pela Figura 15.4.10c, as duas bordas da porção que se cortam em $\mathbf{r}(u_k, v_k)$ podem ser aproximadas pelos vetores “secante”

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(u_k + \Delta u_k, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k) \\ &\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k) \end{aligned}$$

e, portanto, a área de σ_k pode ser aproximada pela área do paralelogramo determinado por esses vetores. Entretanto, pelas Fórmulas (5) e (6) segue-se que, se Δu_k e Δv_k forem pequenos, então esses vetores secantes podem, por sua vez, ser aproximados pelos vetores tangentes

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \Delta u_k \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \Delta v_k$$

onde as derivadas parciais são calculadas em (u_k, v_k) . Assim, a área da porção σ_k pode ser aproximada pela área do paralelogramo determinado por esses vetores (Figura 15.4.10d); isto é,

$$\Delta S_k \approx \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \Delta u_k \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \Delta v_k \right\| = \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k = \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k \quad (9)$$

Segue que a área de superfície S da superfície inteira σ pode ser aproximada como

$$S \approx \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

Assim, supondo que os erros das aproximações tendam para zero quando n aumenta de tal maneira que as dimensões dos retângulos tendam para zero, então é plausível que o valor exato de S seja

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

ou, de maneira equivalente,

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \quad (10)$$

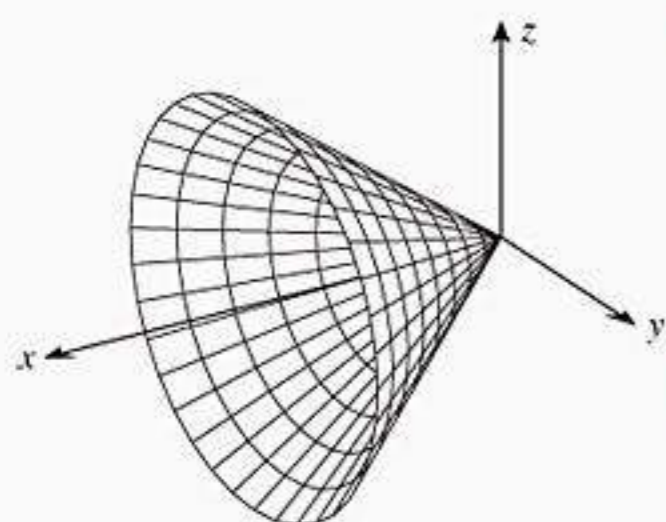


Figura 15.4.11

► **Exemplo 10** Segue de (4) que as equações paramétricas

$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \sin v$$

representam o cone que resulta quando a reta $y = x$ do plano xy é girada em torno do eixo x . Use a Fórmula (10) para determinar a área de superfície da parte do cone para a qual $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$ (Figura 15.4.11).

Solução A superfície pode ser representada em forma vetorial como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + u \sin v\mathbf{k} \quad (0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \cos v\mathbf{j} + \sin v\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \sin v\mathbf{j} + u \cos v\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \cos v & \sin v \\ 0 & -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u\mathbf{i} - u \cos v\mathbf{j} - u \sin v\mathbf{k}$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + (-u \cos v)^2 + (-u \sin v)^2} = |u|\sqrt{2} = u\sqrt{2}$$

Então, por (10),

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2}u \, du \, dv = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv = 4\pi\sqrt{2} \blacktriangleleft$$

■ **ÁREA DE SUPERFÍCIE DE SUPERFÍCIES DA FORMA $z = f(x, y)$**

No caso em que σ for uma superfície da forma $z = f(x, y)$, podemos tomar $x = u$ e $y = v$ como parâmetros e expressar a superfície parametricamente como

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

ou sob a forma vetorial como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$$

Então,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Na Fórmula (11), a região R está contida no plano xy porque os parâmetros são x e y . Geometricamente, essa região é a projeção no plano xy da parte da superfície $z = f(x, y)$ cuja área está sendo determinada pela fórmula (Figura 15.4.12).

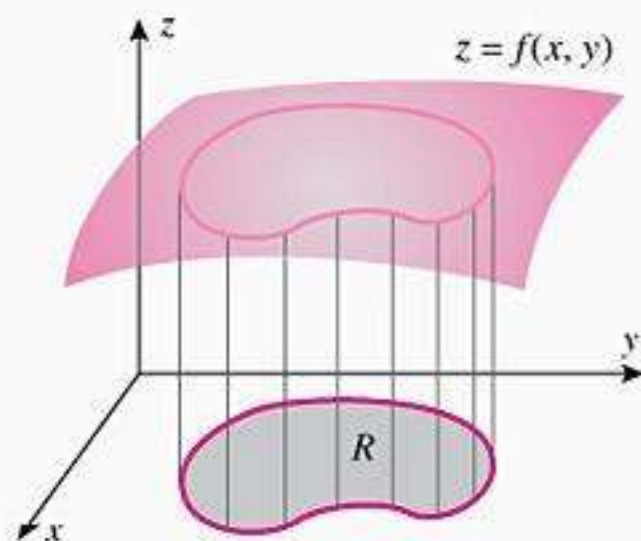


Figura 15.4.12

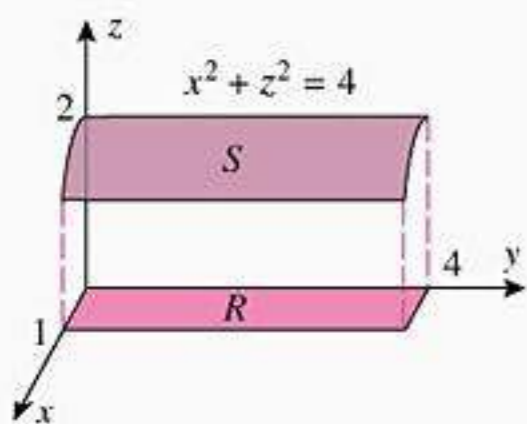


Figura 15.4.13

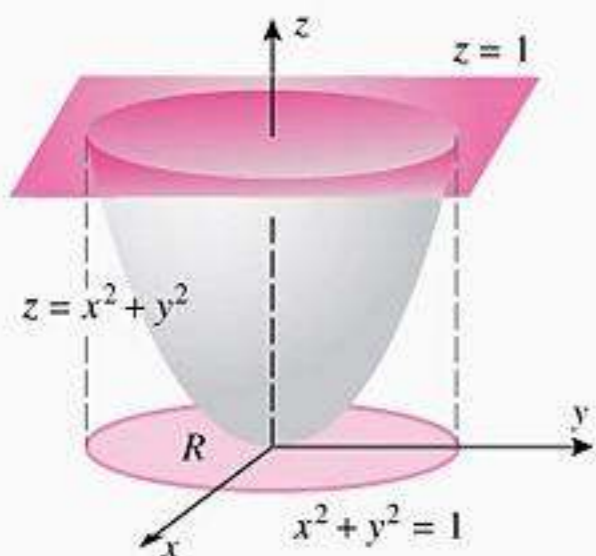


Figura 15.4.14

Assim, de (10) resulta

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \tag{11}$$

► **Exemplo 11** Encontre a área da parte da superfície $z = \sqrt{4 - x^2}$ que fica acima do retângulo R do plano xy cujas coordenadas satisfazem $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 4$.

Solução Como mostrado na Figura 15.4.13, a superfície é uma parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$. Por (11) temos que a área de superfície é

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2 + 0 + 1} dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx dy \\ &= 2 \int_0^4 \left[\text{arc sen} \left(\frac{1}{2}x \right) \right]_{x=0}^1 dy = 2 \int_0^4 \frac{\pi}{6} dy = \frac{4}{3}\pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Fórmula 21 da Seção 8.1 do Volume 1

► **Exemplo 12** Encontre a área de superfície da porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$.

Solução A superfície $z = x^2 + y^2$ é o parabolóide circular mostrado na Figura 15.4.14. O traço do parabolóide no plano $z = 1$ projeta-se no círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy , e a porção do parabolóide que fica abaixo do plano $z = 1$ projeta-se na região R que é envolta por esse círculo. Assim, pela Fórmula (11) segue que a área de superfície é

$$S = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$$

A expressão $4x^2 + 4y^2 + 1 = 4(x^2 + y^2) + 1$ no integrando sugere que se calcule a integral em coordenadas polares. De acordo com a Fórmula (9) da Seção 15.3, substituímos $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ no integrando, dA por $r dr d\theta$ e determinamos os limites de integração expressando a região R em coordenadas polares. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_{r=0}^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) d\theta = \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.4** (Ver página 1056 para respostas.)

1. Considere a superfície representada parametricamente por

$$\begin{aligned} x &= 1 - u \\ y &= (1 - u) \cos v & (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi) \\ z &= (1 - u) \sin v \end{aligned}$$

- (a) Descreva as curvas de u constante.
- (b) Descreva as curvas de v constante.

2. Se $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u)\mathbf{i} + [(1 - u) \cos v]\mathbf{j} + [(1 - u) \sin v]\mathbf{k}$

então $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \underline{\hspace{2cm}}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Se $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u)\mathbf{i} + [(1 - u) \cos v]\mathbf{j} + [(1 - u) \sin v]\mathbf{k}$
então o vetor normal unitário principal ao gráfico de \mathbf{r} no ponto em que $u = 1/2$ e $v = \pi/6$ é dado por $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. Seja σ a superfície paramétrica de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$

Se σ não tem auto-interseções e é lisa numa região R do plano uv , então a área de superfície de σ é dada por

$$S = \iint_R \underline{\hspace{2cm}} dA$$

5. A área de superfície de uma superfície da forma $z = f(x, y)$ sobre a região R do plano xy é dada por

$$S = \iint_R \underline{\hspace{2cm}} dA$$

EXERCÍCIOS 15.4  

1-2 Faça um esboço da superfície paramétrica.

1. (a) $x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}$
(b) $x = u, y = \sqrt{u^2 + v^2}, z = v$
(c) $x = \sqrt{u^2 + v^2}, y = u, z = v$
2. (a) $x = u, y = v, z = u^2 + v^2$
(b) $x = u, y = u^2 + v^2, z = v$
(c) $x = u^2 + v^2, y = u, z = v$

3-4 Determine uma representação paramétrica da superfície em termos dos parâmetros $u = x$ e $v = y$.

3. (a) $2z - 3x + 4y = 5$ (b) $z = x^2$
4. (a) $z + zx^2 - y = 0$ (b) $y^2 - 3z = 5$
5. (a) Encontre equações paramétricas para a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 5$ compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = 1$.
(b) Encontre equações paramétricas para a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ compreendida entre os planos $y = 1$ e $y = 3$.
6. (a) Encontre equações paramétricas para a parte do plano $x + y = 1$ compreendida entre os planos $z = -1$ e $z = 1$.
(b) Encontre equações paramétricas para a parte do plano $y - 2z = 5$ compreendida entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.
7. Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela revolução da curva $y = \sin x$ em torno do eixo x .
8. Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela revolução da curva $y - e^x = 0$ em torno do eixo x .

9-14 Determine uma representação paramétrica da superfície em função dos parâmetros r e θ , onde (r, θ, z) são as coordenadas cilíndricas de um ponto na superfície.

9. $z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ 10. $z = e^{-(x^2 + y^2)}$

11. $z = 2xy$ 12. $z = x^2 - y^2$
13. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sobre ou acima do plano $z = 2$.
14. A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre ou abaixo do plano $z = 3$.
15. Determine uma representação paramétrica do cone

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$


em função dos parâmetros ρ e θ , onde (ρ, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas de um ponto na superfície.

16. Descreva o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ em função dos parâmetros θ e ϕ , onde (ρ, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas de um ponto na superfície.

ENFOCANDO CONCEITOS

17-22 Elimine os parâmetros para obter uma equação em coordenadas retangulares e descreva a superfície.

17. $x = 2u + v, y = u - v, z = 3v$ para $-\infty < u < +\infty$ e $-\infty < v < +\infty$.
18. $x = u \cos v, y = u^2, z = u \sin v$ para $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v < 2\pi$.
19. $x = 3 \sin u, y = 2 \cos u, z = 2v$ para $0 \leq u < 2\pi$ e $1 \leq v \leq 2$.
20. $x = \sqrt{u} \cos v, y = \sqrt{u} \sin v, z = u$ para $0 \leq u \leq 4$ e $0 \leq v < 2\pi$.
21. $\mathbf{r}(u, v) = 3u \cos v \mathbf{i} + 4u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ para $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v < 2\pi$.
22. $\mathbf{r}(u, v) = \sin u \cos v \mathbf{i} + 2 \sin u \sin v \mathbf{j} + 3 \cos u \mathbf{k}$ para $0 \leq u \leq \pi$ e $0 \leq v < 2\pi$.

-  **23.** A figura a seguir mostra os gráficos de duas representações paramétricas do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \leq z \leq 2$.

- (a) Encontre equações paramétricas que produzam duplicatas razoáveis dessas superfícies.
- (b) Use um recurso gráfico para verificar sua resposta da parte (a).

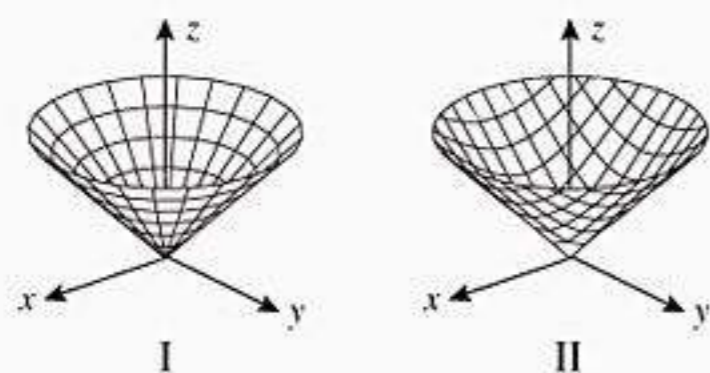


Figura Ex-23

24. A figura abaixo mostra os gráficos de duas representações paramétricas do parabolóide $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 2$.
- (a) Encontre equações paramétricas que produzam duplicatas razoáveis dessas superfícies.
 - (b) Use um recurso gráfico para verificar sua resposta da parte (a).

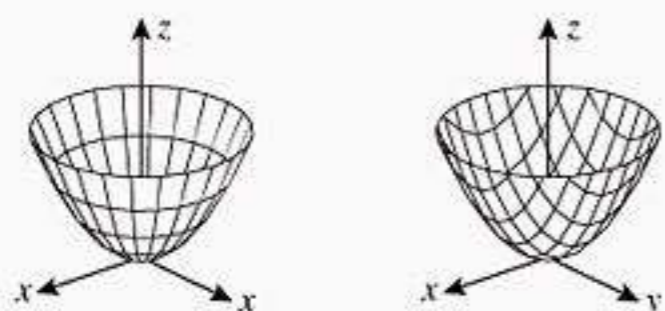
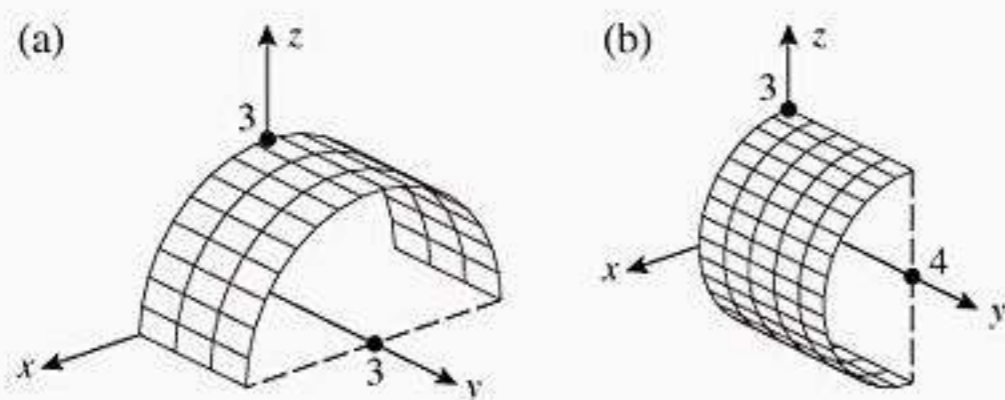
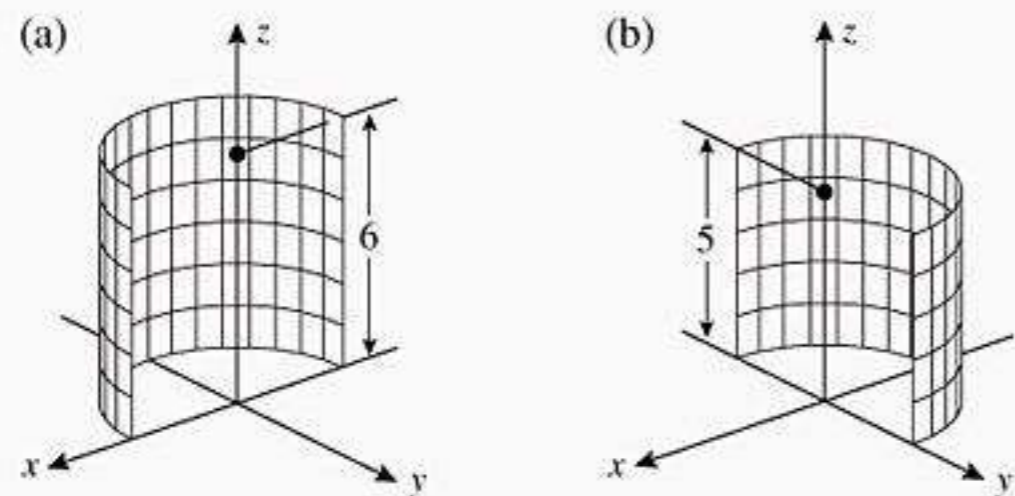


Figura Ex-24

25. Em cada parte, a figura abaixo mostra uma porção da superfície paramétrica $x = 3 \cos v$, $y = u$, $z = 3 \sin v$. Encontre restrições de u e v que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico

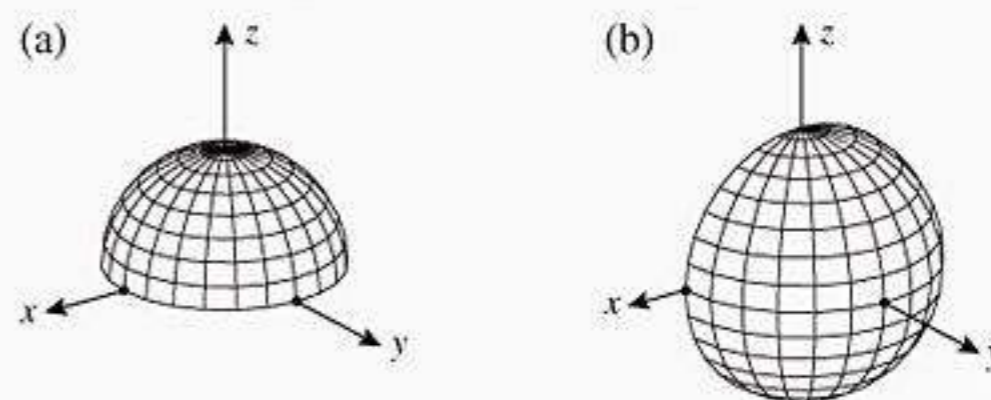


26. Em cada parte, a figura abaixo mostra uma porção da superfície paramétrica $x = 3 \cos v$, $y = 3 \sin v$, $z = u$. Encontre restrições de u e v que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico.

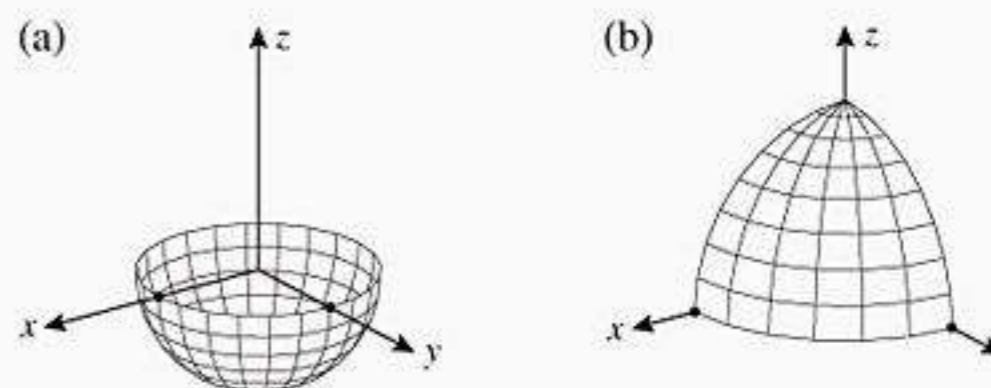


27. Em cada parte, a figura a seguir mostra um hemisfério que é parte da esfera $x = \sin \phi \cos \theta$, $y = \sin \phi \sin \theta$, $z = \cos \phi$. Encontre restrições de ϕ e θ que produzam o hemisfério e

verifique sua resposta com um recurso gráfico.



28. Em cada parte, a figura abaixo mostra uma parte da esfera $x = \sin \phi \cos \theta$, $y = \sin \phi \sin \theta$, $z = \cos \phi$. Encontre restrições de ϕ e θ que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico.



29-34 Encontre uma equação para o plano tangente da superfície paramétrica no ponto dado.

- 29. $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$; $(1, 2, 5)$
- 30. $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + v$; $(1, 4, 3)$
- 31. $x = 3v \sin u$, $y = 2v \cos u$, $z = u^2$; $(0, 2, 0)$
- 32. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k}$; $u = 1, v = 2$
- 33. $\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$; $u = 1/2, v = \pi/4$
- 34. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + ue^v \mathbf{j} + ve^u \mathbf{k}$; $u = \ln 2, v = 0$

35-46 Encontre a área da superfície dada.

- 35. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$.
- 36. A parte do plano $2x + 2y + z = 8$ no primeiro octante.
- 37. A parte do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ que está acima da região do primeiro quadrante limitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.
- 38. A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
- 39. A parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy .
- 40. A parte da superfície $z = 2x + y^2$ acima da região triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.
- 41. A parte do parabolóide

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$$
 para a qual $1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$.

- 42. A parte do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$
 para a qual $0 \leq u \leq 2v, 0 \leq v \leq \pi/2$.

43. A parte da superfície $z = xy$ acima do setor do primeiro quadrante limitado pelas retas $y = x/\sqrt{3}$, $y = 0$ e o círculo $x^2 + y^2 = 9$.
44. A parte do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 8$.
45. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ compreendida pelos planos $z = 1$ e $z = 2$.
46. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ que está no interior do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
47. Use equações paramétricas para deduzir a fórmula da área da superfície de uma esfera de raio a .
48. Use equações paramétricas para deduzir a fórmula da área da superfície lateral de um cilindro circular reto de raio r e altura h .
49. A parte da superfície

$$z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a, h > 0)$$

entre o plano xy e plano $z = h$ é um cone circular reto de altura h e raio a . Use uma integral dupla para mostrar que a área da superfície lateral desse cone é $S = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}$.

50. A figura abaixo mostra o *toro* gerado pela revolução do círculo

$$(x - a)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a)$$

do plano xz em torno do eixo z .

- (a) Mostre que esse toro pode ser expresso parametricamente como

$$\begin{aligned} x &= (a + b \cos v) \cos u \\ y &= (a + b \cos v) \sin u \\ z &= b \sin v \end{aligned}$$

onde u e v são os parâmetros mostrados na figura e $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

- (b) Use um recurso gráfico para gerar um toro.

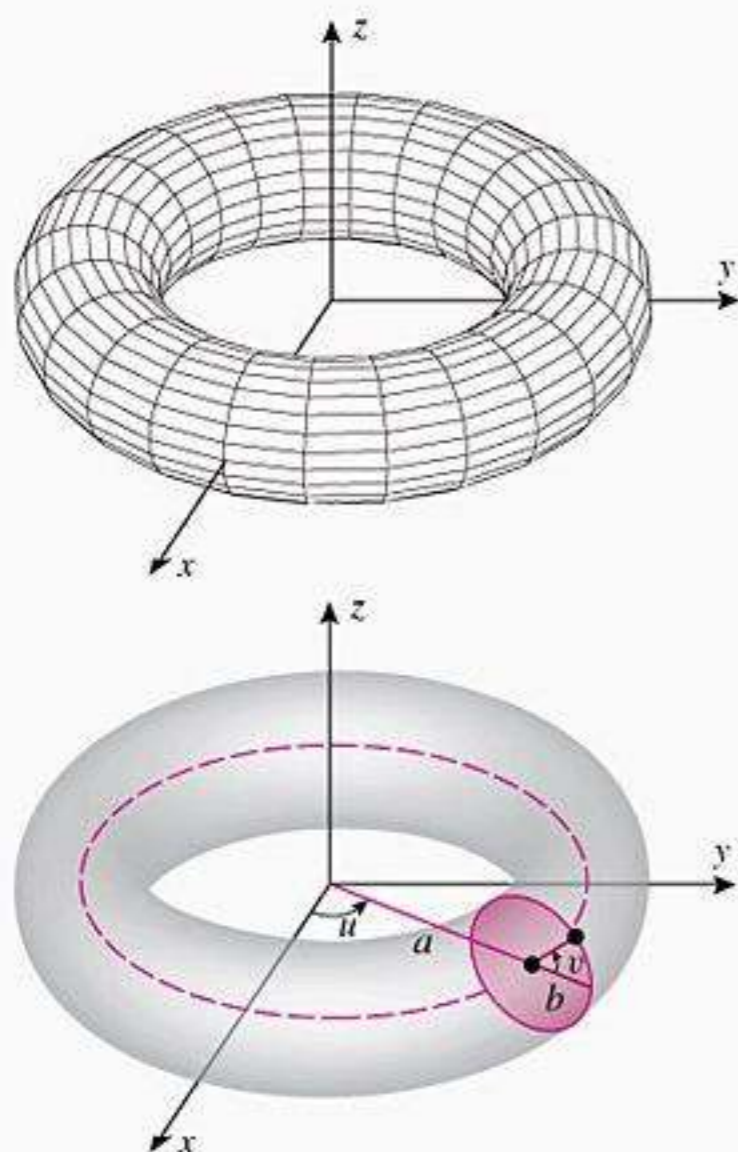


Figura Ex-50

51. Calcule a área da superfície do toro do Exercício 50(a).

52. Use um CAS para gerar o gráfico do *helicóide*

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v$$

para $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq v \leq 4\pi$ (ver figura abaixo) e depois use a operação de integração dupla numérica do CAS para aproximar a área da superfície.

53. Use um CAS para gerar o gráfico da *pseudo-esfera*

$$\begin{aligned} x &= \cos u \sin v \\ y &= \sin u \sin v \\ z &= \cos v + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) \end{aligned}$$

para $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 < v < \pi$ (ver figura abaixo) e depois use a operação de integração dupla numérica do CAS para aproximar a área da superfície compreendida pelos planos $z = -1$ e $z = 1$.

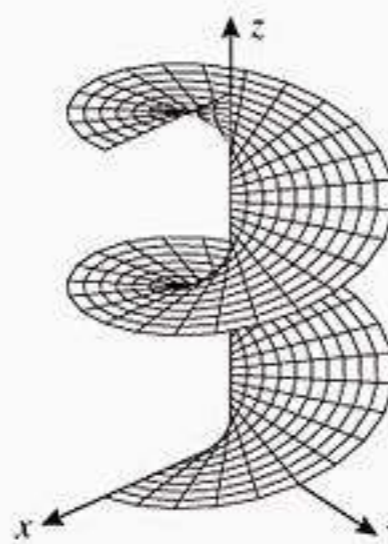


Figura Ex-52

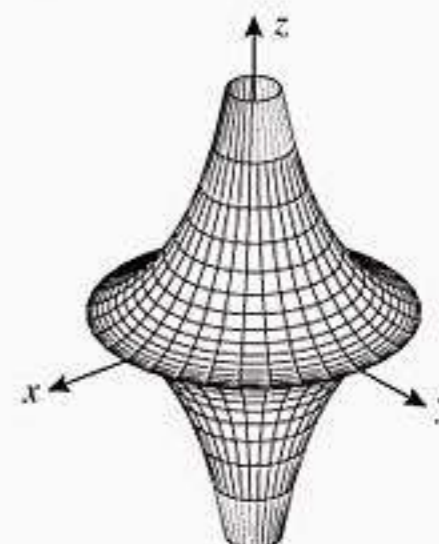


Figura Ex-53

54. A figura abaixo mostra o gráfico de uma *esfera astroidal*

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$

- (a) Mostre que essa superfície pode ser representada parametricamente como

$$\begin{aligned} x &= a(\sin u \cos v)^3 \\ y &= a(\sin u \sin v)^3 \quad (0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi) \\ z &= a(\cos u)^3 \end{aligned}$$

- (b) Use um CAS para aproximar a área da superfície no caso em que $a = 1$.

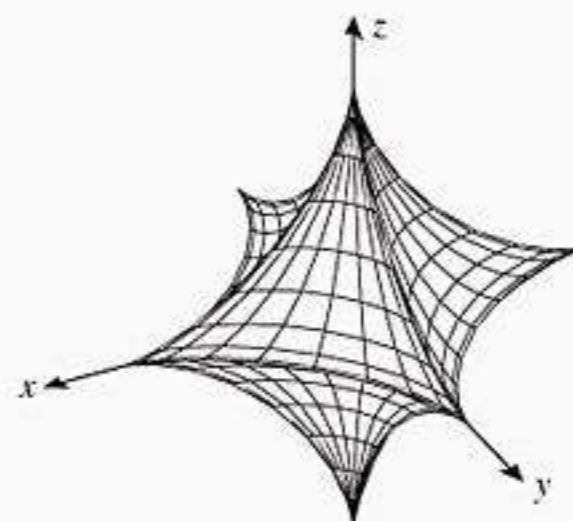


Figura Ex-54

55. (a) Descreva a superfície representada pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= a \sin \phi \cos \theta \\ y &= b \sin \phi \sin \theta \quad (0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ z &= c \cos \phi \end{aligned}$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

(b) Use um CAS para aproximar a área da superfície para $a = 2, b = 3, c = 4$.

56. (a) Obtenha equações paramétricas para a superfície de revolução gerada pela revolução da curva $z = f(x)$ do plano xz em torno do eixo z .
- (b) Use o resultado obtido na parte (a) para determinar equações paramétricas para a superfície de revolução gerada pela revolução da curva $z = 1/x^2$ do plano xz em torno do eixo z .
- (c) Use um recurso computacional gráfico para verificar seu trabalho traçando o gráfico da superfície paramétrica.

57-59 As equações paramétricas nestes exercícios representam uma superfície quadrática para valores positivos de a, b e c . Identifique o tipo de superfície eliminando os parâmetros u e v . Verifique sua conclusão escolhendo valores específicos para as constantes e gerando a superfície com um recurso gráfico.

57. $x = a \cos u \cos v, y = b \sin u \cos v, z = c \sin v$
58. $x = a \cos u \cosh v, y = b \sin u \cosh v, z = c \sinh v$
59. $x = a \sinh v, y = b \sinh u \cosh v, z = c \cosh u \cosh v$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.4

1. (a) As curvas de u constante são círculos de raio $1 - u$ centrados em $(1 - u, 0, 0)$ e paralelos ao plano xy .
- (b) As curvas de v constante são segmentos de reta ligando os pontos $(1, \cos v, \sin v)$ e $(0, 0, 0)$.
2. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{j} - (\sin v)\mathbf{k};$
- $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -[(1 - u) \sin v]\mathbf{j} + [(1 - u) \cos v]\mathbf{k}$
3. $\frac{1}{\sqrt{8}}(-2\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
4. $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|$
5. $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$

15.5 INTEGRAIS TRIPLAS

Nas seções anteriores, definimos e discutimos as propriedades das integrais duplas para funções de duas variáveis. Nesta seção, definiremos as integrais triplas para funções de três variáveis.

DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL TRIPLA

Uma integral simples de uma função $f(x)$ é definida num intervalo fechado finito do eixo x e uma integral dupla de uma função $f(x, y)$ é definida numa região fechada finita R do plano xy . Nosso primeiro objetivo, nesta seção, é definir qual o significado da *integral tripla* de $f(x, y, z)$ numa região sólida fechada G de um sistema de coordenadas xyz . Para assegurar que G não se estenda indefinidamente em alguma direção, vamos supor que ela possa ser abarcada por uma caixa apropriadamente grande, cujos lados sejam paralelos aos planos coordenados (Figura 15.5.1). Nesse caso, dizemos que G é um **sólido finito**.

Para definir a integral tripla de $f(x, y, z)$ em G , primeiro dividimos a caixa em n "subcaixas" por meio de planos paralelos aos planos coordenados. Depois, descartamos as subcaixas que contenham quaisquer pontos fora de G e escolhemos um ponto arbitrário em cada uma das subcaixas restantes. Como mostrado na Figura 15.5.1, denotamos o volume da k -ésima subcaixa restante por ΔV_k e o ponto selecionado na k -ésima subcaixa por (x_k^*, y_k^*, z_k^*) . Em seguida, formamos o produto

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

para cada subcaixa, depois somamos os produtos para todas as subcaixas para obter a **soma de Riemann**

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

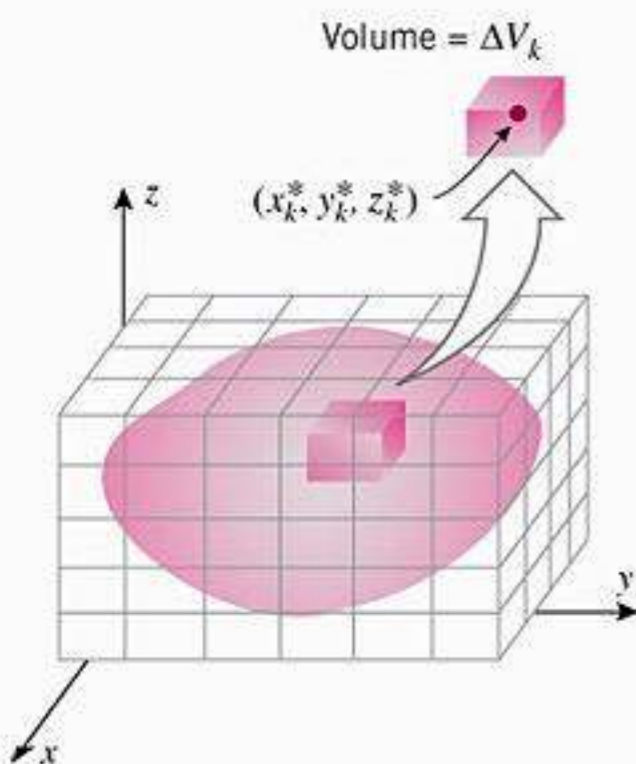


Figura 15.5.1

Finalmente, repetimos esse processo com cada vez mais subdivisões, de tal maneira que o comprimento, a largura e a altura de cada subcaixa tendam para zero e n tenda para $+\infty$. O limite

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k \quad (1)$$

é denominado *integral tripla* de $f(x, y, z)$ na região G . As condições sob as quais existe a integral tripla são estudadas em Cálculo avançado. Entretanto, para os nossos propósitos, é suficiente dizer que a existência é assegurada quando f for contínua em G e a região G não for muito “complicada”.

■ PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS TRIPLAS

As integrais triplas gozam de muitas das propriedades das integrais simples e duplas:

$$\iiint_G cf(x, y, z) dV = c \iiint_G f(x, y, z) dV \quad (c \text{ uma constante})$$

$$\iiint_G [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV + \iiint_G g(x, y, z) dV$$

$$\iiint_G [f(x, y, z) - g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV - \iiint_G g(x, y, z) dV$$

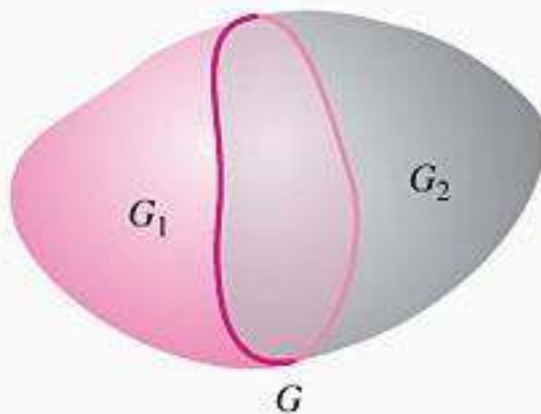


Figura 15.5.2

Além disso, se a região G for subdividida em duas sub-regiões G_1 e G_2 (Figura 15.5.2), então

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV$$

Omitimos as provas.

■ CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM CAIXAS RETANGULARES

Assim como as integrais duplas podem ser calculadas por duas integrações simples sucessivas, as integrais triplas podem ser calculadas por três integrações sucessivas. O seguinte teorema, que enunciamos sem demonstrar, é o análogo do Teorema 15.1.3.

15.5.1 TEOREMA Seja G a caixa retangular definida pelas desigualdades

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad k \leq z \leq l$$

Se f for contínua na região G , então

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) dz dy dx \quad (2)$$

Além disso, a integral iterada do membro direito pode ser substituída por qualquer uma das outras cinco integrais iteradas resultantes da alteração da ordem de integração.

Há duas ordens de integração possíveis para as integrais iteradas no Teorema 15.1.3:

$$dx dy, \quad dy dx$$

Para as integrais iteradas do Teorema 15.5.1 existem seis ordens de integração possíveis:

$$dx dy dz, \quad dy dz dx, \quad dz dx dy, \\ dx dz dy, \quad dz dy dx, \quad dy dx dz$$

► **Exemplo 1** Calcule a integral tripla

$$\iiint_G 12xy^2z^3 dV$$

na caixa retangular G definida pelas desigualdades $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2$.

Solução Dentre as seis possíveis integrais iteradas que podemos usar, escolhemos a que aparece em (2). Assim, primeiro integramos em relação a z , mantendo x e y fixados, depois em relação a y , mantendo x fixado e, finalmente, em relação a x .

$$\begin{aligned} \iiint_G 12xy^2z^3 \, dV &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^2 12xy^2z^3 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^2 \int_0^3 [3xy^2z^4]_{z=0}^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^2 \int_0^3 48xy^2 \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^2 [16xy^3]_{y=0}^3 \, dx = \int_{-1}^2 432x \, dx \\ &= 216x^2 \Big|_{-1}^2 = 648 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ **CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM REGIÕES MAIS GERAIS**

Consideramos a seguir como calcular integrais triplas em sólidos que não são caixas retangulares. Por enquanto, vamos limitar nossa discussão aos sólidos do tipo mostrado na Figura 15.5.3. Especificamente, supomos que o sólido G seja limitado acima por uma superfície $z = g_2(x, y)$ e abaixo por uma superfície $z = g_1(x, y)$ e que a projeção do sólido no plano xy seja uma região R do tipo I ou do tipo II (ver Definição 15.2.1). Adicionalmente, vamos supor que $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ sejam contínuas em R e que $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ em R . Geometricamente, isso significa que as superfícies podem se tocar mas não podem se intersectar. Chamamos um sólido desse tipo de *sólido simples em xy* .

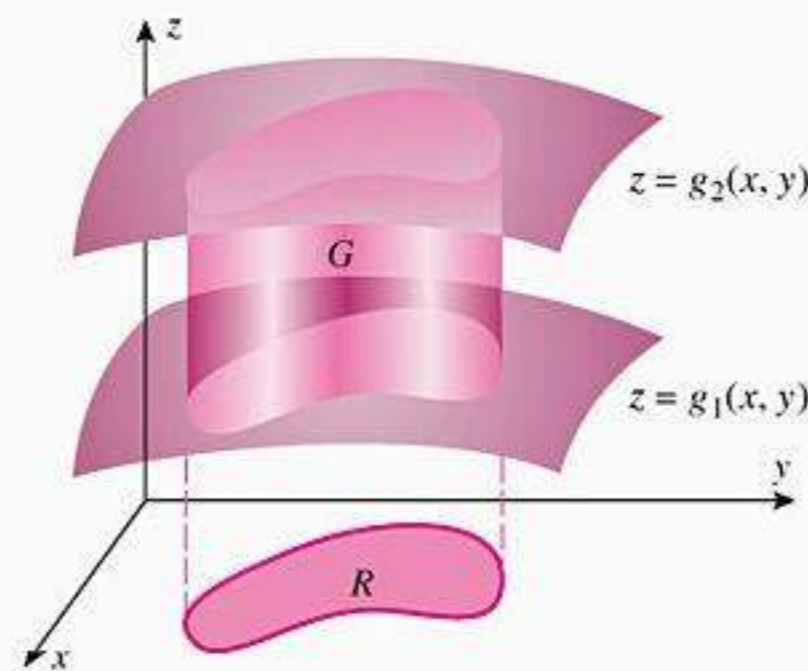


Figura 15.5.3

O seguinte teorema, que apresentamos sem prova, permite-nos calcular integrais triplas em sólidos simples em xy .

15.5.2 TEOREMA *Seja G um sólido simples em xy com superfície superior $z = g_2(x, y)$ e superfície inferior $z = g_1(x, y)$ e seja R a projeção de G no plano xy . Se $f(x, y, z)$ for contínua em G , então*

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] \, dA \quad (3)$$

Em (3), a primeira integração é em relação a z , restando, assim, uma função de x e y . Essa função de x e y é, então, integrada na região R do plano xy . Para aplicar (3), é útil começar com um esboço tridimensional do sólido G . Os limites de integração podem ser obtidos a partir do esboço como segue:

Determinação dos Limites de Integração: Sólido Simples em xy

Passo 1 Encontre uma equação $z = g_2(x, y)$ para a superfície superior e uma equação $z = g_1(x, y)$ para a superfície inferior de G . As funções $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ determinam os limites de integração inferior e superior de z .

Passo 2 Faça um esboço bidimensional da projeção R do sólido no plano xy . Neste esboço determine os limites de integração para a integral dupla em R de (3).

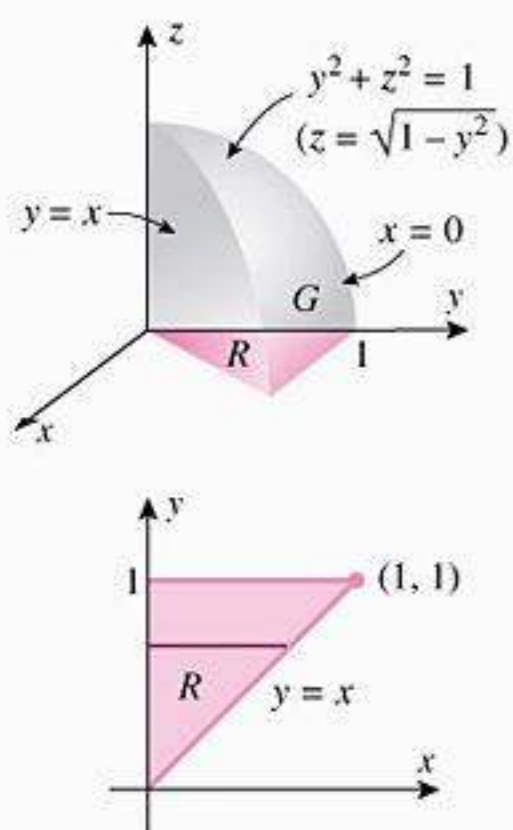


Figura 15.5.4

► **Exemplo 2** Seja G a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule

$$\iiint_G z \, dV$$

Solução O sólido G e sua projeção R no plano xy são mostrados na Figura 15.5.4. A superfície superior do sólido é formada pelo cilindro e a superfície inferior pelo plano xy . Como a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que fica acima do plano xy tem por equação $z = \sqrt{1 - y^2}$ e a equação do plano xy é $z = 0$, segue de (3) que

$$\iiint_G z \, dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \right] dA \tag{4}$$

Para a integral dupla em R , as integrações em x e y podem ser feitas em qualquer ordem, visto que R é uma região tanto do tipo I como do tipo II. Integremos, primeiro, em relação a x . Com essa escolha, segue de (4) que:

$$\begin{aligned} \iiint_G z \, dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y \left. \frac{1}{2} z^2 \right|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} (1 - y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^2) x \Big|_{x=0}^y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3) \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

A maioria dos sistemas algébricos computacionais possui uma capacidade integrada para calcular integrais triplas iteradas. Se o leitor dispuser de um CAS, leia a documentação pertinente e use o CAS para conferir os Exemplos 1 e 2.

■ **VOLUME CALCULADO COMO UMA INTEGRAL TRIPLA**

As integrais triplas têm muitas interpretações físicas, algumas das quais consideraremos na próxima seção. Entretanto, no caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, a Fórmula (1) dá

$$\iiint_G dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k$$

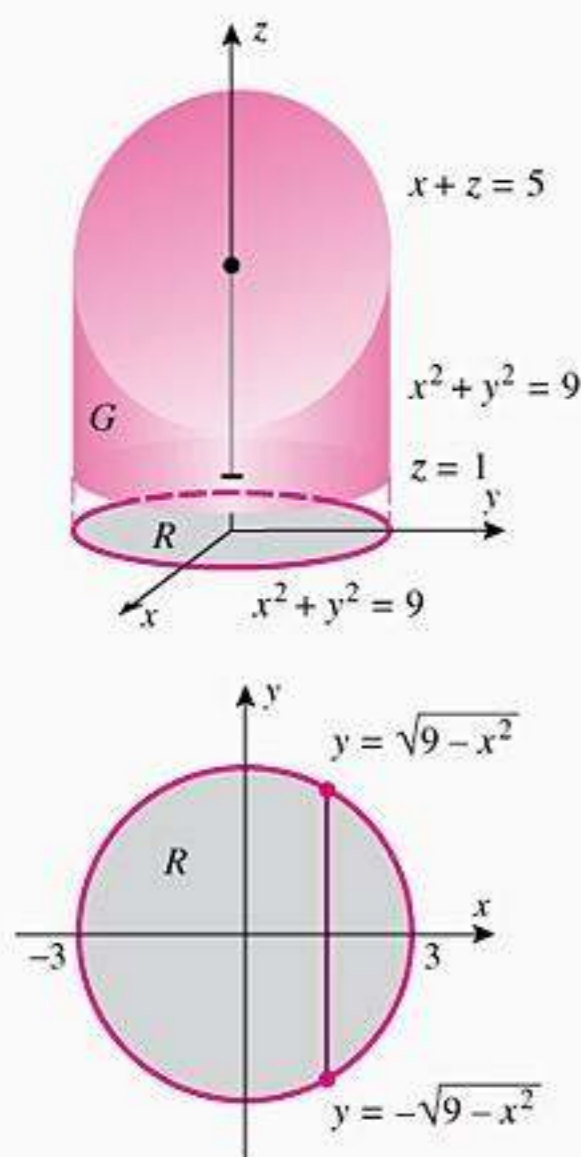


Figura 15.5.5

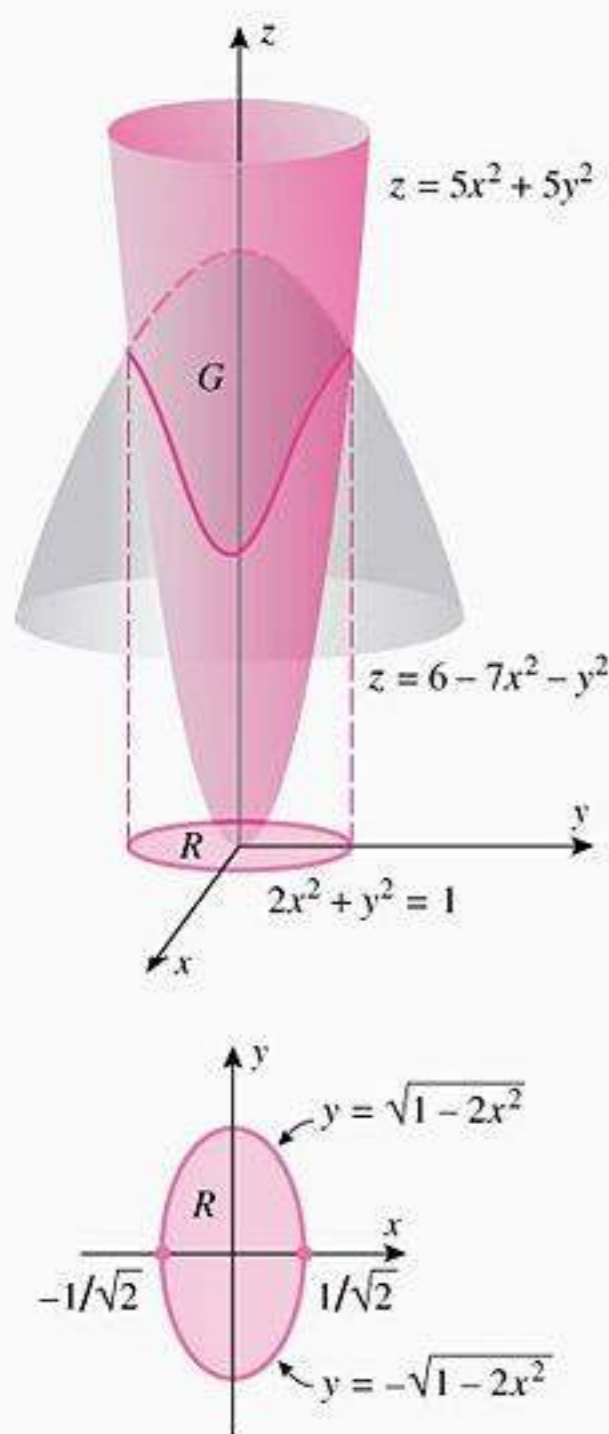


Figura 15.5.6

que a Figura 15.5.1 sugere ser o volume de G ; isto é,

$$\text{volume de } G = \iiint_G dV \tag{5}$$

► **Exemplo 3** Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

Solução O sólido G e sua projeção R no plano xy são mostrados na Figura 15.5.5. A superfície inferior do sólido é o plano $z = 1$ e a superfície superior é o plano $x + z = 5$ ou, de modo equivalente, $z = 5 - x$. Assim, de (3) e (5)

$$\text{volume de } G = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_1^{5-x} dz \right] dA \tag{6}$$

Para a integral dupla em R , integraremos, primeiro, em relação a y . Assim, segue de (6) que

$$\begin{aligned} \text{volume de } G &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_1^{5-x} dz dy dx = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z \Big|_{z=1}^{5-x} dy dx \\ &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x) dy dx = \int_{-3}^3 (8-2x)\sqrt{9-x^2} dx \\ &= 8 \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx - \int_{-3}^3 2x\sqrt{9-x^2} dx \quad \text{Para a primeira integral, ver} \\ &= 8 \left(\frac{9}{2}\pi \right) - \int_{-3}^3 2x\sqrt{9-x^2} dx \quad \text{Fórmula (3) da Seção 8.4 do Volume 1.} \\ &= 8 \left(\frac{9}{2}\pi \right) - 0 = 3\pi \quad \text{A segunda integral é nula} \\ & \quad \text{porque é uma função ímpar.} \end{aligned}$$

► **Exemplo 4** Calcule o volume do sólido compreendido entre os parabolóides

$$z = 5x^2 + 5y^2 \quad \text{e} \quad z = 6 - 7x^2 - y^2$$

Solução O sólido G e sua projeção R no plano xy são mostrados na Figura 15.5.6. A projeção R é obtida resolvendo as equações dadas simultaneamente para determinar onde os parabolóides se intersectam. Obtemos

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 &= 6 - 7x^2 - y^2 \\ \text{ou} \quad 2x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

que nos diz que os parabolóides se intersectam numa curva no cilindro elíptico dado por (7).

A projeção dessa interseção no plano xy é uma elipse com a mesma equação. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \text{volume de } G &= \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz \right] dA \\
 &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz dy dx \\
 &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6 - 12x^2 - 6y^2) dy dx \\
 &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[6(1 - 2x^2)y - 2y^3 \right]_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dx \\
 &= 8 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - 2x^2)^{3/2} dx = \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Tome $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta$.

Use a fórmula do cosseno de Wallis da última contra-capa.

■ INTEGRAÇÃO EM OUTRAS ORDENS

Na Fórmula (3) para integração no sólido simples em xy , foi efetuada, primeiro, a integração em z . Entretanto, há situações em que é preferível integrar numa ordem diferente. Por exemplo, a Figura 15.5.7a mostra um *sólido simples em xz* , e a Figura 15.5.7b mostra um *sólido simples em yz* . Para um sólido simples em xz geralmente é melhor integrar em relação a y primeiro e para um sólido simples em yz geralmente é melhor integrar em relação a x primeiro:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA \tag{8}$$

sólido simples em xz

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA \tag{9}$$

sólido simples em yz

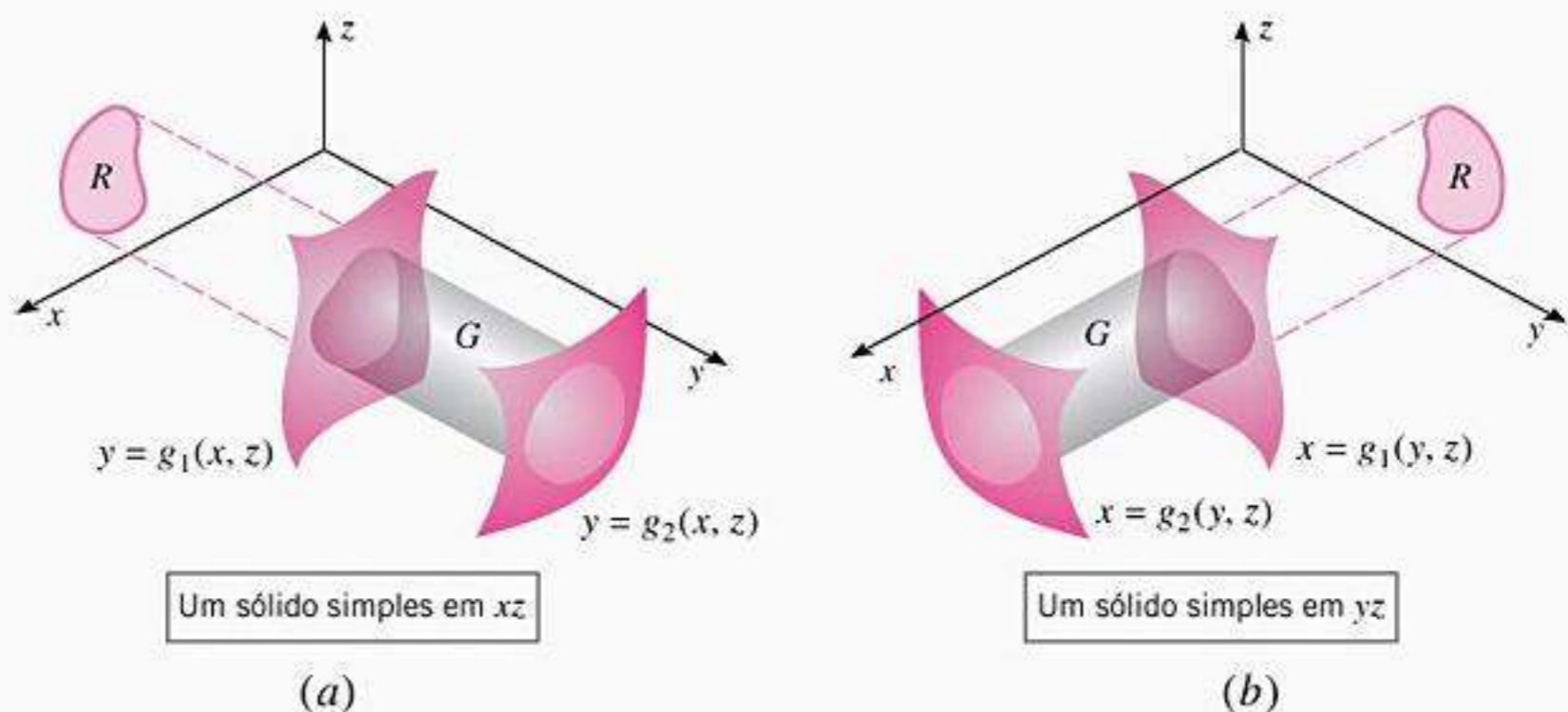


Figura 15.5.7

Às vezes, um sólido G pode ser interpretado como um sólido simples em xy , xz e yz e, nesse caso, podemos escolher a ordem de integração de modo a simplificar os cálculos.

► **Exemplo 5** No Exemplo 2, calculamos

$$\iiint_G z \, dV$$

na cunha da Figura 15.5.4 integrando, primeiro, em relação a z . Calcule essa integral integrando, primeiro, em relação a x .

Solução O sólido é limitado atrás pelo plano $x = 0$ e na frente pelo plano $x = y$, portanto

$$\iiint_G z \, dV = \iint_R \left[\int_0^y z \, dx \right] dA$$

onde R é a projeção de G no plano yz (Figura 15.5.8). A integração em R pode ser feita, primeiro, em relação a z e depois em relação a y ou vice-versa. Efetuando, primeiro, a integração em z dá

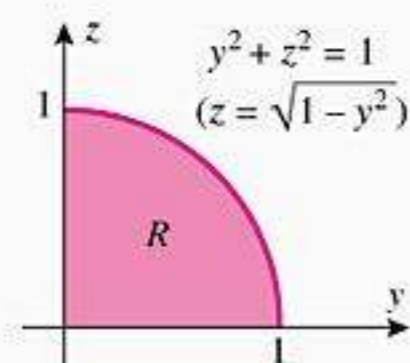


Figura 15.5.8

$$\begin{aligned} \iiint_G z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y z \, dx \, dz \, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z x \Big|_{x=0}^y \, dz \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z y \, dz \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 y \Big|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) y \, dy = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado do Exemplo 2. ◀

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.5** (Ver página 1064 para respostas.)

1. A integral iterada

$$\int_1^5 \int_2^4 \int_3^6 f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$$

integra f na caixa retangular definida por

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq x \leq \underline{\hspace{2cm}}, \quad \underline{\hspace{2cm}} \leq y \leq \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq z \leq \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. Seja G o sólido no primeiro octante limitado abaixo pela superfície $z = y + x^2$ e acima pelo plano $z = 4$. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iiint_G f(x, y, z) \, dA = \int_{\square} \int_{\square} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

(b) $\iiint_G f(x, y, z) \, dA = \int_{\square} \int_{\square} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

(c) $\iiint_G f(x, y, z) \, dA = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$

3. O volume do sólido G do Exercício 2 é _____.

EXERCÍCIOS 15.4 C CAS

1-8 Calcule a integral iterada.

1. $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$

2. $\int_{1/3}^{1/2} \int_0^\pi \int_0^1 z x \, \text{sen } xy \, dz \, dy \, dx$

3. $\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^z yz \, dx \, dz \, dy$

4. $\int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{x^2} x \, \text{cos } y \, dz \, dx \, dy$

5. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy \, dy \, dx \, dz$

6. $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} x e^y \, dy \, dz \, dx$

7. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x \, dz \, dy \, dx$

8. $\int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$

9-12 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_G xy \operatorname{sen} yz \, dV$ onde G é a caixa retangular definida pelas desigualdades $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \pi/6$.

10. $\iiint_G y \, dV$ onde G é o sólido compreendido pelo plano $z = y$, o plano xy e o cilindro parabólico $y = 1 - x^2$.

11. $\iiint_G xyz \, dV$ onde G é o sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $z = 2 - x^2$ e os planos $z = 0, y = x$ e $y = 0$.

12. $\iiint_G \cos(z/y) \, dV$ onde G é o sólido definido pelas desigualdades $\pi/6 \leq y \leq \pi/2, y \leq x \leq \pi/2, 0 \leq z \leq xy$.

C 13. Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar

$$\iiint_G \frac{\sqrt{x+z^2}}{y} \, dV$$

onde G é a caixa retangular definida pelas desigualdades $0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 1$.

C 14. Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar

$$\iiint_G e^{-x^2-y^2-z^2} \, dV$$

onde G é a região esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

15-18 Use uma integral tripla para encontrar o volume do sólido.

15. O sólido do primeiro octante limitado pelos planos coordenados e o plano $3x + 6y + 4z = 12$.

16. O sólido limitado pela superfície $z = \sqrt{y}$ e os planos $x + y = 1, x = 0$ e $z = 0$.

17. O sólido limitado pela superfície $y = x^2$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

18. A cunha do primeiro octante seccionada do cilindro $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$.

ENFOCANDO CONCEITOS

19. Seja G o sólido delimitado pelas superfícies da figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

(b) $\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

20. Seja G o sólido delimitado pelas superfícies da figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

(b) $\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

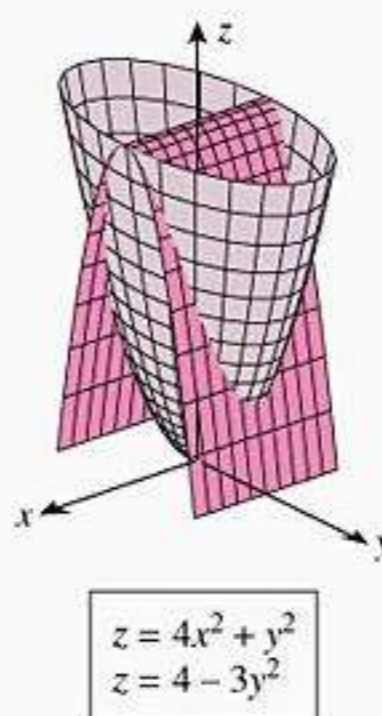


Figura Ex-19

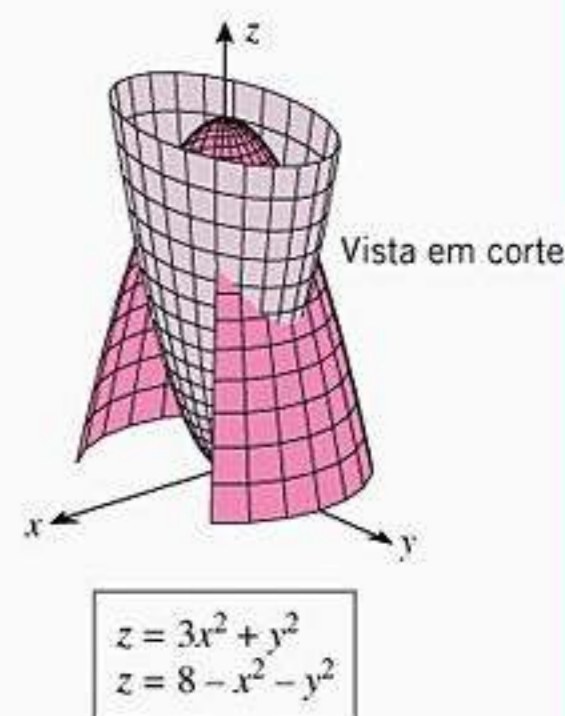


Figura Ex-20

21-24 Monte (mas não calcule) uma integral tripla iterada para o volume do sólido compreendido pelas superfícies dadas.

21. A superfície do Exercício 19.

22. A superfície do Exercício 20.

23. O cilindro elíptico $x^2 + 9y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = x + 3$.

24. Os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

25-26 Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pela integral.

25. (a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y+1} dz \, dy \, dx$

(b) $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dz \, dx \, dy$

(c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 dy \, dz \, dx$

26. (a) $\int_0^3 \int_{x^2}^9 \int_0^2 dz \, dy \, dx$

(b) $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} dz \, dx \, dy$

(c) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^2 dx \, dz \, dy$

27-30 O valor médio de uma função contínua $f(x, y, z)$ num sólido G é definido como

$$f_m = \frac{1}{V(G)} \iiint_G f(x, y, z) dV$$

onde $V(G)$ é o volume do sólido (compare com a definição anterior ao Exercício 61 da Seção 15.2). Use essa definição nestes exercícios.

27. Encontre o valor médio de $f(x, y, z) = x + y + z$ no tetraedro mostrado na figura abaixo.

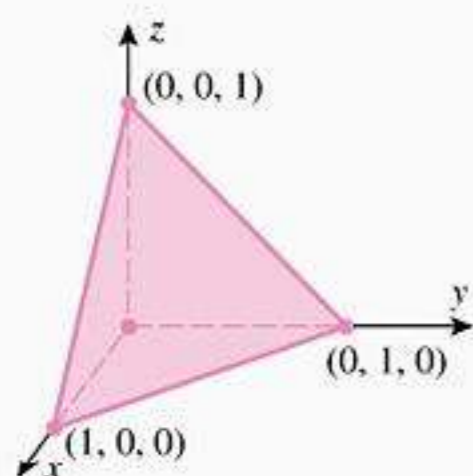


Figura Ex-27

28. Calcule o valor médio de $f(x, y, z) = xyz$ na região esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

C 29. Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar a distância média da origem a um ponto do sólido no Exemplo 4.

C 30. Seja $d(x, y, z)$ a distância do ponto (z, z, z) ao ponto $(x, y, 0)$. Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar o valor médio de d para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Redija um texto curto explicando por que esse valor pode ser considerado a distância média entre um ponto da diagonal de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ e um ponto da face no plano xy do cubo unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

31. Seja G o tetraedro do primeiro octante limitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(a) Relacione seis integrais iteradas diferentes que representem o volume de G .

(b) Calcule qualquer uma das seis para mostrar que o volume de G é $\frac{1}{6}abc$.

32. Use uma integral tripla para deduzir a fórmula do volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ENFOCANDO CONCEITOS

33-34 Expresse cada integral como uma integral equivalente em que a integração em z é a primeira a ser feita, a em y é a segunda e a em x é a última.

33. (a) $\int_0^5 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz$

(b) $\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_0^z f(x, y, z) dy dz dx$

(c) $\int_0^4 \int_y^{8-y} \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y, z) dx dz dy$

34. (a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx dy dz$

(b) $\int_0^4 \int_0^2 \int_0^{x/2} f(x, y, z) dy dz dx$

(c) $\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{z}} f(x, y, z) dx dz dy$

C 35. (a) Determine a região G na qual a integral tripla

$$\iiint_G (1 - x^2 - y^2 - z^2) dV$$

tem seu valor máximo.

(b) Use a operação integral tripla numérica de um CAS para aproximar o valor máximo.

(c) Encontre o valor máximo exato.

36. Seja G a caixa retangular definida pelas desigualdades $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $k \leq z \leq l$. Mostre que

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x)g(y)h(z) dV \\ = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_c^d g(y) dy \right] \left[\int_k^l h(z) dz \right] \end{aligned}$$

37. Use o resultado do Exercício 36 para calcular

(a) $\iiint_G xy^2 \sin z dV$ onde G é o conjunto de pontos que satisfaz $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq \pi/2$.

(b) $\iiint_G e^{2x+y-z} dV$ onde G é o conjunto de pontos que satisfaz $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \ln 3$, $0 \leq z \leq \ln 2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.5

1. $3 \leq x \leq 6$, $1 \leq y \leq 5$, $2 \leq z \leq 4$ 2. (a) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z) dz dx dy$ (b) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z) dz dy dx$
 (c) $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{z-x^2} f(x, y, z) dy dz dx$ 3. $\frac{128}{15}$

15.6 CENTRÓIDE, CENTRO DE GRAVIDADE, TEOREMA DE PAPPUS

Suponha que um corpo físico rígido sofra a ação de um campo gravitacional. Como o corpo é composto de muitas partículas, cada uma delas sendo afetada pela gravidade, a ação de um campo gravitacional constante no corpo consiste num grande número de forças distribuídas por todo o corpo. Porém, essas forças individuais podem ser substituídas por uma única força atuando num ponto chamado **centro de gravidade** do corpo. Nesta seção, vamos mostrar como as integrais duplas e triplas podem ser usadas para localizar centros de gravidade.



Figura 15.6.1

■ DENSIDADE DE UMA LÂMINA

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional (Figura 15.6.1). Dizemos que um tal objeto é uma **lâmina**. Uma lâmina é dita **homogênea** se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita **não-homogênea**. A **densidade** de uma lâmina homogênea é definida como sua massa por unidade de área. Assim, a densidade δ de uma lâmina homogênea de massa M e área A é dada por $\delta = M/A$.

Como numa lâmina não-homogênea a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de “densidade” deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada num plano xy . A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\delta(x, y)$, chamada **função densidade**, que pode ser interpretada como segue. Construa um pequeno retângulo centrado em (x, y) e sejam ΔM e ΔA a massa e a área da porção da lâmina compreendida pelo retângulo (Figura 15.6.2). Se a relação $\Delta M / \Delta A$ tender para um valor limite à medida que as dimensões do retângulo (e, portanto, a área) tendem para zero, então esse limite será considerado como sendo a densidade da lâmina no ponto (x, y) . Simbolicamente,

$$\delta(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} \quad (1)$$

Dessa relação, obtemos a aproximação

$$\Delta M \approx \delta(x, y)\Delta A \quad (2)$$

que relaciona a massa com a área de uma pequena porção retangular da lâmina centrada no ponto (x, y) . Supõe-se que quando as dimensões do retângulo tendem para zero, o erro de aproximação também tende para zero.

■ MASSA DE UMA LÂMINA

O seguinte resultado mostra como determinar a massa de uma lâmina a partir de sua função densidade.

15.6.1 MASSA DE UMA LÂMINA Se uma lâmina com função densidade contínua $\delta(x, y)$ ocupa uma região R do plano xy , então sua massa total M é dada por

$$M = \iint_R \delta(x, y) dA \quad (3)$$

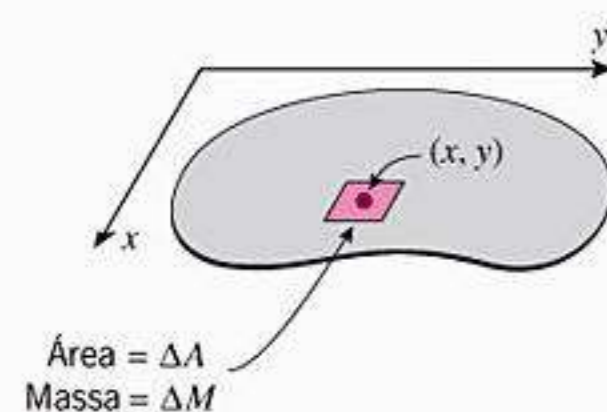


Figura 15.6.2

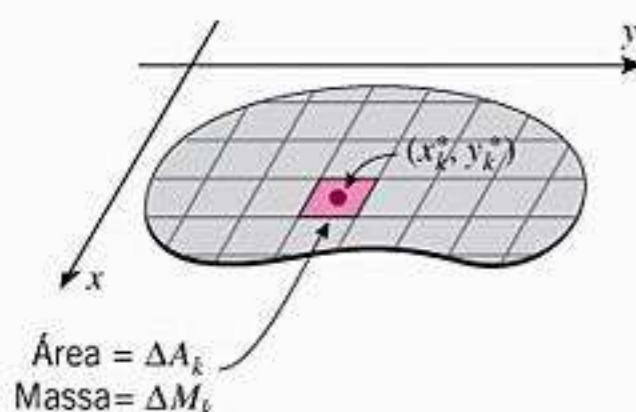


Figura 15.6.3

Essa fórmula pode ser motivada por um processo de limite conhecido que pode ser resumido como segue. Imagine que a lâmina seja subdividida em porções retangulares, usando linhas paralelas aos eixos coordenados e excluindo de consideração quaisquer porções não-retangulares que toquem a fronteira (Figura 15.6.3). Suponha que haja n tais porções retangulares e suponha que o k -ésimo retângulo tenha área ΔA_k . Se denotarmos o centro do k -ésimo retângulo por (x_k^*, y_k^*) , então pela Fórmula (2), a massa ΔM_k desse retângulo pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \quad (4)$$

e, portanto, a massa M da lâmina inteira pode ser aproximada por

$$M \approx \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

Agora, se aumentarmos n de tal modo que as dimensões dos retângulos tendam para zero, então é plausível que os erros de nossas aproximações tendam para zero, portanto

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k = \iint_R \delta(x, y) dA$$

► **Exemplo 1** Uma lâmina triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ tem função densidade $\delta(x, y) = xy$. Calcule sua massa total.

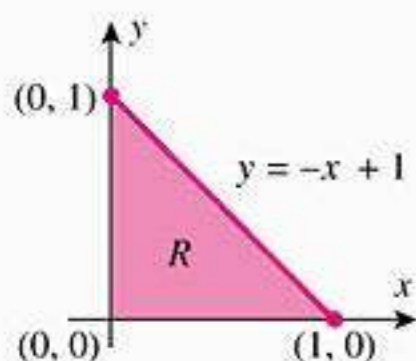


Figura 15.6.4

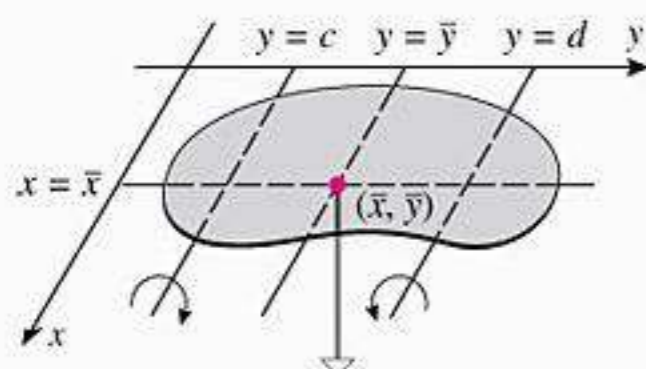
Solução Referindo a (3) e à Figura 15.6.4, a massa M da lâmina é

$$\begin{aligned} M &= \iint_R \delta(x, y) dA = \iint_R xy dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x \right] dx = \frac{1}{24} \text{ (unidade de massa)} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ **CENTRO DE GRAVIDADE DE UMA LÂMINA**

Suponha que a aceleração devida à força da gravidade seja constante, agindo para baixo, e suponha que uma lâmina ocupe uma região R num plano xy horizontal. Pode ser mostrado que existe um ponto (\bar{x}, \bar{y}) único (que pode ou não pertencer a R) tal que o efeito da gravidade sobre a lâmina é “equivalente” ao de uma só força agindo no ponto (\bar{x}, \bar{y}) . Esse ponto é denominado *centro de gravidade* da lâmina e, se estiver em R , então a lâmina estará horizontalmente equilibrada num ponto de apoio colocado em (\bar{x}, \bar{y}) . Por exemplo, o centro de gravidade de um disco de densidade uniforme está no centro do disco e o centro de gravidade de uma região retangular de densidade uniforme está no centro do retângulo. Para localizar o centro de gravidade de uma lâmina de formato irregular ou uma em que a densidade varia de ponto para ponto, precisamos do Cálculo.

15.6.2 PROBLEMA Suponha que uma lâmina com função densidade contínua $\delta(x, y)$ ocupe uma região R num plano horizontal xy . Determine as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de gravidade.



Ação da força de gravidade no centro de gravidade da lâmina

Figura 15.6.5

Para motivar a solução, considere o que acontece se tentarmos equilibrar a lâmina no fio de uma faca paralelo ao eixo x . Suponha que a lâmina da Figura 15.6.5 seja colocada no fio de uma faca ao longo da reta $y = c$ que não passa pelo centro de gravidade. Já que a lâmina comporta-se como se toda a sua massa estivesse concentrada no centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) , a lâmina está rotacionalmente instável e a força de gravidade causará uma rotação em torno de $y = c$. De maneira similar, a lâmina sofre uma rotação se for colocada no fio da faca ao longo de $y = d$. No entanto, se o fio da faca estiver ao longo da reta $y = \bar{y}$ que passa pelo centro de gravidade, a lâmina ficará perfeitamente balanceada. Similarmente, a lâmina ficará perfeitamente balanceada no fio de faca, ao longo da reta $x = \bar{x}$ que passa pelo centro de gravidade. Isto sugere que o centro de gravidade da lâmina possa ser determinado como a interseção de duas retas de equilíbrio, uma paralela ao eixo x e a outra paralela ao eixo y . A fim de determinar essas retas de equilíbrio, precisamos de algumas noções elementares sobre rotações.

Numa gangorra, as crianças aprendem por experiência própria que uma criança mais leve pode equilibrar outra mais pesada sentando-se mais afastada do fulcro, ou ponto de apoio da gangorra. Isto ocorre porque a tendência de um objeto produzir rotação é proporcional não somente à sua massa mas também à distância entre o objeto e o fulcro. Para tornar essa noção mais precisa, considere um eixo x , que imaginamos como uma viga sem peso. Se uma massa pontual m estiver localizada no ponto x do eixo, então a tendência da massa produzir rotação da viga em torno do ponto a do eixo é medida pela seguinte quantidade, chamada **momento de m em torno de $x = a$** :

$$\left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno de } a \end{array} \right] = m(x - a)$$

O número $x - a$ é chamado **braço de alavanca**. Dependendo da localização da massa à direita ou à esquerda de a , o braço de alavanca é ou a distância entre x e a ou o valor negativo dessa distância (Figura 15.6.6). Os braços de alavanca positivos resultam em momentos positivos e rotações no sentido horário, enquanto os braços de alavanca negativos resultam em momentos negativos e rotações no sentido anti-horário.

Suponha que as massas m_1, m_2, \dots, m_n estejam localizadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n de um eixo de coordenadas e um fulcro esteja localizado no ponto a (Figura 15.6.7). Dependendo de a soma dos momentos em torno de a

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - a) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \dots + m_n(x_n - a)$$

ser positiva, negativa ou nula, uma viga sem peso ao longo do eixo gira em torno de a no sentido horário, ou no sentido anti-horário, ou fica perfeitamente balanceada. Nesse último caso, diz-se que o sistema de massas está em **equilíbrio**.

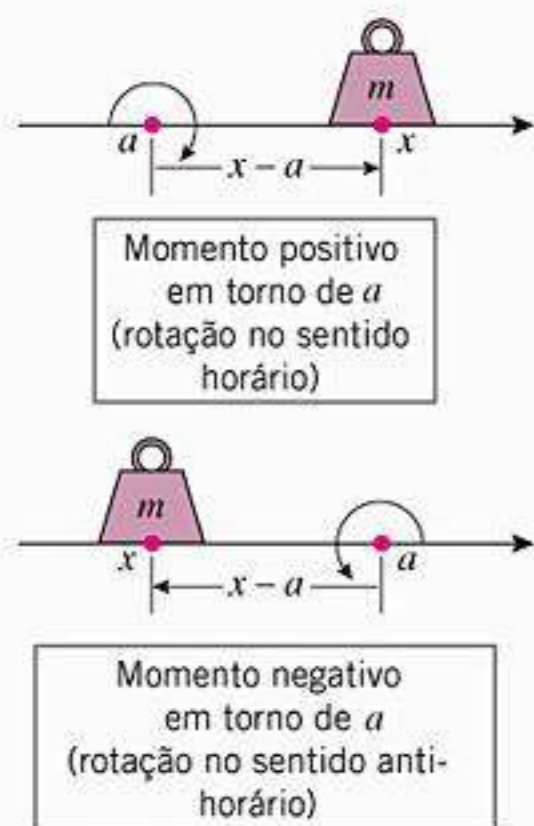


Figura 15.6.6

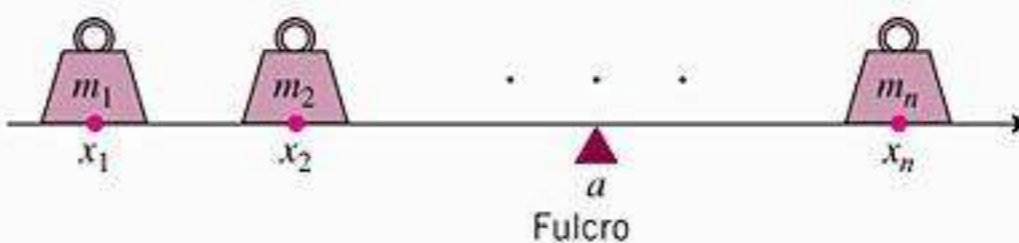


Figura 15.6.7

Essas idéias podem ser estendidas para massas distribuídas no espaço bidimensional. Se imaginarmos o plano xy como uma chapa sem peso suportando uma massa pontual m localizada num ponto (x, y) , então a tendência da massa produzir uma rotação da chapa em torno da reta $x = a$ é $m(x - a)$, chamado **momento de m em torno de $x = a$** e a tendência da massa produzir uma rotação em torno da reta $y = c$ é $m(y - c)$, chamado **momento de m em torno de $y = c$** (Figura 15.6.8). Em resumo,

$$\left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno da} \\ \text{reta } x = a \end{array} \right] = m(x - a) \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{l} \text{momento de } m \\ \text{em torno da} \\ \text{reta } y = c \end{array} \right] = m(y - c) \quad (5-6)$$

Se uma certa quantidade de massas estiver distribuída pelo plano xy , então o plano (considerado como uma chapa sem peso) fica em equilíbrio num fio de faca ao longo da reta $x = a$ se a soma dos momentos em torno da reta for nula. De maneira similar para a reta $y = c$.

Agora estamos prontos para resolver o Problema 15.6.2. Imaginemos a lâmina subdividida em fragmentos retangulares por meio de retas paralelas aos eixos coordenados, excluindo-se de consideração quaisquer fragmentos que toquem a fronteira (Figura 15.6.3). Vamos supor que haja n tais fragmentos retangulares e que o k -ésimo fragmento tenha área ΔA_k e massa ΔM_k . Designemos por (x_k^*, y_k^*) o centro do k -ésimo fragmento e vamos supor que toda a massa do k -ésimo fragmento esteja concentrada no seu centro. Por (4), a massa do k -ésimo fragmento pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

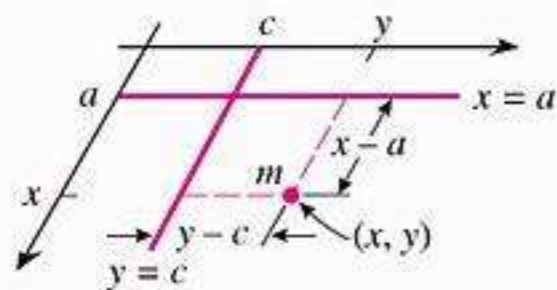


Figura 15.6.8

Como a lâmina está em equilíbrio nas retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, a soma dos momentos dos fragmentos retangulares em torno dessas retas deve estar próxima de zero; isto é

$$\sum_{k=1}^n (x_k^* - \bar{x}) \Delta M_k = \sum_{k=1}^n (x_k^* - \bar{x}) \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \approx 0$$

$$\sum_{k=1}^n (y_k^* - \bar{y}) \Delta M_k = \sum_{k=1}^n (y_k^* - \bar{y}) \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \approx 0$$

Se, agora, aumentarmos n de tal maneira que as dimensões dos retângulos tendam para zero, é plausível supor que os erros de nossas aproximações tendam para zero, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_k^* - \bar{x}) \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (y_k^* - \bar{y}) \delta(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k = 0$$

das quais obtemos

$$\iint_R (x - \bar{x}) \delta(x, y) dA = 0$$

$$\iint_R (y - \bar{y}) \delta(x, y) dA = 0$$

Como \bar{x} e \bar{y} são constantes, essas equações podem ser reescritas como

$$\iint_R x \delta(x, y) dA = \bar{x} \iint_R \delta(x, y) dA$$

$$\iint_R y \delta(x, y) dA = \bar{y} \iint_R \delta(x, y) dA$$

das quais obtemos as seguintes fórmulas para o centro de gravidade da lâmina:

Centro de Gravidade (\bar{x}, \bar{y}) de uma Lâmina

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \delta(x, y) dA}{\iint_R \delta(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \delta(x, y) dA}{\iint_R \delta(x, y) dA} \tag{7-8}$$

Observe que em ambas as fórmulas o denominador é a massa M da lâmina [ver (3)]. O numerador da fórmula para \bar{x} é denotado por M_y e é chamado de **primeiro momento da lâmina em torno do eixo y** ; o numerador da fórmula de \bar{y} é denotado por M_x e é chamado de **primeiro momento da lâmina em torno do eixo x** . Assim, as fórmulas (7) e (8) podem ser expressas como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \iint_R x \delta(x, y) dA \tag{9}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \iint_R y \delta(x, y) dA \tag{10}$$

► **Exemplo 2** Calcule o centro de gravidade da lâmina triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e função densidade $\delta(x, y) = xy$.

Solução A lâmina é mostrada na Figura 15.6.4. No Exemplo 1, calculamos que a massa da lâmina é

$$M = \iint_R \delta(x, y) dA = \iint_R xy dA = \frac{1}{24}$$

O momento da lâmina em torno do eixo y é

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x\delta(x, y) dA = \iint_R x^2y dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} x^2y dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

e o momento da lâmina em torno do eixo x é

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y\delta(x, y) dA = \iint_R xy^2 dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xy^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3 \right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x \right) dx = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Por (9) e (10),

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{2}{5}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{2}{5}$$

portanto o centro de gravidade é $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. ◀

■ CENTRÓIDES

No caso especial de uma lâmina *homogênea*, o centro de gravidade é chamado de *centróide da lâmina* ou, algumas vezes, *centróide da região R* . Como a função densidade δ é constante para uma lâmina homogênea, o fator δ pode ser movido para fora dos sinais de integração de (7) e (8) e cancelado. Assim, o centróide (\bar{x}, \bar{y}) é uma propriedade geométrica da região R e é expresso pelas seguintes fórmulas:

Centróide de uma Região R

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R x dA \tag{11}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R y dA \tag{12}$$

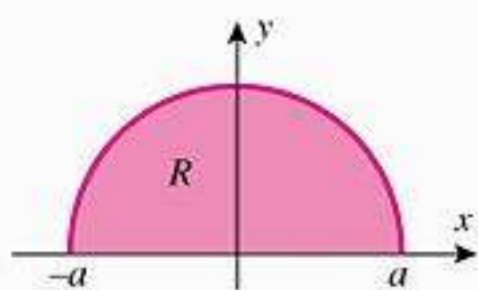


Figura 15.6.9

► **Exemplo 3** Calcule o centróide da região semicircular da Figura 15.6.9.

Solução Por simetria, $\bar{x} = 0$, visto que o eixo dos y é, obviamente, uma reta de equilíbrio. Por (12),

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R y \, dA = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \iint_R y \, dA \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a (r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta && \text{Calculando em} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \int_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} \theta \right]_{r=0}^a d\theta && \text{coordenadas polares} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \left(\frac{1}{3} a^3 \right) \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \left(\frac{2}{3} a^3 \right) = \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

de modo que o centróide é $\left(0, \frac{4a}{3\pi} \right)$. ◀

■ **CENTRO DE GRAVIDADE E CENTRÓIDE DE UM SÓLIDO**

Para um sólido tridimensional G , as fórmulas dos momentos, do centro de gravidade e do centróide são semelhantes aos das lâminas. Se G for *homogêneo*, então sua **densidade** é definida como sendo sua massa por unidade de volume. Dessa forma, se G for um sólido homogêneo de massa M e volume V , então sua densidade é dada por $\delta = M/V$. Se G for não-homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas xyz , então sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada pela **função densidade** $\delta(x, y, z)$, cujo valor num ponto pode ser considerado como um limite:

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

onde ΔM e ΔV representam a massa e o volume de um paralelepípedo retangular, com centro em (x, y, z) , cujas dimensões tendem para zero (Figura 15.6.10).

Usando a discussão sobre lâminas como modelo, o leitor deveria ser capaz de mostrar que a massa M de um sólido com função densidade contínua $\delta(x, y, z)$ é

$$M = \text{massa de } G = \iiint_G \delta(x, y, z) \, dV \tag{13}$$

As fórmulas para o centro de gravidade e o centróide são

Centro de Gravidade $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um Sólido G	Centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um Sólido G
$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_G x \delta(x, y, z) \, dV$	$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_G x \, dV$
$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_G y \delta(x, y, z) \, dV$	$\bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_G y \, dV$
$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_G z \delta(x, y, z) \, dV$	$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_G z \, dV$

(14-15)

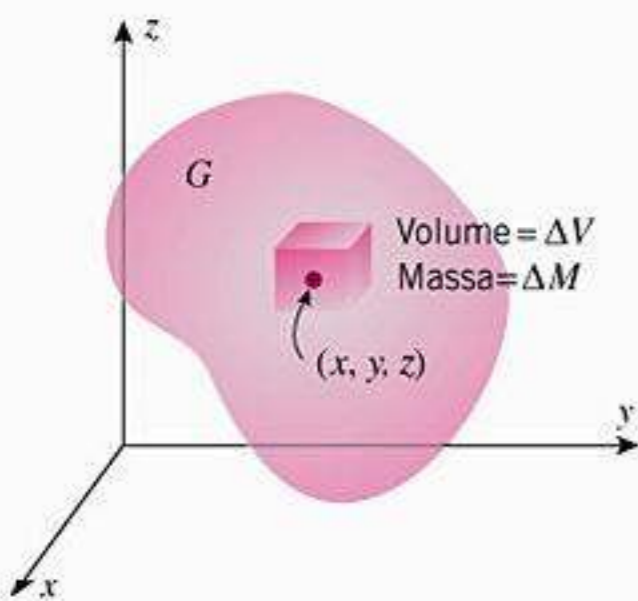


Figura 15.6.10

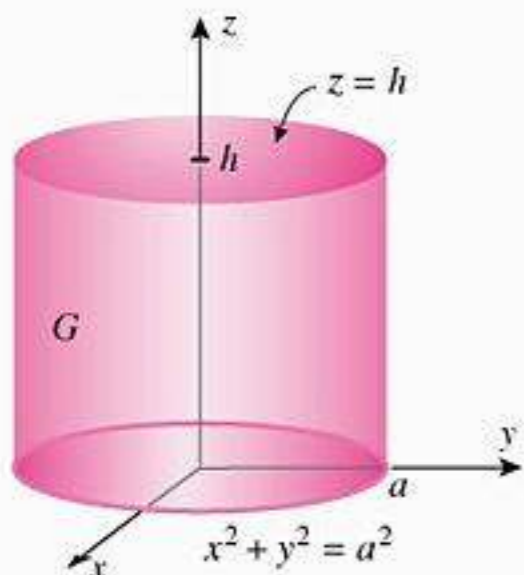


Figura 15.6.11

► **Exemplo 4** Calcule a massa e o centro de gravidade de um sólido cilíndrico de altura h e raio a (Figura 15.6.11), supondo que a densidade em cada ponto seja proporcional à distância entre o ponto e a base do sólido.

Solução Como a densidade é proporcional à distância z da base, a função densidade tem a forma $\delta(x, y, z) = kz$, onde k é alguma constante de proporcionalidade positiva (desconhecida). Por (13), a massa do sólido é

$$\begin{aligned} M &= \iiint_G \delta(x, y, z) dV = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kz dz dy dx \\ &= k \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{2}h^2 dy dx \\ &= kh^2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}kh^2\pi a^2 \end{aligned}$$

Interprete a integral como a área de um semicírculo.

Sem informações adicionais, a constante k não pode ser determinada. Entretanto, como veremos agora, o valor de k não afeta o centro de gravidade.

Por (14),

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_G z\delta(x, y, z) dV = \frac{1}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} \iiint_G z\delta(x, y, z) dV \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz) dz dy dx \\ &= \frac{k}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{3}h^3 dy dx \\ &= \frac{\frac{1}{3}kh^3}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \frac{\frac{1}{3}kh^3\pi a^2}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} = \frac{2}{3}h \end{aligned}$$

Cálculos semelhantes, usando a expressão (14), darão $\bar{x} = \bar{y} = 0$. No entanto, isso é evidente por inspeção, visto que decorre da simetria do sólido e da forma de sua função densidade que o centro de gravidade está no eixo z . Assim, o centro de gravidade é $(0, 0, \frac{2}{3}h)$. ◀

■ TEOREMA DE PAPPUS

O seguinte teorema, devido ao matemático grego Pappus, dá uma relação importante entre o centróide uma região plana R e o volume do sólido gerado pela revolução dessa região em torno de uma reta.

Pappus de Alexandria (século IV d.C.) Matemático grego. Pappus viveu no início da era cristã quando a atividade matemática estava num período de declínio. Suas principais contribuições apareceram numa série de oito livros chamados *A Coleção* (escritos cerca de 340 d.C.). Esse trabalho, que sobreviveu só parcialmente, continha alguns resultados originais mas era mais dedicado a deduções, aperfeiçoamentos

e demonstrações de resultados de matemáticos anteriores. O teorema de Pappus, sem demonstração no Livro VII de *A Coleção*, provavelmente era conhecido e foi demonstrado anteriormente. Esse resultado é chamado, às vezes, de Teorema de Guldin, como reconhecimento ao matemático suíço Paul Guldin (1577 - 1643), que o redescobriu independentemente.

15.6.3 TEOREMA Se R é uma região plana limitada e L é uma reta pertencente ao plano de R , mas tal que R está inteiramente de um lado de L , então o volume do sólido gerado pela revolução de R em torno de L é dado por

$$\text{volume} = (\text{área de } R) \cdot \left(\frac{\text{distância percorrida pelo centróide}}{\text{pelo centróide}} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO Introduza um sistema de coordenadas em que L esteja ao longo do eixo y e a região R esteja no primeiro quadrante (Figura 15.6.12). Divida R em sub-regiões da maneira usual e considere um retângulo típico R_k no interior de R . Se (x_k^*, y_k^*) for o centro de R_k e se a área de R_k for $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$, então, pela Fórmula (1) da Seção 7.3 do Volume 1, o volume gerado por R_k quando gira em torno de L é

$$2\pi x_k^* \Delta x_k \Delta y_k = 2\pi x_k^* \Delta A_k$$

Portanto o volume total do sólido é aproximadamente

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* \Delta A_k$$

do que segue que o volume exato é

$$V = \iint_R 2\pi x \, dA = 2\pi \iint_R x \, dA$$

Assim, segue de (11) que

$$V = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot [\text{área de } R]$$

Isso completa a demonstração, uma vez que $2\pi\bar{x}$ é a distância percorrida pelo centróide quando R gira em torno do eixo y . ■

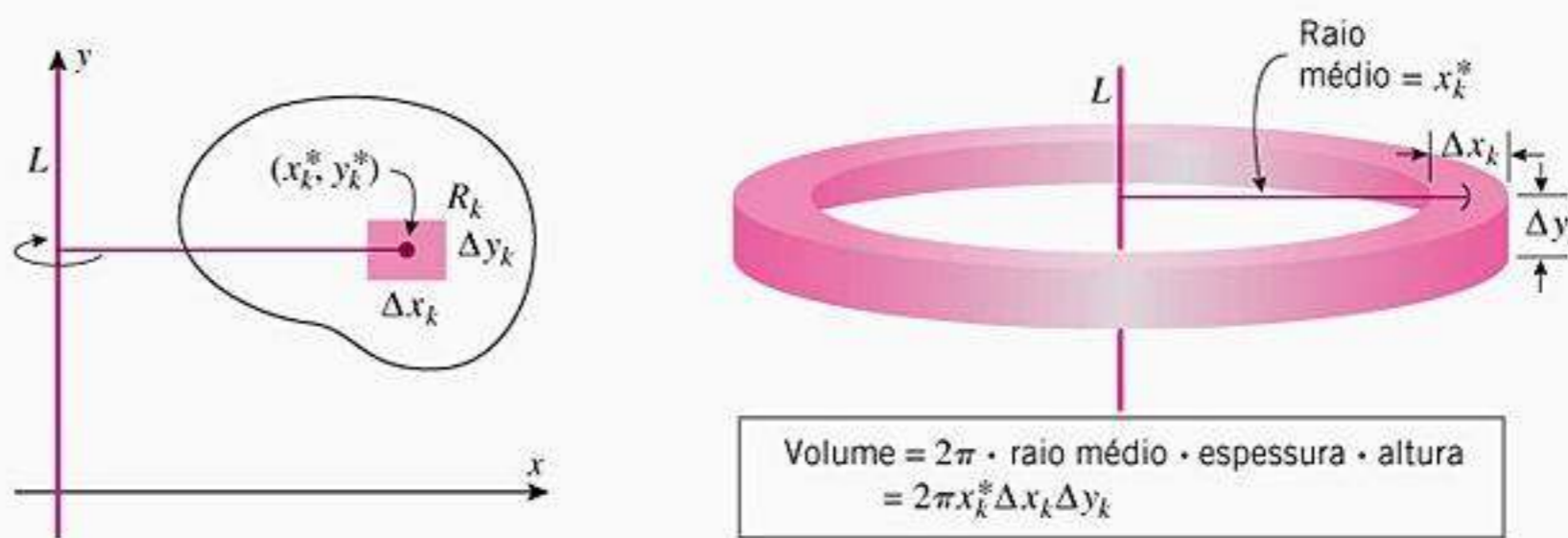


Figura 15.6.12

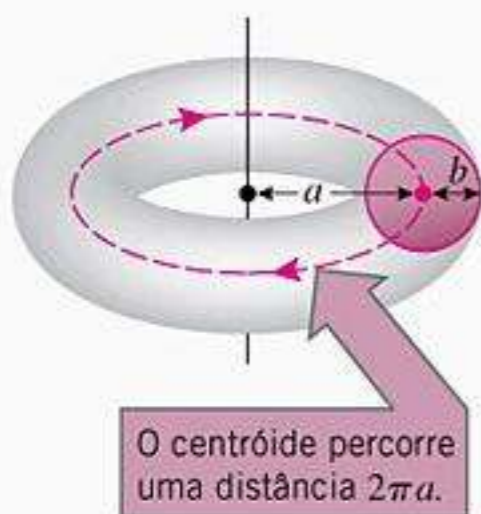


Figura 15.6.13

► **Exemplo 5** Use o Teorema de Pappus para calcular o volume V do toro gerado pela revolução de uma região circular de raio b , em torno de uma reta a uma distância a (maior do que b) do centro do círculo (Figura 15.6.13).

Solução Por simetria, o centróide de uma região circular é seu centro. Então, a distância percorrida pelo centróide é $2\pi a$. Como a área de um círculo de raio b é πb^2 , segue do Teorema de Pappus que o volume do toro é

$$V = (2\pi a)(\pi b^2) = 2\pi^2 ab^2 \blacktriangleleft$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.6 (Ver página 1075 para respostas.)

1. A massa total da lâmina de função densidade contínua $\delta(x, y)$ que ocupa a região R do plano xy é dada por $M = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. Considere a lâmina de massa M e função densidade contínua $\delta(x, y)$ que ocupa a região R do plano xy . A coordenada x do centro de gravidade da lamina é M_y/M , onde M_y é chamado $\underline{\hspace{2cm}}$ e é dado pela integral dupla $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. Seja R a região compreendida pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2 - x$, para $0 \leq x \leq 1$. A área de R é $\frac{7}{6}$ e o centróide de R é $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. Se a região R do Exercício 3 for usada para gerar um sólido G pela rotação de R em torno de uma reta horizontal a 6 unidades acima de seu centróide, então o volume de G é $\underline{\hspace{2cm}}$.

EXERCÍCIOS 15.6  Recurso Gráfico  CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Conforme indica a figura abaixo, as massas $m_1 = 5$, $m_2 = 10$ e $m_3 = 20$ estão posicionadas numa certa viga sem peso.
 - (a) Suponha que o fulcro esteja posicionado em $x = 5$. Sem calcular a soma dos momentos em relação a 5, determine se essa soma é positiva, zero ou negativa. Explique.
 - (b) Onde deve se colocado o fulcro para que a viga fique equilibrada?

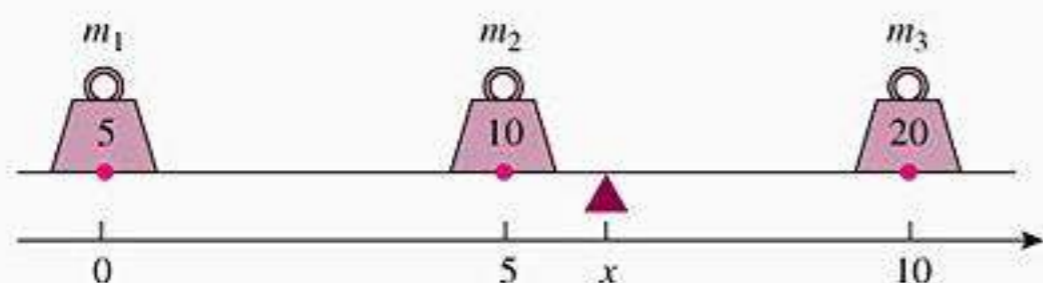


Figura Ex-1

2. Conforme indica a figura abaixo, as massas $m_1 = 10$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ e m estão posicionadas numa certa viga sem peso com um fulcro colocado no ponto 4.
 - (a) Suponha que $m = 14$. Sem calcular a soma dos momentos em relação a 4, determine se essa soma é positiva, zero ou negativa. Explique.
 - (b) Para qual valor de m a viga fique equilibrada?

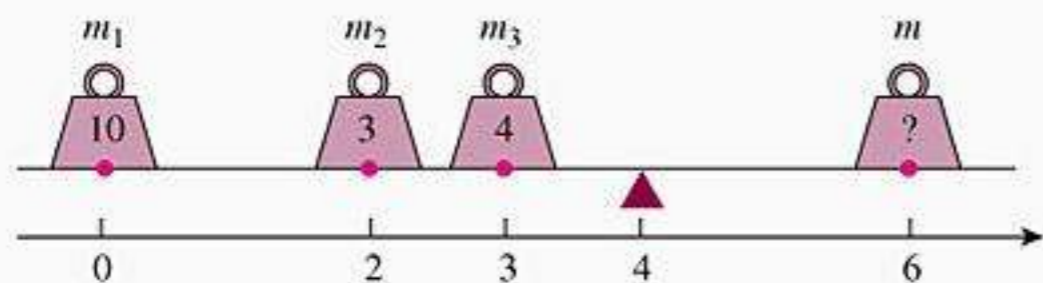
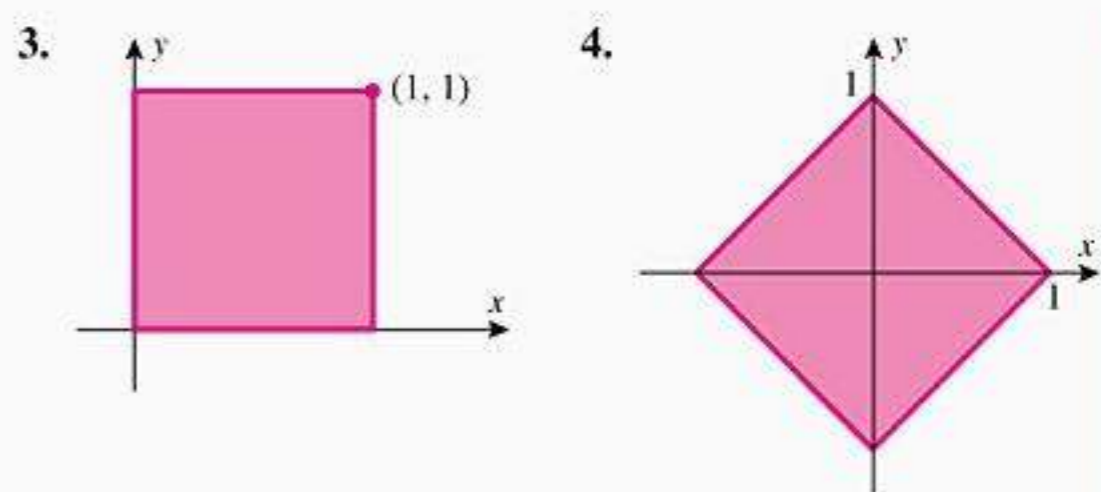
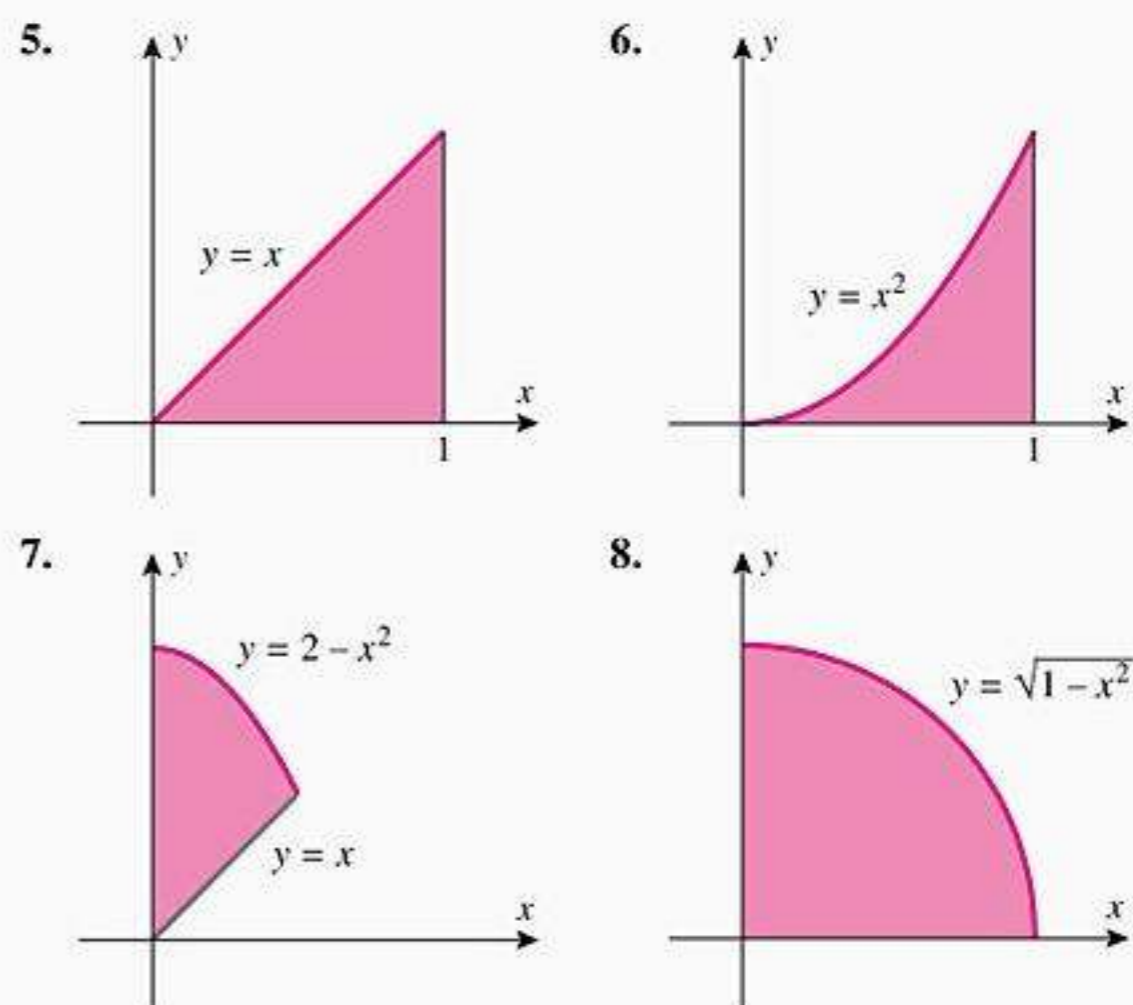


Figura Ex-2

3-4 Faça uma conjectura sobre as coordenadas do centróide da região e confirme-a por integração.



5-10 Encontre o centróide da região.



9. A região acima do eixo x das abscissas e entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ ($a < b$).
10. A região compreendida entre o eixo y e a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

ENFOCANDO CONCEITOS

11-12 Faça uma conjectura sobre as coordenadas do centro de gravidade e confirme sua conjectura por integração.

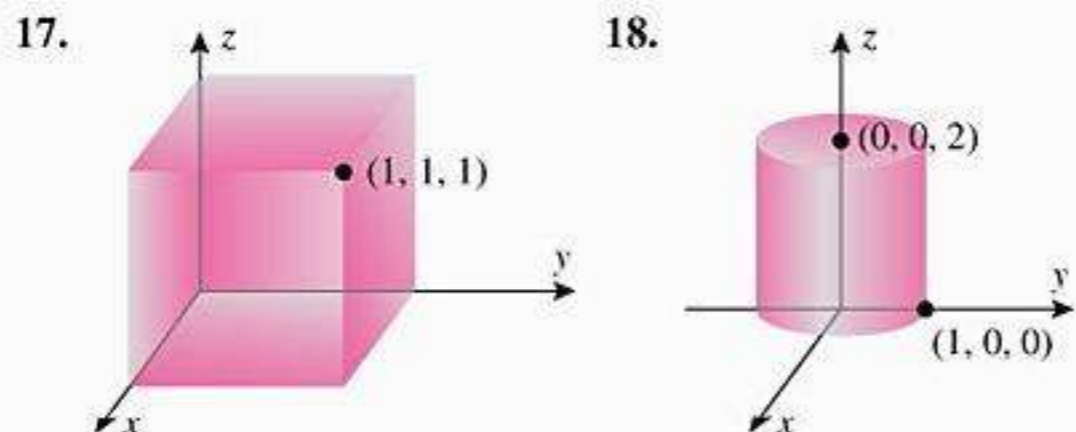
- 11. A lâmina do Exercício 3 com função densidade $\delta(x, y) = |x + y - 1|$.
- 12. A lâmina do Exercício 4 com função densidade $\delta(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.

13-16 Encontre a massa e o centro de gravidade da lâmina.

- 13. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = x + y$, limitada pelo eixo x das abscissas, a reta $x = 1$ e a curva $y = \sqrt{x}$.
- 14. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = y$, limitada por $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$.
- 15. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = xy$, localizada no primeiro quadrante e limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$ e os eixos de coordenadas.
- 16. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = x^2 + y^2$, limitada pelo eixo x e a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

ENFOCANDO CONCEITOS

17-18 Faça uma conjectura sobre as coordenadas do centróide e confirme-a por integração.



19-24 Encontre o centróide do sólido.

- 19. O tetraedro do primeiro octante compreendido pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.
- 20. O sólido limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e os planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$.
- 21. O sólido limitado pela superfície $z = y^2$ e os planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 1$.
- 22. O sólido no primeiro octante limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $z = 0$, $x = 2$ e $y = 2$.
- 23. O sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e os planos coordenados.
- 24. O sólido envolvido pelo plano xy e o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

25-28 Encontre a massa e o centro de gravidade do sólido.

- 25. O cubo com densidade $\delta(x, y, z) = a - x$, definido pelas desigualdades $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ e $0 \leq z \leq a$.
- 26. O sólido cilíndrico com densidade $\delta(x, y, z) = h - z$, envolvido por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = h$.
- 27. O sólido com densidade $\delta(x, y, z) = yz$, envolvido por $z = 1 - y^2$ (para $y \geq 0$), $z = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.
- 28. O sólido com densidade $\delta(x, y, z) = xz$, envolvido por $y = 9 - x^2$ (para $x \geq 0$), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1$.
- 29. Encontre o centro de gravidade da lâmina quadrada com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ se a densidade for proporcional
 - (a) ao quadrado da distância à origem;
 - (b) à distância ao eixo y .
- 30. Encontre o centro de gravidade do cubo determinado pelas desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ se a densidade for proporcional
 - (a) ao quadrado da distância à origem;
 - (b) à soma das distâncias às faces do cubo que estão nos planos coordenados.

31. Use a capacidade de integração tripla numérica de um CAS para aproximar a localização do centróide do sólido que é limitado acima pela superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelo plano $y = 0$ e a superfície $y = \sin x$ para $0 \leq x \leq \pi$ (ver figura abaixo).

32. A figura abaixo mostra o sólido limitado acima pela superfície $z = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pela superfície $x^2 + y^2 = a^2$.

- (a) Por simetria, o centróide do sólido fica no eixo dos z . Faça uma conjectura sobre o comportamento da coordenada z do centróide quando $a \rightarrow 0^+$ e quando $a \rightarrow +\infty$.
- (b) Calcule a coordenada z do centróide e verifique sua conjectura calculando os limites adequados.
- (c) Use um recurso gráfico para fazer um gráfico da coordenada z do centróide versus a e use o gráfico para estimar o valor de a para o qual o centróide é $(0; 0; 0,25)$.

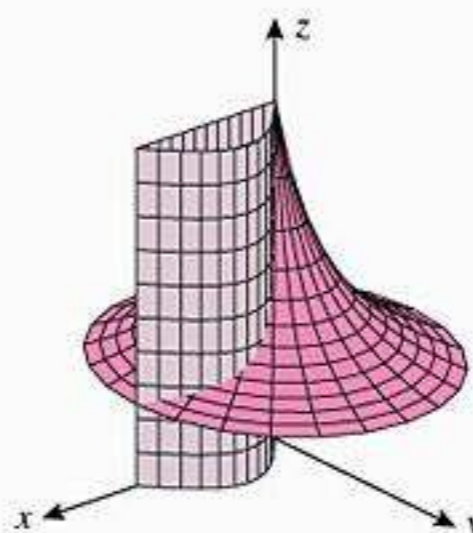


Figura Ex-31

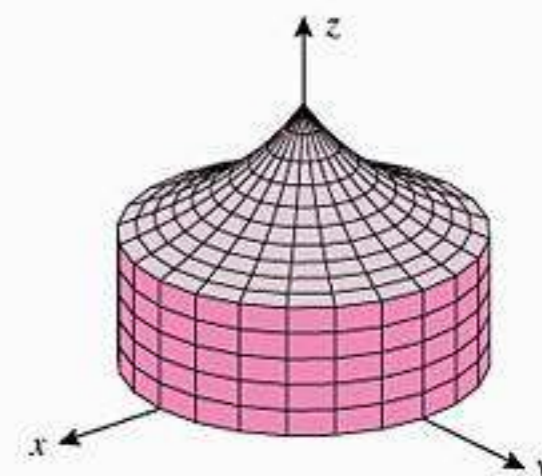


Figura Ex-32

33. Mostre que, em coordenadas polares, as fórmulas para o centróide (\bar{x}, \bar{y}) de uma região R são

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$$

34. Use o resultado do Exercício 33 para calcular o centróide (\bar{x}, \bar{y}) da região envolvida pela cardióide $r = a(1 + \sin \theta)$.
35. Use o resultado do Exercício 33 para calcular o centróide (\bar{x}, \bar{y}) da pétala da rosácea $r = \sin 2\theta$ do primeiro quadrante.
36. Seja R o retângulo limitado pelas retas $x = 0, x = 3, y = 0$ e $y = 2$. Por inspeção, encontre o centróide de R e use-o para calcular

$$\iint_R x \, dA \quad \text{e} \quad \iint_R y \, dA$$

37. Use o Teorema de Pappus e o fato de que o volume de uma esfera de raio a é $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ para mostrar que o centróide da lâmina limitada pelo eixo x e o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ é $(0, 4a/(3\pi))$. (Esse problema foi resolvido diretamente no Exemplo 3.)
38. Use o Teorema de Pappus e o resultado do Exercício 37 para calcular o volume do sólido gerado quando a região limitada pelo eixo x e o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ gira em torno da
- (a) reta $y = -a$ (b) reta $y = x - a$
39. Use o Teorema de Pappus e o fato de que a área de uma elipse com semi-eixos a e b é πab para calcular o volume do toro elíptico gerado pela revolução da elipse

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno do eixo y . Suponha que $k > a$.

40. Use o Teorema de Pappus para calcular o volume do sólido gerado quando a região envolvida por $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$ é girada em torno do eixo x .
41. Use o Teorema de Pappus para calcular o centróide da região triangular com vértices $(0, 0), (a, 0)$ e $(0, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$. [Sugestão: gire a região em torno do eixo dos x para obter \bar{y} e em torno do eixo dos y para obter \bar{x} .]
42. Pode ser provado que se uma região plana limitada deslizar ao longo de uma hélice de tal modo que é sempre ortogonal à hélice (ou seja, ortogonal ao vetor tangente unitário à hélice), então o volume varrido pela região é igual à área da região

vezes a distância percorrida pelo seu centróide. Use esse resultado para calcular o volume do “tubo” da figura abaixo que é varrido por um círculo de raio $\frac{1}{2}$ que desliza ao longo da hélice

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{t}{4} \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$$

de tal maneira que o círculo está sempre centrado na hélice e fica no plano perpendicular à hélice.

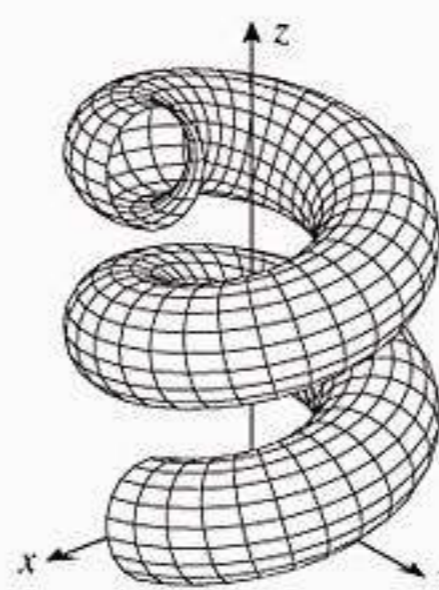


Figura Ex-42

43-44 A tendência de uma lâmina de resistir a uma mudança no movimento rotatório em torno de um eixo é medida pelo seu **momento de inércia** em torno daquele eixo. Se a lâmina ocupar uma região R do plano xy e se a função densidade $\delta(x, y)$ for contínua em R , então os momentos de inércia em torno dos eixos x, y e z são denotados por I_x, I_y e I_z , respectivamente, e são definidos por

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x, y) \, dA, \quad I_y = \iint_R x^2 \delta(x, y) \, dA,$$

$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y) \, dA$$

Essas definições serão usadas nos Exercícios 43 e 44.

43. Considere a lâmina retangular que ocupa a região descrita pelas desigualdades $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. Supondo que a lâmina tenha densidade constante δ , mostre que

$$I_x = \frac{\delta ab^3}{3}, \quad I_y = \frac{\delta a^3 b}{3}, \quad I_z = \frac{\delta ab(a^2 + b^2)}{3}$$

44. Considere a lâmina circular que ocupa a região descrita pelas desigualdades $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$. Supondo que a lâmina tenha densidade constante δ , mostre que

$$I_x = I_y = \frac{\delta \pi a^4}{4}, \quad I_z = \frac{\delta \pi a^4}{2}$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.6

1. $\iint_R \delta(x, y) \, dA$ 2. primeiro momento em torno do eixo y ; $\iint_R x \delta(x, y) \, dA$ 3. $(\frac{5}{14}, \frac{32}{35})$ 4. 14π

15.7 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Vimos, anteriormente, que algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. Analogamente, algumas integrais triplas são mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas ou esféricas do que em coordenadas retangulares. Nesta seção, estudaremos as integrais triplas nesses sistemas de coordenadas.

INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Lembre-se que em coordenadas retangulares, a integral tripla de uma função contínua f numa região sólida G é definida como

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

onde ΔV_k denota o volume de um paralelepípedo retangular no interior de G e (x_k^*, y_k^*, z_k^*) é um ponto desse paralelepípedo (ver Figura 15.5.1). As integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas são definidas de maneira similar, exceto que a região G é dividida não em paralelepípedos retangulares, mas em regiões mais apropriadas a esses sistemas de coordenadas.

Em coordenadas cilíndricas, as equações mais simples são da forma

$$r = \text{constante}, \quad \theta = \text{constante}, \quad z = \text{constante}$$

A primeira equação representa um cilindro circular reto centrado no eixo z , a segunda, um semiplano vertical articulado no eixo z e a terceira, um plano horizontal. (Ver Figura 12.8.3.) Essas superfícies podem ser combinadas para determinar sólidos chamados *cunhas cilíndricas* ou *elementos cilíndricos de volume*. Para sermos precisos, uma cunha cilíndrica é um sólido compreendido entre seis superfícies da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{dois cilindros} & \quad r = r_1, \quad r = r_2 \quad (r_1 < r_2) \\ \text{dois semiplanos} & \quad \theta = \theta_1, \quad \theta = \theta_2 \quad (\theta_1 < \theta_2) \\ \text{dois planos} & \quad z = z_1, \quad z = z_2 \quad (z_1 < z_2) \end{aligned}$$

(Figura 15.7.1). As dimensões $\theta_2 - \theta_1$, $r_2 - r_1$ e $z_2 - z_1$ são chamadas *ângulo central*, *espessura* e *altura* da cunha.

Para definir a integral tripla em G de uma função $f(r, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas, procedemos da seguinte maneira:

- Subdivida G em pedaços com um reticulado tridimensional consistindo de cilindros circulares concêntricos centrados no eixo z , semiplanos articulados no eixo z e planos horizontais. Exclua da consideração todas as partes que contenham qualquer ponto fora de G , deixando, desse modo, somente cunhas cilíndricas que sejam subconjuntos de G .
- Suponha que haja n tais cunhas cilíndricas e denote o volume da k -ésima cunha cilíndrica por ΔV_k . Como indicado na Figura 15.7.2, seja $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ um ponto qualquer da k -ésima cunha cilíndrica.
- Repita esse processo para cada vez mais subdivisões de modo que, à medida que n crescer, a altura, a espessura e o ângulo central das cunhas cilíndricas aproximem-se de zero. Defina

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*) \Delta V_k \tag{1}$$

Para fins computacionais, é conveniente expressar (1) como uma integral iterada. Para isso, note que o volume ΔV_k da k -ésima cunha cilíndrica pode ser expresso como

$$\Delta V_k = [\text{área da base}] \cdot [\text{altura}] \tag{2}$$

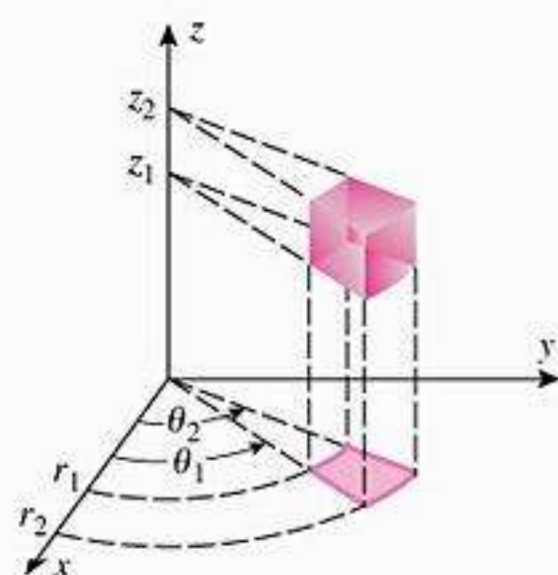


Figura 15.7.1

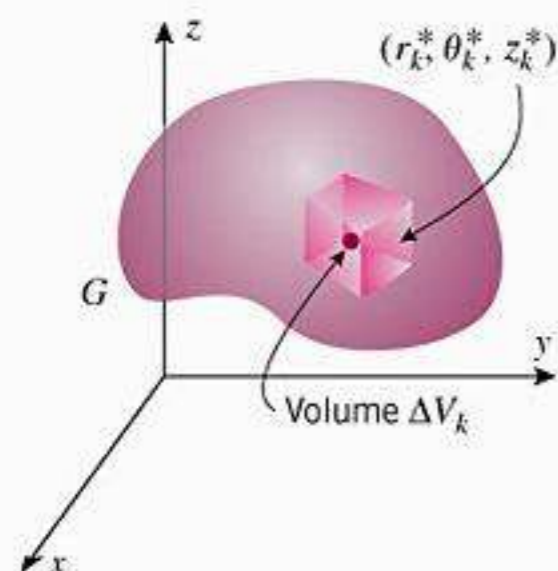


Figura 15.7.2

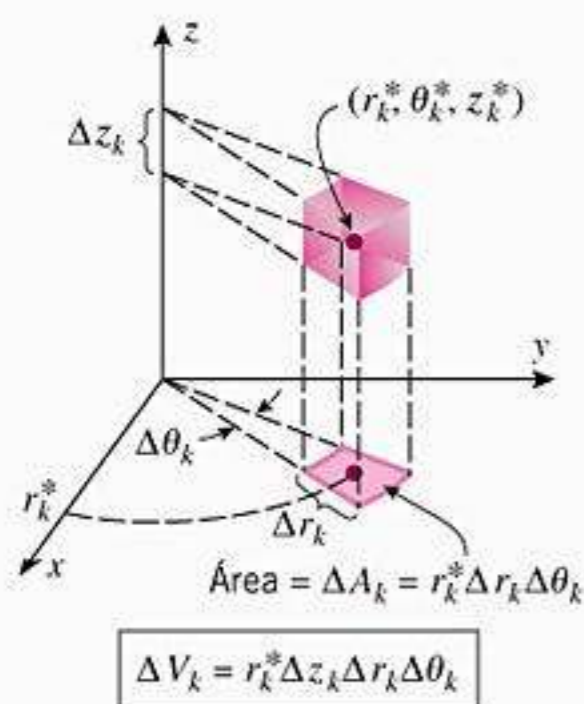


Figura 15.7.3

Observe o fator extra de r que aparece no integrando na conversão da integral tripla para a integral iterada em coordenadas cilíndricas.

Se denotarmos a espessura, o ângulo central e a altura dessa cunha por Δr_k , $\Delta \theta_k$ e Δz_k e se escolhermos o ponto arbitrário $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ para ficar acima do “centro” da base (Figuras 15.3.5 e 15.7.3), segue-se, então, de (5) da Seção 15.3, que a base tem área $\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k$. Então (2) pode ser escrita como

$$\Delta V_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k = r_k^* \Delta z_k \Delta r_k \Delta \theta_k$$

Substituindo essa expressão em (1) dá

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*) r_k^* \Delta z_k \Delta r_k \Delta \theta_k$$

que sugere que a integral tripla em coordenadas cilíndricas possa ser calculada como uma integral iterada da forma

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta \quad (3)$$

Nessa fórmula, a integração em relação a z é feita primeiro, depois em relação a r e, por fim, em relação a θ , porém qualquer ordem de integração é permissível.

O seguinte teorema, que enunciamos sem provar, torna as idéias precedentes mais precisas.

15.7.1 TEOREMA *Seja G um sólido, cuja superfície superior tem equação $z = g_2(r, \theta)$ e cuja superfície inferior tem equação $z = g_1(r, \theta)$ em coordenadas cilíndricas. Se R for a projeção do sólido no plano xy e se $f(r, \theta, z)$ for contínua em G , então*

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA \quad (4)$$

em que a integral dupla em R é calculada em coordenadas polares. Em particular, se a projeção de R for como mostrado na Figura 15.7.4, então (4) pode ser escrita como

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta \quad (5)$$

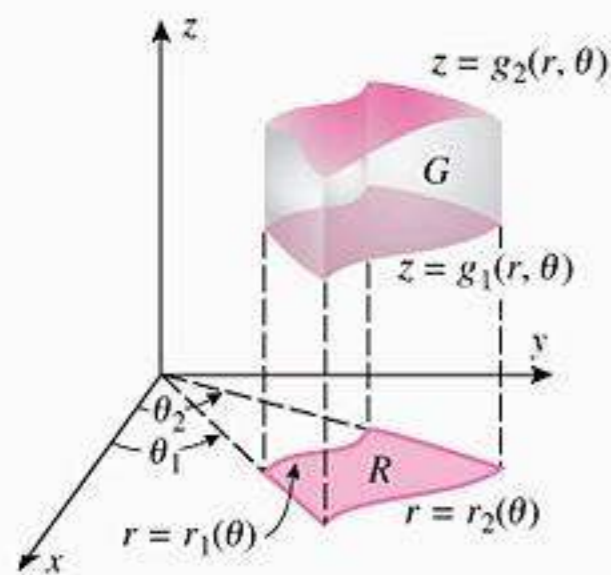


Figura 15.7.4

O tipo de sólido ao qual se aplica a Fórmula (5) é ilustrado na Figura 15.7.4. Para aplicar (4) e (5) é melhor começar com um esboço tridimensional do sólido G , do qual podem ser obtidos os limites de integração como segue:

Determinação dos Limites de Integração: Coordenadas Cilíndricas

Passo 1 Identifique as superfícies superior $z = g_2(r, \theta)$ e inferior $z = g_1(r, \theta)$ do sólido. As funções $g_1(r, \theta)$ e $g_2(r, \theta)$ determinam os limites de integração em z . (Se as superfícies superior e inferior forem dadas em coordenadas retangulares, converta-as para coordenadas cilíndricas.)

Passo 2 Faça um esboço bidimensional da projeção R do sólido no plano xy . Os limites de integração r e θ podem ser obtidos desse esboço exatamente como no caso das integrais duplas em coordenadas polares.

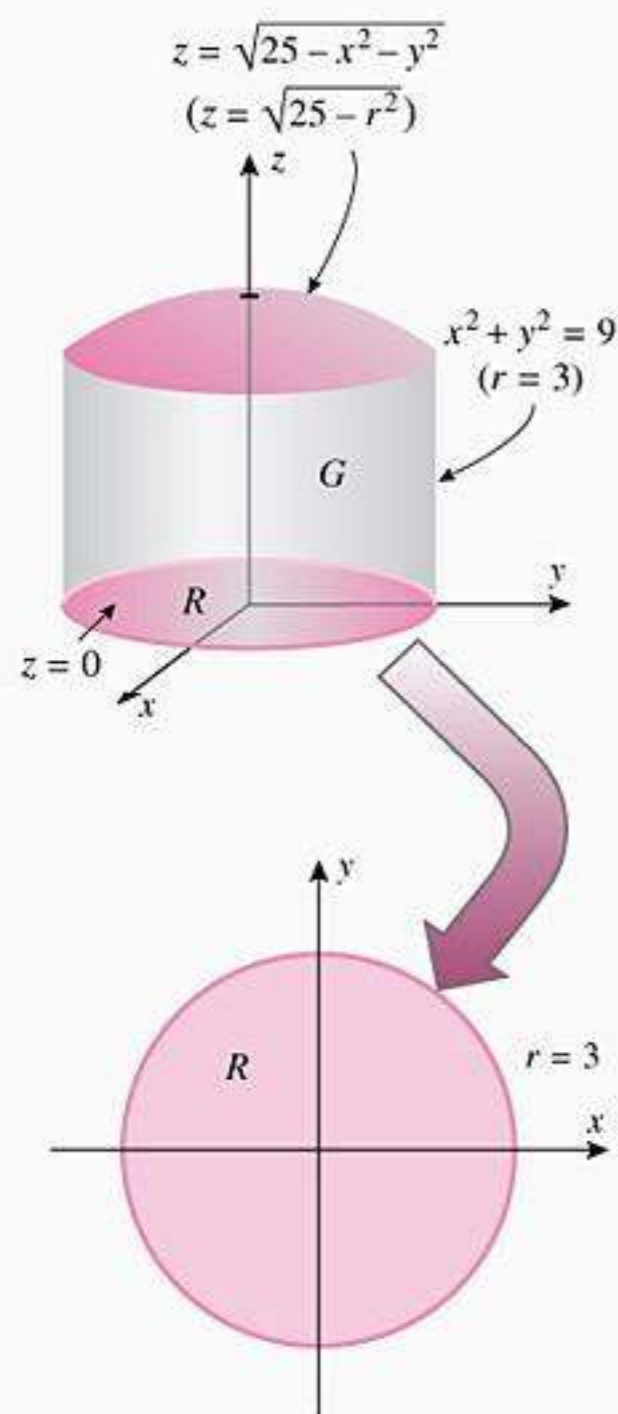


Figura 15.7.5

► **Exemplo 1** Use integração tripla em coordenadas cilíndricas para calcular o volume e o centróide do sólido G que é limitado acima pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Solução O sólido G e sua projeção R no plano xy são mostrados na Figura 15.7.5. Em coordenadas cilíndricas, a superfície superior de G é o hemisfério $z = \sqrt{25 - r^2}$ e a superfície inferior é o plano $z = 0$. Assim, por (4), o volume de G é

$$V = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{25-r^2}} dz \right] dA$$

Para a integral dupla em R , usamos coordenadas polares:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [rz]_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{25-r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^3 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{61}{3} \, d\theta = \frac{122}{3}\pi \end{aligned}$$

$u = 25 - r^2$
 $du = -2r \, dr$

Desse resultado e de (15) da Seção 15.6,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_G z \, dV = \frac{3}{122\pi} \iiint_G z \, dV = \frac{3}{122\pi} \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{25-r^2}} z \, dz \right] dA \\ &= \frac{3}{122\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} zr \, dz \, dr \, d\theta = \frac{3}{122\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left[\frac{1}{2}rz^2 \right]_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{244\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (25r - r^3) \, dr \, d\theta = \frac{3}{244\pi} \int_0^{2\pi} \frac{369}{4} \, d\theta = \frac{1107}{488} \end{aligned}$$

Por simetria, o centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de G fica no eixo de z , de modo que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Então, o centróide está no ponto $(0, 0, 1107/488)$. ◀

■ CONVERSÃO DE INTEGRAIS TRIPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA CILÍNDRICAS

Às vezes, uma integral tripla difícil de integrar em coordenadas retangulares pode ser calculada mais facilmente fazendo-se a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ para convertê-la numa integral em coordenadas cilíndricas. Com essa substituição, uma integral tripla retangular pode ser expressa como uma integral iterada em coordenadas cilíndricas por

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta \quad (6)$$

A ordem de integração no lado direito de (6) pode ser alterada, desde que os limites de integração sejam convenientemente ajustados.

► **Exemplo 2** Use coordenadas cilíndricas para calcular

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 \, dz \, dy \, dx$$

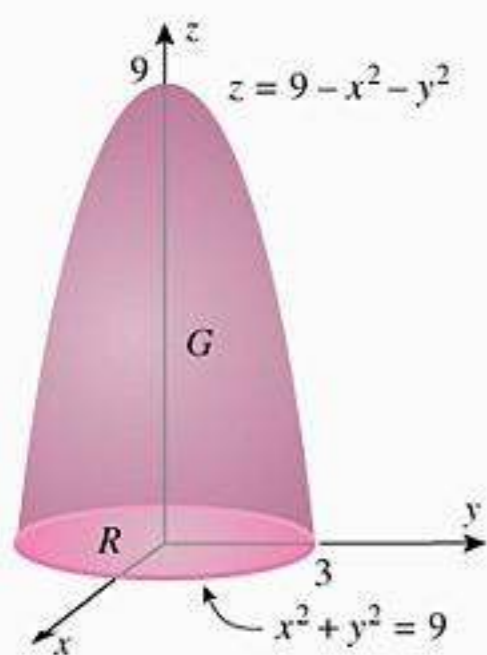


Figura 15.7.6

Solução Em problemas desse tipo, é conveniente esboçar a região de integração G e sua projeção R no plano xy . Pelos limites de integração em z , a superfície superior de G é o parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e a superfície inferior é o plano xy , de equação $z = 0$. Pelos limites de integração em x e y , a projeção R é a região do plano xy delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$ (Figura 15.7.6). Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx &= \iiint_G x^2 dV \\ &= \iint_R \left[\int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2 \theta dz \right] dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} (r^2 \cos^2 \theta) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} r^3 \cos^2 \theta dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [zr^3 \cos^2 \theta]_{z=0}^{9-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r^3 - r^5) \cos^2 \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \cos^2 \theta \right]_{r=0}^3 d\theta \\ &= \frac{243}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{243}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{243\pi}{4} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Em coordenadas esféricas, as equações mais simples são da forma

$$\rho = \text{constante}, \quad \theta = \text{constante}, \quad \phi = \text{constante}$$

Como indicado na Figura 12.8.4, a primeira equação representa uma esfera centrada na origem, a segunda, um semiplano articulado no eixo z e a terceira, uma folha de um cone circular reto com seu vértice na origem e sua reta de simetria ao longo do eixo z para $\phi \neq \pi/2$ e o plano xy para $\phi = \pi/2$. Designa-se por *cunha esférica* ou *elemento esférico de volume* um sólido compreendido entre seis superfícies da seguinte forma:

duas esferas	$\rho = \rho_1, \quad \rho = \rho_2 \quad (\rho_1 < \rho_2)$
dois semiplanos	$\theta = \theta_1, \quad \theta = \theta_2 \quad (\theta_1 < \theta_2)$
duas folhas de dois cones circulares retos	$\phi = \phi_1, \quad \phi = \phi_2 \quad (\phi_1 < \phi_2)$

(Figura 15.7.7). Vamos referir-nos aos números $\rho_2 - \rho_1$, $\theta_2 - \theta_1$ e $\phi_2 - \phi_1$ como as *dimensões* de uma cunha esférica.

Se G for uma região sólida no espaço tridimensional, então a integral tripla em G de uma função contínua $f(\rho, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas é definida similarmente à integral tripla em coordenadas cilíndricas, exceto que o sólido G é dividido em *cunhas esféricas* por um reticulado tridimensional consistindo de esferas com centro na origem, semiplanos articulados no eixo z e folhas de cones circulares retos com vértices na origem e retas de simetria ao longo do eixo z (Figura 15.7.8).

A equação que define uma integral tripla em coordenadas esféricas é

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*) \Delta V_k \quad (7)$$

onde ΔV_k é o volume da k -ésima cunha esférica que está no interior de G , $(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*)$ é um ponto arbitrário dessa cunha e n cresce de tal maneira que as dimensões de cada cunha esférica interna tendam para zero.

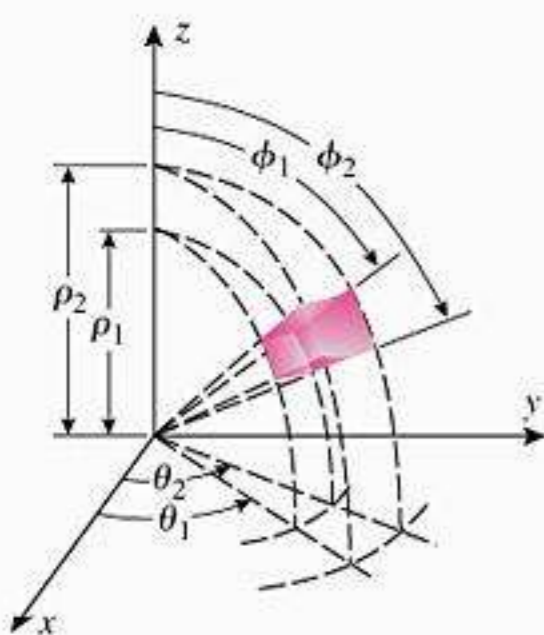


Figura 15.7.7

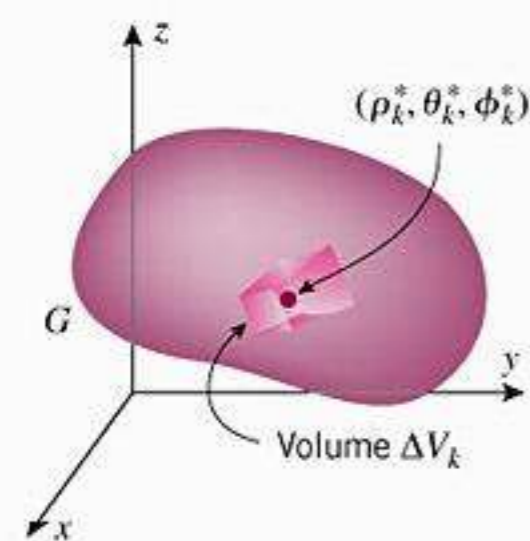


Figura 15.7.8

É preferível expressar a integral de (7) como uma integral iterada, para finalidades computacionais. Nos exercícios, orientamos o leitor a mostrar que se o ponto $(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*)$ for escolhido adequadamente, então o volume ΔV_k em (7) pode ser escrito como

$$\Delta V_k = \rho_k^{*2} \text{sen } \phi_k^* \Delta \rho_k \Delta \phi_k \Delta \theta_k \tag{8}$$

onde $\Delta \rho_k$, $\Delta \phi_k$ e $\Delta \theta_k$ são as dimensões da cunha (Exercício 42). Substituindo isso em (7), obtemos

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*) \rho_k^{*2} \text{sen } \phi_k^* \Delta \rho_k \Delta \phi_k \Delta \theta_k$$

o que sugere que uma integral tripla em coordenadas esféricas pode ser calculada como uma integral iterada da forma

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \text{sen } \phi d\rho d\phi d\theta \tag{9}$$

Observe o fator adicional de $\rho^2 \text{sen } \phi$ que aparece no integrando quando convertemos uma integral tripla para uma integral tripla iterada em coordenadas esféricas. Isso é análogo ao fator adicional de r que aparece na integral tripla em coordenadas cilíndricas.

O análogo do Teorema 15.7.1 para integrais triplas em coordenadas esféricas é de enunciado cansativo, portanto em vez disso vamos dar alguns exemplos que ilustram as técnicas para obter os limites de integração. Em todos os nossos exemplos, usaremos a mesma ordem de integração – primeiro em relação a ρ , depois ϕ e, por fim, θ . Uma vez que as idéias básicas tenham sido dominadas, não deve haver qualquer problema para se usar outras ordens de integração.

Suponha que queiramos integrar $f(\rho, \theta, \phi)$ no sólido esférico G contido na esfera $\rho = \rho_0$. A idéia básica é escolher os limites de integração de tal modo que cada ponto do sólido seja incluído no processo de integração. A Figura 15.7.9 ilustra uma das maneiras de fazer isso. Mantendo θ e ϕ fixados na primeira integração, deixamos ρ variar entre 0 e ρ_0 , o que cobre uma reta radial da origem à superfície da esfera. A seguir, mantendo θ fixado, deixamos ϕ variar de 0 a π de modo que a reta radial varra uma região em forma de leque. Finalmente, deixamos θ variar de 0 a 2π de modo que a região em forma de leque faça uma revolução completa, varrendo, portanto, a esfera inteira. Assim, a integral tripla de $f(\rho, \theta, \phi)$ no sólido esférico G pode ser calculada escrevendo

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \text{sen } \phi d\rho d\phi d\theta$$

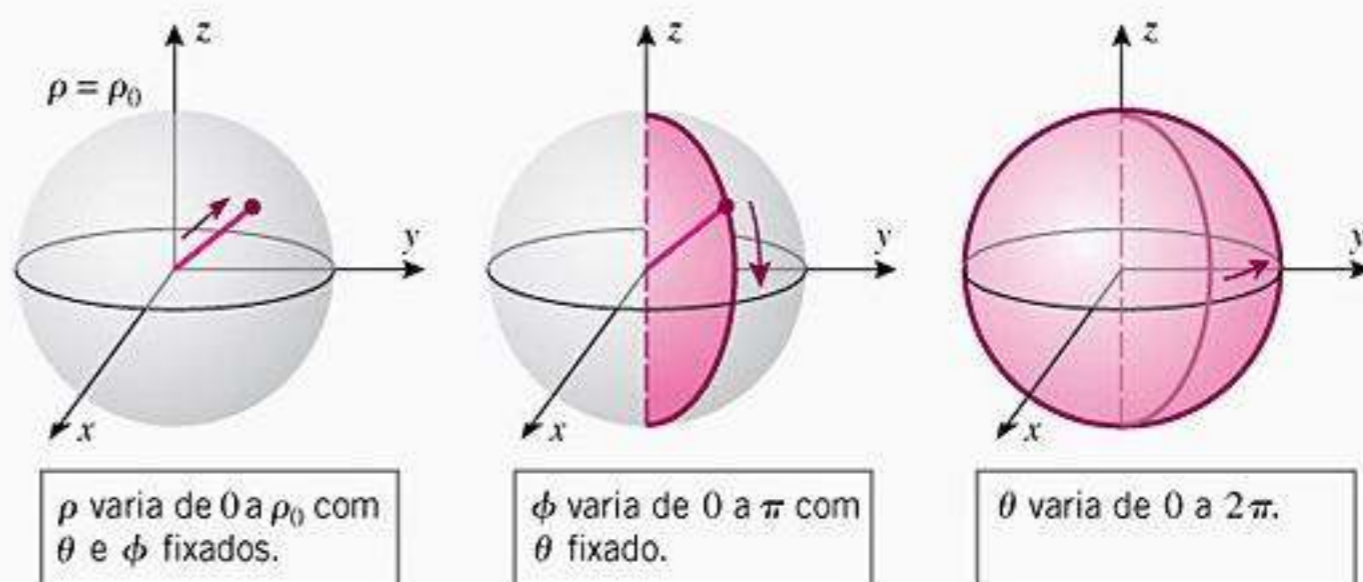


Figura 15.7.9

A Tabela 15.7.1 sugere como os limites de integração em coordenadas esféricas podem ser obtidos para alguns outros sólidos comuns.

Tabela 15.7.1

DETERMINAÇÃO DOS LIMITES				INTEGRAL
<p>Esta é a parte da esfera de raio ρ_0 localizada no primeiro octante.</p>				$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
<p>ρ varia de 0 a ρ_0 com θ e ϕ fixados.</p>	<p>ϕ varia de 0 a $\pi/2$ com θ fixado.</p>	<p>θ varia de 0 a $\pi/2$.</p>		
<p>Este sólido tipo casquinha de sorvete é cortado da esfera de raio ρ_0 pelo cone $\phi = \phi_0$.</p>				$\int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
<p>ρ varia de 0 a ρ_0 com θ e ϕ fixados.</p>	<p>ϕ varia de 0 a ϕ_0 com θ fixado.</p>	<p>θ varia de 0 a 2π.</p>		
<p>Este sólido é cortado da esfera de raio ρ_0 por dois cones, $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$.</p>				$\int_0^{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
<p>ρ varia de 0 a ρ_0 com θ e ϕ fixados.</p>	<p>ϕ varia de ϕ_1 a ϕ_2 com θ fixado.</p>	<p>θ varia de 0 a 2π.</p>		

Tabela 15.7.1 (continuação)

DETERMINAÇÃO DOS LIMITES		INTEGRAL
<p>Este sólido é envolvido lateralmente pelo cone $\phi = \phi_0$ e em cima pelo plano horizontal $z = a$.</p> <p>ρ varia de 0 a $a \sec \phi$ com θ e ϕ fixados.</p> <p>ϕ varia de 0 a ϕ_0 com θ fixado.</p> <p>θ varia de 0 a 2π.</p>		$\int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \int_0^{a \sec \phi} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
<p>Este sólido está compreendido entre duas esferas concêntricas, $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$.</p> <p>ρ varia de ρ_1 a ρ_2 com ϕ e θ fixados.</p> <p>ϕ varia de 0 a π com θ fixado.</p> <p>θ varia de 0 a 2π.</p>		$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

► **Exemplo 3** Use coordenadas esféricas para calcular o volume e o centróide do sólido G limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução O esboço do sólido G é mostrado na Figura 15.7.10.

Em coordenadas esféricas, a equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ é $\rho = 4$ e a equação do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta}$$

que simplifica para

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi$$

ou, dividindo ambos os membros por $\rho \cos \phi$,

$$\operatorname{tg} \phi = 1$$

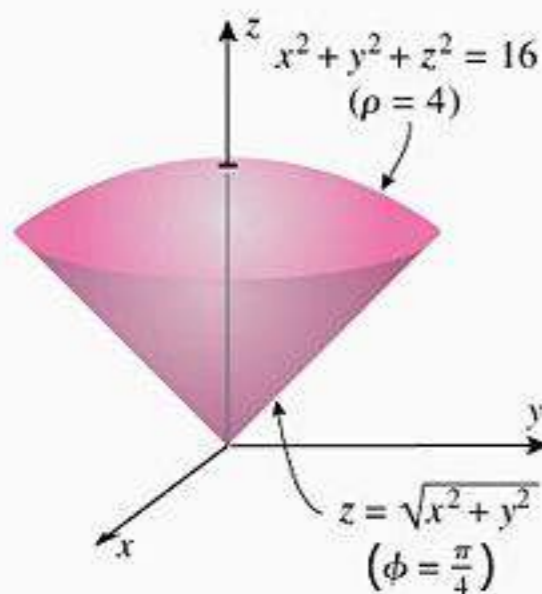


Figura 15.7.10

Assim, $\phi = \pi/4$ e usando a segunda entrada na Tabela 15.7.1, o volume de G é

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \phi \right]_{\rho=0}^4 \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{64}{3} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_{\phi=0}^{\pi/4} \, d\theta = \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \, d\theta \\ &= \frac{64\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Por simetria, o centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ está no eixo z , de modo que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Usando (15) da Seção 15.6 e o volume calculado acima,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_G z \, dV = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 (\rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^4}{4} \cos \phi \operatorname{sen} \phi \right]_{\rho=0}^4 \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{64}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{64}{V} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_{\phi=0}^{\pi/4} \, d\theta \\ &= \frac{16}{V} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{V} = \frac{3}{2(2 - \sqrt{2})} \end{aligned}$$

Com o auxílio de uma calculadora, $\bar{z} \approx 2,56$ (até duas casas decimais), de modo que a localização aproximada do centróide no sistema de coordenadas xyz é $(0; 0; 2,56)$. ◀

■ CONVERSÃO DE INTEGRAIS TRIPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA ESFÉRICAS

Utilizando a Tabela 12.8.1, podemos converter as integrais triplas de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas substituindo $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$. As duas integrais são relacionadas pela equação

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad (10)$$

► **Exemplo 4** Use coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Solução Em problemas desse tipo, é conveniente começar (quando possível) com um esboço da região de integração G . De acordo com os limites de integração em z , a superfície superior de G é o hemisfério $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e a superfície inferior é o plano xy de equação $z = 0$. Pelos limites de integração em x e y , a projeção do sólido G no plano xy é a região de-

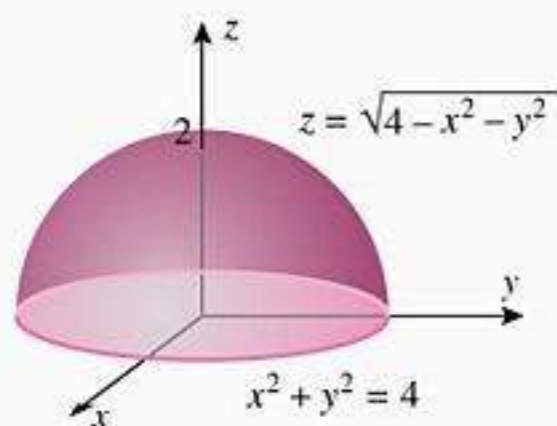


Figura 15.7.11

limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Com essas informações, obtemos o esboço de G da Figura 15.7.11. Então,

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx \\ &= \iiint_G z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^5 \cos^2 \phi \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{32}{3} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_{\phi=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{9} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{64}{9} \pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.7 (Ver página 1086 para respostas.)

1. (a) A cunha cilíndrica $1 \leq r \leq 3, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 5$ tem volume $V = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (b) A cunha esférica $1 \leq \rho \leq 3, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/3$ tem volume $V = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. Seja G a região sólida dentro da esfera de raio 2 centrada na origem e acima do plano $z = 1$. Em cada parte, preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam nas integrais iteradas em coordenadas cilíndricas.

(a) O volume de G é

$$\iiint_G dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} \underline{\hspace{2cm}} dz dr d\theta$$

(b)
$$\iiint_G \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} \underline{\hspace{2cm}} dz dr d\theta$$

3. Seja G a região sólida descrita no Exercício 2. Em cada parte, preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam nas integrais iteradas em coordenadas esféricas.

(a) O volume de G é

$$\iiint_G dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} \underline{\hspace{2cm}} d\rho d\phi d\theta$$

(b)
$$\iiint_G \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dV = \int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} \underline{\hspace{2cm}} d\rho d\phi d\theta$$

EXERCÍCIOS 15.7 CAS

1-4 Calcule a integral iterada.

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr dz dr d\theta$
2. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{r^2} r \sin \theta dz dr d\theta$
3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$

4. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{a \sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad (a > 0)$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Esboce a região G e identifique a função f tal que

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 1.

6. Esboce a região G e identifique a função f tal que

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 2.

7. Esboce a região G e identifique a função f tal que

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 3.

8. Esboce a região G e identifique a função f tal que

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi) dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 4.

9-12 Use coordenadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

9. O sólido compreendido pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 9$.
10. O sólido limitado acima e abaixo pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
11. O sólido que está dentro da superfície $r^2 + z^2 = 20$ e abaixo da superfície $z = r^2$.
12. O sólido compreendido entre o cone $z = (hr)/a$ e o plano $z = h$.

13-16 Use coordenadas esféricas para encontrar o volume do sólido.

13. O sólido limitado acima pela esfera $\rho = 4$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$.
14. O sólido no interior do cone $\phi = \pi/4$ e entre as esferas $\rho = 1$ e $\rho = 2$.
15. O sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e os planos $z = 0$ e $z = a$.
16. O sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, fora do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do plano xy .

17-20 Use coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular a integral.

17. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \quad (a > 0)$
18. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$
19. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$
20. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$

21. (a) Use um CAS para calcular

$$\int_{-2}^2 \int_1^4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r \operatorname{tg}^3 \theta}{\sqrt{1+z^2}} d\theta dr dz$$

(b) Encontre uma função $f(x, y, z)$ e esboce uma região G do espaço tridimensional tais que a integral tripla em coordenadas retangulares

$$\iiint_G f(x, y, z) dV$$

tenha o mesmo valor que a integral em coordenadas cilíndricas de (a).

22. Use um CAS para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} \rho^{17} \cos \phi \cos^{19} \theta d\rho d\phi d\theta$$

23. Encontre o volume dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ usando coordenadas
 - (a) cilíndricas;
 - (b) esféricas.
24. Seja G o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e os planos coordenados. Calcule

$$\iiint_G xyz dV$$

- (a) usando coordenadas retangulares;
- (b) usando coordenadas cilíndricas;
- (c) usando coordenadas esféricas.

25-26 Use coordenadas cilíndricas.

25. Calcule a massa do sólido com densidade $\delta(x, y, z) = 3 - z$, compreendido pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 3$.
26. Calcule a massa de um cilindro circular reto de raio a e altura h se a densidade for proporcional à distância à base (tomando k como a constante de proporcionalidade).

27-28 Use coordenadas esféricas.

27. Calcule a massa da esfera sólida de raio a com densidade proporcional à distância ao centro (tomando k como a constante de proporcionalidade).
28. Calcule a massa do sólido compreendido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com densidade $\delta(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

29-30 Use coordenadas cilíndricas para encontrar o centróide do sólido.

29. O sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.
30. O sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 2$.

31-32 Use coordenadas esféricas para encontrar o centróide do sólido.

31. O sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
32. O sólido limitado acima pela esfera $\rho = 4$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$.

33-34 Use as fórmulas de Wallis da última contra-capá.

33. Encontre o centróide do sólido limitado acima pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
34. Calcule a massa do sólido no primeiro octante limitado acima pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e o plano $y = 0$, supondo que a densidade seja $\delta(x, y, z) = z$.

35-40 Resolva o problema usando coordenadas cilíndricas ou esféricas (as que forem mais apropriadas).

35. Calcule o volume do sólido no primeiro octante limitado pela esfera $\rho = 2$, os planos coordenados e os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.
36. Calcule a massa do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e que fica dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, se a densidade for $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
37. Encontre o centro de gravidade do sólido limitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano xy , supondo que a densidade seja $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
38. Encontre o centro de gravidade do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano xy se a densidade for $\delta(x, y, z) = z$.
39. Encontre o centro de gravidade do hemisfério sólido limitado por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $z = 0$ se a densidade for proporcional à distância da origem.
40. Encontre o centróide do sólido envolvido pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$ e o plano $y = 0$.
41. Suponha que a densidade num ponto de uma estrela esférica gasosa seja modelada pela fórmula

$$\delta = \delta_0 e^{-(\rho/R)}$$

onde δ_0 é uma constante positiva, R é o raio da estrela e ρ é a distância do ponto ao centro da estrela. Calcule a massa da estrela.

42. Neste exercício, vamos deduzir uma fórmula para o volume da cunha esférica da Figura 15.7.7.

- (a) Use uma integral tripla em coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado acima por uma esfera $\rho = \rho_0$, abaixo por um cone $\phi = \phi_0$ e dos lados por $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2$) é

$$V = \frac{1}{3} \rho_0^3 (1 - \cos \phi_0) (\theta_2 - \theta_1)$$

[Sugestão: em coordenadas cilíndricas, a esfera tem equação $r^2 + z^2 = \rho_0^2$ e o cone tem equação $z = r \cotg \phi_0$. Para simplificar, considere somente o caso $0 < \phi_0 < \pi/2$.]

- (b) Subtraia os volumes apropriados e use o resultado da parte (a) para deduzir que o volume ΔV da cunha esférica é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) (\theta_2 - \theta_1)$$

- (c) Aplique o Teorema do Valor Médio às funções $\cos \phi$ e ρ^3 para concluir que a fórmula da parte (b) pode ser escrita como

$$\Delta V = \rho^{*2} \text{sen } \phi^* \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

onde ρ^* está entre ρ_1 e ρ_2 , ϕ^* está entre ϕ_1 e ϕ_2 e $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$.

43-46 A tendência de um sólido para resistir a uma mudança no movimento rotatório em torno de um eixo é medida por seu **momento de inércia** em torno daquele eixo. Se um sólido ocupa uma região G num sistema de coordenadas xyz e se sua função densidade $\delta(x, y, z)$ for contínua em G , então os momentos de inércia em torno dos eixos x , y e z são denotados, respectivamente, por I_x , I_y e I_z e são definidos por

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

(compare com a discussão que precede os Exercícios 40 e 41 da Seção 7.6). Nos Exercícios 39 a 42, determine o momento de inércia do sólido indicado, supondo que tenha densidade δ constante.

43. I_z para o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.
44. I_y para o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.
45. I_z para o cilindro oco $a_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq a_2^2$, $0 \leq z \leq h$.
46. I_z para a esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.7

1. (a) $\frac{20}{3}\pi$ (b) $\frac{13}{9}\pi$ 2. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$ (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} \frac{rz}{r^2+z^2} dz dr d\theta$
3. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho^2 \text{sen } \phi d\rho d\phi d\theta$ (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho \cos \phi \text{sen } \phi d\rho d\phi d\theta$

15.8 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS; JACOBIANOS

Nesta seção, discutiremos um método geral para calcular integrais duplas e triplas por substituição. A maioria dos resultados desta seção é de demonstração difícil, portanto a nossa abordagem será informal e motivacional. Nosso objetivo é oferecer um entendimento geométrico dos princípios básicos e uma exposição às técnicas computacionais.

■ MUDANÇA DE VARIÁVEL NUMA INTEGRAL SIMPLES

Para motivar as técnicas de calcular integrais duplas e triplas por substituição, será útil considerar o efeito de uma substituição $x = g(u)$ numa integral simples no intervalo $[a, b]$. Se g for diferenciável e crescente ou decrescente, então g é injetora e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u) du$$

Nessa relação, $f(x)$ e dx são dadas em função de u e os limites de integração de u resultam da resolução das equações

$$a = g(u) \quad \text{e} \quad b = g(u)$$

No caso de g ser decrescente temos $g^{-1}(b) < g^{-1}(a)$, que é contrário à nossa convenção usual de escrever as integrais definidas com limite de integração superior maior. Podemos contornar a situação invertendo os limites de integração e escrevendo

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))g'(u) du = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))|g'(u)| du$$

onde o valor absoluto resulta do fato de $g'(u)$ ser negativa. Assim, independente de ser g crescente ou decrescente, podemos escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(u))|g'(u)| du \tag{1}$$

onde α e β são os limites de integração de u e $\alpha < \beta$.

A expressão $g'(u)$ que aparece em (1) é denominada **jacobiano** da mudança de variável $x = g(u)$, em homenagem a C. G. J. Jacobi, que fez o primeiro estudo sério sobre a mudança de variáveis das integrais múltiplas em meados do século XIX. A Fórmula (1) revela três conseqüências da mudança de variável $x = g(u)$:

- O novo integrando torna-se $f(g(u))$ vezes o valor absoluto do jacobiano.
- dx torna-se du .
- O intervalo de integração de x transforma-se num intervalo de integração de u .

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que resultados análogos valem na mudança de variáveis em integrais duplas e triplas.

■ TRANSFORMAÇÕES DO PLANO

Em seções anteriores, consideramos equações paramétricas de três espécies:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

Uma curva no plano

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Uma curva no espaço tridimensional

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

Uma superfície no espaço tridimensional

Consideraremos, agora, equações paramétricas da forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{2}$$

As equações paramétricas desse tipo associam pontos do plano xy com pontos do plano uv . Essas equações podem ser escritas em forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é um vetor posição no plano xy e $\mathbf{r}(u, v)$ é uma função vetorial das variáveis u e v .

Também será conveniente, nesta seção, imaginar as equações paramétricas em (2) em termos de entradas e saídas. Se imaginarmos o par de números (u, v) como uma entrada, então as duas equações, em conjunto, produzem uma única saída (x, y) e, portanto, definem uma função T que associa pontos do plano xy com pontos do plano uv . Essa função é descrita pela fórmula

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Dizemos que T é uma **transformação** do plano uv para o plano xy e (x, y) é a **imagem** de (u, v) pela transformação T . Dizemos, também, que T **leva**, ou **aplica** (u, v) em (x, y) . O conjunto R de todas as imagens no plano xy de um conjunto S no plano uv é chamado **imagem de S por T** . Se pontos distintos do plano uv têm imagens distintas no plano xy , então diz-se que T é **injetora**. Nesse caso, as equações (2) definem u e v como funções de x e y , ou seja

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

Essas equações, que, muitas vezes, podem ser obtidas resolvendo (2) para u e v em função de x e y , definem uma transformação do plano xy no plano uv que leva a imagem de (u, v) por T de volta para (u, v) . Essa transformação é denotada por T^{-1} e é denominada **inversa de T** (Figura 15.8.1).

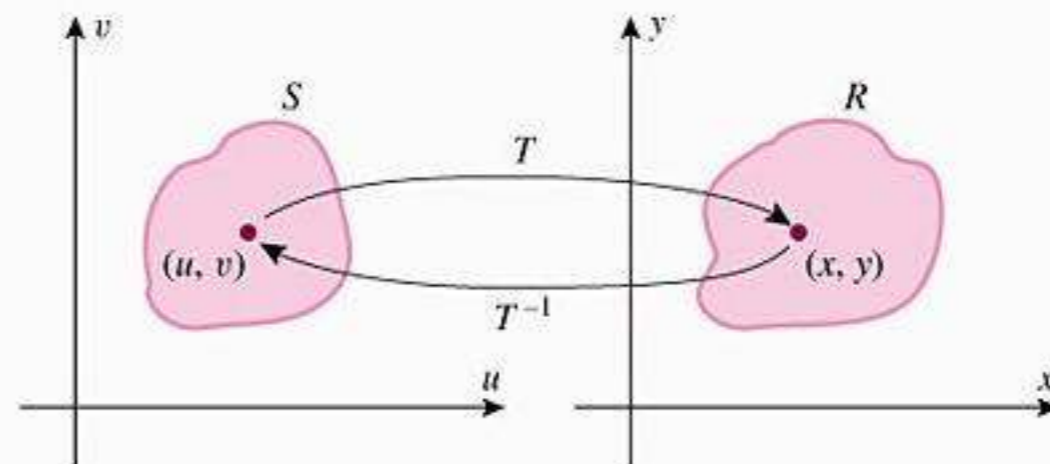
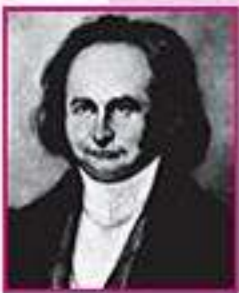


Figura 15.8.1



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) Matemático alemão. Jacobi, filho de um banqueiro, foi criado num ambiente de riqueza e cultura e mostrou brilhantismo na Matemática desde cedo. Resistiu ao estudo da Matemática mecanicamente, preferindo, em vez disso, aprender os princípios gerais dos trabalhos dos mestres, Euler e Lagrange. Entrou na Universidade de Berlim aos 16 anos como estudante de Matemática e dos clássicos. Entretanto, compreendeu cedo que não podia estudar ambos e dedicou-se inteiramente à Matemática, com intensidade ardorosa que manteria durante toda a sua vida. Recebeu o diploma de Ph.D. em 1825 e foi capaz de assegurar uma posição de professor na Universidade de Berlim, desistindo do judaísmo e tornando-se cristão. No entanto, suas oportunidades de promoção permaneceram limitadas e ele mudou para a Universidade de Königsberg. Jacobi nasceu para lecionar – tinha uma personalidade dinâmica e dava suas aulas com uma clareza e entusiasmo que freqüentemente deixava sua platéia fascinada. Apesar dos extensos compromissos letivos, foi capaz de publicar obras revolucionárias de pesquisa matemática que acabaram tornando-o o líder matemático europeu depois de Gauss. Seu campo de

pesquisa principal foi na área das funções elípticas, um ramo da Matemática com aplicações importantes em Astronomia e em Física, bem como em outros campos da Matemática. Devido à riqueza de sua família, Jacobi não dependeu do seu salário de professor nos primeiros anos. Entretanto, seu mundo confortável acabou entrando em colapso. Em 1840, sua família faliu e ele, pessoalmente, perdeu tudo, financeiramente. Em 1842, teve um colapso nervoso devido ao excesso de trabalho. Em 1843, ficou seriamente doente de diabetes e mudou-se para Berlim com a ajuda de uma subvenção governamental para custear suas despesas médicas. Em 1848, ele fez um comentário político estúpido que fez o governo retirar a subvenção, resultando na perda de sua residência. Sua saúde continuou a piorar e em 1851, finalmente, sucumbiu a sucessivos ataques de gripe e varíola. Apesar de todos problemas, Jacobi foi um trabalhador incansável até o fim. Quando um amigo demonstrou preocupação com o efeito do excesso de trabalho em sua saúde, Jacobi replicou: “Certamente, tenho arriscado minha saúde algumas vezes pelo excesso de trabalho, mas e daí? Somente os repolhos não têm nervos, nem preocupações. E o que conseguem com seu bem-estar perfeito?”

Uma maneira de visualizar o efeito geométrico de uma transformação T é determinar as imagens no plano xy de retas verticais e horizontais do plano uv . Os conjuntos de pontos do plano xy que são imagens de retas horizontais (v constante) são chamados *curvas de v constante*, e os conjuntos de pontos que são imagens de retas verticais (u constante) são chamados *curvas de u constante* (Figura 15.8.2).

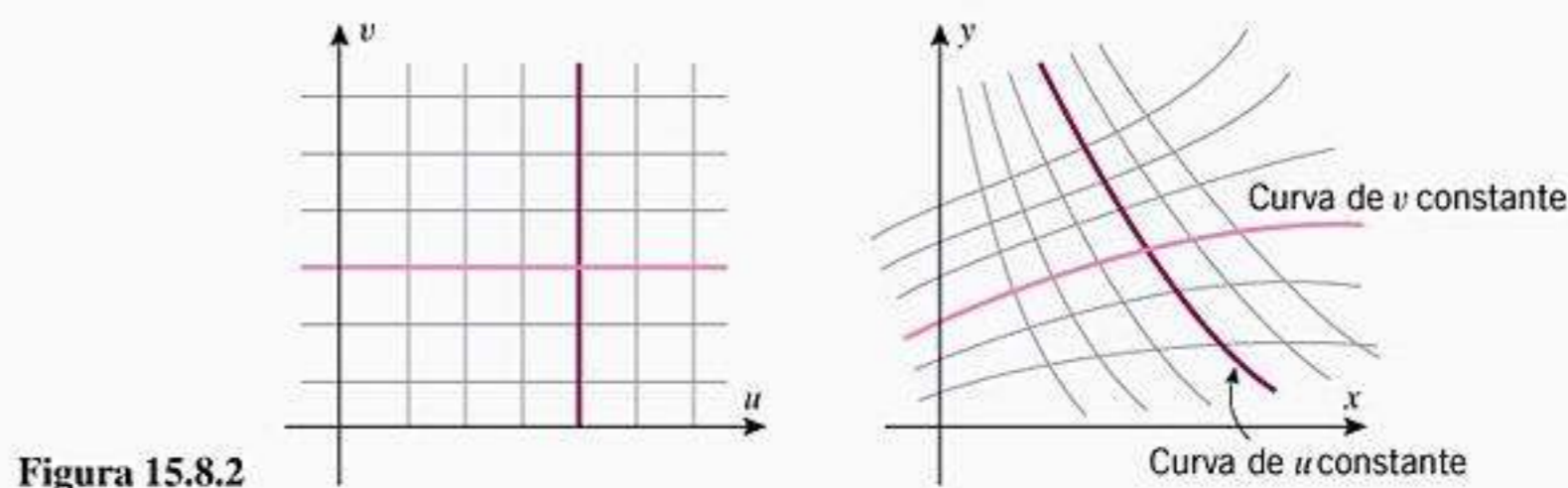


Figura 15.8.2

► **Exemplo 1** Seja T a transformação do plano uv para o plano xy definida pelas equações

$$x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v) \tag{3}$$

- (a) Determine $T(1, 3)$.
- (b) Esboce as curvas de v constante correspondentes a $v = -2, -1, 0, 1, 2$.
- (c) Esboce as curvas de u constante correspondentes a $u = -2, -1, 0, 1, 2$.
- (d) Esboce a imagem por T da região quadrada do plano uv limitada pelas retas $u = -2, u = 2, v = -2$ e $v = 2$.

Solução (a) Substituindo $u = 1$ e $v = 3$ em (3) dá $T(1, 3) = (1, -1)$.

Soluções (b) e (c) Nessas partes, será conveniente expressar as equações da transformação com u e v como funções de x e y . Deixamos a cargo do leitor demonstrar que

$$u = 2x + y, \quad v = 2x - y$$

Assim, as curvas de v constante correspondentes a $v = -2, -1, 0, 1$ e 2 são

$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad 2x - y = 0, \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

e as curvas de u constante correspondentes a $u = -2, -1, 0, 1$ e 2 são

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad 2x + y = 0, \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$

Na Figura 15.8.3, as curvas de v constante são mostradas em azul claro e as curvas de u constante, em azul escuro.

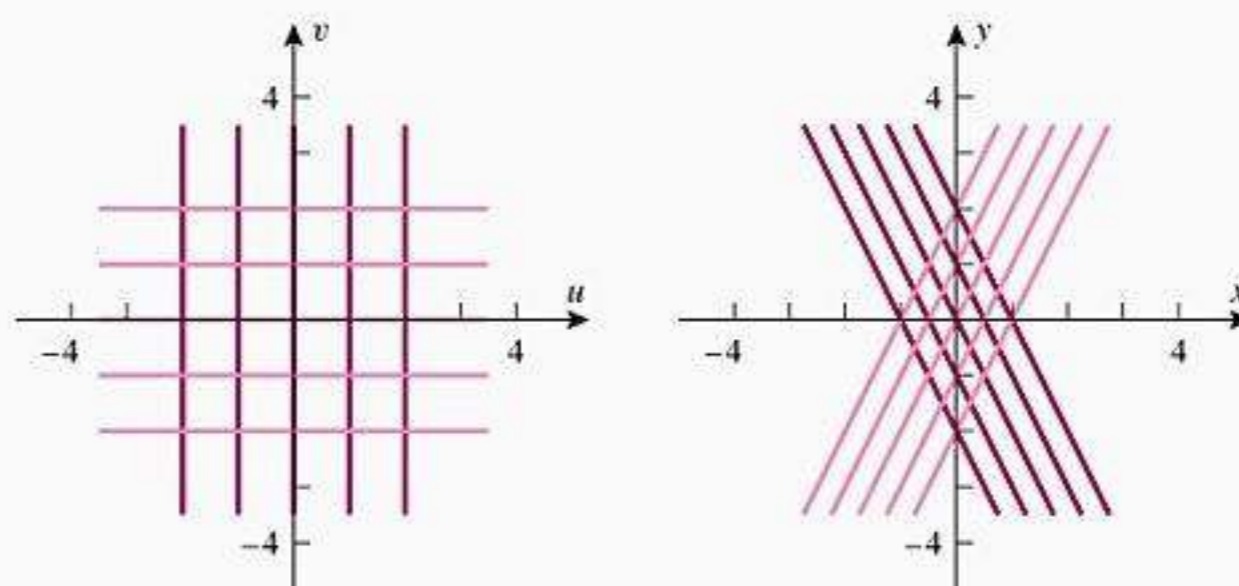


Figura 15.8.3

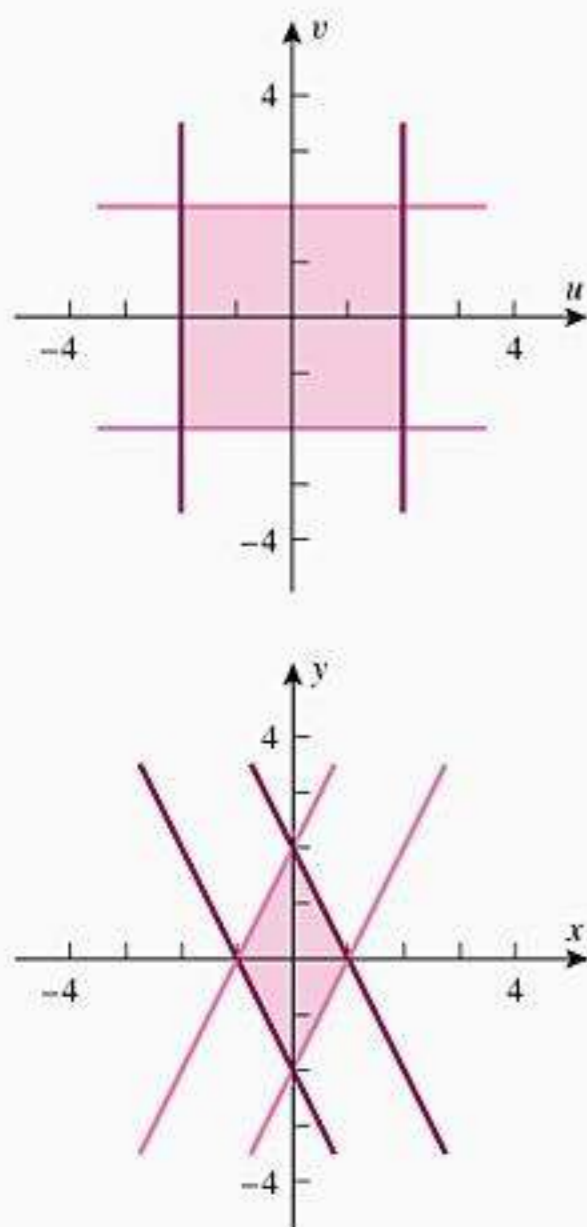


Figura 15.8.4

Solução (d) A imagem de uma região pode, muitas vezes, ser obtida determinando-se a imagem de sua fronteira. Neste caso, as imagens das retas de fronteira $u = -2$, $u = 2$, $v = -2$ e $v = 2$ envolvem a região em forma de losango no plano xy , mostrada na Figura 15.8.4. ◀

■ **JACOBIANOS EM DUAS VARIÁVEIS**

Para deduzir a fórmula da mudança de variável em integrais duplas, precisaremos entender a relação entre a área de uma região retangular pequena no plano uv e a área de sua imagem no plano xy pela transformação T dada pelas equações

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Para isso, suponha que Δu e Δv sejam positivos e considere uma região retangular S no plano uv envolvida pelas retas

$$u = u_0, \quad u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0, \quad v = v_0 + \Delta v$$

Se as funções $x(u, v)$ e $y(u, v)$ forem contínuas e se Δu e Δv não forem muito grandes, então a imagem de S no plano xy será uma região R que parece um paralelogramo ligeiramente distorcido (Figura 15.8.5). Os lados de R são as curvas de u constante e de v constante que correspondem aos lados de S .

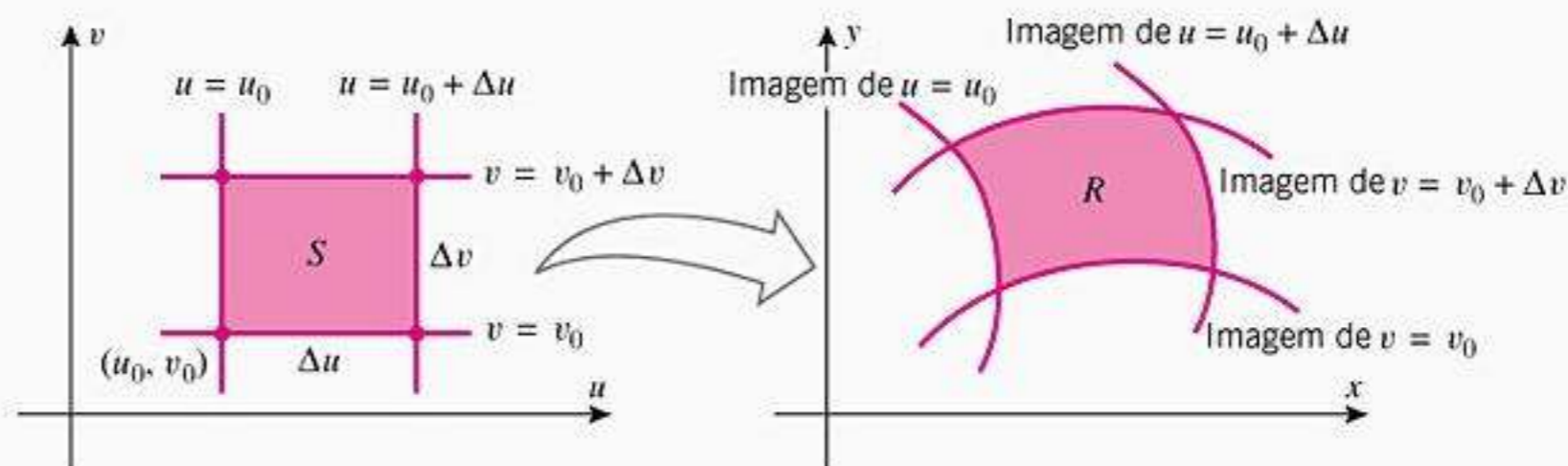


Figura 15.8.5

Se considerarmos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

como o vetor posição do ponto do plano xy correspondente ao ponto (u, v) do plano uv , então a curva de v constante, correspondente a $v = v_0$ e de u constante, correspondente a $u = u_0$, podem ser representadas em forma vetorial como

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} \quad \text{Curva de } v \text{ constante}$$

$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} \quad \text{Curva de } u \text{ constante}$$

Como estamos supondo que Δu e Δv sejam pequenos, a região R pode ser aproximada por um paralelogramo determinado pelos “vetores secante”

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \tag{4}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \tag{5}$$

mostrados na Figura 15.8.6. Uma aproximação mais conveniente de R pode ser obtida usando as Fórmulas (5) e (6) da Seção 15.4 para aproximar esses vetores secantes por vetores tangen-

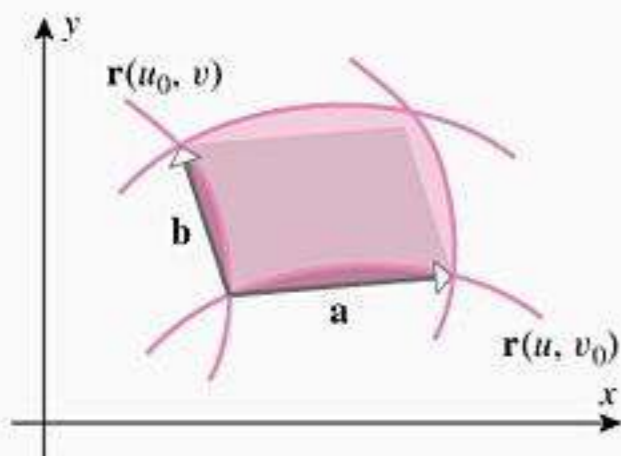


Figura 15.8.6

tes, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \Delta u \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} \right) \Delta u \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v} \Delta v \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} \right) \Delta v \end{aligned}$$

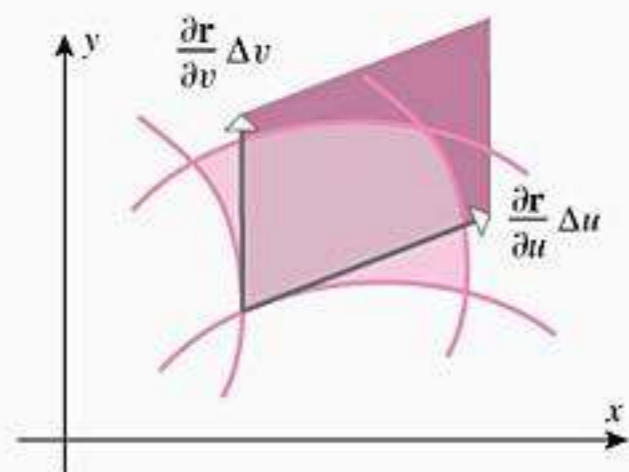


Figura 15.8.7

onde as derivadas parciais são calculadas em (u_0, v_0) (Figura 15.8.7). Portanto, segue que a área da região R , que denotaremos por ΔA , pode ser aproximada pela área do paralelogramo determinado por esses vetores. Assim, pela Fórmula (8) da Seção 12.4, temos

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \quad (6)$$

na qual as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) . Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (7)$$

O determinante de (7) é suficientemente importante para ter sua própria terminologia e notação.

15.8.1 DEFINIÇÃO Se T for a transformação do plano uv no plano xy definida pelas equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, então o **jacobiano de T** é denotado por $J(u, v)$ ou $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ e é definido por

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

Usando essa notação decorre de (6) e (7) que

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \right\| \Delta u \Delta v$$

ou, uma vez que \mathbf{k} é um vetor unitário,

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \quad (8)$$

No ponto (u_0, v_0) , essa fórmula importante relaciona as áreas das regiões R e S da Figura 15.8.5: ela nos diz que para valores pequenos de Δu e Δv , a área de R é aproximadamente o valor absoluto do jacobiano vezes a área de S . Além disso, prova-se nos cursos de Cálculo avançado que o erro relativo na aproximação tende para zero quando $\Delta u \rightarrow 0$ e $\Delta v \rightarrow 0$.

■ MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS DUPLAS

Nosso próximo objetivo é fornecer uma motivação geométrica para o seguinte resultado.

Um enunciado preciso das condições sob as quais a Fórmula (9) é verdadeira nos levaria além do escopo deste curso. É suficiente dizer que a fórmula vale se T for uma transformação injetora, $f(x, y)$ for contínua em R , as derivadas parciais de $x(u, v)$ e $y(u, v)$ existirem e forem contínuas em S e as regiões S e R não forem muito complicadas.

15.8.2 FÓRMULA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS DUPLAS Se a transformação $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ levar a região S do plano uv na região R do plano xy e se o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ for não-nulo e não mudar de sinal em S , então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv} \quad (9)$$

onde acrescentamos índices aos dA para ajudar a identificar as variáveis associadas.

Para motivar a Fórmula (9) procedemos como segue:

- Subdivida a região S do plano uv em retângulos por meio de retas paralelas aos eixos coordenados e exclua das considerações quaisquer retângulos que contenham pontos fora de S . Isso deixa somente regiões retangulares que são subconjuntos de S . Suponha que haja n tais regiões e denote a k -ésima região por S_k . Suponha que S_k tenha dimensões Δu_k por Δv_k e, como mostrado na Figura 15.8.8a, considere que (u_k^*, v_k^*) seja seu “canto esquerdo inferior”.
- Como mostrado na Figura 15.8.8b, a transformação T definida pelas equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ leva S_k no paralelogramo curvilíneo R_k do plano xy e aplica o ponto (u_k^*, v_k^*) no ponto $(x_k^*, y_k^*) = (x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*))$ de R_k . Denote a área de R_k por ΔA_k .
- Em coordenadas retangulares, a integral dupla de $f(x, y)$ na região R é definida como um limite de somas de Riemann nos quais R é subdividida em sub-regiões retangulares. Nos cursos de Cálculo avançado, demonstra-se que sob condições apropriadas podem ser usadas subdivisões em paralelogramos curvilíneos. Aceitando isso como verdadeiro, podemos aproximar a integral dupla de $f(x, y)$ em R como

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA_{xy} &\approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \\ &\approx \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u_k \Delta v_k \end{aligned}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_k^*, v_k^*) . Mas a última expressão é uma soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

portanto, segue a Fórmula (9) supondo que os erros de aproximação tendam para zero quando $n \rightarrow +\infty$.

► Exemplo 2 Calcule

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y} dA$$

onde R é a região compreendida pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 1$, $x + y = 1$ e $x + y = 3$ (Figura 15.8.9a).

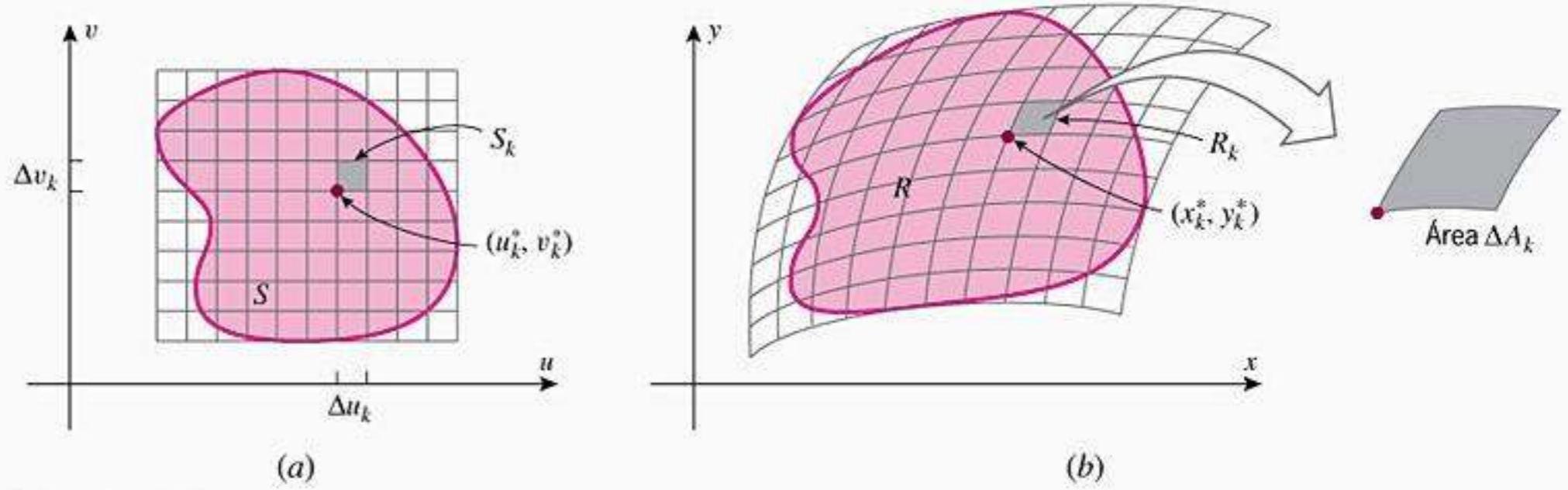


Figura 15.8.8

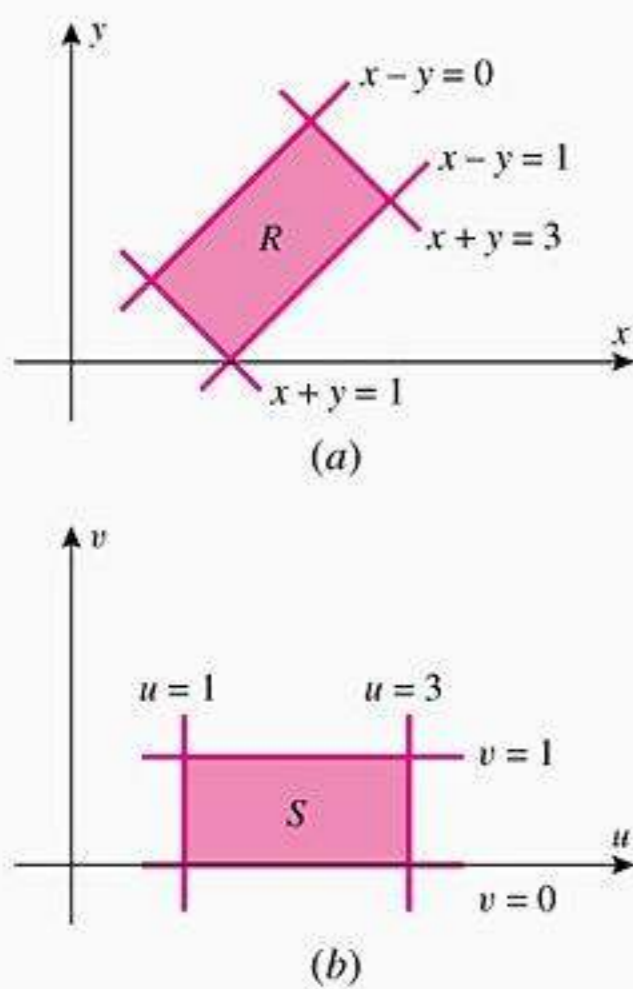


Figura 15.8.9

Solução Seria cansativo calcular diretamente essa integral porque a região R é orientada de tal maneira que teríamos de subdividi-la e integrar cada parte separadamente. Entretanto, a ocorrência das expressões $x - y$ e $x + y$ nas equações da fronteira sugere que a transformação

$$u = x + y, \quad v = x - y \tag{10}$$

poderia ser útil, visto que com essa transformação as linhas de fronteira

$$x + y = 1, \quad x + y = 3, \quad x - y = 0, \quad x - y = 1$$

são curvas de u constante e v constante correspondentes às retas

$$u = 1, \quad u = 3, \quad v = 0, \quad v = 1$$

no plano uv . Essas retas envolvem a região retangular S mostrada na Figura 15.8.9b. Para determinar o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ dessa transformação, primeiro resolvemos (10) para x e y em função de u e v . Isso dá

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

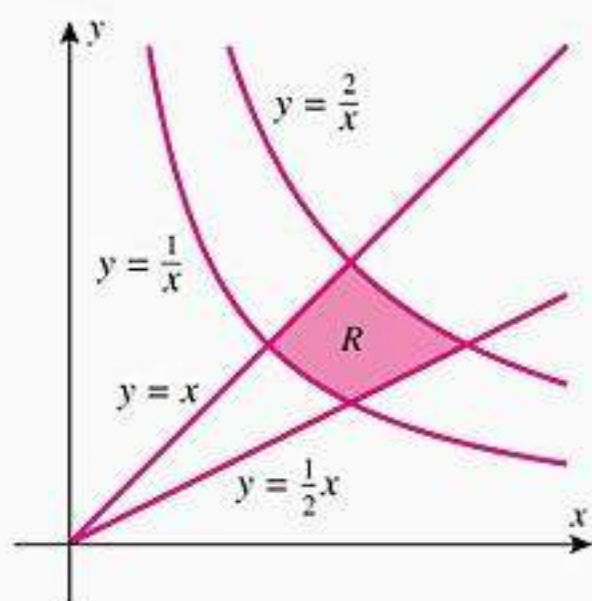
das quais obtemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

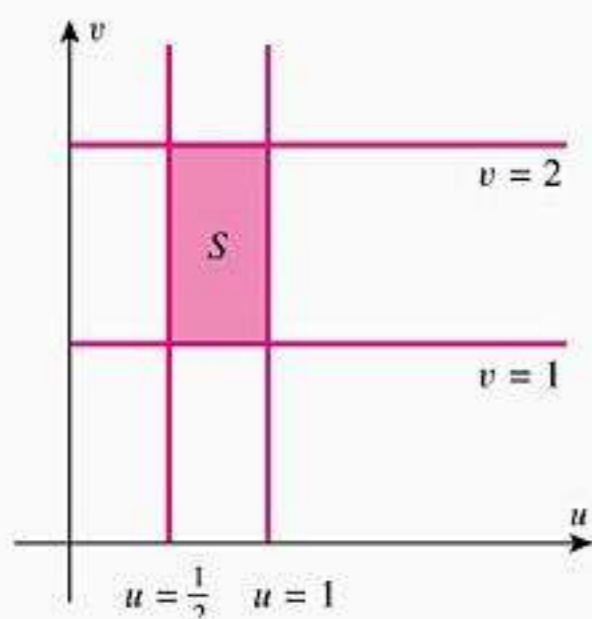
Assim, pela Fórmula (9), mas com a notação dA em vez de dA_{xy} ,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x - y}{x + y} dA &= \iint_S \frac{v}{u} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv} \\ &= \iint_S \frac{v}{u} \left| -\frac{1}{2} \right| dA_{uv} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_1^3 \frac{v}{u} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v \ln |u| \Big|_{u=1}^3 dv \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \int_0^1 v dv = \frac{1}{4} \ln 3 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A idéia subjacente ilustrada no Exemplo 2 é encontrar uma transformação injetora que leve um retângulo S no plano uv na região de integração R e depois usar essa transformação como uma substituição na integral para produzir uma integral equivalente em S .



(a)



(b)

Figura 15.8.10

► **Exemplo 3** Calcule

$$\iint_R e^{xy} dA$$

onde R é a região compreendida pelas retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = x$ e as parábolas $y = 1/x$ e $y = 2/x$ (Figura 15.8.10a).

Solução Como no exemplo anterior, procuramos uma transformação na qual as curvas de fronteira no plano xy tornam-se curvas de v constante e de u constante. Para isso, reescrevemos as quatro curvas de fronteira como

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{x} = 1, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

que sugere a transformação

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy \tag{11}$$

Com essa transformação, as curvas de fronteira no plano xy são curvas de u constante e de v constante correspondendo às retas

$$u = \frac{1}{2}, \quad u = 1, \quad v = 1, \quad v = 2$$

no plano uv . Essas retas envolvem a região retangular S mostrada na Figura 15.8.10b. Para determinar o jacobiano $\partial(x, y) / \partial(u, v)$ dessa transformação, primeiro resolvemos (11) para x e y em função de u e v , o que dá

$$x = \sqrt{v/u}, \quad y = \sqrt{uv}$$

das quais obtemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u}$$

Assim, pela Fórmula (9), mas com a notação dA em vez de dA_{xy} ,

$$\begin{aligned} \iint_R e^{xy} dA &= \iint_S e^v \left| -\frac{1}{2u} \right| dA_{uv} = \frac{1}{2} \iint_S \frac{1}{u} e^v dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{u} e^v du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 e^v \ln |u| \Big|_{u=1/2}^1 dv \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \int_1^2 e^v dv = \frac{1}{2} (e^2 - e) \ln 2 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ **MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS TRIPLAS**

Equações da forma

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{12}$$

definem uma **transformação** T do espaço uvw no espaço xyz . Da mesma maneira que uma transformação $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ em duas variáveis leva retângulos pequenos do plano uv em paralelogramos curvilíneos no plano xy , também (12) leva pequenos paralelepípedos retangulares do espaço uvw em paralelepípedos curvilíneos do espaço xyz (Figura 15.8.11). A definição do jacobiano de (12) é semelhante à Definição 15.8.1.

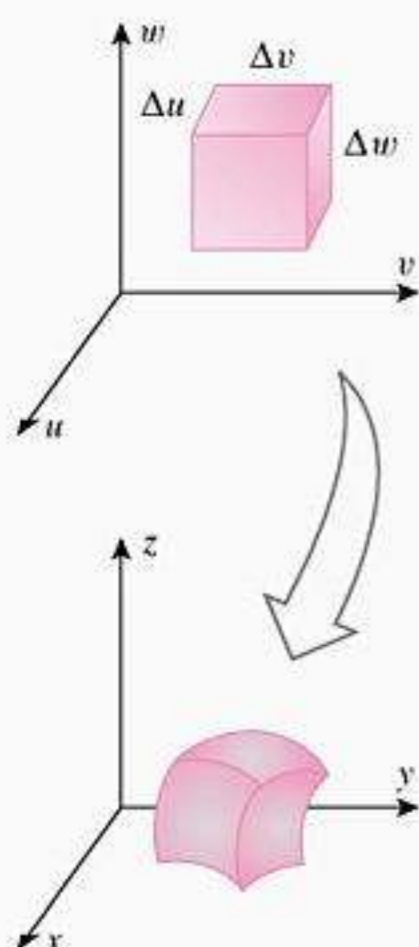


Figura 15.8.11

15.8.3 DEFINIÇÃO Se T for a transformação do espaço uvw para o espaço xyz definida pelas equações $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, então o **jacobiano de T** é denotado por $J(u, v, w)$ ou $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ e é definido por

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Para valores pequenos de Δu , Δv e Δw , o volume ΔV do paralelepípedo curvilíneo da Figura 15.8.11 está relacionado ao volume $\Delta u \Delta v \Delta w$ do paralelepípedo retangular por

$$\Delta V \approx \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u \Delta v \Delta w \tag{13}$$

que é o análogo da Fórmula (8). Usando essa relação e um argumento semelhante ao que levou à Fórmula (9), obtemos o resultado seguinte.

15.8.4 FÓRMULA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS TRIPLAS Se a transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ levar a região S do espaço uvw na região R do espaço xyz e se o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ for não-nulo e não mudar de sinal em S , então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

$$\iiint_R f(x, y, z) dV_{xyz} = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw} \tag{14}$$

► **Exemplo 4** Calcule o volume da região G envolvida pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solução O volume V é dado pela integral tripla

$$V = \iiint_G dV$$

Para calcular essa integral, fazemos a mudança de variáveis

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw \tag{15}$$

que leva a região S do espaço uvw envolvida pela esfera de raio 1 na região G do espaço xyz . Isso pode ser visto em (15), notando que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{torna-se} \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

O jacobiano de (15) é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Assim, pela Fórmula (14), mas com a notação dV em vez de dV_{xyz} ,

$$V = \iiint_G dV = \iiint_S \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw} = abc \iiint_S dV_{uvw}$$

A última integral é o volume envolvido pela esfera de raio 1, que sabemos ser $\frac{4}{3}\pi$. Assim, o volume envolvido pelo elipsóide é $V = \frac{4}{3}\pi abc$. ◀

Os jacobianos também aparecem na conversão de integrais triplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas cilíndricas e esféricas. Como exemplo, no Exercício 47 pedimos ao leitor para mostrar que o jacobiano da transformação

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

e o jacobiano da transformação

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$$

Assim, as Fórmulas (6) e (10) da Seção 15.7 podem ser expressas em termos de jacobianos como

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} dz dr d\theta \tag{16}$$

Os sinais dos valores absolutos são omitidos nessas fórmulas porque os jacobianos são não-negativos (ver as restrições na Tabela 12.8.1).

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} d\rho d\phi d\theta$$

(17)

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.8 (Ver página 1099 para respostas.)

1. Seja T a transformação do plano uv no plano xy definida pelas equações

$$x = u - 2v, \quad y = 3u + v$$

- (a) Esboce a imagem por T do retângulo $1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2$.
 (b) Resolva para u e v em termos de x e y :

$$u = \text{_____}, \quad v = \text{_____}$$

2. Enuncie a relação entre R e S na fórmula de mudança de variáveis

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

3. Seja T a transformação do Exercício 1.
 (a) O jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de T é _____.

(b) Seja R a região do Exercício 1(a). Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam na mudança de variáveis dada por T .

$$\iint_R e^{x+2y} dA = \int_{\square} \int_{\square} \text{-----} du dv$$

4. O jacobiano da transformação

$$x = uv, \quad y = vw, \quad z = 2w$$

é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \text{-----}$$

EXERCÍCIOS 15.8

1-4 Encontre o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

1. $x = u + 4v, y = 3u - 5v$
2. $x = u + 2v^2, y = 2u^2 - v$
3. $x = \sin u + \cos v, y = -\cos u + \sin v$
4. $x = \frac{2u}{u^2 + v^2}, y = -\frac{2v}{u^2 + v^2}$

5-8 Resolva para x e y em função de u e v e depois calcule o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

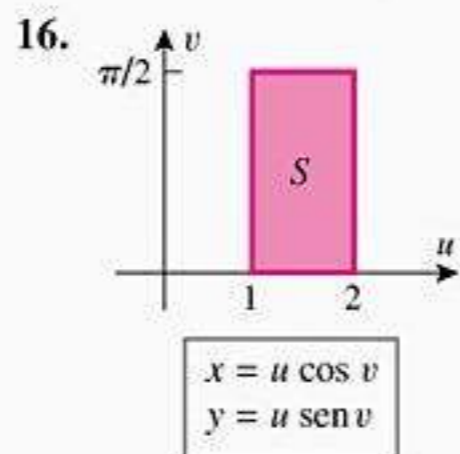
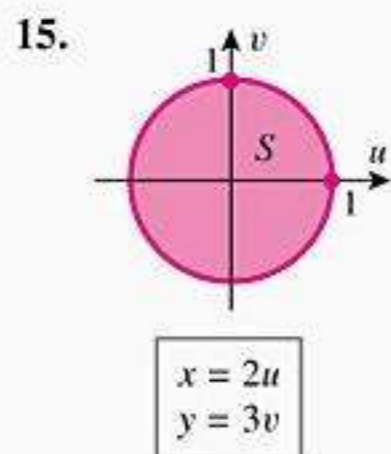
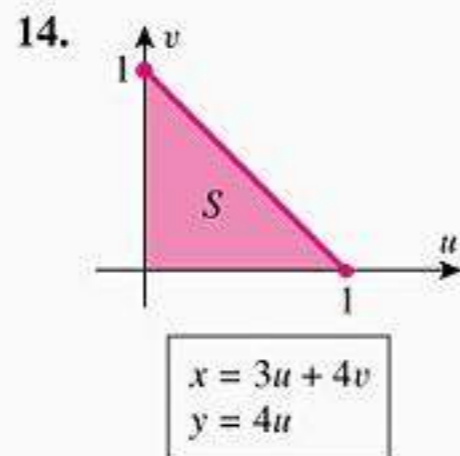
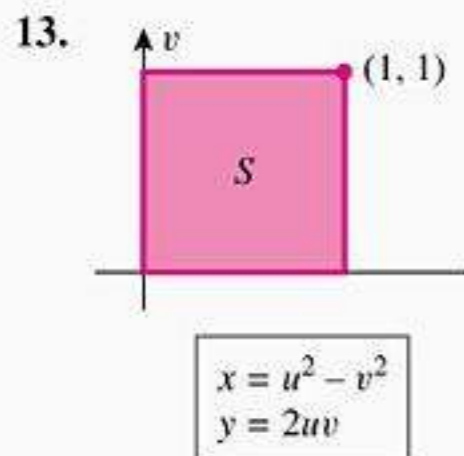
5. $u = 2x - 5y, v = x + 2y$
6. $u = e^x, v = ye^{-x}$
7. $u = x^2 - y^2, v = x^2 + y^2 \quad (x > 0, y > 0)$
8. $u = xy, v = xy^3 \quad (x > 0, y > 0)$

9-12 Encontre o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$.

9. $x = 3u + v, y = u - 2w, z = v + w$
10. $x = u - uv, y = uv - uvw, z = uvw$
11. $u = xy, v = y, w = x + z$
12. $u = x + y + z, v = x + y - z, w = x - y + z$

ENFOCANDO CONCEITOS

13-16 Esboce a imagem do conjunto S no plano xy sob a transformação dada.



17. Use a transformação $u = x - 2y, v = 2x + y$ para encontrar

$$\iint_R \frac{x - 2y}{2x + y} dA$$

onde R é a região retangular delimitada pelas retas $x - 2y = 1, x - 2y = 4, 2x + y = 1, 2x + y = 3$.

18. Use a transformação $u = x + y, v = x - y$ para encontrar

$$\iint_R (x - y)e^{x^2 - y^2} dA$$

onde R é a região retangular delimitada pelas retas $x + y = 0, x + y = 1, x - y = 1, x - y = 4$.

19. Use a transformação $u = \frac{1}{2}(x + y), v = \frac{1}{2}(x - y)$ para encontrar

$$\iint_R \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) dA$$

onde R é região triangular de vértices $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$.

20. Use a transformação $u = y/x, v = xy$ para encontrar

$$\iint_R xy^3 dA$$

onde R é região no primeiro quadrante delimitada por $y = x, y = 3x, xy = 1, xy = 4$.

21-24 A transformação $x = au, y = bv \quad (a > 0, b > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u, y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Nestes exercícios, efetue a integração transformando a região de integração elíptica em uma região de integração circular e, depois, calcule a integral transformada em coordenadas polares.

21. $\iint_R \sqrt{16x^2 + 9y^2} dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

22. $\iint_R e^{-(x^2+4y^2)} dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $(x^2/4) + y^2 = 1$.

23. $\iint_R \sin(4x^2 + 9y^2) dA$, onde R é a região limitada pela elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$ e eixos coordenados.

24. Determine a área da região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é πab

25-26 Se a, b, c forem constantes positivas, então a transformação $x = au, y = bv, z = cw$ e o Jacobiano $J = abc$ se $x/a = u, y/b = v, z/c = w$ e, portanto, a transformação da região G é

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

na região G é dada

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

em este exercício determine a integral tripla sobre a região G e a integral tripla sobre a região G e a integral tripla sobre a região G .

25. $\iiint_G x^2 dV$, onde G é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 3$.

26. Calcule o momento de inércia em torno do eixo z da região limitada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

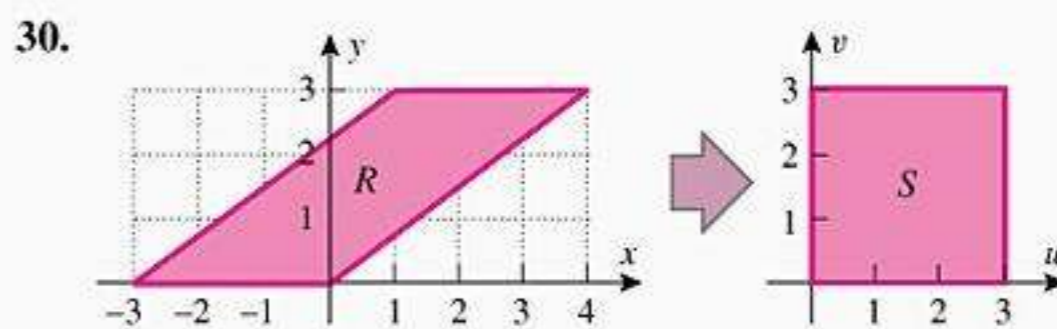
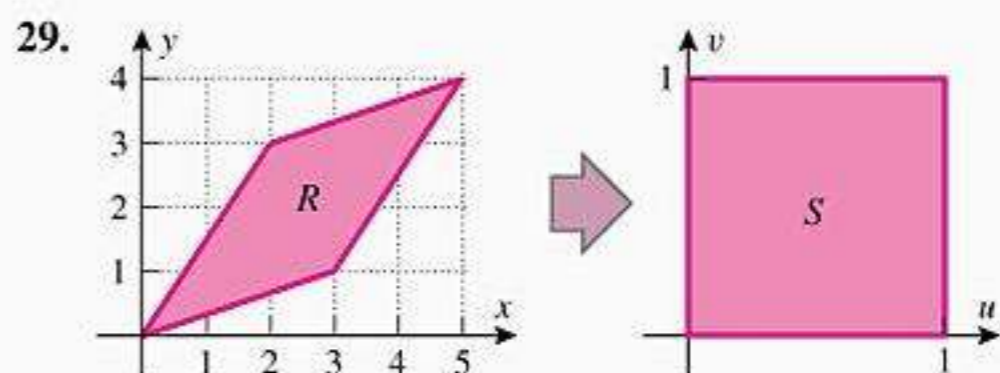
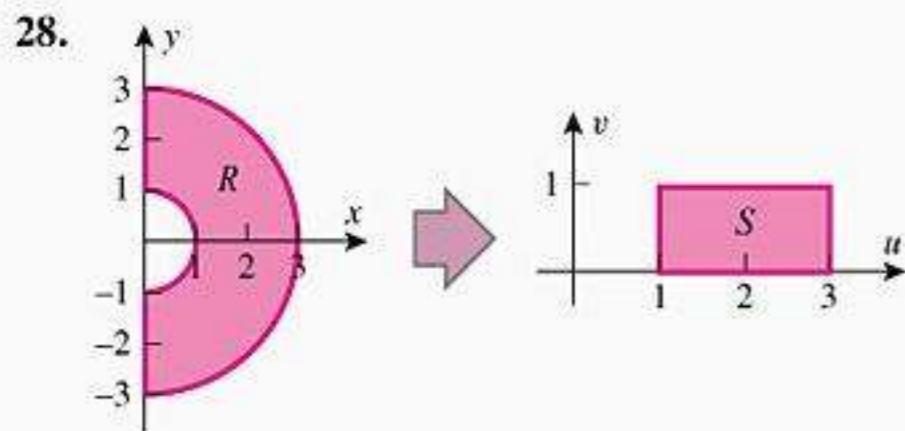
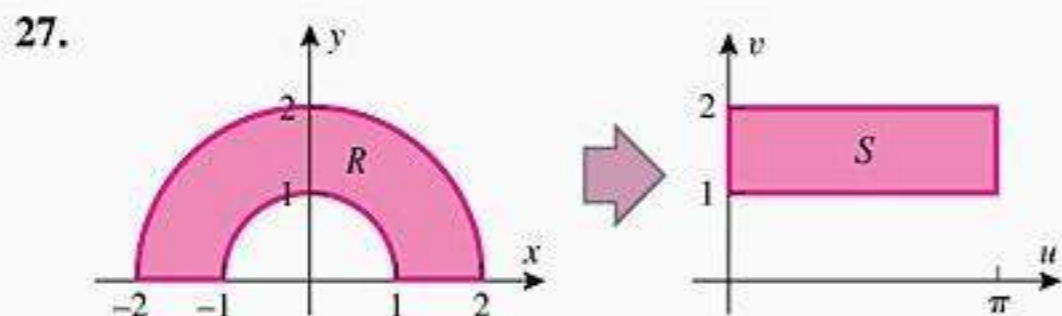
onde $\delta = 1$. [Ver a definição no exercício 43 da Seção 15.7]

ENFOCANDO CONCEITOS

27-30 Encontre uma transformação

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

tal que a imagem da região R no plano xy tenha por imagem a região S no plano uv .



31-34 Calcule a integral sobre a região R dada e a área da região R .

31. $\iint_R \frac{y-4x}{y+4x} dA$, onde R é a região limitada pela reta $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x, y = 5 - 4x$.

32. $\iint_R (x^2 - y^2) dA$, onde R é a região retangular limitada pela reta $y = -x, y = 1 - x, y = x, y = x + 2$.

33. $\iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} dA$, onde R é a região triangular limitada pela reta $y = 0, y = x, x + y = \pi/4$.

34. $\iint_R e^{(y-x)/(y+x)} dA$, onde R é a região limitada pelas retas $y = 0, y = x, x + y = \pi/4$.

35. Calcule a área da região limitada pela curva $y = x, y = 2x, x = y^2, x = 4y^2$.

36. Calcule a área da região limitada acima pelo plano $x + y + z = 9$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelas superfícies $4x^2 + 9y^2 = 3$. [Sugestão: use o método da integral dupla em coordenadas polares.]

37. Calcule a integral tripla sobre a região G limitada pelas superfícies $u = x, v = z - y, w = xy$.

$$\iiint_G (z - y)^2 xy dV$$

onde G é a região limitada pelas superfícies $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2, xy = 4$.

38. Calcule a integral tripla sobre a região G limitada pelas superfícies $u = xy, v = yz, w = xz$.

39. ma e era a tr i a tem e uaçã $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$
 er E ercici 54 na Seça 15.4 Enc ntre ume ó i
 c m reen i ruma e era a tr i a u an uma integra tri
 a e a tran rmaçã

$$\begin{aligned} x &= \rho(\text{sen } \phi \cos \theta)^3 \\ y &= \rho(\text{sen } \phi \text{sen } \theta)^3 \\ z &= \rho(\cos \phi)^3 \end{aligned}$$

ara a ua $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

40. a erifi ue ue

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

b Se $x = xu, y = yu, z = zu$ r uma tran rmaçã in et ra,
 entã $u = ux, y = uy, z = uz$ Su n a i erenciabi i a e
 a unçãoe , u e re u ta a arte a e a regra a ca eia
 ara m trar ue

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$$

41. n firme, em ca a arte, ue a ó rmu a bti a na arte b
 E ercici 40 é á i a ara a tran rmaçõe a a

- a $x = u - uv, y = uv$
- b $x = uv, y = v^2 \quad (v > 0)$
- c $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \quad (u > 0, v > 0)$

42-44 ó rmu a bti a na arte b E ercici 40 é ú ti n
 r b ema e integraçã em ue é inc n eniente u im í e
 re er a e uaçõe e tran rmaçã $u = f(x, y), v = g(x, y)$ e
 icitamente ara x e y em unçã e u e v e te e ercici ue
 a re açã

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\partial(u, v)/\partial(x, y)}$$

ara e itar a re uçã e x e y em unçã e u e v

42. e a tran rmaçã $u = xy, v = xy^4$ ara ca cu ar

$$\iint_R \text{sen}(xy) dA$$

n e R é a regiã e imita a e a cur a $xy = \pi, xy = 2\pi,$
 $xy^4 = 1, xy^4 = 2$

43. e a tran rmaçã $u = x^2 - y^2, v = x^2 + y^2$ ara ca cu ar

$$\iint_R xy dA$$

n e R é a regiã rimeir ua rante e imita a e a hi érb
 e $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$ e círcu $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$

44. e a tran rmaçã $u = xy, v = x^2 - y^2$ ara ca cu ar

$$\iint_R (x^4 - y^4) e^{xy} dA$$

n e R é a regiã n rimeir ua rante e imita a e a hi érb
 b e $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 3, x^2 - y^2 = 4$

45. aná g ara trê ariá ei a ó rmu a e uzi a na arte b
 E ercici 40 é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$$

e e e re u ta ara m trar ue ume V ara e e í e
 b í u imita e an $x + y + 2z = \pm 3, x - 2y + z = \pm 2,$
 $4x + y + z = \pm 1 \quad \text{é } V = 1$

46. a tre ue e R r a regiã triangu ar e értice $(0, 0,$
 $1, 0)$ e $(0, 1, 0)$, entã

$$\iint_R f(x + y) dA = \int_0^1 uf(u) du$$

b e re u ta a arte a ara ca cu ar a integra

$$\iint_R e^{x+y} dA$$

47. a n i ere a tran rmaçã

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \text{sen } \theta, \quad z = z$$

e c r ena a cí ín rica em retangu are , n e $r \geq 0$
 tre ue

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

b n i ere a tran rmaçã

$$x = \rho \text{sen } \phi \cos \theta, \quad y = \rho \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

e c r ena a e érica em retangu are , n e $0 \leq \phi \leq \pi$
 tre ue

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \text{sen } \phi$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.8

1. a imagem é a regiã an xy eng ba a e ara e gram e értice $(1, 3), (-3, 5), (-1, 11)$ e $(3, 9)$

b $u = \frac{1}{7}(x + 2y); v = \frac{1}{7}(y - 3x)$ 2. S é uma regiã an uv e R é a imagem e S n an xy e a tran rmaçã $x = xu, y = yu, v$

3. a 7 b $\int_0^2 \int_1^3 7e^{7u} du dv$ 4. $2vw$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

1. Integra u a numa região R no xy é definida como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

De acordo com a definição, u é dada pela seguinte definição

2. Integra tripla num domínio G num sistema de coordenadas xyz é definida como

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

De acordo com a definição, u é dada pela seguinte definição

3. a) É dada a área e uma região R no xy como uma integral dupla

b) É dada a área e uma região G num sistema de coordenadas xyz como uma integral tripla

c) É dada a área da superfície $z = f(x, y)$ que fica acima da região R no xy como uma integral dupla

4. a) É dada a equação paramétrica de uma esfera de raio a e centro na origem

b) É dada a equação paramétrica de um círculo de raio a e altura h que tem centro em z , baseado no xy e se estende na direção z positiva

5. a) Em termos físicos, o que significa centro de gravidade e o momento

b) O que é o momento de inércia e o momento

c) É dada a fórmula para o centro de gravidade e o momento em xy

É dada a fórmula para o centro de gravidade e o momento em xy

6. Querem transformar uma integral dupla em uma região R no xy numa integral dupla em u, v De acordo com a definição, o que seria útil

7. Se R a região a figura a seguir Preencha o limite e a integral dupla

$$\int_{\square} \int_{\square} f(x, y) dx dy$$

em R

8. Se R a região mostrada na figura a seguir Preencha o limite e a integral dupla

$$\int_0^2 \int_{\square} f(x, y) dy dx + \int_2^3 \int_{\square} f(x, y) dy dx$$

em R

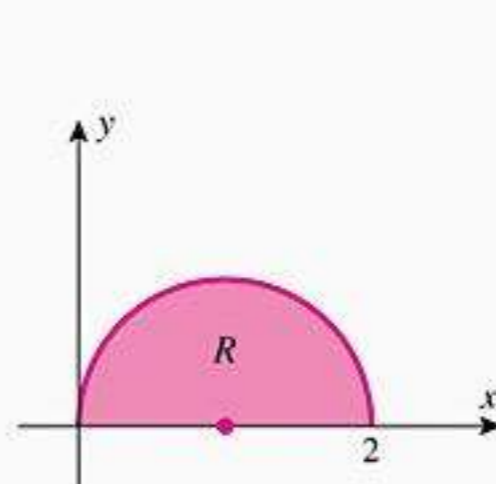


Figura Ex-7

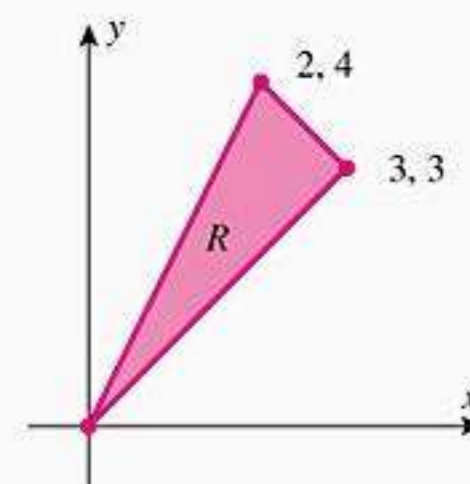


Figura Ex-8

9. a) Encontre a constante a, b, c e d tais que a transformação $x = au + bv, y = cu + dv$ transforme a região S a figura abaixo na região R

b) Encontre a área da região R integrando na região S e verifique usando a fórmula da geometria

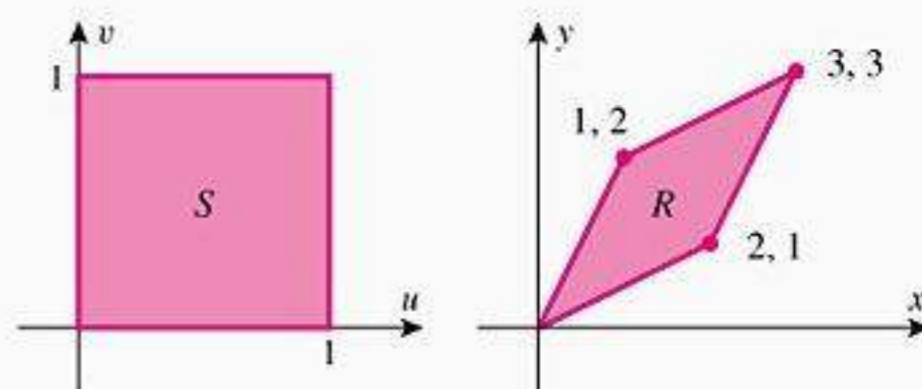


Figura Ex-9

10. Dê uma equação paramétrica para mostrar que

$$0 < \int_0^\pi \int_0^\pi \sin \sqrt{xy} dy dx < \pi^2$$

11-12) a) Cu e a integral iterada

11. $\int_{1/2}^1 \int_0^{2x} \cos(\pi x^2) dy dx$ 12. $\int_0^2 \int_{-y}^{2y} x e^{y^3} dx dy$

13-14) É dada a integral iterada como uma integral iterada e utilize a antiderivada para a integração interna

13. $\int_0^2 \int_0^{x/2} e^x e^y dy dx$ 14. $\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx dy$

15-16) É dada a região cuja área é dada e a integral iterada

15. $\int_0^{\pi/2} \int_{\tan(x/2)}^{\sin x} dy dx$
 16. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r dr d\theta \quad (a > 0)$

17-18) a) Cu e a integral dupla

17. $\iint_R x^2 \sin y^2 dA$; R é região limitada por $y = x^3, y = -x^3$ e $y = 8$

18. $\iint_R (4 - x^2 - y^2) dA$; R é o setor do primeiro quadrante limitado pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e pelos eixos de coordenadas.

19. Converta para coordenadas retangulares e calcule:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \operatorname{sen} \theta} r \operatorname{sen} 2\theta dr d\theta$$

20. Converta para coordenadas polares e calcule:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} 4xy dy dx$$

21-22 Calcule a área da região usando uma integral dupla.

21. A região limitada por $y = 2x^3$, $2x + y = 4$ e o eixo x .

22. A região envolvida pela rosácea $r = \cos 3\theta$.

23. Converta para coordenadas cilíndricas e calcule:

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2 dz dy dx$$

24. Converta para coordenadas esféricas e calcule:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

25. Seja G a região limitada acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$. Expresse

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dV$$

como uma integral iterada em coordenadas

- (a) esféricas (b) cilíndricas
(c) retangulares

26. Seja $G = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq z \leq 4x\}$. Expresse o volume de G como uma integral iterada em coordenadas

- (a) retangulares (b) cilíndricas

27-28 Calcule o volume do sólido usando uma integral tripla.

27. O sólido limitado abaixo pelo cone $\phi = \pi/6$ e acima pelo plano $z = a$.

28. O sólido compreendido entre as superfícies $x = y^2 + z^2$ e $x = 1 - y^2$.

29. Calcule a área de superfície da parte do parabolóide hiperbólico

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

para a qual $u^2 + v^2 \leq 4$.

30. Calcule a área de superfície da parte da rampa em espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

para a qual $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 3u$.

31-32 Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

31. $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$; $u = 1, v = 2$

32. $x = u \cosh v, y = u \sinh v, z = u^2$; $(-3, 0, 9)$

33-34 Encontre o centróide da região.

33. A região limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 8(x - 2)$.

34. A metade superior da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

35-36 Encontre o centróide do sólido.

35. O cone sólido com vértice $(0, 0, h)$ e base $x^2 + y^2 \leq a^2$ no plano xy .

36. O sólido limitado por $y = x^2, z = 0$ e $y + z = 4$.

37. Calcule a distância média de um ponto no interior de uma esfera de raio a ao centro. [Ver a definição que precede o Exercício 27 da Seção 15.5.]

38. Use a transformação $u = x - 3y, v = 3x + y$ para obter

$$\iint_R \frac{x - 3y}{(3x + y)^2} dA$$

onde R é a região retangular englobada pelas retas $x - 3y = 0, x - 3y = 4, 3x + y = 1$ e $3x + y = 3$.

39. Seja G o sólido do espaço tridimensional definido pelas desigualdades

$$1 - e^x \leq y \leq 3 - e^x, \quad 1 - y \leq 2z \leq 2 - y, \quad y \leq e^x \leq y + 4$$

(a) Usando a transformação de coordenadas

$$u = e^x + y, \quad v = y + 2z, \quad w = e^x - y$$

calcule o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$. Expresse sua resposta em termos de u, v e w .

(b) Usando uma integral tripla e a mudança de variáveis dada em (a), encontre o volume de G .

TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL

Eu sou muito bom em cálculo diferencial e integral, eu conheço os nomes científicos de seres animáculos; em suma, em assuntos vegetais, animais e minerais, eu sou o próprio modelo de um general maior.

—W. S. Gilbert
Libretista da opereta
O Micado

O tema principal deste capítulo é o conceito de “fluxo”. O ramo da Matemática que estudaremos aqui preocupa-se com a análise de vários tipos de fluxos: por exemplo, o fluxo de um fluido, ou o fluxo da eletricidade. Na verdade, os primeiros textos de Cálculo de Isaac Newton estão repletos de termos como “fluxão” e “fluente”, que têm como raiz o termo latim *fluere* (fluir). Começaremos o capítulo introduzindo o conceito de campo vetorial, que é a descrição matemática de um fluxo. Em seções subseqüentes, introduziremos dois novos tipos de integrais, que são usadas numa ampla variedade de aplicações para analisar as propriedades de campos vetoriais e de fluxos. Finalmente, concluiremos com três teoremas básicos: o Teorema de Green, o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes. Esses teoremas proporcionam uma visão profunda da natureza dos fluxos e constituem a base de muitos dos princípios mais importantes da Física e da Engenharia.

Foto: Os resultados deste capítulo fornecem ferramentas para analisar e entender o comportamento de furacões e outros fluxos fluidos.

16.1 CAMPOS VETORIAIS

Nesta seção, consideraremos funções que associam vetores com pontos no espaço bi ou tridimensional. Veremos que tais funções desempenham um papel importante no estudo de fluxos fluidos, campos de forças gravitacionais, campos de forças eletromagnéticas e uma ampla variedade de outros problemas aplicados.

■ CAMPOS VETORIAIS

Para motivar as idéias matemáticas desta seção, considere um ponto de massa *unitária* localizado em qualquer ponto do Universo. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a Terra exerce uma força atrativa sobre a massa na direção do centro da Terra e de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra (Figura 16.1.1). Essa associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada *campo gravitacional* da Terra. Uma idéia similar surge no fluxo fluido. Imagine uma corrente em que a água flui horizontalmente em qualquer nível e considere a camada de água numa profundidade específica. Em cada ponto da camada, a água tem uma certa velocidade, que podemos representar por um vetor naquele ponto (Figura 16.1.2). Essa associação de vetores velocidade com pontos numa camada bidimensional é denominada *campo de velocidades* nessa camada. Essas idéias são encampadas na definição seguinte.



Figura 16.1.1

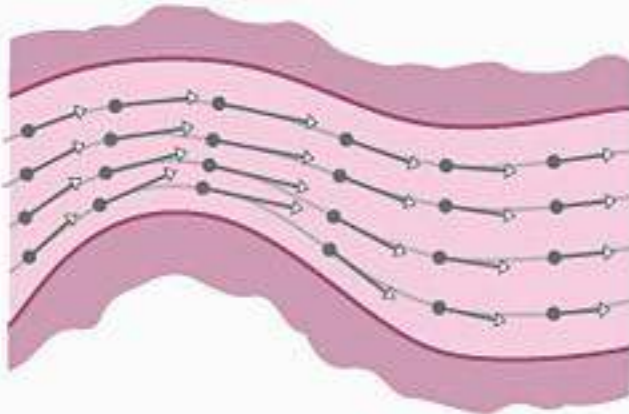


Figura 16.1.2

16.1.1 DEFINIÇÃO Um *campo vetorial* num plano é uma função que associa a cada ponto P do plano um único vetor $\mathbf{F}(P)$ paralelo ao plano. Analogamente, um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto P do espaço tridimensional um único vetor $\mathbf{F}(P)$ do espaço.

Observe que nessa definição não há referência a um sistema de coordenadas. Entretanto, para fins de cálculo é, usualmente, desejável introduzir um sistema de coordenadas, de modo que se possa designar componentes para os vetores. Especificamente, se $\mathbf{F}(P)$ for um campo vetorial num sistema de coordenadas xy , então o ponto P terá coordenadas (x, y) e o vetor associado terá componentes que são funções de x e y . Assim, o campo vetorial $\mathbf{F}(P)$ pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

De modo análogo, no espaço tridimensional com um sistema de coordenadas xyz , um campo vetorial $\mathbf{F}(P)$ pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

■ **REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE CAMPOS VETORIAIS**

Um campo vetorial no espaço bidimensional pode ser visto geometricamente desenhando-se vetores representativos $\mathbf{F}(x, y)$ em alguns pontos bem selecionados do plano xy . Porém, assim como normalmente não é possível descrever completamente uma curva plana localizando um número finito de pontos, também não é normalmente possível descrever um campo vetorial localizando um número finito de vetores. Todavia, tais representações gráficas podem fornecer informações úteis acerca do comportamento geral do campo se os vetores forem escolhidos adequadamente. Entretanto, representações gráficas de campos vetoriais requerem um volume substancial de cálculos, de modo que são geralmente criados com o uso de computadores. A Figura 16.1.3 mostra quatro campos vetoriais gerados em computador. O campo vetorial na parte (a) poderia descrever a velocidade da corrente num córrego em várias profundidades. No fundo do córrego, a velocidade é zero, mas a velocidade da corrente aumenta à medida que a profundidade diminui. Pontos à mesma profundidade têm a mesma velocidade. O campo vetorial da parte (b) poderia descrever a velocidade de pontos de uma roda em movimento. No centro da roda a velocidade é nula, mas a velocidade aumenta com a distância do centro. Pontos à mesma distância do centro têm a mesma velocidade. O campo vetorial da parte (c) poderia descrever a força de repulsão de uma corrente elétrica — quanto mais perto da carga, maior é a força repulsora. A parte (d) mostra um campo vetorial no espaço tridimensional. Tais figuras tendem a ser confusas e portanto de menor valor que representações gráficas de campos vetoriais no espaço bidimensional. Note também que os vetores nas partes (b) e (c) estão fora de escala — seus comprimentos foram comprimidos para maior clareza. Esse recurso será adotado em todo este capítulo.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico que possa gerar campos vetoriais, leia a documentação pertinente e tente fazer duplicatas razoáveis das partes (a) e (b) da Figura 16.1.3.

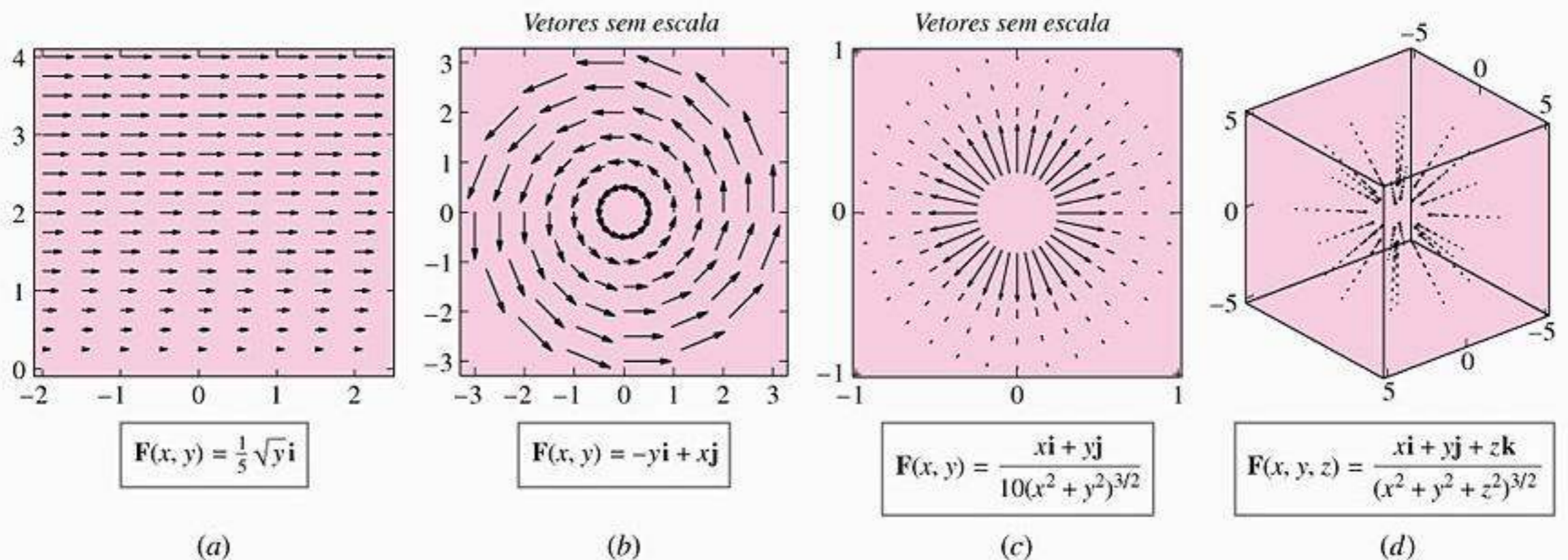


Figura 16.1.3

■ UMA NOTAÇÃO COMPACTA PARA CAMPOS VETORIAIS

Às vezes, é útil denotar os campos vetoriais $\mathbf{F}(x, y)$ e $\mathbf{F}(x, y, z)$ completamente em notação vetorial identificando (x, y) com o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e (x, y, z) com o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Com essa notação, o campo vetorial tanto no espaço bi quanto tridimensional pode ser escrito como $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos, algumas vezes, até o \mathbf{r} e denotaremos o campo vetorial como \mathbf{F} .

■ CAMPOS DE QUADRADO INVERSO

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, partículas de massas m e M atraem uma à outra com uma força \mathbf{F} de grandeza

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GmM}{r^2} \quad (1)$$

onde r é a distância entre as partículas e G é uma constante. Supondo que o objeto de massa M esteja localizado na origem de um sistema de coordenadas xyz e que \mathbf{r} seja o vetor posição do objeto de massa m , então $r = \|\mathbf{r}\|$ e a força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ exercida pela partícula de massa M sobre a partícula de massa m tem a direção e o sentido do vetor unitário $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Assim, por (1)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

Se m e M forem constantes e se tomarmos $c = -GmM$, então essa fórmula pode ser dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Campos vetoriais dessa forma aparecem em problemas eletromagnéticos e gravitacionais. Tais campos são tão importantes que têm sua terminologia própria.

16.1.2 DEFINIÇÃO Se \mathbf{r} for um vetor posição do espaço bi ou tridimensional e c uma constante, então um campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

é denominado um *campo de quadrado inverso*.

Observe que se $c > 0$ em (3), então $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ tem a mesma direção de \mathbf{r} , de modo que cada vetor do campo é direcionado para longe da origem; e se $c < 0$, então $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ tem sentido oposto ao de \mathbf{r} , de modo que cada vetor do campo é direcionado para a origem. Em ambos casos, a grandeza de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto final de \mathbf{r} e a origem, pois

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3} \|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

Deixamos para o leitor demonstrar que, no espaço bidimensional, a Fórmula (3) pode ser escrita sob a forma de componentes como

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (4)$$

e no, espaço tridimensional, como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad (5)$$

[ver partes (c) e (d) da Figura 16.1.3].

► **Exemplo 1** A *Lei de Coulomb* afirma que a força eletrostática exercida por uma partícula carregada sobre outra é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Essa lei tem a mesma forma da Lei da Gravitação Universal de Newton, de modo que o campo da força eletrostática exercida por uma partícula carregada é um campo de quadrado inverso. Especificamente, se uma partícula de carga Q estiver na origem de um sistema de coordenadas e se \mathbf{r} for o vetor posição de uma partícula de carga q , então a força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que a partícula de carga Q exerce sobre a partícula de carga q é da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde ϵ_0 é uma constante positiva (chamada *constante de permissividade*). Essa fórmula é da forma (3) com $c = qQ/4\pi\epsilon_0$. ◀

■ **CAMPOS GRADIENTE**

Uma classe importante de campos vetoriais surge do processo de calcular gradientes. Lembre-se que se ϕ for uma função de três variáveis, então o gradiente de ϕ é definido como

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Essa fórmula define um campo vetorial do espaço tridimensional chamado *campo gradiente de ϕ* . Analogamente, o gradiente de uma função de duas variáveis define um campo gradiente no espaço bidimensional. Em cada ponto de um campo gradiente em que o gradiente não for nulo, o vetor aponta na direção em que é máxima a taxa de aumento de ϕ .

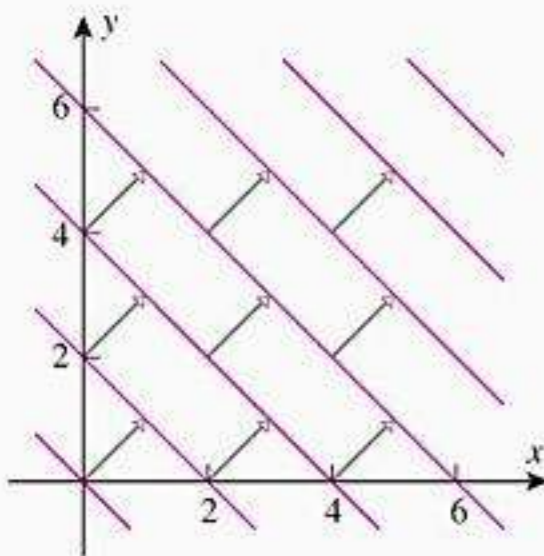


Figura 16.1.4

► **Exemplo 2** Esboce o campo gradiente de $\phi(x, y) = x + y$.

Solução O gradiente de ϕ é

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

que é igual em cada ponto. Uma porção desse campo vetorial está esboçada na Figura 16.1.4, junto com algumas curvas de nível de ϕ . Observe que, em cada ponto, $\nabla\phi$ é normal à curva de nível de ϕ que passa pelo ponto (Teorema 14.6.6). ◀

■ **CAMPOS CONSERVATIVOS E FUNÇÕES POTENCIAIS**

Se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ for um campo vetorial arbitrário do espaço bi ou tridimensional, podemos perguntar se é um campo gradiente de alguma função ϕ e, caso afirmativo, como determinar ϕ . Esse é um problema importante em diversas aplicações e vamos estudá-lo com mais detalhe mais adiante. Há, porém, certa terminologia para esses campos, que introduzimos agora.

16.1.3 DEFINIÇÃO Dizemos que um campo vetorial \mathbf{F} do espaço bi ou tridimensional é *conservativo* numa região se for o campo gradiente de alguma função ϕ naquela região ou seja, se

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

A função ϕ é denominada uma *função potencial* de \mathbf{F} na região.

► **Exemplo 3** Campos de quadrado inverso são conservativos em qualquer região que não contenha a origem. Por exemplo, no caso bidimensional, a função

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (6)$$

é uma função potencial de (4) em qualquer região que não contenha a origem, pois

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x, y) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} \\ &= \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

Numa seção mais adiante discutiremos métodos para encontrar funções potencial de campos vetoriais conservativos. ◀

■ DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL

Vamos, agora, definir duas operações importantes sobre campos vetoriais do espaço tridimensional – a *divergência* e o *rotacional* do campo. Esses nomes originaram-se no estudo do fluxo fluido, caso em que divergência refere-se à maneira como o fluido flui para ou afasta-se de um ponto, e rotacional refere-se às propriedades de rotação do fluido num ponto. As interpretações físicas dessas operações serão investigadas detalhadamente mais adiante, por enquanto vamos focalizar somente seu cálculo.

16.1.4 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, definimos a *divergência de F*, denotada $\text{div } \mathbf{F}$, como a função dada por

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7)$$

16.1.5 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, definimos o *rotacional de F*, denotado $\text{rot } \mathbf{F}$, como o campo vetorial dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (8)$$

Note que $\text{div } \mathbf{F}$ e $\text{rot } \mathbf{F}$ dependem do ponto em que estão sendo calculados e, portanto, são escritos mais apropriadamente como $\text{div } \mathbf{F}(x, y, z)$ e $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$. Entretanto, mesmo que essas funções sejam expressas em termos de x , y e z , pode ser provado que seus valores num ponto fixado dependem do ponto mas não do sistema de coordenadas selecionado. Isso é importante nas aplicações, uma vez que permite a físicos e engenheiros calcular rotacional e divergência em qualquer sistema de coordenadas conveniente.

Antes de prosseguirmos com alguns exemplos, observamos que $\text{div } \mathbf{F}$ tem valores escalares, enquanto que $\text{rot } \mathbf{F}$ tem valores vetoriais (isto é, $\text{rot } \mathbf{F}$ é ele próprio um campo vetorial). Além disso, para fins computacionais é conveniente notar que a fórmula do rotacional pode ser expressa sob a forma de determinante

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \quad (9)$$

O leitor deveria verificar que resulta a Fórmula (8) se o determinante for calculado interpretando-se um “produto” do tipo $(\partial/\partial x)(g)$ como significando $\partial g/\partial x$. Tenha em mente, no entanto, que (9) é apenas um artifício mnemônico e não um determinante verdadeiro, uma vez que os termos de um determinante devem ser números, não vetores nem símbolos de derivadas parciais.

► **Exemplo 4** Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

Solução Por (7)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) \\ &= 2xy + 6y^2z + 3 \end{aligned}$$

e por (9)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3z) - \frac{\partial}{\partial z}(2y^3z) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3z) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right] \mathbf{k} \\ &= -2y^3\mathbf{i} - x^2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

A maioria dos sistemas algébricos computacionais pode calcular campos gradientes, divergência e rotacional. Se o leitor dispuser de um CAS com essas capacidades, leia as instruções pertinentes e use o CAS para verificar os cálculos dos Exemplos 2 e 4.

► **Exemplo 5** Mostre que a divergência do campo de quadrado inverso

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

é nula.

Solução Os cálculos podem ser simplificados fazendo-se $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, caso em que \mathbf{F} pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j} + cz\mathbf{k}}{r^3} = \frac{cx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{cy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{cz}{r^3}\mathbf{k}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Assim,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = c \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right] \quad (10)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) &= \frac{r^3 - x(3r^2)(x/r)}{(r^3)^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em (10), obtemos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = c \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{r^5} \right] = c \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right] = 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ O OPERADOR ∇

Até aqui, não foi dado um significado próprio ao símbolo ∇ que aparece na expressão do gradiente $\nabla\phi$. Entretanto, é conveniente considerar ∇ como um operador.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (11)$$

que, quando aplicado a $\phi(x, y, z)$, produz o gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Chamamos (11) de *operador del*. Ele é análogo ao operador de derivada d/dx que, quando aplicado a $f(x)$, produz a derivada $f'(x)$.

O operador del permite-nos expressar a divergência de um campo vetorial

$$\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

em notação de produto escalar como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (12)$$

e o rotacional desse campo em notação de produto vetorial como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \quad (13)$$

■ O LAPLACIANO ∇^2

O operador que resulta aplicando-se o operador del a si mesmo é denotado por ∇^2 e é chamado *operador laplaciano*. Esse operador tem a forma

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (14)$$

Quando aplicado a $\phi(x, y, z)$, o operador laplaciano produz a função

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Note que $\nabla^2\phi$ também pode ser expresso como $\text{div}(\nabla\phi)$. A equação $\nabla^2\phi = 0$ ou sua equivalente

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

é conhecida como **equação de Laplace**. Essa equação diferencial parcial desempenha um papel importante numa grande variedade de aplicações, resultante do fato de ser satisfeita pela função potencial do campo de quadrado inverso.

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.1** (Ver página 1111 para respostas.)

1. A função $\phi(x, y, z) = xy + yz + xz$ é um potencial para o campo vetorial $\mathbf{F} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$, definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, está sempre apontando para a origem e tem magnitude igual à distância de (x, y, z) para a origem.
3. Um campo de quadrado inverso é um que pode ser escrito na forma $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ tem divergência $\underline{\hspace{2cm}}$ e rotacional $\underline{\hspace{2cm}}$.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827) Matemático e físico francês. Laplace é referido às vezes, como o Isaac Newton francês por causa de seu trabalho em Mecânica Celeste. Em seu tratado em cinco volumes, intitulado *Traité de Mécanique Céleste*, ele resolveu problemas extremamente difíceis envolvendo interações gravitacionais entre os planetas. Em particular, foi capaz de demonstrar que nosso sistema solar é estável e não está sujeito a colapso catastrófico como resultado dessas interações. Na época, este era um problema muito preocupante porque a órbita de Júpiter parecia estar encolhendo e a de Saturno expandindo; Laplace demonstrou que essas eram anomalias periódicas esperadas. Além de seu trabalho em Mecânica Celeste, ele fundou a teoria da probabilidade moderna, mostrou junto com Lavoisier que a respiração é uma forma de combustão e desenvolveu métodos que desbravaram muitos ramos da Matemática pura.

Laplace nasceu numa família de classe média na Normandia; seu pai era fazendeiro e comerciante de cidra. Matriculou-se no curso de Teologia da Universidade de Caen aos 16 anos, mas aos 18 foi para Paris com uma carta de apresentação para o influente matemático d’Alembert, que acabou ajudando-o a iniciar a carreira de matemático. Laplace era um escritor prolífero e após sua eleição para a Academia de Ciências, em 1773, o secretário escreveu que a Academia nunca havia recebido tantos trabalhos

importantes de pesquisa de uma pessoa tão jovem em tão pouco tempo. Laplace tinha pouco interesse na Matemática pura — ele considerava a Matemática meramente como uma ferramenta para resolver problemas aplicados. Na sua impaciência com o detalhe matemático, freqüentemente omitia raciocínios complicados com a frase “É fácil mostrar que...”. Ele admitiu, no entanto, que, com o passar do tempo, freqüentemente ele mesmo tinha dificuldade para reconstruir os detalhes omitidos!

Com o peso de sua fama, Laplace serviu em muitos comitês do governo e ocupou os postos de Ministro do Interior e chanceler do Senado. Por pouco, conseguiu escapar da prisão e da execução durante o período da Revolução, provavelmente por causa de sua habilidade em convencer cada partido oponente que ele os apoiava. Napoleão o descreveu como um grande matemático, mas um administrador medíocre que “procurava sutilezas em tudo, tinha somente idéias ambíguas e... carregou o espírito do infinitamente pequeno para dentro da administração”. Apesar de ser um gênio, Laplace era egoísta e inseguro, tentando garantir seu lugar na história, convenientemente deixando de dar crédito aos matemáticos cujo trabalho ele usava — uma mesquinhez desnecessária, uma vez que seu próprio trabalho era tão brilhante. Porém, no lado positivo, apoiava os matemáticos jovens, geralmente tratando-os como seus próprios filhos. Laplace é classificado como um dos matemáticos mais influentes da história.

EXERCÍCIOS 16.1  Recurso Gráfico  CAS

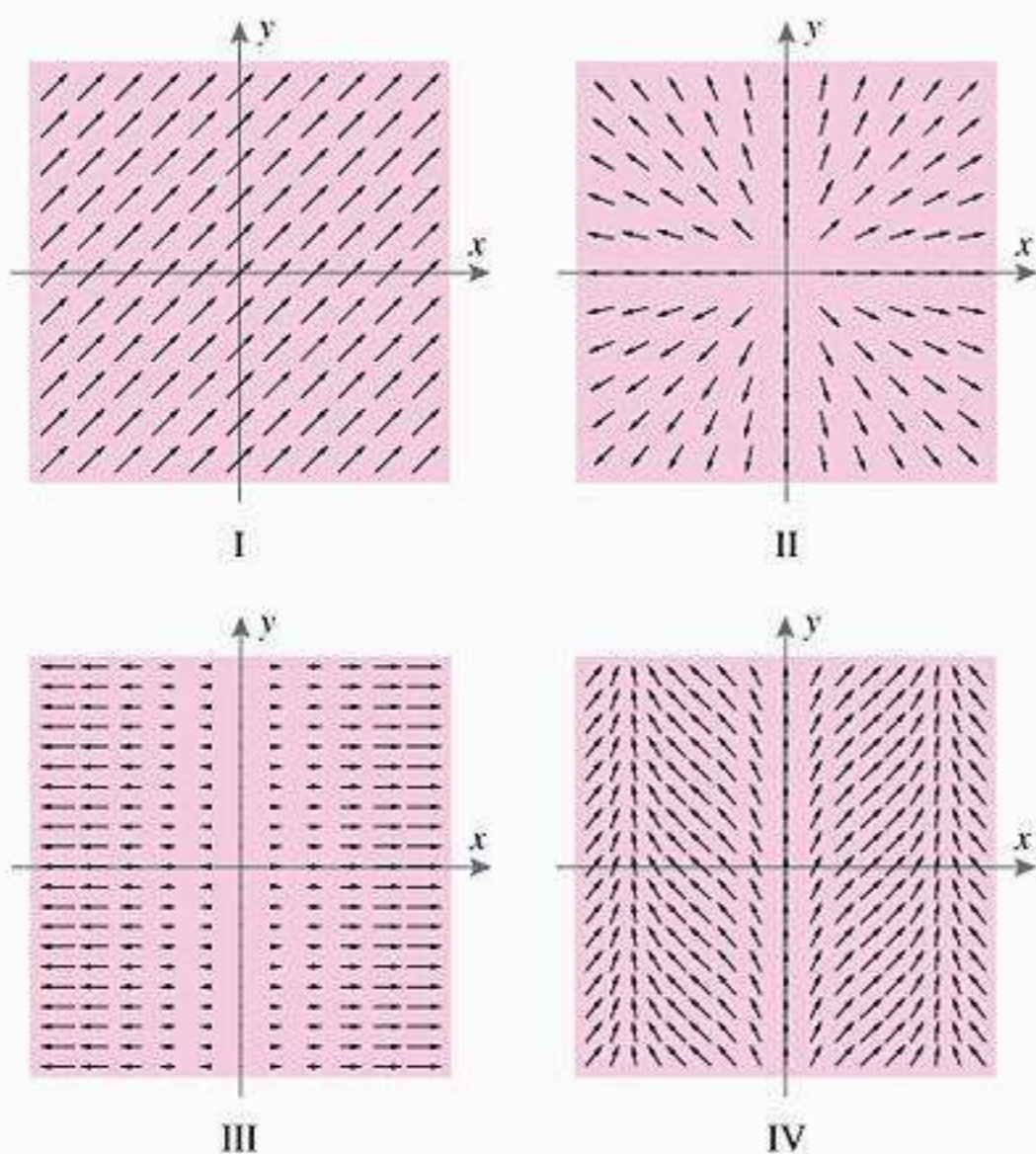
ENFOCANDO CONCEITOS

1-2 Relacione o campo vetorial $F(x, y)$ com uma das representações gráficas e explique seu raciocínio.

1. (a) $F(x, y) = xi$ (b) $F(x, y) = \text{sen } xi + j$

2. (a) $F(x, y) = i + j$

(b) $F(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} i + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} j$



3-4 Determine se a afirmação sobre o campo $F(x, y)$ é verdadeira ou falsa. Se falsa, explique por quê.

3. $F(x, y) = x^2 i - yj$.

- (a) $\|F(x, y)\| \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- (b) Se (x, y) estiver no eixo y positivo, o vetor aponta na direção e sentido do eixo y negativo.
- (c) Se (x, y) estiver no primeiro quadrante, então o vetor aponta para baixo e para a direita.

4. $F(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} i - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} j$.

- (a) À medida que (x, y) se afasta da origem, os comprimentos dos vetores decrescem.
- (b) Se (x, y) for um ponto no eixo x positivo, então o vetor aponta para cima.
- (c) Se (x, y) for um ponto no eixo y positivo, o vetor aponta para a direita.

5-8 Esboce o campo vetorial desenhando alguns vetores representativos que não se intersectem. Os vetores não precisam estar em escala, mas deveriam estar em proporção razoavelmente correta entre si.


5. $F(x, y) = 2i - j$


6. $F(x, y) = yj, y > 0$

7. $F(x, y) = yi - xj$. [Nota: cada vetor do campo é perpendicular ao vetor posição $r = xi + yj$.]

8. $F(x, y) = \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. [Nota: cada vetor do campo é um vetor unitário e de mesma direção e sentido que o vetor posição $r = xi + yj$.]

9-10 Use um recurso gráfico para gerar uma representação gráfica do campo vetorial.

 9. $F(x, y) = i + \cos yj$

 10. $F(x, y) = yi - xj$

11-12 Confirme que ϕ é uma função potencial de $F(r)$ em alguma região e determine a região.

11. (a) $\phi(x, y) = \text{arc tg } xy$

$F(x, y) = \frac{y}{1 + x^2 y^2} i + \frac{x}{1 + x^2 y^2} j$

(b) $\phi(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$

$F(x, y, z) = 2xi - 6yj + 8zk$

12. (a) $\phi(x, y) = 2y^2 + 3x^2 y - xy^3$

$F(x, y) = (6xy - y^3)i + (4y + 3x^2 - 3xy^2)j$

(b) $\phi(x, y, z) = x \text{ sen } z + y \text{ sen } x + z \text{ sen } y$

$F(x, y, z) = (\text{sen } z + y \cos x)i + (\text{sen } x + z \cos y)j + (\text{sen } y + x \cos z)k$

13-18 Calcule $\text{div } F$ e $\text{rot } F$.

13. $F(x, y, z) = x^2 i - 2j + yzk$

14. $F(x, y, z) = xz^3 i + 2y^4 x^2 j + 5z^2 yk$

15. $F(x, y, z) = 7y^3 z^2 i - 8x^2 z^3 j - 3xy^4 k$

16. $F(x, y, z) = e^{yz} i - \cos yj + \text{sen}^2 zk$

17. $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xi + yj + zk)$

18. $F(x, y, z) = \ln xi + e^{yz} j + \text{arc tg}(z/x)k$

19-20 Calcule $\nabla \cdot (F \times G)$.

19. $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$

$G(x, y, z) = xi + yj - zk$

20. $F(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$

$G(x, y, z) = xyj + xyzk$

21-22 Calcule $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \mathbf{i} + \cos(x - y) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xz} \mathbf{i} + 3xe^y \mathbf{j} - e^{yz} \mathbf{k}$

23-24 Calcule $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 x \mathbf{i} - 3yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$

C 25. Use um CAS para conferir os cálculos nos Exercícios 19, 21 e 23.

C 26. Use um CAS para conferir os cálculos nos Exercícios 20, 22 e 24.

27-34 Sejam k uma constante e $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z)$ e $\phi = \phi(x, y, z)$. Prove as seguintes identidades, supondo que todas as derivadas envolvidas existam e sejam contínuas.

27. $\text{div}(k\mathbf{F}) = k \text{div } \mathbf{F}$ 28. $\text{rot}(k\mathbf{F}) = k \text{rot } \mathbf{F}$

29. $\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} + \text{div } \mathbf{G}$

30. $\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot } \mathbf{F} + \text{rot } \mathbf{G}$

31. $\text{div}(\phi\mathbf{F}) = \phi \text{div } \mathbf{F} + \nabla\phi \cdot \mathbf{F}$

32. $\text{rot}(\phi\mathbf{F}) = \phi \text{rot } \mathbf{F} + \nabla\phi \times \mathbf{F}$

33. $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$ 34. $\text{rot}(\nabla\phi) = \mathbf{0}$

35. Reescreva as identidades dos Exercícios 27, 29, 31 e 33 em forma equivalente usando a notação $\nabla \cdot$ para divergente e $\nabla \times$ para o rotacional.

36. Reescreva as identidades dos Exercícios 28, 30, 32 e 34 em forma equivalente, usando a notação $\nabla \cdot$ para divergente e $\nabla \times$ para o rotacional.

37-38 Verifique que o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ tem a propriedade enunciada.

37. (a) $\text{rot } \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (b) $\nabla \|\mathbf{r}\| = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$

38. (a) $\text{div } \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$

39-40 Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$, f uma função diferenciável de uma variável e $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$.

39. (a) Use a regra da cadeia e o Exercício 37(b) para mostrar que

$$\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}$$

(b) Use o resultado da parte (a) e os Exercícios 31 e 38(a) para mostrar que $\text{div } \mathbf{F} = 3f(r) + rf'(r)$

40. (a) Use a parte (a) do Exercício 39, o Exercício 32 e o Exercício 37(a) para mostrar que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$

(b) Use o resultado da parte (a) do Exercício 39 e os Exercícios 31 e 38(a) para mostrar que

$$\nabla^2 f(r) = 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

41. Use o resultado do Exercício 39(b) para mostrar que a divergência do campo de quadrado inverso $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ é nula.

42. Use o resultado do Exercício 39(b) para mostrar que se \mathbf{F} for um campo vetorial da forma $\mathbf{F} = f(\|\mathbf{r}\|) \mathbf{r}$ e se $\text{div } \mathbf{F} = 0$, então \mathbf{F} é um campo de quadrado inverso. [Sugestão: considere $r = \|\mathbf{r}\|$ e multiplique $3f(r) + rf'(r) = 0$ por r^2 . Escreva, então, o resultado como a derivada de um produto.]

43. Uma curva C é chamada de **linha de fluxo** de um campo vetorial \mathbf{F} se \mathbf{F} for um vetor tangente a C em cada ponto ao longo de C (ver figura abaixo).

(a) Sejam C uma linha de fluxo de $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e (x, y) um ponto em C para o qual $y \neq 0$. Mostre que as linhas de fluxo satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Resolva a equação diferencial da parte (a) por separação de variáveis e mostre que as linhas de fluxo são círculos concêntricos centrados na origem.

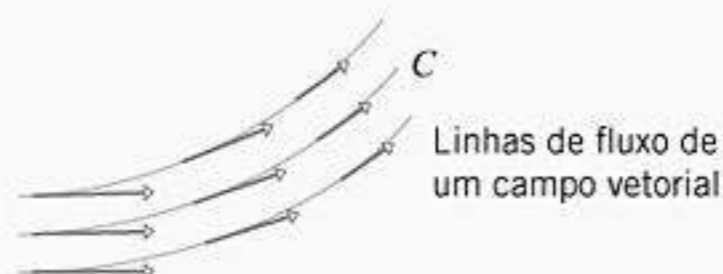


Figura Ex-43

44-46 Encontre uma equação diferencial que seja satisfeita pelas linhas de fluxo de \mathbf{F} (ver Exercício 43) e resolva-a para encontrar equações das linhas de fluxo de \mathbf{F} . Esboce algumas linhas de fluxo e vetores tangente típicos.

44. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 45. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $x > 0$

46. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, $x > 0$ e $y > 0$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.1

1. $(y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ 2. $-\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ 3. $\frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ 4. $2xy + 2yz$; $z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (y^2 - z)\mathbf{k}$

16.2 INTEGRAIS DE LINHA

Em capítulos anteriores, consideramos três tipos de integrais em coordenadas retangulares: integrais simples em intervalos, integrais duplas em regiões bidimensionais e integrais triplas em regiões tridimensionais. Nesta seção, discutiremos integrais ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensionais.

INTEGRAIS DE LINHA

O primeiro objetivo desta seção é definir o que significa integrar uma função ao longo de uma curva. Para motivar a definição, consideramos o problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear (massa por unidade de comprimento) seja conhecida. Vamos supor que possamos modelar o arame com uma curva lisa C entre dois pontos P e Q do espaço tridimensional. Dado um ponto (x, y, z) em C , denotamos por $f(x, y, z)$ o valor correspondente da função densidade. Para calcular a massa do arame, procedemos como segue:

- Divida C em n seções muito pequenas usando uma sucessão de pontos de partição distintos

$$P = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = Q$$

como ilustrado no lado esquerdo da Figura 16.2.2. Seja ΔM_k a massa da k -ésima seção e seja Δs_k o comprimento de arco entre P_{k-1} e P_k .



Figura 16.2.1

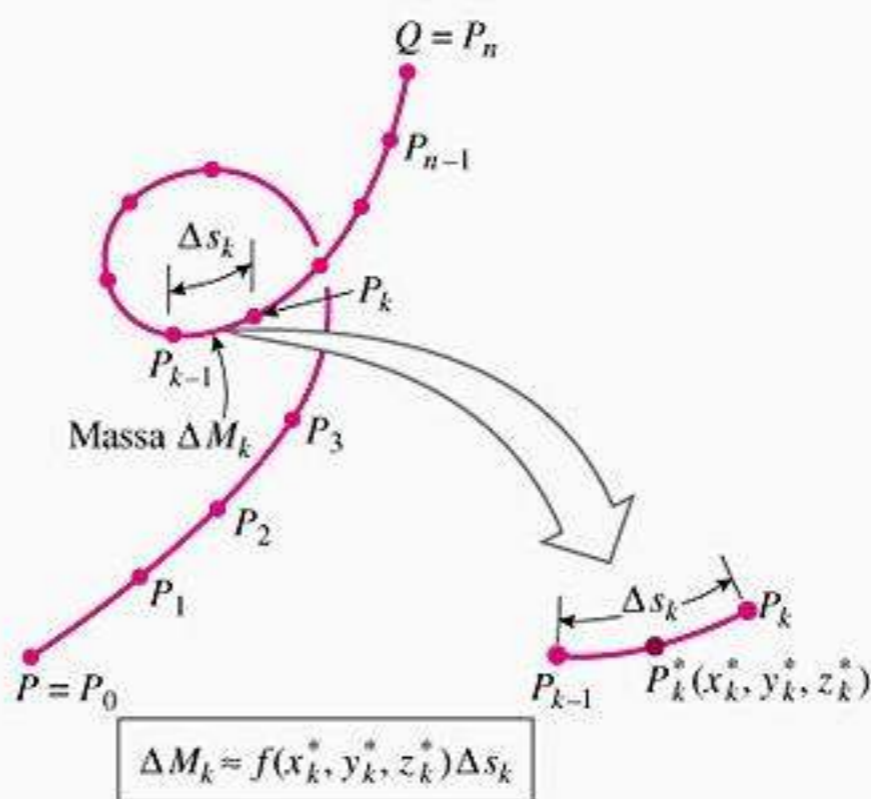


Figura 16.2.2

- Escolha um ponto amostral $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ arbitrário na k -ésima seção, como ilustrado no lado direito da Figura 16.2.2. Se Δs_k for muito pequeno, o valor de f não varia muito ao longo da k -ésima seção e podemos aproximar f ao longo dessa seção pelo valor $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Segue que a massa da k -ésima seção pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k$$

- A massa M do arame todo pode, então, ser aproximada por

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k \tag{1}$$

- Utilizaremos a expressão $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ para indicar o processo de aumentar n de tal modo que os comprimentos de todas as seções tendam a 0. É plausível que o erro em

(1) tenda a 0 quando $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ e que o valor exato de M seja dado por

$$M = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k \quad (2)$$

O limite em (2) é análogo ao limite de uma soma de Riemann usada para definir a integral de uma função num intervalo (Definição 6.5.1, no Volume 1). Pensando nessa semelhança, estabelecemos a definição seguinte.

Embora o termo “integral curvilínea” seja mais descritivo, as integrais na Definição 16.2.1 são chamadas, por razões históricas, de “integrais de linha”.

16.2.1 DEFINIÇÃO Se C for uma curva lisa no espaço bi ou tridimensional, então a *integral de linha de f em relação a s ao longo de C* é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k \quad \text{bidimensional} \quad (3)$$

ou

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k \quad \text{tridimensional} \quad (4)$$

desde que esse limite exista e não dependa da escolha de partição ou da escolha dos pontos amostrais.

Em geral, é impraticável calcular integrais de linha diretamente da Definição 16.2.1. Contudo, a definição é importante na aplicação e interpretação de integrais de linha. Por exemplo:

- Se C for uma curva no espaço tridimensional que modela um arame fino e se $f(x, y, z)$ for a função densidade linear do arame, segue de (2) e da Definição 16.2.1 que a massa M do arame é dada por

$$M = \int_C f(x, y, z) ds \quad (5)$$

Portanto, para obter a massa de um arame fino, integramos a função densidade linear ao longo da curva lisa que modela esse arame.

- Se C for uma curva lisa de comprimento de arco L e se f for identicamente 1, então segue imediatamente da Definição 16.2.1 que

$$\int_C ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} L = L \quad (6)$$

- Se C for uma curva no plano xy e se f for uma função contínua não-negativa definida em C , então $\int_C f(x, y) ds$ pode ser interpretada como a área A da “cortina” que é traçada por um segmento de reta vertical que se estende desde o ponto (x, y) para cima até uma altura $f(x, y)$ e se move ao longo de C desde uma extremidade de C até a outra (Figura 16.2.3). Para ver isso, utilize a Figura 16.2.4 para observar a aproximação

$$\Delta A_k \approx f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k$$

Segue que

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k$$

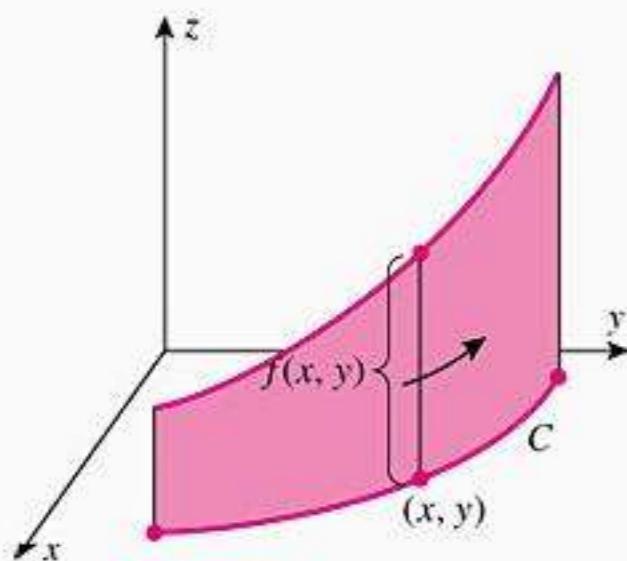


Figura 16.2.3

Então é plausível que

$$A = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k = \int_C f(x, y) ds \tag{7}$$

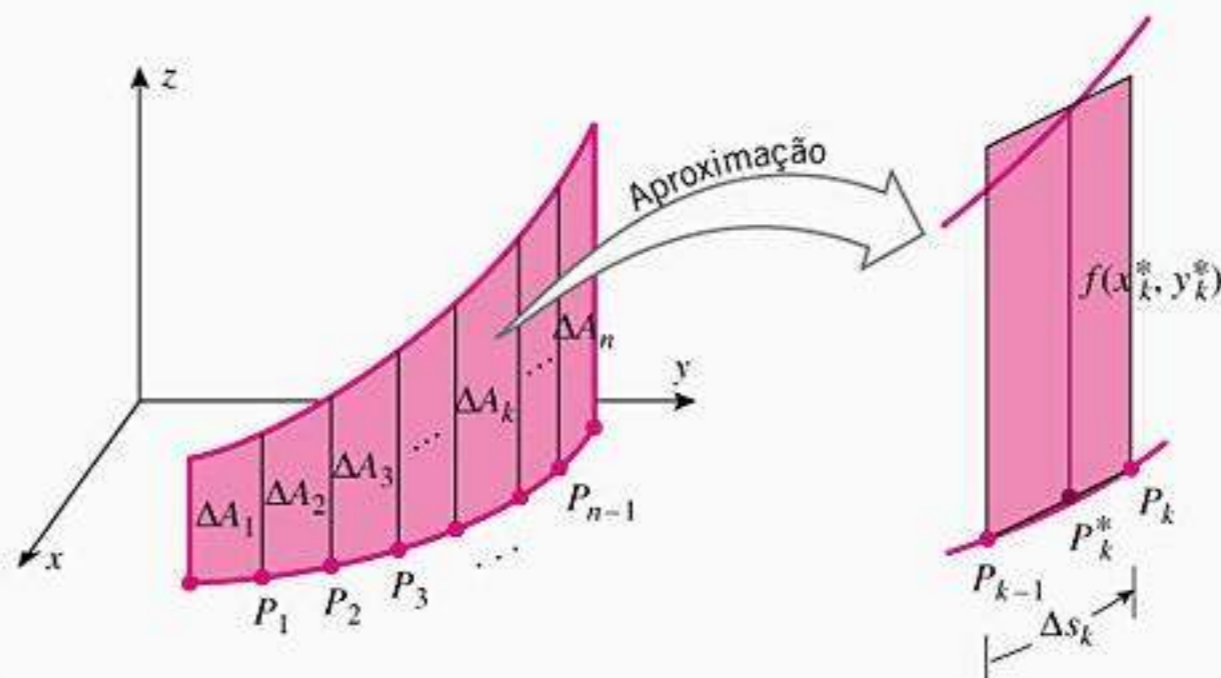


Figura 16.2.4

Como a Definição 16.2.1 é tão parecida com a Definição 6.5.1, não deveria constituir uma surpresa que as integrais de linha compartilhem muitas das propriedades comuns de integrais definidas ordinárias. Por exemplo, temos

$$\int_C [f(x, y) + g(x, y)] ds = \int_C f(x, y) ds + \int_C g(x, y) ds$$

desde que existam ambas integrais de linha do lado direito dessa equação. Analogamente, pode ser mostrado que se f for contínua em C , então existe a integral de linha de f em relação a s ao longo de C .

■ CÁLCULO DE INTEGRAIS DE LINHA

Exceto em casos muito simples, não é factível calcular uma integral de linha diretamente de (3) ou (4). Contudo, mostraremos agora que é possível expressar uma integral de linha como uma integral definida ordinária, de modo que não serão necessários métodos especiais para calcular as integrais de linha. Por exemplo, suponha que C seja uma curva no plano xy , dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \leq t \leq b)$$

Além disso, suponha que a cada ponto P_k de uma partição de C corresponda um valor do parâmetro t_k em $[a, b]$. O comprimento de arco de C entre os pontos P_{k-1} e P_k é, então, dado por

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \tag{8}$$

(Teorema 13.3.1). Se denotarmos $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, então segue de (8) e do Teorema do Valor Médio para Integrais (Teorema 6.6.2, no Volume 1), que existe um ponto t_k^* em $[t_{k-1}, t_k]$ tal que

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k$$

Denotamos por $P_k^*(x_k^*, y_k^*) = P_k^*(x(t_k^*), y(t_k^*))$ o ponto correspondente ao valor t_k^* do parâmetro (Figura 16.2.5).

Como a parametrização de C é lisa, pode ser mostrado que $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ se, e somente se, $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ (Exercício 49). Além disso, a composta $f(x(t), y(t))$ é uma função real defini-

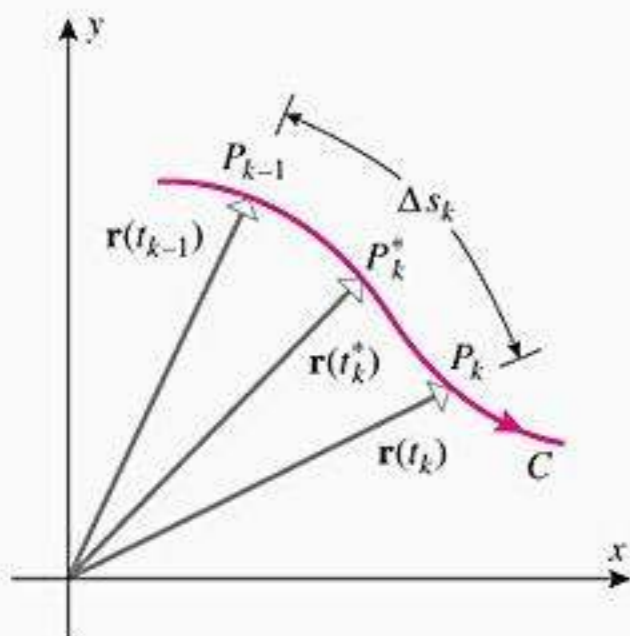


Figura 16.2.5

na intervalo $[a, b]$ e tem

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k && \text{Definição 1.2.1} \\ &= \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k && \text{Substituição} \\ &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt && \text{Definição 6.5.1, Volume 1} \end{aligned}$$

Portanto, se C é uma curva dada por uma parametrização

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \leq t \leq b)$$

então

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad 9$$

na superfície, e C é uma curva não orientada, dada por uma parametrização

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$$

então

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad 10$$

Explique como as Fórmulas (9) e (10) confirmam a Fórmula (6) do comprimento de arco.

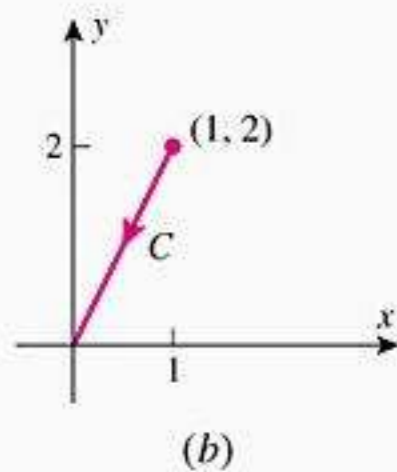
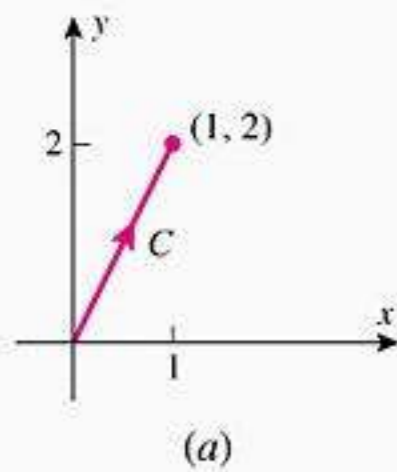


Figura 16.2.6

Exemplo 1 Encontre a integral de linha $\int_C (1 + xy^2) ds$.

(a) $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1)$ (ver Figura 16.2.6a)

(b) $C : \mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1)$ (ver Figura 16.2.6b)

Solução (a) Como $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, tem $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$ e a Fórmula 9 escreve-se

$$\begin{aligned} \int_C (1 + xy^2) ds &= \int_0^1 [1 + t(2t)^2] \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 (1 + 4t^3) \sqrt{5} dt \\ &= \sqrt{5} [t + t^4]_0^1 = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Solução (b) Como $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, tem $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$ e a Fórmula 9 escreve-se

$$\begin{aligned} \int_C (1 + xy^2) ds &= \int_0^1 [1 + (1 - t)(2 - 2t)^2] \sqrt{5} dt \\ &= \int_0^1 [1 + 4(1 - t)^3] \sqrt{5} dt \\ &= \sqrt{5} [t - (1 - t)^4]_0^1 = 2\sqrt{5} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Observe que a integral na parte (a) e (b) é a mesma, embora as parametrizações da curva C tenham orientações opostas.

de que uma integral de linha de f em relação a s ao longo de C não depende da orientação escolhida de C . (Isso é assim porque Δs_k é sempre positivo; portanto, não importa o *sentido* em que sejam listados os pontos de partição da curva na Definição 16.2.1.) Adiante nesta seção discutiremos integrais de linha que somente são definidas para curvas orientadas.

A Fórmula (9) tem uma expressão alternativa para uma curva C no plano xy dada por equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

Nesse caso, escrevemos (9) na forma expandida

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (11)$$

Analogamente, se C for uma curva no espaço tridimensional que é parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

então escrevemos (10) na forma

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (12)$$

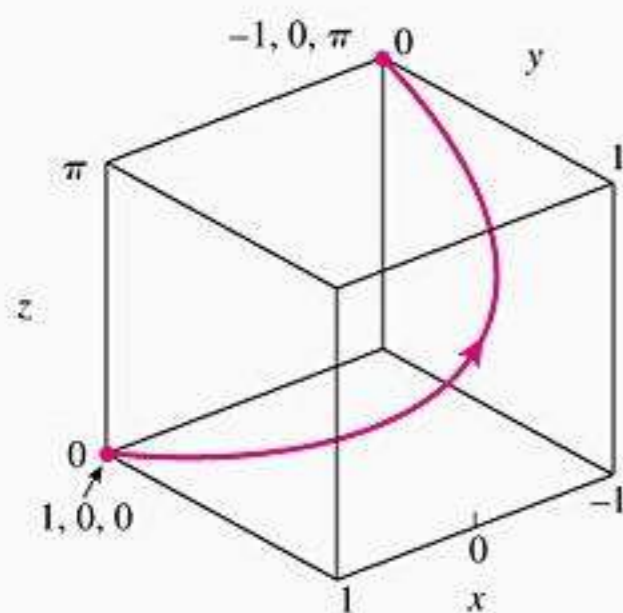


Figura 16.2.7

► **Exemplo 2** Calcule a integral de linha $\int_C (xy + z^3) ds$ de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, \pi)$ ao longo da hélice C que é representada pelas equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

(Figura 16.2.7).

Solução Pela Fórmula (12)

$$\begin{aligned} \int_C (xy + z^3) ds &= \int_0^\pi (\cos t \sin t + t^3) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t \sin t + t^3) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi (\cos t \sin t + t^3) dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{t^4}{4} \right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{4} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Se $\delta(x, y)$ for a função densidade de massa de um arame modelado por uma curva lisa C do plano xy , então um argumento parecido com o da dedução da Fórmula (5) mostra que a massa do arame é dada por $\int_C \delta(x, y) ds$.

► **Exemplo 3** Suponha que um arame semicircular tenha a equação $y = \sqrt{25 - x^2}$ e que sua densidade de massa seja $\delta(x, y) = 15 - y$ (Figura 16.2.8). Fisicamente, isso significa que o arame tem uma densidade máxima de 15 unidades na base ($y = 0$) e que a densidade do arame decresce linearmente em relação a y para um valor de 10 unidades no topo ($y = 5$). Calcule a massa do arame.

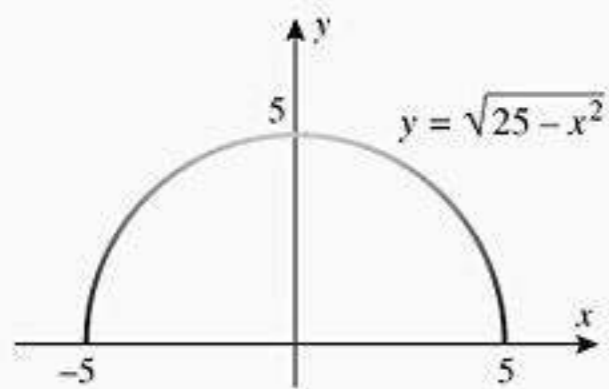


Figura 16.2.8

Solução A massa M do arame pode ser expressa como a integral de linha

$$M = \int_C \delta(x, y) ds = \int_C (15 - y) ds$$

ao longo do semicírculo C . Para calcular essa integral, expressamos C parametricamente como

$$x = 5 \cos t, \quad y = 5 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

Assim, segue de (11) que

$$\begin{aligned} M &= \int_C (15 - y) ds = \int_0^\pi (15 - 5 \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (15 - 5 \sin t) \sqrt{(-5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2} dt \\ &= 5 \int_0^\pi (15 - 5 \sin t) dt \\ &= 5 [15t + 5 \cos t]_0^\pi \\ &= 75\pi - 50 \approx 185,6 \text{ unidades de massa} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

No caso especial em que t é um parâmetro de comprimento de arco, digamos $t = s$, segue das Fórmulas (20) e (21) das Seções 13.3 que os radicais em (11) e (12) se reduzem a 1 e as equações simplificam para

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(s), y(s)) ds \quad (13)$$

e

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds \quad (14)$$

respectivamente.

Exemplo 4 Calcule a área da superfície que se estende verticalmente desde o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy até o cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ (Figura 16.2.9).

Solução Segue de (7) que a área A da superfície pode ser expressa como a integral de linha

$$A = \int_C (1 - x^2) ds \quad (15)$$

onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Esse círculo pode ser parametrizado em função do comprimento de arco como

$$x = \cos s, \quad y = \sin s \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

Assim, segue de (13) e (15) que

$$\begin{aligned} A &= \int_C (1 - x^2) ds = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 s ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2s) ds = \pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

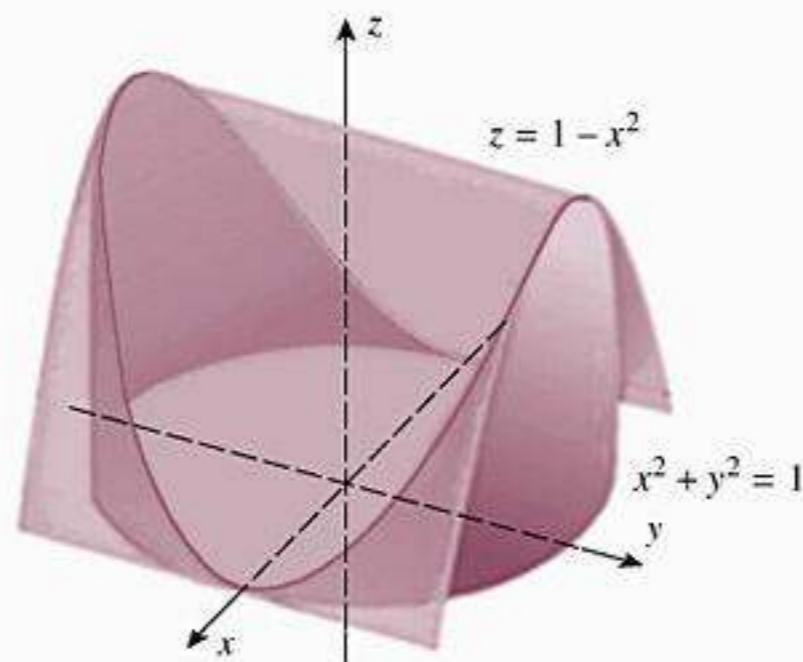


Figura 16.2.9

■ INTEGRAIS DE LINHA EM RELAÇÃO A x, y E z

Descreveremos, agora, um segundo tipo de integral de linha em que trocamos o ds da integral por dx, dy ou dz . Por exemplo, suponha que f seja uma função definida numa curva lisa C do plano xy e que tenhamos etiquetado pontos de uma partição de C por $P_k(x_k, y_k)$. Tomando

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

gostaríamos de definir

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \tag{16}$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k \tag{17}$$

Contudo, diferente do que ocorre com Δs_k , os valores de Δx_k e Δy_k trocam de sinal se a ordem dos pontos da partição ao longo de C for invertida. Portanto, para poder definir as integrais de linha usando as Fórmulas (16) e (17), devemos nos restringir a curvas *orientadas* C e a partições de C em que os pontos da partição estejam ordenados no sentido da orientação da curva. Com essa restrição, se existir o limite em (16) e não depender da escolha da partição nem da escolha dos pontos amostrais, então dizemos que (16) é a *integral de linha de f em relação a x ao longo de C* . Analogamente, (17) define a *integral de linha de f em relação a y ao longo de C* . Se C for uma curva lisa no espaço tridimensional, podemos ter *integrais de linha de f em relação a x, y e z ao longo de C* . Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z) dx = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k$$

e assim por diante. Como ocorre no caso de integrais de linha em relação a s , as integrais de linha de f em relação a x, y e z existem se f for contínua em C .

O procedimento básico para calcular essas integrais de linha é encontrar equações paramétricas de C , digamos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

em que a orientação de C seja dada no sentido de percurso de t crescente, e então expressar o integrando em termos de t . Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

Explique por que a Fórmula (16) implica que $\int_C dx = x_1 - x_0$, onde x_1 e x_0 são as coordenadas x respectivas dos pontos inicial e final de C . E o que vale para $\int_C dy$?

Explique por que a Fórmula (16) implica que $\int_C f(x, y) dx = 0$ em qualquer segmento de reta orientado paralelo ao eixo y . O que pode ser dito sobre $\int_C f(x, y) dy$ em qualquer segmento de reta orientado paralelo ao eixo x ?

[ma fórmula e a é áci e er embra a: ba ta ub tituir x, y e z e a e uação aramétrica e embrar ue $dz = z'(t) dt$]

► **Exemplo 5** a cu e $\int_C 3xy dx$, n e C é egment e reta igan $(0, 0)$ e $(1, 2)$ c m a rientaçã a a

a rienta a e $(0, 0)$ ara $(1, 2)$, c m na Figura 1 2 a

b rienta a e $(1, 2)$ ara $(0, 0)$, c m na Figura 1 2 b

Solução (a) an a arametrizaçã

$$x = t, \quad y = 2t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

btem

$$\int_C 3xy dy = \int_0^1 3(t)(2t)(2) dt = \int_0^1 12t^2 dt = 4t^3 \Big|_0^1 = 4$$

Solução (b) an a arametrizaçã

$$x = 1 - t, \quad y = 2 - 2t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

btem

$$\int_C 3xy dy = \int_0^1 3(1 - t)(2 - 2t)(-2) dt = \int_0^1 -12(1 - t)^2 dt = -4(1 - t)^3 \Big|_0^1 = -4 \blacktriangleleft$$

b er e, n E em 5, ue in erten a rientaçã a cur a mu u ina a integra e inha c rre r ue in erten a rientaçã e uma cur a tr cam ina e Δx_k na efiniçã 1 im, i erente ue c rre c m integrai e inha e unção em re açã a sa ng e C , a tr ca e rientaçã e C tr ca ina e uma integra e inha em re açã a x, y e z . Se C r uma cur a i a rienta a, en tam r $-C$ a cur a rienta a ue c n i te n me m nt e C ma c m a rientaçã ta Figura 1 2 10. Entã tem

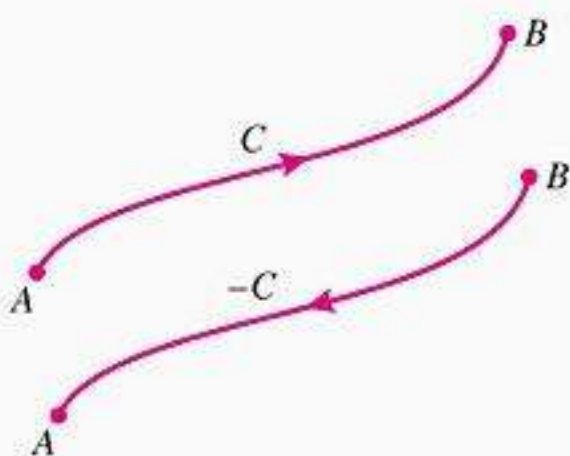


Figura 16.2.10

$$\int_{-C} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx \quad \text{e} \quad \int_{-C} g(x, y) dy = - \int_C g(x, y) dy \quad 18 \quad 19$$

en uant

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds \quad 20$$

e ana gamente ara integrai e inha n e aç tri imen i na men e mençã e icita em c ntrári, am u r ue cur a aramétrica e te am rienta a n enti arâmetr cre cente

uita eze, a integrai e inha em re açã a x e y c rrem c mbina a, ca em ue mitim um inai e integra e e cre em

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy \quad 21$$

ma c n ençã aná ga erá u a a ara c mbinaçõe e integrai e inha em re açã a x, y e z a ng e cur a n e aç tri imen i na

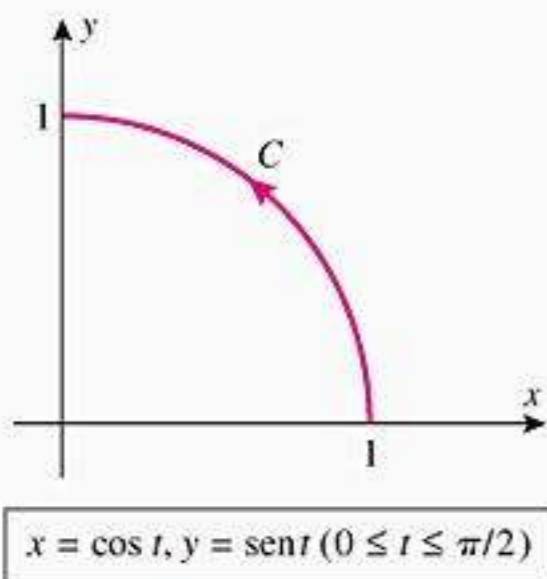


Figura 16.2.11

► **Exemplo 6** Calcule

$$\int_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

ao longo do arco circular C dado por $x = \cos t, y = \text{sen } t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) (Figura 16.2.11).

Solução Temos

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx &= \int_0^{\pi/2} (2 \cos t \text{sen } t) \left[\frac{d}{dt}(\cos t) \right] dt \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t \cos t \, dt = -\frac{2}{3} \text{sen}^3 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \text{sen}^2 t) \left[\frac{d}{dt}(\text{sen } t) \right] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \text{sen } t \Big|_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Assim, por (21)

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_C 2xy \, dx + \int_C (x^2 + y^2) \, dy \\ &= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Pode ser mostrado que, se f e g forem funções contínuas em C , então podemos expressar combinações de integrais de linha em reação a x e y em termos de um limite e podemos calcular essas integrais num único passo. Por exemplo, temos

$$\int_C f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k] \quad (22)$$

e

$$\int_C f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = \int_a^b [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)] \, dt \quad (23)$$

Resultados análogos valem para integrais de linha no espaço tridimensional. O cálculo de uma integral de linha pode, às vezes, ser simplificado usando a Fórmula (23).

► **Exemplo 7** Calcule

$$\int_C (3x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

ao longo do arco circular C dado por $x = \cos t, y = \text{sen } t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) (Figura 16.2.11).

Solução Por (23), temos

$$\begin{aligned} \int_C (3x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy &= \int_0^{\pi/2} [(3 \cos^2 t + \text{sen}^2 t)(-\text{sen } t) + 2(\cos t)(\text{sen } t)(\cos t)] \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-3 \cos^2 t \text{sen } t - \text{sen}^3 t + 2 \cos^2 t \text{sen } t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t - \text{sen}^2 t)(\text{sen } t) \, dt = \int_0^{\pi/2} -\text{sen } t \, dt \\ &= \cos t \Big|_0^{\pi/2} = -1 \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Compare as contas no Exemplo 7 com aquelas envolvidas no cálculo de

$$\int_C (3x^2 + y^2) \, dx + \int_C 2xy \, dy$$

Segue de (18) e (19) que

$$\int_{-C} f(x, y) dx + g(x, y) dy = - \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy \quad (24)$$

de modo que, invertendo a orientação de C , troca o sinal da integral de linha em que x e y ocorrem combinados. Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \\ = - \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (25)$$

■ INTEGRAÇÃO DE UM CAMPO VETORIAL AO LONGO DE UMA CURVA

Existe uma notação alternativa para integrais de linha em relação a x , y e z que é particularmente apropriada para tratar com problemas que envolvam campos de vetores. Interpretamos $d\mathbf{r}$ como

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

dependendo de C ser uma curva no espaço bi ou tridimensional. Para uma curva C orientada no espaço bidimensional e um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

escrevemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy \quad (26)$$

Analogamente, para uma curva C no espaço tridimensional e um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (27)$$

Com essas convenções, somos levados à definição seguinte.

16.2.2 DEFINIÇÃO Se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo e C uma curva lisa orientada, então a *integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C* é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (28)$$

A notação na Definição 16.2.2 torna fácil lembrar a fórmula para calcular a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C . Por exemplo, suponha que C seja uma curva orientada no plano dada em forma vetorial por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \leq t \leq b)$$

Se escrevermos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \tag{29}$$

A Fórmula (29) também vale para curvas orientadas no espaço tridimensional.

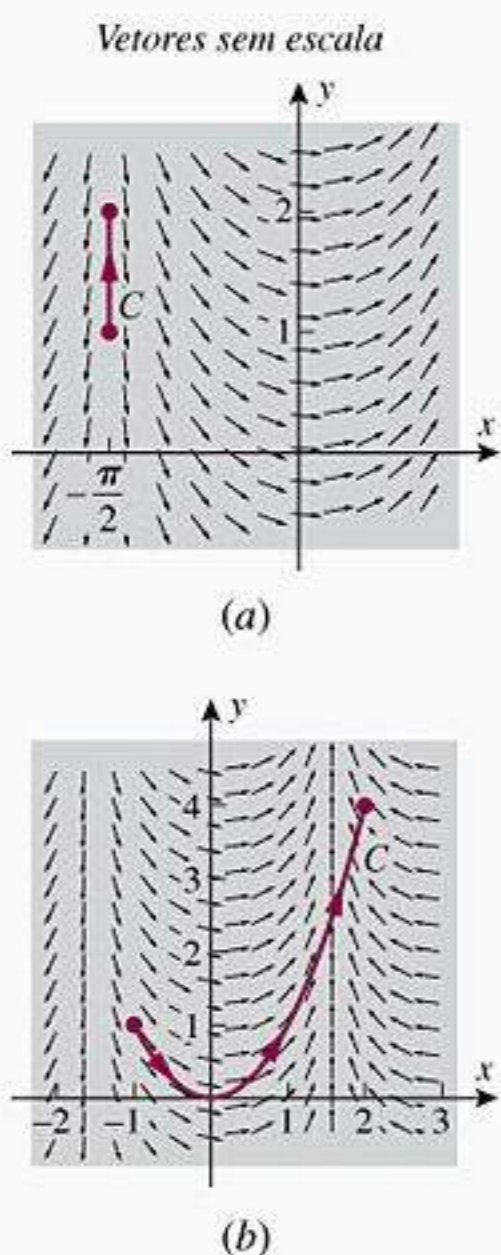


Figura 16.2.12

► **Exemplo 8** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$ e onde C é a curva orientada dada.

(a) $C: \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$ (ver Figura 16.2.12a)

(b) $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-1 \leq t \leq 2)$ (ver Figura 16.2.12b)

Solução (a) Usando (27), temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_1^2 (-\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} dt = \int_1^2 (-1) dt = -1$$

Solução (b) Usando (27), temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{-1}^2 (\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) dt \\ &= \int_{-1}^2 (\cos t + 2t \sin t) dt = [-2t \cos t + 3 \sin t]_{-1}^2 \\ &= -2 \cos 1 - 4 \cos 2 + 3(\sin 1 + \sin 2) \approx 5,83629 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Denotando por t um parâmetro de comprimento de arco, digamos, $t = s$, com vetor tangente unitário $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s)$ ao longo de C , então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

o que mostra que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \tag{30}$$

Em palavras, a integral de um campo vetorial ao longo de uma curva tem o mesmo valor que a integral do componente tangencial do campo vetorial ao longo da curva.

Podemos usar (30) para interpretar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ geometricamente. Se θ é o ângulo entre \mathbf{F} e \mathbf{T} num ponto de C , então nesse ponto

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} &= \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{T}\| \cos \theta && \text{Fórmula (4) na Seção 12.3} \\ &= \|\mathbf{F}\| \cos \theta && \text{Pois } \|\mathbf{T}\| = 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$-\|\mathbf{F}\| \leq \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \leq \|\mathbf{F}\|$$

e, se $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, então o sinal de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ dependerá do ângulo entre a direção de \mathbf{F} e a direção de C (Figura 16.2.13). Portanto, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ será positivo sempre que \mathbf{F} e C tiverem mais ou menos a mesma direção, será 0 se \mathbf{F} for normal a C e será negativo se \mathbf{F} e C tiverem direções mais ou menos opostas. A integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C pode ser interpretada como o efeito

acumulado da magnitude de \mathbf{F} ao longo de C , como o quanto \mathbf{F} e C têm a mesma direção, e como o comprimento de arco de C .

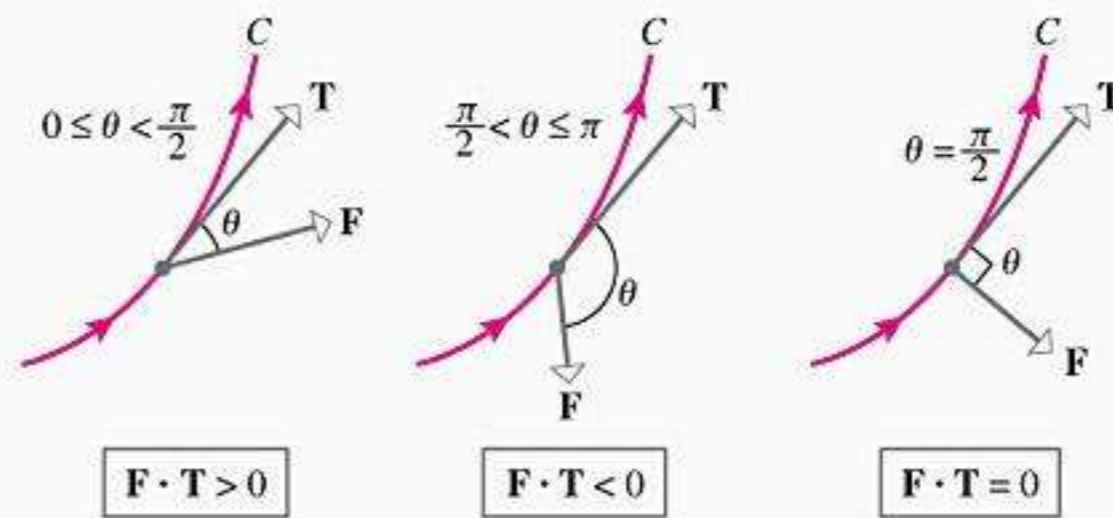


Figura 16.2.13

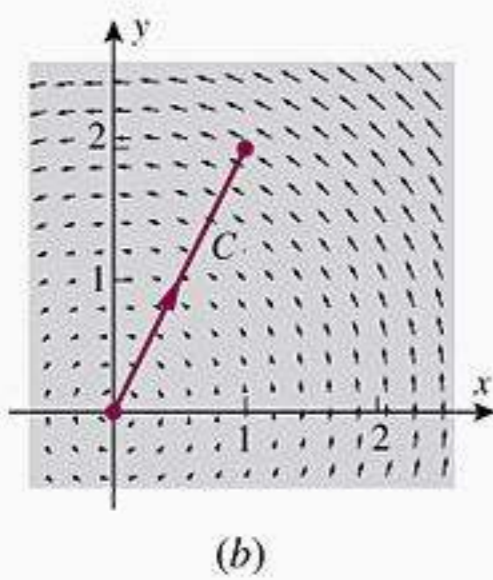
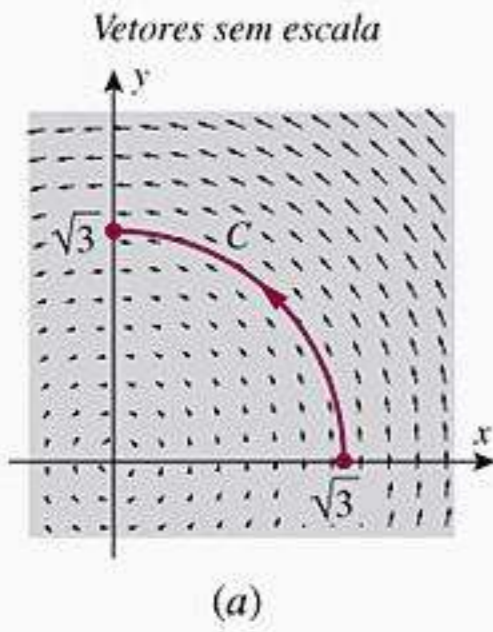


Figura 16.2.14

Observe a Figura 16.2.12 e explique geometricamente o sinal de cada uma das integrais de linha no Exemplo 8. Os Exercícios 5 e 6 levam adiante essa análise geométrica.

► **Exemplo 9** Use (30) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e onde C é a curva orientada dada.

- (a) $C : x^2 + y^2 = 3$ ($0 \leq x, y$; orientada como na Figura 16.2.14a)
- (b) $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ ($0 \leq t \leq 1$; ver Figura 16.2.14b)

Solução (a) Em cada ponto de C , a direção de \mathbf{F} e a direção de C são iguais (por quê?). Além disso, em cada ponto de C ,

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}$$

Portanto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{F}\| \cos(0) = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{3}$ e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \sqrt{3} ds = \sqrt{3} \int_C ds = \frac{3\pi}{2}$$

Solução (b) O campo vetorial \mathbf{F} é normal a C em cada ponto (por quê?). Portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C 0 ds = 0 \blacktriangleleft$$

Tendo em vista (20) e (30), poderíamos esperar que a inversão da orientação de C em $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não tivesse efeito no valor da integral de linha. Contudo, invertendo a orientação de C invertemos a orientação de \mathbf{T} no integrando e, portanto, invertemos o sinal da integral, ou seja,

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = - \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \tag{31}$$

e

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{32}$$

■ **TRABALHO COMO INTEGRAL DE LINHA**

Uma aplicação importante das integrais de linha em relação a x, y e z é o problema de definir o trabalho efetuado por uma força variável movendo uma partícula ao longo de uma caminho curvilíneo. Na Seção 7.7 (ver Volume 1) definimos o trabalho W efetuado por uma força de magnitude constante agindo sobre um objeto na direção do movimento (Definição 7.7.1) e, depois, naquela mesma seção, estendemos a definição para permitir a ação de uma força de magnitude variável agindo na direção do movimento (Definição 7.7.3). Na Seção 12.3 leva-

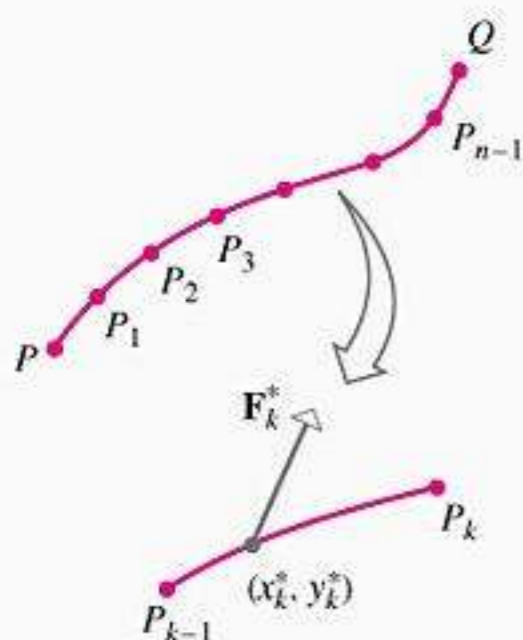


Figura 16.2.15

mos o conceito de trabalho um passo adiante, definindo o trabalho W efetuado por uma força constante \mathbf{F} movendo uma partícula numa reta de P a Q . Definimos o trabalho por

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \tag{33}$$

[Fórmula (14) na Seção 12.3]. Nosso próximo objetivo é definir um conceito mais geral de trabalho, a saber, o trabalho efetuado por uma força variável agindo numa partícula que se move ao longo de um caminho curvilíneo no espaço bi ou tridimensional.

Em muitas aplicações, as forças variáveis surgem de campos de forças (tais como campos gravitacionais ou eletromagnéticos), portanto consideraremos o problema do trabalho nesse contexto. Para motivar uma definição apropriada do trabalho efetuado por um campo de forças, utilizaremos um processo de limite e, como o procedimento é igual nos espaços bi ou tridimensionais, vamos discutir o caso bidimensional em detalhe. A idéia é a seguinte:

- Suponha que um campo de forças $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ mova uma partícula ao longo de uma curva lisa C de um ponto P até um ponto Q . Divida C em n arcos usando os pontos de partição

$$P = P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), P_n(x_n, y_n) = Q$$

orientados ao longo de C de P para Q e denote o comprimento do k -ésimo arco por Δs_k . Seja (x_k^*, y_k^*) um ponto qualquer do k -ésimo arco e seja

$$\mathbf{F}_k^* = \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*) = f(x_k^*, y_k^*)\mathbf{i} + g(x_k^*, y_k^*)\mathbf{j}$$

o vetor da força nesse ponto (Figura 16.2.15).

- Se o k -ésimo arco for pequeno, então a força não varia muito, portanto, podemos aproximar a força pelo valor constante \mathbf{F}_k^* nesse arco. Além disso, a direção do movimento não varia muito ao longo desse pequeno arco, portanto, podemos aproximar o movimento da partícula pelo vetor deslocamento

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k)\mathbf{i} + (\Delta y_k)\mathbf{j}$$

onde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

- Como o trabalho efetuado por uma força constante \mathbf{F}_k^* movendo uma partícula ao longo de uma reta de P_{k-1} para P_k é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^* \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} &= (f(x_k^*, y_k^*)\mathbf{i} + g(x_k^*, y_k^*)\mathbf{j}) \cdot ((\Delta x_k)\mathbf{i} + (\Delta y_k)\mathbf{j}) \\ &= f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k \end{aligned}$$

[Fórmula (33)], o trabalho ΔW_k efetuado pelo campo de forças ao longo do k -ésimo arco de C pode ser aproximado por

$$\Delta W_k \approx f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k$$

O trabalho total W realizado pela força movendo a partícula ao longo de toda a curva C pode, então, ser aproximado como

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^n [f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k]$$

- Quando $\max \Delta s_k \rightarrow 0$, é plausível que o erro nessa aproximação tenda a 0 e o trabalho exato realizado pelo campo de forças seja

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k] \\ &= \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy && \text{Fórmula (22)} \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} && \text{Fórmula (26)} \end{aligned}$$

Assim, somos levados à definição seguinte.

Observe na Fórmula (30) que o trabalho realizado por um campo de forças numa partícula em movimento ao longo de uma curva lisa C é obtido pela integração do componente tangencial da força ao longo de C . Isso implica que o componente da força que é ortogonal à direção do movimento da partícula não tem efeito algum sobre o trabalho realizado.

16.2.3 DEFINIÇÃO Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma curva lisa C sob o efeito de um campo de forças contínuo \mathbf{F} e que C esteja orientado no sentido do movimento da partícula. Então o *trabalho realizado pelo campo de forças* na partícula é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (34)$$

Por exemplo, suponha que a força seja medida em libras e a distância em pés. Segue da parte (a) do Exemplo 9 que o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ atuando numa partícula que se move ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 3$ de $(\sqrt{3}, 0)$ a $(0, \sqrt{3})$ é de $3\pi/2$ pés-libra.

■ **INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CURVAS LISAS POR PARTES**

Até agora, só consideramos integrais de linha ao longo de curvas lisas. Entretanto, a noção de integral de linha pode ser estendida para curvas formadas por um número finito de curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n unidas extremidade a extremidade. Uma tal curva é chamada *lisa por partes* (Figura 16.2.16). Definimos uma integral de linha ao longo de uma curva C lisa por partes como sendo a soma das integrais ao longo das seções:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_n}$$

► **Exemplo 10** Calcule

$$\int_C x^2y \, dx + x \, dy$$

no sentido anti-horário ao longo do trajeto triangular mostrado na Figura 16.2.17.

Solução Vamos integrar ao longo de C_1, C_2 e C_3 separadamente e somar os resultados. Para cada uma das três integrais, devemos determinar equações paramétricas que sigam o trajeto de integração no sentido correto. Para isso, lembramos que, pela Fórmula (7) da Seção 13.1, o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

é o segmento de reta que une \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 , orientado no sentido de \mathbf{r}_0 para \mathbf{r}_1 . Assim, os segmentos de reta C_1, C_2 e C_3 podem ser representados em notação vetorial como

$$\begin{aligned} C_1: \mathbf{r}(t) &= (1-t)\langle 0, 0 \rangle + t\langle 1, 0 \rangle = \langle t, 0 \rangle \\ C_2: \mathbf{r}(t) &= (1-t)\langle 1, 0 \rangle + t\langle 1, 2 \rangle = \langle 1, 2t \rangle \\ C_3: \mathbf{r}(t) &= (1-t)\langle 1, 2 \rangle + t\langle 0, 0 \rangle = \langle 1-t, 2-2t \rangle \end{aligned}$$

onde t varia de 0 a 1 em cada caso. Dessas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} x^2y \, dx + x \, dy &= \int_{C_1} x^2y \, dx = \int_0^1 (t^2)(0) \frac{d}{dt}[t] \, dt = 0 \\ \int_{C_2} x^2y \, dx + x \, dy &= \int_{C_2} x \, dy = \int_0^1 (1) \frac{d}{dt}[2t] \, dt = 2 \\ \int_{C_3} x^2y \, dx + x \, dy &= \int_0^1 (1-t)^2(2-2t) \frac{d}{dt}[1-t] \, dt + \int_0^1 (1-t) \frac{d}{dt}[2-2t] \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (t-1)^3 \, dt + 2 \int_0^1 (t-1) \, dt = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C x^2y \, dx + x \, dy = 0 + 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \blacktriangleleft$$

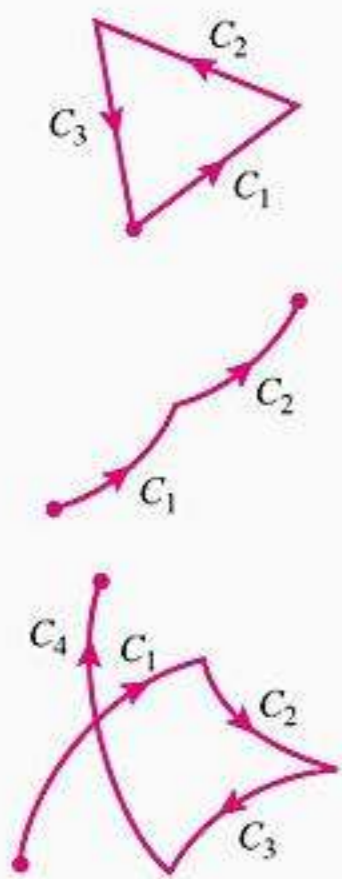


Figura 16.2.16

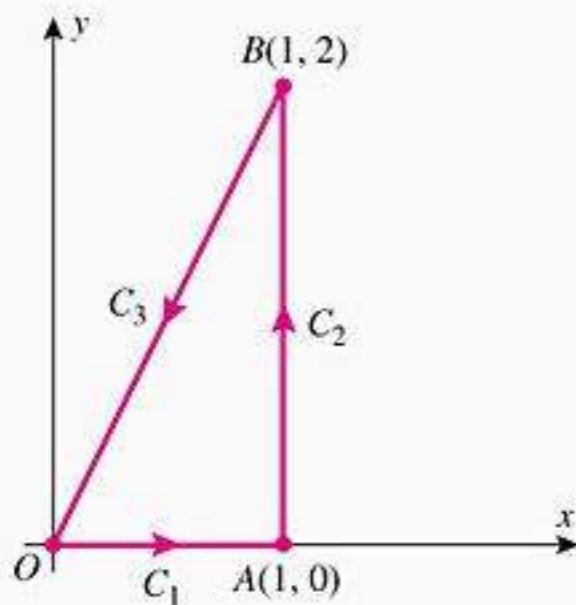


Figura 16.2.17

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.2 (Ver página 1128 para respostas.)

1. A área da superfície que se estende verticalmente desde o segmento de reta $y = x$ ($0 \leq x \leq 1$) do plano xy até o plano $z = 2x + 1$ é _____.
2. Suponha que um arame tenha a equação $y = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$) e que sua densidade de massa seja $\delta(x, y) = 2 - x$. A massa do arame é _____.

3. Se C é a curva representada pelas equações $x = \sin t, y = \cos t, z = t, (0 \leq t \leq 2\pi)$ então $\int_C y dx - x dy + dz =$ _____.

4. Se C é o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ orientado no sentido anti-horário e $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \text{_____}$$

EXERCÍCIOS 16.2 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

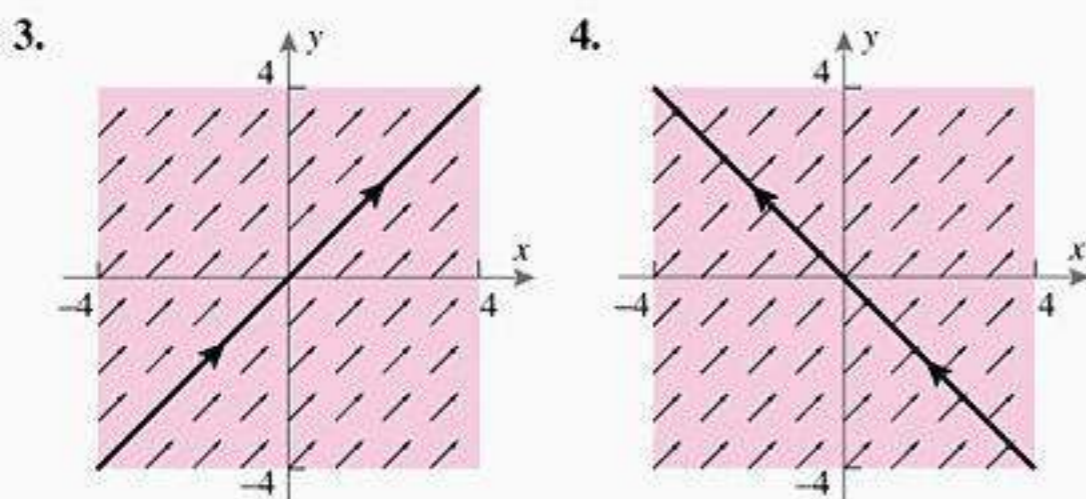
1. Seja C o segmento de reta de $(0, 0)$ até $(0, 1)$. Determine, em cada parte, a integral de linha ao longo de C por inspeção e explique seu raciocínio.

(a) $\int_C ds$ (b) $\int_C \sin xy dy$

2. Seja C o segmento de reta de $(0, 2)$ até $(0, 4)$. Determine, em cada parte, a integral de linha ao longo de C por inspeção e explique seu raciocínio.

(a) $\int_C ds$ (b) $\int_C e^{xy} dx$

3-4 Determine $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por inspeção para o campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e a curva C mostrada na figura. Explique seu raciocínio. [Para clareza, os vetores do campo de forças são mostrados em escala menor do que a verdadeira.]



5. Use (30) para explicar por que a integral de linha na parte (a) do Exemplo 8 pode ser encontrada multiplicando o comprimento do segmento C por -1 .

6. (a) Use (30) para explicar por que a integral de linha na parte (b) do Exemplo 8 deveria ter um valor próximo, mas um pouco inferior, ao do comprimento da curva parabólica C .
(b) Verifique a conclusão de (a) calculando o comprimento de C e comparando-o com o valor da integral de linha.

7. Seja C a curva representada pelas equações

$$x = 2t, y = 3t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Calcule, em cada parte, a integral de linha ao longo de C .

(a) $\int_C (x - y) ds$ (b) $\int_C (x - y) dx$
(c) $\int_C (x - y) dy$

8. Seja C a curva representada pelas equações

$$x = t, y = 3t^2, z = 6t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Calcule, em cada parte, a integral de linha ao longo de C .

(a) $\int_C xyz^2 ds$ (b) $\int_C xyz^2 dx$
(c) $\int_C xyz^2 dy$ (d) $\int_C xyz^2 dz$

9. Em cada parte, calcule a integral

$$\int_C (3x + 2y) dx + (2x - y) dy$$

ao longo da curva indicada.

- (a) O segmento de reta de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- (b) O arco parabólico $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- (c) A curva $y = \sin(\pi x/2)$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- (d) A curva $y = x^3$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

10. Em cada parte, calcule a integral

$$\int y dx + z dy - x dz$$

ao longo da curva indicada.

- (a) O segmento de reta de $(0, 0, 0)$ até $(1, 1, 1)$.
- (b) A cúbica torcida $x = t, y = t^2, z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ até $(1, 1, 1)$.
- (c) A hélice $x = \cos \pi t, y = \sin \pi t, z = t$ de $(1, 0, 0)$ até $(-1, 0, 1)$.

11-14 Calcule a integral de linha em relação a s ao longo da curva C .

11. $\int_C \frac{1}{1+x} ds$
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 3)$
12. $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$
 $C: x = 1 + 2t, y = t \quad (0 \leq t \leq 1)$
13. $\int_C 3x^2yz ds$
 $C: x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$
14. $\int_C \frac{e^{-z}}{x^2 + y^2} ds$
 $C: \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

15-22 Calcule a integral de linha ao longo da curva C .

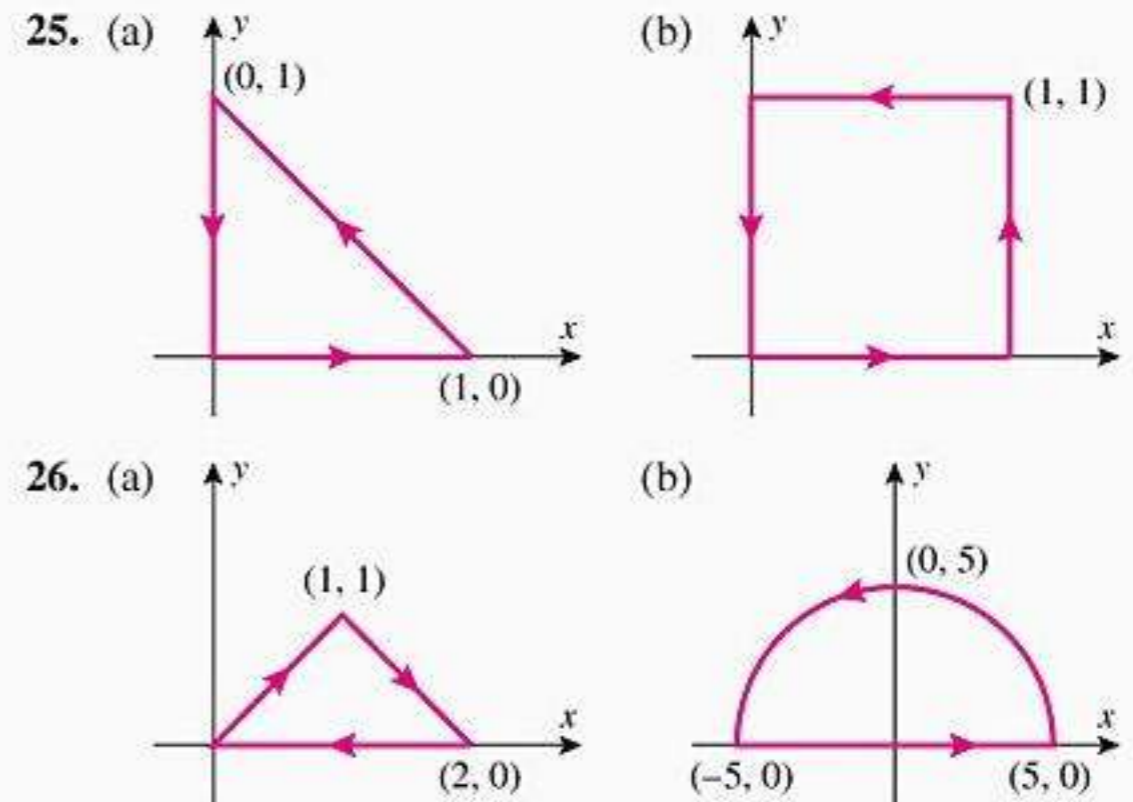
15. $\int_C (x + 2y) dx + (x - y) dy$
 $C: x = 2 \cos t, y = 4 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/4)$
16. $\int_C (x^2 - y^2) dx + x dy$
 $C: x = t^{2/3}, y = t \quad (-1 \leq t \leq 1)$
17. $\int_C -y dx + x dy$
 $C: y^2 = 3x$ de $(3, 3)$ até $(0, 0)$
18. $\int_C (y - x) dx + x^2y dy$
 $C: y^2 = x^3$ de $(1, -1)$ até $(1, 1)$
19. $\int_C (x^2 + y^2) dx - x dy$
 $C: x^2 + y^2 = 1$, no sentido anti-horário de $(1, 0)$ até $(0, 1)$
20. $\int_C (y - x) dx + xy dy$
 $C: \text{o segmento de reta de } (3, 4) \text{ até } (2, 1)$
21. $\int_C yz dx - xz dy + xy dz$
 $C: x = e^t, y = e^{3t}, z = e^{-t} \quad (0 \leq t \leq 1)$
22. $\int_C x^2 dx + xy dy + z^2 dz$
 $C: x = \sin t, y = \cos t, z = t^2 \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$

23-24 Use um CAS para calcular a integral de linha ao longo da curva dada.

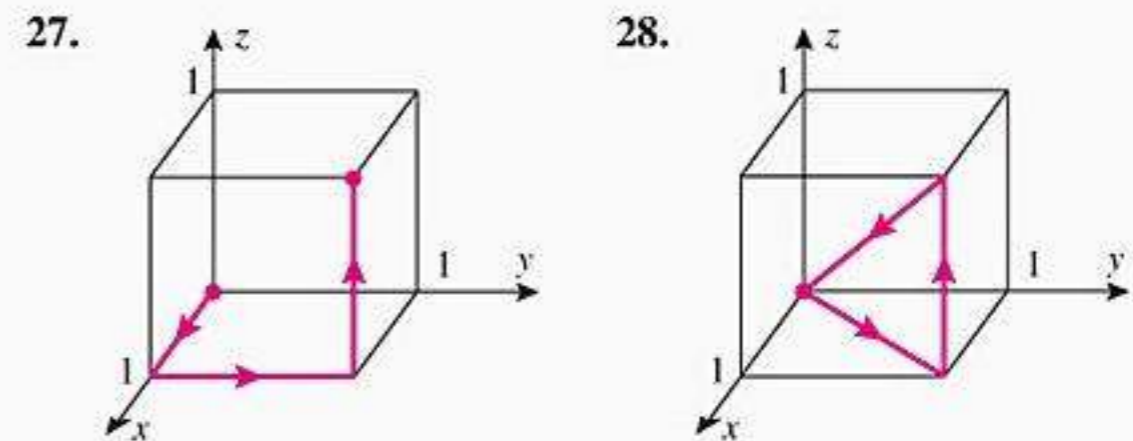
- 23.** (a) $\int_C (x^3 + y^3) ds$
 $C: \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq \ln 2)$
- (b) $\int_C xe^z dx + (x - z) dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz$
 $C: x = \sin t, y = \cos t, z = t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$
- 24.** (a) $\int_C x^7 y^3 ds$
 $C: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$

- (b) $\int_C x^5 z dx + 7y dy + y^2 z dz$
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k} \quad (1 \leq t \leq e)$

25-26 Calcule $\int_C y dx - x dy$ ao longo da curva C mostrada na figura.



27-28 Calcule $\int_C x^2z dx - yx^2 dy + 3 dz$ ao longo da curva C mostrada na figura.



29-32 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva C .

29. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq \pi)$
30. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1)$
31. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
 $C: \mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1)$
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 $C: \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$
33. Calcule a massa de um arame fino com o formato do arco circular $y = \sqrt{9 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 3$), se a função de densidade for $\delta(x, y) = x\sqrt{y}$.
34. Calcule a massa de um arame fino com o formato da curva $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq 1$) se a função de densidade δ for proporcional à distância da origem.
35. Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) se a função de densidade for $\delta = kx/(1 + y^2)$ ($k > 0$).

36. Calcule a massa de um arame fino com o formato da curva $x = 2t, y = \ln t, z = 4\sqrt{t}$ ($1 \leq t \leq 4$) se a função de densidade for proporcional à distância acima do plano xy .

37-40 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças \mathbf{F} na partícula que se move ao longo da curva C .

37. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
 $C: x = y^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$

38. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + xy)\mathbf{i} + (y - x^2y)\mathbf{j}$
 $C: x = t, y = 1/t$ ($1 \leq t \leq 3$)

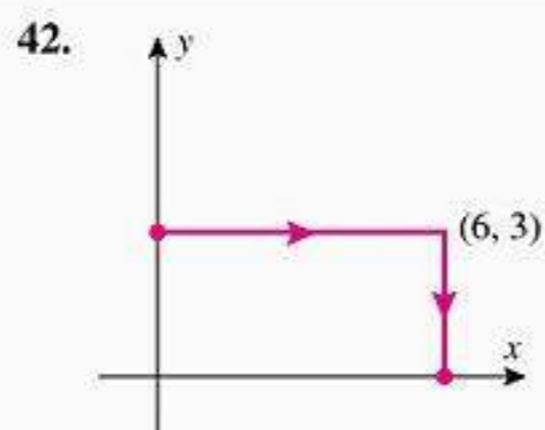
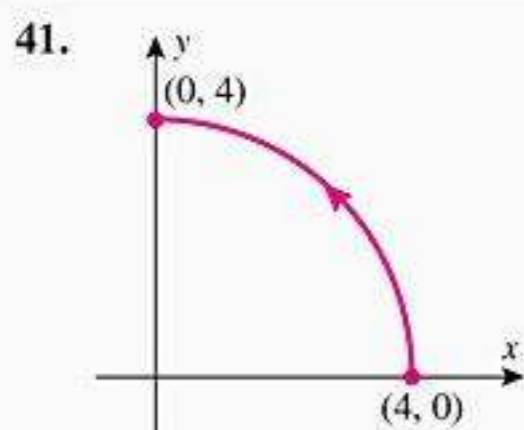
39. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$)

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
 C : ao longo de segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ até $(1, 3, 1)$ até $(2, -1, 4)$

41-42 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{4}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

numa partícula que se move ao longo da curva C mostrada na figura.



43-44 Use uma integral de linha para calcular a área da superfície.

43. A superfície que se estende para cima da parábola $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) do plano xy ao plano $z = 3x$.

44. A superfície que se estende para cima desde o semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ no plano xy até a superfície $z = x^2y$.

45. Como ilustrado na figura a seguir, foi feito um corte senooidal no topo de uma lata cilíndrica. Suponha que a base seja modelada pelas equações paramétricas $x = \cos t, y = \sin t,$

$z = 0$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) e a altura do corte como uma função de t seja $z = 2 + 0,5 \sin 3t$.

- (a) Use um argumento geométrico para determinar a área da superfície lateral da lata cortada.
- (b) Escreva uma integral de linha para a área de superfície.
- (c) Use a integral de linha para calcular a área da superfície.

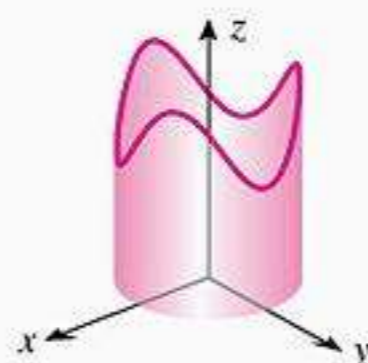


Figura Ex-45

46. Calcule a integral $\int_{-C} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido no sentido anti-horário.

47. Suponha que uma partícula se mova através do campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$, ao longo da curva $x = t, y = \lambda t(1 - t)$. Para qual valor de λ o trabalho realizado pelo campo de forças será igual a 1?

48. Um fazendeiro que pesa 150 libras carrega um saco de grãos pesando 20 libras, para cima numa escada helicoidal circular de raio igual a 25 pés em torno de um silo. À medida que o fazendeiro sobe, os grãos vazam do saco à razão de 1 libra por 10 pés de subida. Qual o trabalho executado pelo fazendeiro subindo uma distância vertical de 60 pés em exatamente quatro revoluções? [Sugestão: encontre um campo vetorial que represente a força exercida pelo fazendeiro para levantar seu próprio peso mais o peso do saco para cima em cada ponto do trajeto.]

49. Suponha que a curva C no plano xy seja dada pela parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \leq t \leq b)$$

Em cada parte, utilize a notação usada na dedução da Fórmula (9).

(a) Sejam m e M os valores mínimo e máximo de $\|\mathbf{r}'(t)\|$ em $[a, b]$, respectivamente. Prove que

$$0 \leq m(\max \Delta t_k) \leq \max \Delta s_k \leq M(\max \Delta t_k)$$

(b) Use (a) para provar que $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ se, e somente se, $\max \Delta t_k \rightarrow 0$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.2

1. $2\sqrt{2}$ 2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 3. 4π 4. 0

16.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO; CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

Nesta seção, mostraremos que, para certos tipos de campos vetoriais, a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de uma curva depende somente dos pontos extremos da curva e não da própria curva. Tais campos são de especial importância na Física e na Engenharia.

INTEGRAIS DE TRABALHO

Vimos, na seção anterior, que se \mathbf{F} for um campo vetorial no espaço bi ou tridimensional, o trabalho realizado pelo campo numa partícula que se move ao longo de uma curva parametrizada C , de um ponto inicial P até um ponto final Q , é dado pela integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Conseqüentemente, chamamos uma integral de linha desse tipo também de *integral de trabalho*. Lembre que uma integral de trabalho também pode ser expressa em forma escalar como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy \quad \text{Espaço bidimensional} \quad (1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \quad \text{Espaço tridimensional} \quad (2)$$

onde f, g e h são as funções componentes de \mathbf{F} .

INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

A curva paramétrica C numa integral de trabalho é chamada de *caminho de integração*. Um dos problemas importantes nas aplicações é determinar como o caminho de integração afeta o trabalho realizado por um campo vetorial, numa partícula que se move de um ponto fixado P para outro ponto fixado Q . Mostraremos, em breve, que se o campo vetorial \mathbf{F} for conservativo (ou seja, é o gradiente de alguma função potencial ϕ), então o trabalho que esse campo realiza na partícula que se move de P para Q não depende do particular caminho C que a partícula segue. Ilustramos isso no seguinte exemplo.

Exemplo 1 O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é conservativo, visto que é o gradiente de $\phi(x, y) = xy$ (verifique). Assim, a discussão precedente sugere que o trabalho realizado pelo campo na partícula que se move do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 1)$ deve ser o mesmo ao longo de diferentes caminhos. Confirme que o valor da integral de trabalho

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

é o mesmo ao longo dos seguintes caminhos (Figura 16.3.1):

- (a) O segmento de reta $y = x$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- (b) A parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- (c) A cúbica $y = x^3$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

Solução (a) Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C y dx + x dy \\ &= \int_0^1 2t dt = 1 \end{aligned}$$

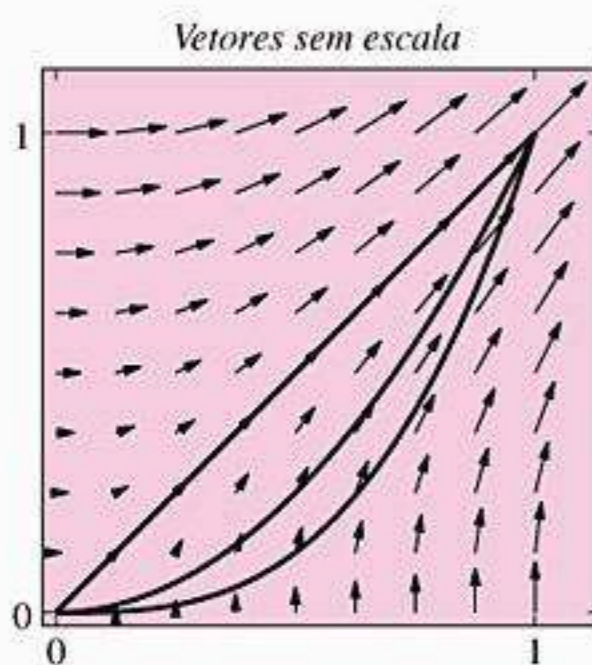


Figura 16.3.1

Solução (b) Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y dx + x dy = \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

Solução (c) Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y dx + x dy = \int_0^1 4t^3 dt = 1 \quad \blacktriangleleft$$

■ TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHA

Lembre-se que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 6.6.1 do Volume 1), se F for uma antiderivada de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

O seguinte resultado é o análogo daquele teorema para as integrais de linha no espaço bidimensional.

16.3.1 TEOREMA (O Teorema Fundamental das Integrais de Linha) Suponha que

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

seja um campo vetorial conservativo em alguma região aberta D contendo os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam contínuas nessa região. Se

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

e se C for uma curva paramétrica lisa por partes qualquer, que começa em (x_0, y_0) , termina em (x_1, y_1) e esteja toda contida na região D , então

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \quad (3)$$

ou, de forma equivalente,

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \quad (4)$$

O valor de

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

depende da magnitude de \mathbf{F} ao longo de C , do alinhamento de \mathbf{F} com a direção de C em cada ponto e do comprimento de C . Se \mathbf{F} for conservativo, esses vários fatores sempre se equilibram de tal modo que o valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende somente dos pontos inicial e final de C .

DEMONSTRAÇÃO Daremos a prova para uma curva C lisa. A prova para uma curva lisa por partes, que é deixada como exercício, pode ser feita aplicando o teorema para cada parte lisa individual e somando os resultados. Suponha que C seja dada parametricamente por $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$), de modo que os pontos inicial e final da curva sejam

$$(x_0, y_0) = (x(a), y(a)) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x(b), y(b))$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi$, segue que

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

e então

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = \int_a^b \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [\phi(x(t), y(t))] dt = \phi(x(t), y(t)) \Big|_{t=a}^b \\ &= \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a)) \\ &= \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Enunciado informalmente, esse teorema mostra que o valor de uma integral de linha ao longo de um caminho liso por partes num campo vetorial conservativo é independente do caminho; isto é, o valor da integral depende dos pontos extremos e não do caminho C que os liga. Conseqüentemente, para as integrais de linha ao longo de caminhos em campos vetoriais conservativos, é comum expressar (3) e (4) como

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \tag{5}$$

Se \mathbf{F} for conservativo, então temos uma escolha de métodos para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Podemos trabalhar diretamente com C , podemos trocar C por alguma outra curva com as mesmas extremidades de C , ou podemos aplicar (3).

► Exemplo 2

- (a) Confirme que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ do Exemplo 1 é conservativo mostrando que $\mathbf{F}(x, y)$ é o gradiente de $\phi(x, y) = xy$.
- (b) Use o Teorema Fundamental das Integrais de Linha para calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Solução (a)

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Solução (b) De (5) obtemos

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = 1 - 0 = 1$$

que está de acordo com os resultados obtidos no Exemplo 1 integrando entre $(0, 0)$ e $(1, 1)$ ao longo de caminhos específicos. ◀

■ INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CAMINHOS FECHADOS

As curvas paramétricas que começam e terminam no mesmo ponto desempenham um papel importante no estudo dos campos vetoriais, portanto há alguma terminologia especial associada a elas. Diz-se que uma curva paramétrica C que é representada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$ é fechada se o ponto inicial $\mathbf{r}(a)$ e o ponto final $\mathbf{r}(b)$ coincidem; isto é, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ (Figura 16.3.2).

Segue de (5) que a integral de linha de um campo vetorial conservativo ao longo de um caminho fechado C que começa e termina em (x_0, y_0) é zero. Isso acontece porque o ponto (x_1, y_1) em (5) é o mesmo que (x_0, y_0) e, portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) = 0$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que a recíproca desse resultado também é verdadeira. Ou seja, queremos mostrar que, sob condições apropriadas, um campo vetorial no qual é nula a integral de linha ao longo de todos caminhos fechados deve ser conservativo. Para que isso

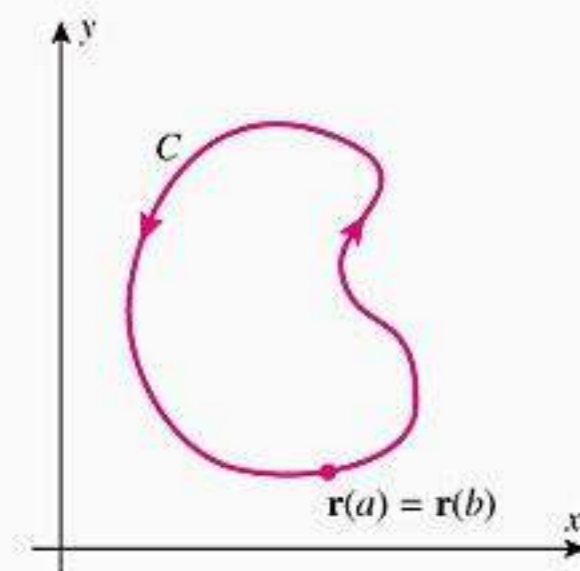


Figura 16.3.2

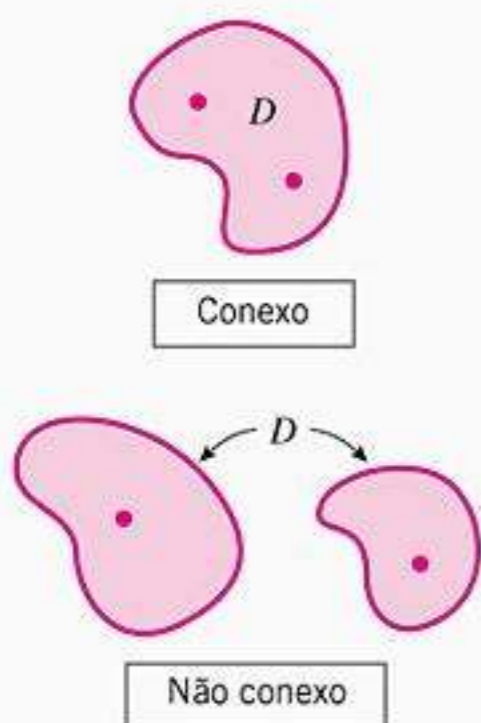


Figura 16.3.3

seja verdadeiro, precisamos exigir que o domínio D do campo vetorial seja **conexo**, o que significa que quaisquer dois pontos em D podem ser unidos por alguma curva lisa por partes que esteja inteiramente em D . Enunciado informalmente, D é conexo se não consiste de duas ou mais partes separadas (Figura 16.3.3).

16.3.2 TEOREMA Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas em alguma região D aberta e conexa, então as seguintes afirmações são equivalentes (todas verdadeiras ou todas falsas):

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo na região D .
- (b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada curva fechada C lisa por partes em D .
- (c) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho de qualquer ponto P em D para qualquer ponto Q em D para cada curva C lisa por partes em D .

Esse teorema pode ser estabelecido provando-se três implicações: $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (a)$. Como mostramos acima que $(a) \Rightarrow (b)$, precisamos provar somente as duas últimas implicações. Vamos provar $(c) \Rightarrow (a)$ e deixar a outra implicação como um exercício.

DEMONSTRAÇÃO $(c) \Rightarrow (a)$ Estamos supondo que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho para cada curva lisa por partes na região, e queremos mostrar que há uma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ em cada ponto da região; isto é,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = g(x, y) \tag{6}$$

Agora, escolha um ponto fixado (a, b) em D , seja (x, y) um ponto qualquer em D e defina

$$\phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{7}$$

Essa é uma definição que não é ambígua porque estamos supondo que a integral é independente do caminho. Mostraremos que $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Como D é aberta, podemos encontrar um disco circular centrado em (x, y) , cujos pontos fiquem inteiramente em D . Como mostra a Figura 16.3.4, escolha qualquer ponto (x_1, y) nesse disco que fique na mesma reta horizontal que (x, y) , mas que seja diferente de (x, y) . Como a integral de (7) é independente do caminho, podemos calculá-la integrando, primeiro, de (a, b) para (x_1, y) ao longo de uma curva C_1 lisa por partes em D e, depois, continuar ao longo do segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) para (x, y) . Isso dá

$$\phi(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como o primeiro membro não depende de x , sua derivada parcial em relação a x é nula e, então,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

Entretanto, a integral de linha em relação a y é nula ao longo do segmento de reta horizontal C_2 , de modo que essa equação simplifica para

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} f(x, y) dx \tag{8}$$

Para calcular a integral nessa expressão, consideramos y como uma constante e expressamos a reta C_2 parametricamente como

$$x = t, \quad y = y \quad (x_1 \leq t \leq x)$$

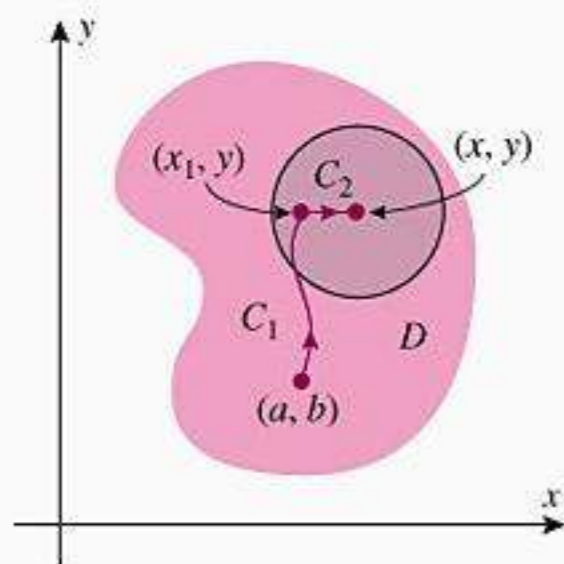


Figura 16.3.4

ren r i c e c n un ir eit r, ma ara e itar c m icar a n taçã , u am x c m ariá e e en ente na e uaçõe aramétrica e c m nt e trem egment e reta m a ú tima inter retaçã e x, egue ue 8 e e r e r e a c m

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x f(t, y) dt$$

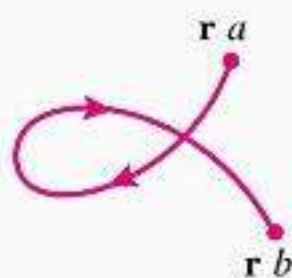
icam , ag ra, a Parte 2 e rema Fun amenta á cu e rema 3 ume l , tratam y c m uma c n tante, ue á

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x, y)$$

e r a a rimeira arte e r a e ue $\partial \phi / \partial y = g(x, y)$ e er bti a e maneira aná ga unin x, y a um nt x, y_1 r um egment e reta ertica E ercici 35 ■

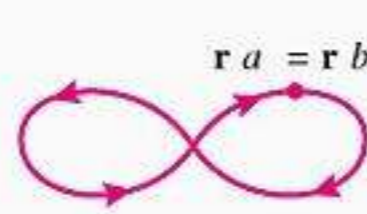
■ UM TESTE PARA CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

e ar e rema 1 3 2 er uma caracterizaçã im rtante cam et riai c n er a ti , nã é uma erramenta e cá cu eficiente r ue, gera mente, nã é í e ca cu ar a integra e traba h em t a a cur a i a r arte em D , c m e igi na arte b e c Para e en er um mét ara eterminar e um cam et riai é c n er ati , reci am intr uzir a gun c nceit bre cur a aramétrica e c n unt c ne Dire m ue uma cur a aramétrica é *simples* e e a nã inter ecta a i me ma entre eu nt e trem ma cur a aramétrica im e e u nã er echa a Figura 1 3 5 ém i , irem ue um c n unt c ne e aç bi imen i na é *simplesmente conexo* e nenhuma cur a im e echa a em D en er nt ue nã ertençam a D Enuncian in rma mente, um c n unt c ne D é im e mente c ne e nã ti er burac um c n unt c ne c m um u mai burac é it *multiplamente conexo* Figura 1 3

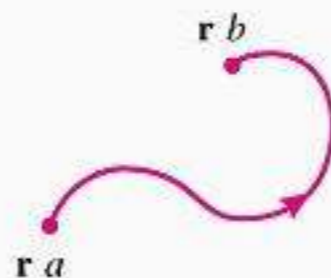


Não simples e não fechada

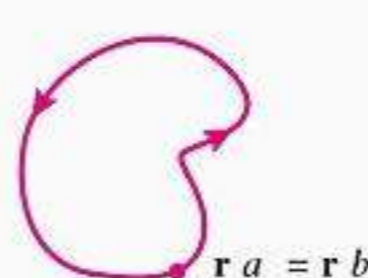
Figura 16.3.5



Fechada, mas não simples



Simples, mas não fechada



Simples e fechada



Simplesmente conexo



Multiplamente conexo

Figura 16.3.6

eguinte te rema é a rinci a erramenta ara eterminar e um cam et riai e aç bi imen i na é c n er ati

ATENÇÃO

Em (9), o componente i de \mathbf{F} é derivado em relação a y e o componente j em relação a x . É fácil inverter essa ordem por engano.

16.3.3 TEOREMA (Teste de Campo Conservativo) Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta D e se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ for conservativo em D , então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{9}$$

em cada ponto de D . Reciprocamente, se D for simplesmente conexo e (9) valer em cada ponto de D , então $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo

ma em n traçã c m eta e e te rema re uer re u ta e á cu a ança e erá miti a Entretanto , nã é í cí er r ue 9 a e e \mathbf{F} r c n er ati Para i , u nha

que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, caso em que podemos escrever as funções f e g como

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = g \tag{10}$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

Mas as derivadas parciais mistas nessas equações são iguais (Teorema 14.3.2), logo segue (9).

► **Exemplo 3** Use o Teorema 16.3.3 para determinar se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

é conservativo em algum conjunto aberto.

Solução Seja $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = y - x$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1$$

Assim, não há pontos no plano xy em que se verifique a condição (9), portanto, \mathbf{F} não é conservativo em qualquer conjunto aberto. ◀

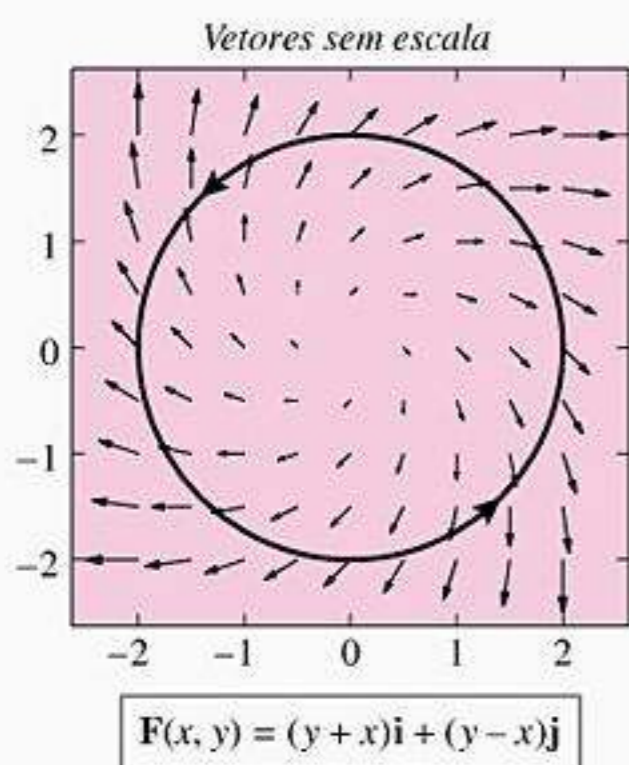


Figura 16.3.7

Como o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 3 não é conservativo, segue do Teorema 16.3.2 que devem existir curvas fechadas lisas por partes em cada conjunto aberto conexo no plano xy , nas quais

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \neq 0$$

Uma tal curva é o círculo mostrado na Figura 16.3.7. A figura sugere que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} < 0$ em cada ponto de C (por quê?), de modo que $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds < 0$.

Uma vez estabelecido que um campo vetorial é conservativo, pode ser obtida uma função potencial para o campo integrando, primeiro, qualquer uma das equações em (10). O exemplo a seguir ilustra essa afirmação.

► **Exemplo 4** Seja $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$.

- (a) Mostre que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo em todo o plano xy .
- (b) Determine ϕ integrando primeiro $\partial\phi/\partial x$.
- (c) Determine ϕ integrando primeiro $\partial\phi/\partial y$.

Solução (a) Como $f(x, y) = 2xy^3$ e $g(x, y) = 1 + 3x^2y^2$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$$

portanto (9) vale para todo (x, y) .

Solução (b) Como o campo \mathbf{F} é conservativo, há uma função potencial ϕ tal que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 \tag{11}$$

Integrando a primeira dessas equações em relação a x (e tratando y como uma constante), resulta

$$\phi = \int 2xy^3 dx = x^2y^3 + k(y) \tag{12}$$

onde $k(y)$ representa a “constante” de integração. Justifica-se tratar a constante de integração como uma função de y , visto que y é mantida constante no processo de integração. Para determinar $k(y)$, diferenciamos (12) em relação a y e usamos a segunda equação de (11) para obter

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + k'(y) = 1 + 3x^2y^2$$

da qual segue que $k'(y) = 1$. Assim,

$$k(y) = \int k'(y) dy = \int 1 dy = y + K$$

onde K é uma constante de integração (numérica). Substituindo em (12), obtemos

$$\phi = x^2y^3 + y + K$$

O surgimento da constante arbitrária K nos diz que ϕ não é única. Para conferir os cálculos, o leitor pode querer verificar que $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

Solução (c) Integrando a segunda equação de (11) em relação a y (e tratando x como uma constante), resulta

$$\phi = \int (1 + 3x^2y^2) dy = y + x^2y^3 + k(x) \tag{13}$$

onde $k(x)$ é a “constante” de integração. Diferenciando (13) em relação a x e usando a primeira equação de (11) dá

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 + k'(x) = 2xy^3$$

da qual segue que $k'(x) = 0$ e, conseqüentemente, que $k(x) = K$, onde K é uma constante de integração numérica. Substituindo em (13), obtemos

$$\phi = y + x^2y^3 + K$$

que está de acordo com a solução da parte (b). ◀

► **Exemplo 5** Use a função potencial obtida no Exemplo 4 para calcular a integral

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy$$

Solução O integrando pode ser expresso como $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde \mathbf{F} é o campo vetorial do Exemplo 4. Assim, usando a Fórmula (3) e a função potencial $\phi = y + x^2y^3 + K$ para \mathbf{F} , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy &= \int_{(1,4)}^{(3,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(3, 1) - \phi(1, 4) \\ &= (10 + K) - (68 + K) = -58 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 6** Seja $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$ um campo de forças no plano xy .

- (a) Verifique que o campo vetorial \mathbf{F} é conservativo em todo o plano xy .
- (b) Determine o trabalho realizado pelo campo numa partícula que se move de $(1, 0)$ até $(-1, 0)$ ao longo do caminho semicircular C mostrado na Figura 16.3.8.

Também podemos usar (7) para encontrar uma função potencial de um campo conservativo. Por exemplo, encontre uma função potencial do campo vetorial do Exemplo 4 calculando (7) no segmento de reta

$$\mathbf{r}(t) = t(x\mathbf{i}) + t(y\mathbf{j}) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

de $(0, 0)$ até (x, y) .

Na solução do Exemplo 5, observe que a constante K desaparece. Em problemas de integração futuros, às vezes, omitiremos K nos cálculos.

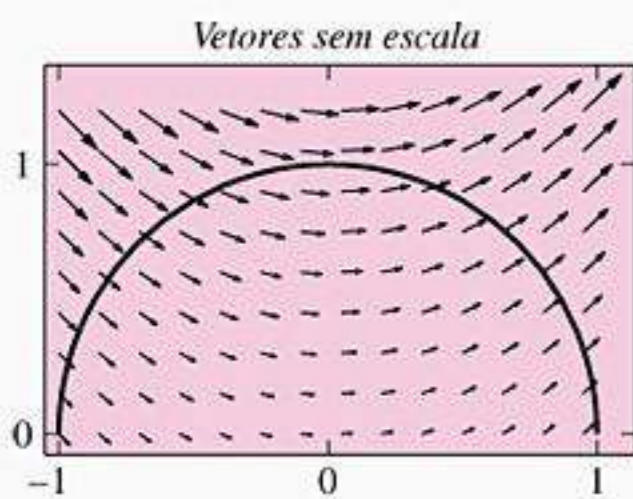


Figura 16.3.8

Solução (a) Para o campo dado, temos $f(x, y) = e^y$ e $g(x, y) = xe^y$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)$$

de modo que (9) vale para todo (x, y) e, portanto, \mathbf{F} é conservativo em todo o plano xy .

Solução (b) Pela Fórmula (34) da Seção 16.2, o trabalho realizado pelo campo é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C e^y dx + xe^y dy \tag{14}$$

Entretanto, os cálculos envolvidos na integração ao longo de C são cansativos, de modo que é preferível aplicar o Teorema 16.3.1, tirando vantagem do fato que o campo é conservativo e a integral é independente do caminho. Assim, escrevemos (14) como

$$W = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} e^y dx + xe^y dy = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0) \tag{15}$$

Como ilustrado no Exemplo 4, podemos determinar ϕ integrando qualquer uma das equações

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y \tag{16}$$

Vamos integrar a primeira. Obtemos

$$\phi = \int e^y dx = xe^y + k(y) \tag{17}$$

Diferenciando essa equação em relação a y e usando a segunda equação de (16), dá

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y + k'(y) = xe^y$$

da qual obtém-se $k'(y) = 0$ ou $k(y) = K$. Assim, por (17)

$$\phi = xe^y + K$$

e, portanto, por (15)

$$W = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0) = (-1)e^0 - 1e^0 = -2 \quad \blacktriangleleft$$

■ CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Todos os resultados desta seção têm análogos no espaço tridimensional: os Teoremas 16.3.1 e 16.3.2 podem ser estendidos ao espaço tridimensional simplesmente adicionando uma terceira variável e modificando as hipóteses adequadamente. Por exemplo, no espaço tridimensional, a Fórmula (3) torna-se

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0) \tag{18}$$

O Teorema 16.3.3 também pode ser estendido para campos vetoriais do espaço tridimensional. Deixamos como exercício provar que se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ for um campo conservativo, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} \tag{19}$$

isto é, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, um campo vetorial que satisfaça essas condições numa região convenientemente restrita é conservativo naquela região se f, g e h forem contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região. Alguns problemas envolvendo as Fórmulas (18) e (19) são dados nos exercícios de revisão no fim deste capítulo.

■ CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for um campo de forças conservativo com função potencial $\phi(x, y, z)$, então diremos que $V(x, y, z) = -\phi(x, y, z)$ é a **energia potencial** do campo no ponto (x, y, z) . Assim, pela versão do espaço tridimensional do Teorema 16.3.1, o trabalho W realizado pela força \mathbf{F} numa partícula que se move ao longo de qualquer caminho C , de um ponto (x_0, y_0, z_0) até um ponto (x_1, y_1, z_1) está relacionado à energia potencial pela equação

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0) = -[V(x_1, y_1, z_1) - V(x_0, y_0, z_0)] \quad (20)$$

Isto é, o trabalho realizado pelo campo é o negativo da variação na energia potencial. Em particular, segue, do análogo no espaço tridimensional do Teorema 16.3.2, que se uma partícula percorre um caminho fechado liso por partes num campo vetorial conservativo, então o trabalho realizado pelo campo é nulo e não há mudança na energia potencial. Dando um passo adiante, suponha que uma partícula de massa m se mova ao longo de uma curva lisa por partes qualquer (não necessariamente fechada) num campo vetorial conservativo \mathbf{F} , começando em (x_0, y_0, z_0) com velocidade v_i e terminado em (x_1, y_1, z_1) com velocidade v_f . Se \mathbf{F} for a única força atuando na partícula, então um argumento análogo ao utilizado na dedução da Equação (5) da Seção 7.7 do Volume 1 mostra que o trabalho realizado na partícula por \mathbf{F} é igual à variação $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$ na energia cinética da partícula. Se denotarmos por V_i a energia potencial no ponto inicial e por V_f a energia no ponto final, segue de (20) que

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -[V_f - V_i]$$

que podemos reescrever como

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + V_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + V_i$$

Essa equação diz que a energia total da partícula (energia cinética + energia potencial) não muda à medida que a partícula se move ao longo de um caminho num campo vetorial conservativo. Esse resultado, chamado **princípio da conservação da energia**, explica a origem do termo “campo vetorial conservativo”.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.3 (Ver página 1139 para respostas.)

1. Se C for uma curva lisa por partes de $(1, 2, 3)$ a $(4, 5, 6)$, então

$$\int_C dx + 2dy + 3dz = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Se C for a parte do círculo $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \leq x$, orientada no sentido anti-horário, e se $f(x, y) = ye^x$, então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Uma função potencial para o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (xz + z)\mathbf{j} + (xy + y + 1)\mathbf{k}$$

$$\text{é } \phi(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. Se a, b e c forem números reais não-nulos tais que o campo vetorial $x^5y^a\mathbf{i} + x^by^c\mathbf{j}$ seja conservativo, então

$$a = \underline{\hspace{2cm}}, \quad b = \underline{\hspace{2cm}}, \quad c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

EXERCÍCIOS 16.3 [C] CAS

1-6 Determine se \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Se for, encontre uma função potencial para ele.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ 2. $\mathbf{F}(x, y) = 3y^2\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j}$
 3. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j}$
 4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \sin y\mathbf{j}$
 5. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = x \ln y\mathbf{i} + y \ln x\mathbf{j}$
 7. (a) Mostre que a integral de linha $\int_C y^2 dx + 2xy dy$ é independente do caminho.
 (b) Calcule a integral da parte (a) ao longo do segmento de reta de $(-1, 2)$ até $(1, 3)$.
 (c) Calcule a integral $\int_{(-1,2)}^{(1,3)} y^2 dx + 2xy dy$ usando o Teorema 16.3.1 e confirme que o valor é o mesmo que o obtido na parte (b).

8. (a) Mostre que a integral de linha $\int_C y \sin x \, dx - \cos x \, dy$ é independente do caminho.
 (b) Calcule a integral da parte (a) ao longo de reta de $(0, 1)$ até $(\pi, -1)$.
 (c) Calcule a integral $\int_{(0,1)}^{(\pi,-1)} y \sin x \, dx - \cos x \, dy$ usando o Teorema 16.3.1 e confirme que o valor é o mesmo que o obtido na parte (b).

9-14 Mostre que a integral é independente do caminho e use o Teorema 16.3.1 para determinar seu valor.

9. $\int_{(1,2)}^{(4,0)} 3y \, dx + 3x \, dy$
 10. $\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy$
 11. $\int_{(0,0)}^{(3,2)} 2xe^y \, dx + x^2 e^y \, dy$
 12. $\int_{(-1,2)}^{(0,1)} (3x - y + 1) \, dx - (x + 4y + 2) \, dy$
 13. $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3 \, dx + 3y^2 x^2 \, dy$
 14. $\int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x} \right) dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x \right) dy$ onde x e y são positivos.

15-18 Confirme que o campo de forças \mathbf{F} é conservativo em alguma região aberta conexa contendo os pontos P e Q e, então, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças numa partícula que se move de P até Q , ao longo de uma curva lisa arbitrária na região de P até Q .

15. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(0, 0)$
 16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3 \mathbf{i} + 3x^2 y^2 \mathbf{j}$; $P(-3, 0), Q(4, 1)$
 17. $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy} \mathbf{i} + xe^{xy} \mathbf{j}$; $P(-1, 1), Q(2, 0)$
 18. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y} \cos x \mathbf{i} + e^{-y} \sin x \mathbf{j}$; $P(\pi/2, 1), Q(-\pi/2, 0)$

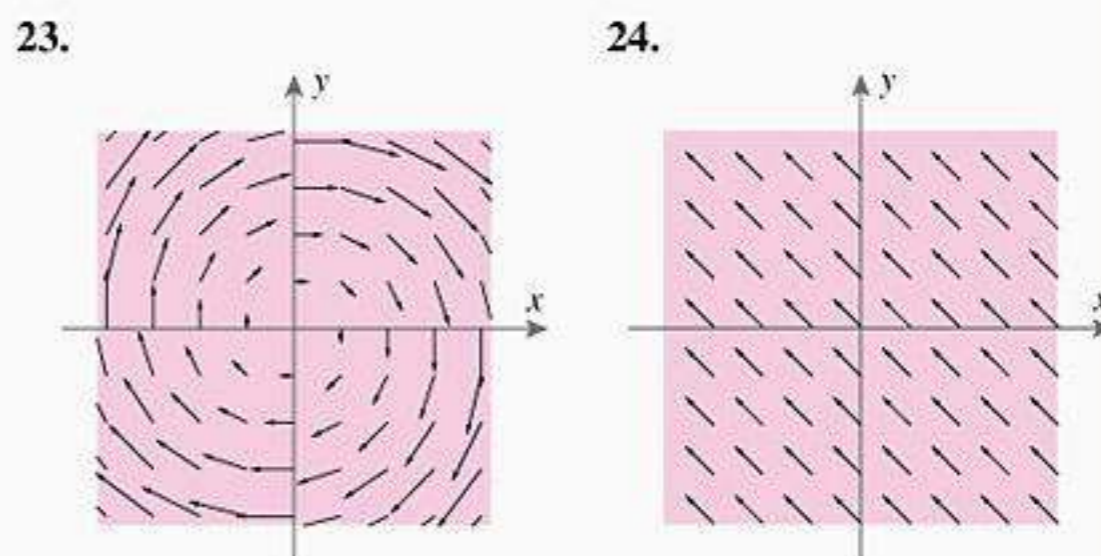
19-20 Encontre o valor exato de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando qualquer método.

19. $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + ye^x) \mathbf{i} + (xe^y + e^x) \mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = \sin(\pi t/2) \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$
 20. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy \mathbf{i} + (x^2 + \cos y) \mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \cos(t/3) \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq \pi)$

- C** 21. Use a capacidade de integração numérica de um CAS ou outro recurso para aproximar o valor da integral do Exercício 19 por integração direta. Confirme que a aproximação numérica é consistente com o valor exato.
C 22. Use a capacidade de integração numérica de um CAS ou outro recurso para aproximar o valor da integral do Exercício 20 por integração direta. Confirme que a aproximação numérica é consistente com o valor exato.

ENFOCANDO CONCEITOS

23-24 O campo vetorial dado é conservativo? Explique.



23. **24.**
 25. Seja C um círculo no domínio no plano xy de um campo vetorial conservativo de funções componentes contínuas. Explique por que devem existir pelo menos dois pontos em C em que o campo vetorial é normal ao círculo.
 26. O resultado do Exercício 25 permanece verdadeiro se o círculo C for trocado por um quadrado? Explique.

27. Prove: Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{i} + g(x, y, z) \mathbf{j} + h(x, y, z) \mathbf{k}$$

for um campo conservativo e f, g e h forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

na região.

28. Use o resultado do Exercício 27 para mostrar que a integral

$$\int_C yz \, dx + xz \, dy + yx^2 \, dz$$

é dependente do caminho.

29. Encontre uma função não-nula h para a qual

$$\mathbf{F}(x, y) = h(x)[x \sin y + y \cos y] \mathbf{i} + h(x)[x \cos y - y \sin y] \mathbf{j}$$

seja conservativo.

30. (a) No Exemplo 3 da Seção 16.1, mostramos que

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

é uma função potencial do campo de quadrado inverso bidimensional

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j})$$

mas não explicamos como a função potencial $\phi(x, y)$ foi obtida. Use o Teorema 16.3.3 para mostrar que o campo de quadrado inverso bidimensional é conservativo em toda parte, exceto na origem e, então, use o método do Exemplo 4 para deduzir a fórmula de $\phi(x, y)$.

- (b) Use uma generalização apropriada do método do Exemplo 4 para deduzir a função potencial

$$\phi(x, y, z) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

para o campo de quadrado inverso tridimensional, dado pela Fórmula (5) da Seção 16.1.

31-32 Use o resultado do Exercício 30 (b).

31. Em cada parte, encontre o trabalho realizado pelo campo de quadrado inverso tridimensional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

numa partícula que se move ao longo da curva C .

- (a) C é o segmento de reta de $P(1, 1, 2)$ para $Q(3, 2, 1)$.
 (b) C é a curva

$$\mathbf{r}(t) = (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^3 + 1)\mathbf{j} + (2 - \sqrt{t})\mathbf{k}$$

onde $0 \leq t \leq 1$.

- (c) C é o círculo de raio 1 no plano xy centrado em $(2, 0, 0)$ percorrido no sentido anti-horário.

32. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$.

- (a) Mostre que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

se C_1 e C_2 forem os trajetos semicirculares de $(1, 0)$ para $(-1, 0)$ dados por

$$C_1: x = \cos t, y = \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$C_2: x = \cos t, y = -\sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

- (b) Mostre que os componentes de \mathbf{F} satisfazem a Fórmula (9).
 (c) Os resultados das partes (a) e (b) violam o Teorema 16.3.3? Explique.

33. Prove o Teorema 16.3.1 se C for uma curva lisa por partes composta de curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n .
 34. Prove que (b) implica (c) no Teorema 16.3.2. [Sugestão: considere quaisquer duas curvas orientadas lisas por partes C_1 e C_2 na região desde um ponto P até um ponto Q e integre em torno da curva fechada consistindo em C_1 e $-C_2$.]
 35. Complete a prova do Teorema 16.3.2 mostrando que $\partial\phi/\partial y = g(x, y)$, onde $\phi(x, y)$ é a função dada em (7).

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.3

1. 18 2. 2 3. $xyz + yz + z$ 4. 6; 6; 5

16.4 TEOREMA DE GREEN

Nesta seção, discutiremos um teorema notável e bonito que expressa uma integral dupla numa região plana em termos de uma integral de linha ao longo de sua fronteira.

■ TEOREMA DE GREEN

16.4.1 TEOREMA (Teorema de Green) *Seja R uma região plana simplesmente conexa, cuja fronteira é uma curva C lisa por partes, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário. Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo R , então*

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA \quad (1)$$

DEMONSTRAÇÃO Para simplificar, demonstraremos o teorema para regiões que sejam simultaneamente do tipo I e tipo II (ver Definição 15.2.1). Uma tal região é mostrada na Figura 16.4.1. O ponto chave da demonstração é mostrar que

$$\int_C f(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dA \quad \text{e} \quad \int_C g(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} dA \quad (2-3)$$

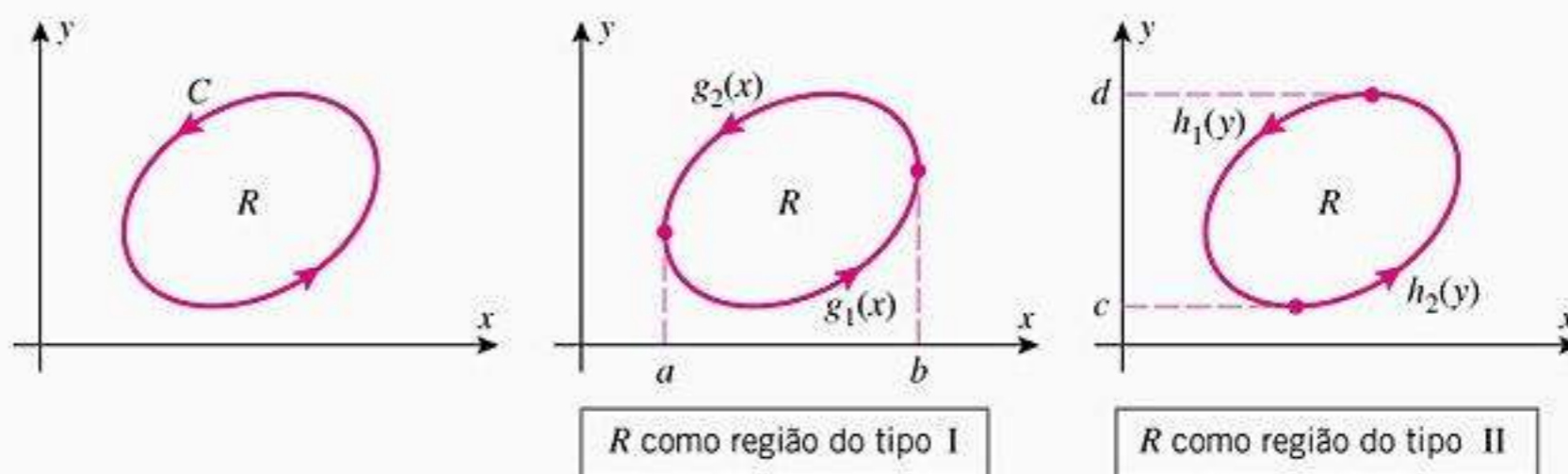


Figura 16.4.1

Para provar (2), considere R como uma região do tipo I e sejam C_1 e C_2 as curvas de fronteira inferior e superior, orientadas conforme a Figura 16.4.2. Então,

$$\int_C f(x, y) dx = \int_{C_1} f(x, y) dx + \int_{C_2} f(x, y) dx$$

ou, de maneira equivalente,

$$\int_C f(x, y) dx = \int_{C_1} f(x, y) dx - \int_{-C_2} f(x, y) dx \tag{4}$$

(Esse passo ajudará a simplificar os cálculos, uma vez que C_1 e $-C_2$ são ambas orientadas da esquerda para a direita.) As curvas C_1 e $-C_2$ podem ser expressas parametricamente como

$$\begin{aligned} C_1: x = t, \quad y = g_1(t) \quad (a \leq t \leq b) \\ -C_2: x = t, \quad y = g_2(t) \quad (a \leq t \leq b) \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (4) como

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) dx &= \int_a^b f(t, g_1(t))x'(t) dt - \int_a^b f(t, g_2(t))x'(t) dt \\ &= \int_a^b f(t, g_1(t)) dt - \int_a^b f(t, g_2(t)) dt \\ &= - \int_a^b [f(t, g_2(t)) - f(t, g_1(t))] dt \\ &= - \int_a^b \left[f(t, y) \right]_{y=g_1(t)}^{y=g_2(t)} dt = - \int_a^b \left[\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dt \\ &= - \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy dx = - \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dA \end{aligned}$$

Pois $x = t$

Forneça os detalhes da demonstração de (3).

A demonstração de (3) é obtida de maneira análoga, considerando R como uma região do tipo II. Omitimos os detalhes. ■

► **Exemplo 1** Use o Teorema de Green para calcular

$$\int_C x^2 y dx + x dy$$

ao longo do caminho triangular mostrado na Figura 16.4.3.

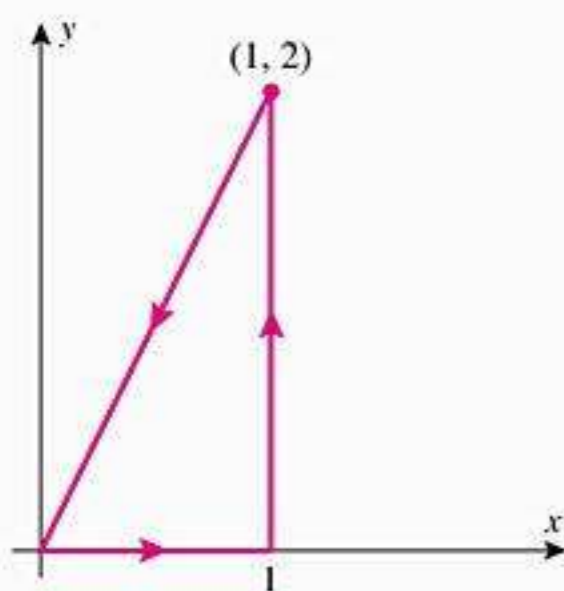


Figura 16.4.3

Solução Como $f(x, y) = x^2y$ e $g(x, y) = x$, segue de (1) que

$$\begin{aligned} \int_C x^2y \, dx + x \, dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right] dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (1 - x^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (2x - 2x^3) \, dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o obtido no Exemplo 10 da Seção 16.2, no qual calculamos a integral de linha diretamente. Note como esta solução é muito mais simples. ◀

■ **UMA NOTAÇÃO PARA INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CURVAS FECHADAS SIMPLES**

É prática comum denotar uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples por um sinal de integral com um círculo sobreposto. Com essa notação, a Fórmula (1) seria escrita como

$$\oint_C f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$

Algumas vezes, acrescentamos uma seta ao círculo para indicar se a integração é no sentido horário ou anti-horário. Assim, se desejarmos enfatizar o sentido anti-horário da integração requerida pelo Teorema 16.4.1, expressamos (1) com a notação

$$\oint_C f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA \tag{5}$$

■ **DETERMINAÇÃO DO TRABALHO USANDO O TEOREMA DE GREEN**

Segue da Fórmula (26) da Seção 16.2, que a integral do lado esquerdo de (5) é o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ numa partícula que se move no sentido anti-horário ao longo da curva fechada simples C . No caso em que esse campo vetorial for conservativo, segue do Teorema 16.3.2 que o integrando da integral dupla do lado direito de (5) é nulo, de modo que o trabalho realizado pelo campo é nulo, como esperado. Para campos vetoriais que não são conservativos, em geral é mais eficiente calcular o trabalho ao longo de curvas fechadas simples usando o Teorema de Green do que parametrizando a curva.

► **Exemplo 2** Encontre o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$$

numa partícula que percorre uma vez o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no sentido anti-horário (Figura 16.4.4).

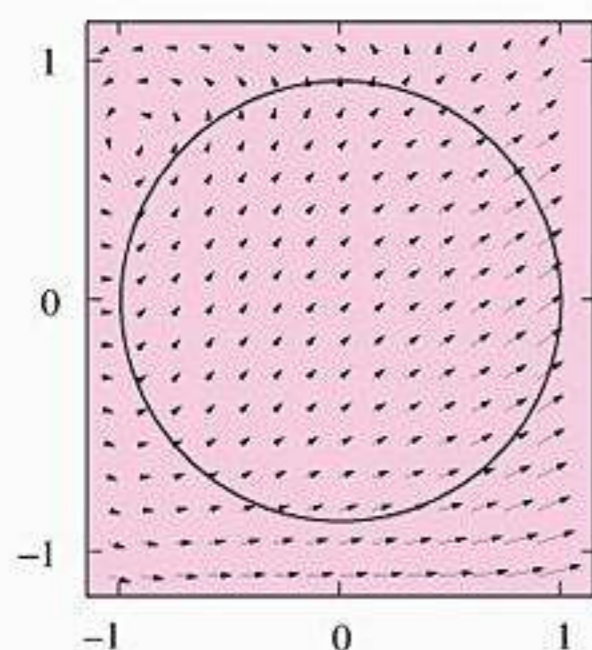


Figura 16.4.4

George Green (1793 – 1841) Matemático e físico inglês. Green abandonou a escola com pouca idade para trabalhar na padaria de seu pai e, conseqüentemente, teve pouca educação básica formal. Quando seu pai abriu um moinho, o rapaz usava o aposento superior como sala de estudo, onde aprendeu Física e Matemática sozinho usando livros de biblioteca. Em 1828, Green publicou seu trabalho mais importante, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias de Eletricidade e Magnetismo). Apesar do Teorema de Green ter aparecido naquele trabalho, o resultado passou virtualmente despercebido, devido à pequena tiragem e à distribuição local. Após a morte de seu pai em 1829, Green foi

instigado por amigos a procurar educação superior. Em 1833, após quatro anos de estudos autodidáticos para cobrir lacunas de sua educação elementar, Green foi admitido na Universidade Caius, em Cambridge. Formou-se quatro anos mais tarde, mas com desempenho desapontador em seus exames finais — possivelmente, porque estava mais interessado em sua própria pesquisa. Depois de uma sucessão de trabalhos sobre luz e som, foi nomeado Membro Perse da Universidade Caius. Dois anos mais tarde ele morreu. Em 1845, quatro anos após a sua morte, seu trabalho de 1828 foi publicado e as teorias nele desenvolvidas por esse obscuro autodidata, filho de padeiro, ajudaram a desbravar o caminho das teorias modernas de eletricidade e magnetismo.

Solução O trabalho W realizado pelo campo é

$$\begin{aligned}
 W &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (e^x - y^3) dx + (\cos y + x^3) dy \\
 &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos y + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x - y^3) \right] dA \quad \text{Teorema de Green} \\
 &= \iint_R (3x^2 + 3y^2) dA = 3 \iint_R (x^2 + y^2) dA \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2)r dr d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3\pi}{2} \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Convertemos para coordenadas polares

■ DETERMINAÇÃO DE ÁREAS USANDO O TEOREMA DE GREEN

O Teorema de Green leva a algumas fórmulas novas para a área A de uma região R que satisfaça as condições do teorema. Duas de tais fórmulas podem ser obtidas como segue:

$$A = \iint_R dA = \oint_C x dy \quad \text{e} \quad A = \iint_R dA = \oint_C (-y) dx$$

Tome $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = x$ em (1).

Tome $f(x, y) = -y$ e $g(x, y) = 0$ em (1).

Pode-se obter uma terceira fórmula somando essas duas equações. Assim, temos as três fórmulas seguintes que expressam a área A de uma região R , em termos de integrais de linha ao longo da fronteira:

$$A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy \quad (6)$$

Apesar da terceira fórmula em (6) parecer mais complicada do que as outras duas, ela leva freqüentemente a integrações mais simples. Cada uma oferece vantagens em certas situações.

► **Exemplo 3** Use uma integral de linha para calcular a área envolvida pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução A elipse, com orientação no sentido anti-horário, pode ser representada parametricamente por

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Se denotarmos essa curva por C , então pela terceira fórmula em (6) a área A envolvida pela elipse é

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)] dt \\
 &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

■ O TEOREMA DE GREEN PARA REGIÕES MULTIPLAMENTE CONEXAS

Lembre que uma região plana é dita simplesmente conexa se não tiver buracos e é dita multiplamente conexa se tiver um ou mais buracos (ver Figura 16.3.6). No início desta seção, enunciamos o Teorema de Green para integração no sentido anti-horário ao longo da fronteira

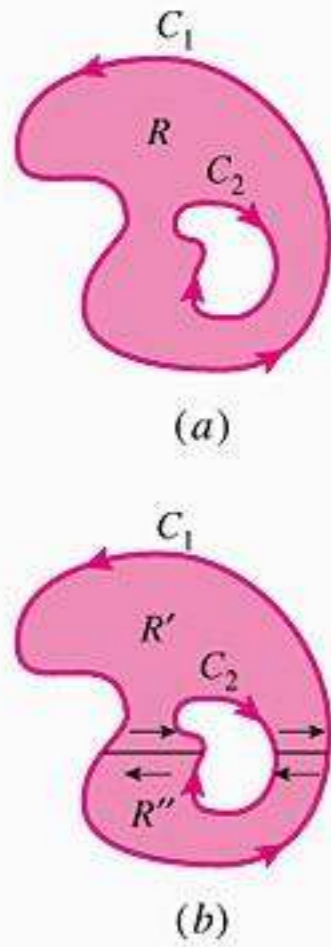


Figura 16.4.5

de uma região simplesmente conexa R (Teorema 16.4.1). Nosso próximo objetivo é estender esse teorema para regiões multiplamente conexas. Para isso, precisamos que a região fique à esquerda quando qualquer porção da fronteira é percorrida no sentido de sua orientação. Isso implica que a curva da fronteira externa da região é orientada no sentido anti-horário e que as curvas da fronteira que envolvem buracos têm orientação no sentido horário (Figura 16.4.5a). Se todas as porções da fronteira de uma região multiplamente conexa R forem orientadas desse modo, então dizemos que a fronteira de R tem **orientação positiva**.

Vamos, agora, deduzir uma versão do Teorema de Green que se aplica a regiões multiplamente conexas com fronteira orientada positivamente. Para simplificar, vamos considerar uma região multiplamente conexa R com um buraco e supor que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo R . Como mostrado na Figura 16.4.5b, dividimos R em duas regiões R' e R'' introduzindo dois “cortes” em R . Os cortes são mostrados como segmentos de reta, mas quaisquer curvas lisas por partes servem. Supondo que f e g satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green em R (e, portanto, em R' e R''), podemos aplicar o teorema a ambas R' e R'' para obter

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA + \iint_{R''} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_{\text{Fronteira de } R'} f(x, y) dx + g(x, y) dy + \oint_{\text{Fronteira de } R''} f(x, y) dx + g(x, y) dy \end{aligned}$$

Entretanto, as duas integrais de linha são tomadas em sentidos opostos ao longo dos cortes e, portanto, cancelam-se, deixando somente as contribuições ao longo de C_1 e C_2 . Assim,

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} f(x, y) dx + g(x, y) dy + \oint_{C_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy \quad (7)$$

que é uma extensão do Teorema de Green para uma região multiplamente conexa com um buraco. Observe que a integral ao longo da fronteira externa é tomada no sentido anti-horário e a integral em torno do buraco é tomada no sentido horário. Mais geralmente, se R for uma região multiplamente conexa com n buracos, então o análogo de (7) envolve a soma de $n + 1$ integrais, uma tomada no sentido anti-horário em torno da fronteira externa e as demais tomadas no sentido horário em torno dos buracos.

Esboce uma prova da versão do Teorema de Green que possa ser aplicada a regiões multiplamente conexas com dois buracos.

► **Exemplo 4** Calcule a integral

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

se C for uma curva simples fechada lisa por partes orientada no sentido anti-horário, de modo que (a) C não envolva a origem e (b) C envolva a origem.

Solução (a) Sejam

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (8)$$

de modo que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

se x e y não forem ambas nulas. Assim, se C não envolver a origem, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

na região simplesmente conexa envolvida por C e, portanto, a integral é nula pelo Teorema de Green.

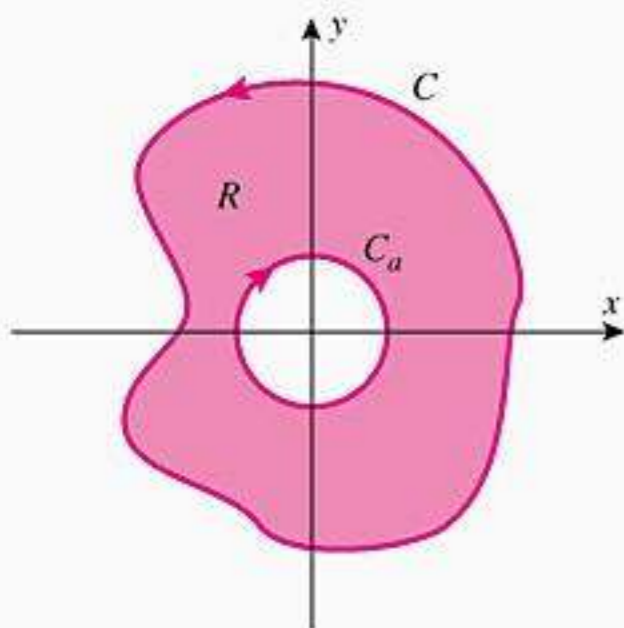


Figura 16.4.6

Solução (b) Ao contrário da situação na parte (a), não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente porque as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ em (8) são descontínuas na origem. Nossos problemas complicam-se mais ainda pelo fato de que não temos uma curva específica C que possamos parametrizar para calcular a integral. Nossa estratégia para contornar esses problemas será substituir C por uma curva específica que produza o mesmo valor para a integral e, então, usar esta curva para o cálculo. Para obter tal curva, vamos aplicar o Teorema de Green para regiões multiplamente conexas a uma região que não contenha a origem. Com essa finalidade, construímos um círculo C_a com orientação no sentido horário, centrado na origem e com raio a suficientemente pequeno para que fique dentro da região envolvida por C (Figura 16.4.6). Isso cria uma região multiplamente conexa R , cujas curvas de fronteira C e C_a têm as orientações requeridas pela Fórmula (7) e de modo que no interior de R as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ em (8) satisfazem as hipóteses do Teorema de Green (a origem está fora de R). Assim, por (7) e (9) segue que

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} + \oint_{C_a} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \iint_R 0 dA = 0$$

Desta equação, obtemos

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = - \oint_{C_a} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

que pode ser reescrita como

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \oint_{-C_a} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

Invertendo a orientação de C_a troca o sinal da integral.

Mas C_a tem orientação no sentido horário, portanto $-C_a$ tem orientação no sentido anti-horário. Mostramos, assim, que a integral original pode ser calculada integrando no sentido anti-horário em torno de um círculo de raio a , centrado na origem e que fica no interior da região envolvida por C . Tal círculo pode ser expresso parametricamente como $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); e portanto

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) dt + (a \cos t)(a \cos t) dt}{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.4 (Ver página 1147 para respostas.)

- Se C for o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C -y dx + x dy = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Se C for o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C 2xy dx + (x^2 + x) dy = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Algumas vezes podemos simplificar a aplicação do Teorema de Green usando considerações geométricas. Por exemplo, se C

for o círculo unitário centrado na origem e orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C (y^3 - y - x) dx + (x^3 + x + y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Qual região R e qual escolha de funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ nos permitem usar a Fórmula (1) do Teorema 16.4.1 para afirmar que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2x + 2y) dy dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt?$$

EXERCÍCIOS 16.4 C CAS

1-2 Calcule a integral de linha usando o Teorema de Green e verifique a resposta calculando-a diretamente.

1. $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, onde C é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ orientado no sentido anti-horário.
2. $\oint_C y dx + x dy$, onde C é o círculo unitário orientado no sentido anti-horário.

3-13 Use o Teorema de Green para calcular a integral. Em cada exercício, suponha que a curva C seja orientada no sentido anti-horário.

3. $\oint_C 3xy dx + 2xy dy$, onde C é o retângulo limitado por $x = -2$, $x = 4$, $y = 1$ e $y = 2$.
4. $\oint_C (x^2 - y^2) dx + x dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.
5. $\oint_C x \cos y dx - y \sin x dy$, onde C é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$.
6. $\oint_C y \operatorname{tg}^2 x dx + \operatorname{tg} x dy$, onde C é o círculo $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.
7. $\oint_C (x^2 - y) dx + x dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
8. $\oint_C (e^x + y^2) dx + (e^y + x^2) dy$, onde C é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $y = x$.
9. $\oint_C \ln(1 + y) dx - \frac{xy}{1 + y} dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 4)$.
10. $\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy$, onde C é a fronteira da região no primeiro quadrante compreendida pelos eixos coordenados e o círculo $x^2 + y^2 = 16$.
11. $\oint_C \operatorname{arc} \operatorname{tg} y dx - \frac{y^2 x}{1 + y^2} dy$, onde C é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
12. $\oint_C \cos x \operatorname{sen} y dx + \operatorname{sen} x \cos y dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(0, 3)$.
13. $\oint_C x^2 y dx + (y + xy^2) dy$, onde C é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $x = y^2$.
14. Seja C a fronteira da região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$. Supondo que C esteja orientada no sentido anti-horário, calcule as integrais seguintes usando o Teorema de Green:
 - (a) $\oint_C (6xy - y^2) dx$
 - (b) $\oint_C (6xy - y^2) dy$

C **15.** Use um CAS para verificar o Teorema de Green calculando ambas as integrais da equação

$$\oint_C e^y dx + ye^x dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(ye^x) - \frac{\partial}{\partial y}(e^y) \right] dA$$

onde

- (a) C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$;
- (b) C é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $x = y^2$.

16. No Exemplo 3, usamos o Teorema de Green para obter a área de uma elipse. Calcule essa área usando a primeira e depois a segunda fórmula de (6).
17. Use uma integral de linha para encontrar a área da região envolvida pelo astróide

$$x = a \cos^3 \phi, \quad y = a \operatorname{sen}^3 \phi \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

[Ver Exercício 29 da Seção 7.4 do Volume 1.]

18. Use uma integral de linha para encontrar a área do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$.
19. Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

para encontrar a área da região varrida pela reta da origem até a elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ se t variar de $t = 0$ a $t = t_0$ ($0 \leq t_0 \leq 2\pi$).

20. Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

para encontrar a área da região varrida pela reta da origem até a hipérbole $x = a \cosh t$, $y = b \operatorname{senh} t$ se t variar de $t = 0$ a $t = t_0$ ($t_0 \geq 0$).

ENFOCANDO CONCEITOS

21. Suponha que $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial cujas funções componentes f e g tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Seja C uma curva lisa por partes, simples e fechada, orientada no sentido anti-horário, que é a fronteira de uma região R contida no domínio de \mathbf{F} . Podemos interpretar \mathbf{F} como um campo vetorial no espaço tridimensional escrevendo-o como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Com essa convenção, explique por que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

22. Suponha que $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial no plano xy e que f e g tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas, com $f_y = g_x$ em toda parte. Use o Teorema de Green para explicar por que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde C_1 e C_2 são as curvas orientadas na figura abaixo. (Compare esse resultado com os Teoremas 16.3.2 e 16.3.3.)

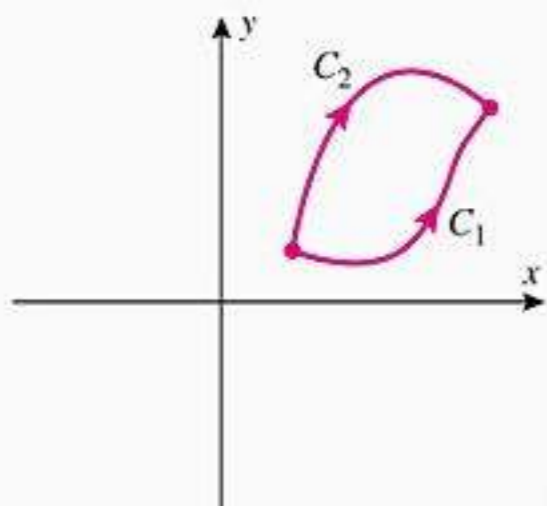


Figura Ex-22

23. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas com $g(x) \leq f(x)$. Seja R a região delimitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja C a fronteira de R orientada no sentido anti-horário. Qual é a fórmula conhecida que resulta da aplicação do Teorema de Green à integral $\int_C (-y) dx$
24. Na figura abaixo, C é uma curva lisa orientada de $P(x_0, y_0)$ a $Q(x_1, y_1)$, contida dentro do retângulo de vértices na origem e Q e fora do retângulo de vértices na origem e P .
- Qual região na figura tem área $\int_C x dy$?
 - Qual região na figura tem área $\int_C y dx$?
 - Expresse $\int_C x dy + \int_C y dx$ em termos das coordenadas de P e Q .
 - Interprete o resultado de (c) em termos do Teorema Fundamental de Integrais de Linha.
 - Interprete o resultado de (c) em termos de integração por partes.

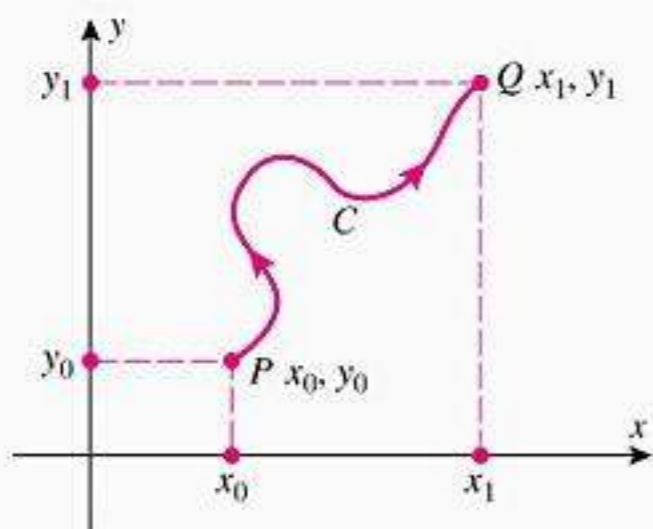


Figura Ex-24

25-26 Use o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado pelo campo de forças \mathbf{F} numa partícula que se move ao longo do caminho especificado.

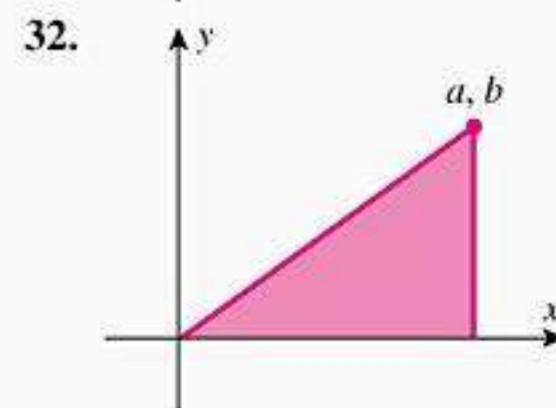
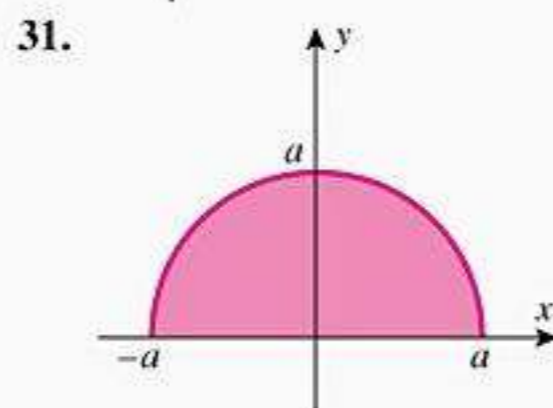
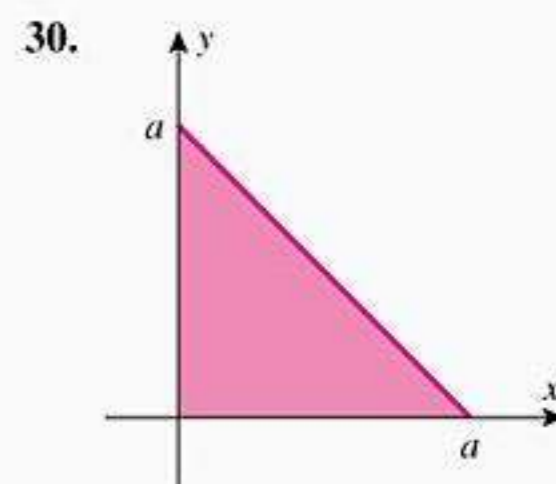
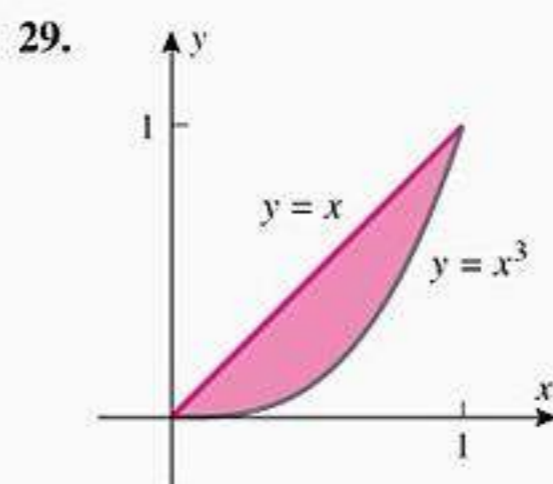
25. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^2 + xy)\mathbf{j}$; a partícula começa em $(5, 0)$, percorre o semicírculo superior $x^2 + y^2 = 25$ e retorna ao seu ponto de partida ao longo do eixo x .
26. $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + \sqrt{x}\mathbf{j}$; a partícula percorre uma vez, no sentido anti-horário, a curva fechada dada pelas equações $y = 0, x = 2$ e $y = x^3/4$.

27. Calcule $\oint_C y dx - x dy$, onde C é a cardióide
 $r = a(1 + \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

28. Seja R uma região do plano com área A , cuja fronteira é uma curva fechada simples lisa por partes C . Use o Teorema de Green para provar que o centróide (\bar{x}, \bar{y}) de R é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$

29-32 Use o resultado do Exercício 28 para encontrar o centróide da região.



33. Encontre uma curva fechada simples C com orientação anti-horário que maximize o valor de

$$\oint_C \frac{1}{3}y^3 dx + (x - \frac{1}{3}x^3) dy$$

e explique seu raciocínio.

34. (a) Seja C o segmento de reta do ponto (a, b) até o ponto (c, d) . Mostre que

$$\int_C -y dx + x dy = ad - bc$$

- (b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que a área A de um triângulo de vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) , percorrido no sentido anti-horário, é

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)]$$

- (c) Determine uma fórmula para a área de um polígono de vértices sucessivos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, percorridos no sentido anti-horário.
- (d) Use o resultado da parte (c) para calcular a área do quadrilátero de vértices $(0, 0), (3, 4), (-2, 2), (-1, 0)$.

35-36 Calcule a integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a fronteira da região R e C é orientada de modo que a região fique à esquerda quando a fronteira é percorrida no sentido de sua orientação.

35. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (4x - \cos y)\mathbf{j}$; C é a fronteira da região R que está no interior do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, 5)$, $(0, 5)$, mas está fora do retângulo de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$.
36. $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-x} + 3y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$; C é a fronteira da região R entre os círculos $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 - 2x + y^2 = 3$.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.4

1. 8 2. $\frac{1}{2}$ 3. 2π 4. R é a região $x^2 + y^2 \leq 1$ ($0 \leq x, 0 \leq y$) e $f(x, y) = -y^2$, $g(x, y) = x^2$

16.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Em seções anteriores, consideramos quatro tipos de integrais – integrais em intervalos, integrais duplas em regiões bidimensionais, integrais triplas em sólidos tridimensionais e integrais de linha ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensionais. Nesta seção, discutiremos integrais em superfícies no espaço tridimensional. Tais integrais ocorrem em problemas envolvendo fluxo fluido e de calor, eletricidade, magnetismo, massa e centro de gravidade.

■ DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

Nesta seção definimos o que significa integrar uma função $f(x, y, z)$ numa superfície paramétrica lisa σ . Para motivar a definição, consideraremos o problema de encontrar a massa de uma lâmina curva cuja função densidade (massa por unidade de área) seja conhecida. Lembre que na Seção 15.6 definimos uma lâmina como sendo um objeto achatado idealizado que é suficientemente fino para poder ser considerado como uma região plana bidimensional. Analogamente, uma lâmina curva é um objeto idealizado que é suficientemente fino para poder ser considerado como uma superfície no espaço tridimensional. Uma lâmina curva pode parecer uma chapa encurvada, como na Figura 16.5.1, ou englobar uma região tridimensional, como a casca de um ovo. Modelaremos a lâmina curva por uma superfície paramétrica lisa σ . Dado um ponto (x, y, z) de σ , vamos denotar por $f(x, y, z)$ o valor correspondente da função densidade. Para calcular a massa da lâmina, procedemos como segue:



A espessura de uma lâmina curva é desprezível.

Figura 16.5.1

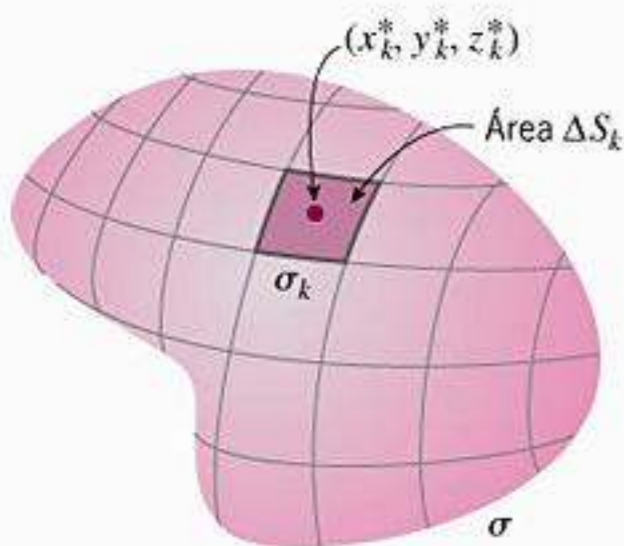


Figura 16.5.2

- Como mostra a Figura 16.5.2, dividimos σ em n pequenas porções $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ com áreas $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, respectivamente. Sejam (x_k^*, y_k^*, z_k^*) um ponto amostral da k -ésima porção e ΔM_k a massa dessa porção.
- Se as dimensões de σ_k forem muito pequenas, então o valor de f não irá variar muito ao longo da k -ésima porção e podemos aproximar f nessa porção pelo valor $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Segue que a massa da k -ésima porção pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

- A massa M de toda a lâmina pode, então, ser aproximada por

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k \tag{1}$$

- Utilizaremos a notação $n \rightarrow \infty$ para indicar o processo de aumentar n de tal forma que a dimensão máxima de cada porção tenda a 0. É plausível que o erro em (1) vá tender a 0 quando $n \rightarrow \infty$ e que o valor exato de M seja dado por

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k \tag{2}$$

O limite em (2) é muito parecido com o limite usado para definir massa de um arame fino [Fórmula (2) da Seção 16.2]. Por analogia com a Definição 16.2.1, apresentamos a definição seguinte.

16.5.1 DEFINIÇÃO Se σ for uma superfície paramétrica lisa, então a *integral de superfície* de $f(x, y, z)$ em σ é

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k \quad (3)$$

desde que esse limite exista e não dependa da maneira que sejam feitas as subdivisões de σ e escolhidos os pontos amostrais (x_k^*, y_k^*, z_k^*) .

Pode ser mostrado que se f for contínua, então existe a integral de f em σ .

Pela Definição 16.5.1 e por (2) vemos que se σ modelar uma lâmina e se $f(x, y, z)$ for a função densidade da lâmina, então a massa M da lâmina é dada por

$$M = \iint_{\sigma} f(x, y, z) dS \quad (4)$$

Ou seja, para obter a massa de uma lâmina, integramos a função densidade na superfície lisa que modela a lâmina.

Note que se σ for uma superfície lisa de área de superfície S e se f for identicamente 1, então segue imediatamente da Definição 16.5.1 que

$$\iint_{\sigma} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S = S \quad (5)$$

■ **CÁLCULO DE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE**

Há vários procedimentos para calcular integrais de superfície que dependem de como a superfície σ é representada. O seguinte teorema oferece um método de cálculo da integral de superfície quando σ é representada parametricamente.

16.5.2 TEOREMA Seja σ uma superfície paramétrica lisa cuja equação vetorial é

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

onde (u, v) varia numa região R do plano uv . Se $f(x, y, z)$ for contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \quad (6)$$

Explique como usar a Fórmula (6) para confirmar a Fórmula (5).

Para motivar esse resultado, suponha que o domínio dos parâmetros R seja subdividido como na Figura 15.4.10 e suponha que o ponto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) em (3) corresponda aos

a re arâmetr u_k^* e v_k^* . Se u arm a Fórmu a 9 a Seçã 15.4 ara a r imar ΔS_k e u n ue err e a r imaçã ten am ara zer uan $n \rightarrow +\infty$, entã egue e 3 ue

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*), z(u_k^*, v_k^*)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

ue ugere a Fórmu a

Emb ra e rema 15.2 tenha i enuncia ara u er ície aramétrica *lisas*, a Fórmu a ermanece á i a me m e ermitirm ue $\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v$ e a igua a $\mathbf{0}$ na r nteira e R

► **Exemplo 1** a cu e a integra e u er ície $\iint_{\sigma} x^2 dS$ na e era $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solução m n E em 9 a Seçã 15.4 c m $a = 1$, a e era é gráfíc a unçã et ria

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k} \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (7)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = \sin \phi$$

Pe c m nente i e r, integran a integra e u er ície e er a em term e ϕ e θ c m $x^2 = \cos^2 \phi \cos^2 \theta$ im, egue e , c m ϕ e θ n ugar e u e v e R c m a regiã retangu ar an $\phi\theta$ etermina a e a e igua a e e 7, ue

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x^2 dS &= \iint_R (\cos^2 \phi \cos^2 \theta) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 \phi \cos^2 \theta d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos^3 \phi d\phi \right] \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \phi - \cos \phi \right]_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Fórmula (11),
Seção 8.3 do Volume I

Fórmula (8),
Seção 8.3 do Volume I

■ **INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE EM $z = g(x, y)$, $y = g(x, z)$ E $x = g(y, z)$**

ca em ue σ r a rma $z = g(x, y)$, em t mar $x = u$ e $y = v$ c m arâmetr e e re ar a e uaçã a u er ície c m

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(x, v)\mathbf{k}$$

ca em ue btem

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Explique por que a função $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ dada em (7) deixa de ser lisa em seu domínio.

[ver a dedução da Fórmula (11) na Seção 15.4]. Assim, segue de (6) que

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Observe que, nessa fórmula, a região R fica no plano xy porque os parâmetros são x e y . Geometricamente, essa região é a projeção de σ no plano xy . O seguinte teorema resume esse resultado e dá fórmulas análogas para as integrais de superfície em superfícies da forma $y = g(x, z)$ e $x = g(y, z)$.

16.5.3 TEOREMA

(a) Sejam σ uma superfície com equação $z = g(x, y)$ e R sua projeção no plano xy . Se g tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \quad (8)$$

(b) Sejam σ uma superfície com equação $y = g(x, z)$ e R sua projeção no plano xz . Se g tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, g(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA \quad (9)$$

(c) Sejam σ uma superfície com equação $x = g(y, z)$ e R sua projeção no plano yz . Se g tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(g(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1} dA \quad (10)$$

As Fórmulas (9) e (10) podem ser obtidas a partir da Fórmula (8). Explique como.

► **Exemplo 2** Calcule a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} xz dS$$

onde σ é a parte do plano $x + y + z = 1$ que fica no primeiro octante.

Solução A equação do plano pode ser escrita como

$$z = 1 - x - y$$

Conseqüentemente, podemos aplicar a Fórmula (8) com $z = g(x, y) = 1 - x - y$ e $f(x, y, z) = xz$. Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

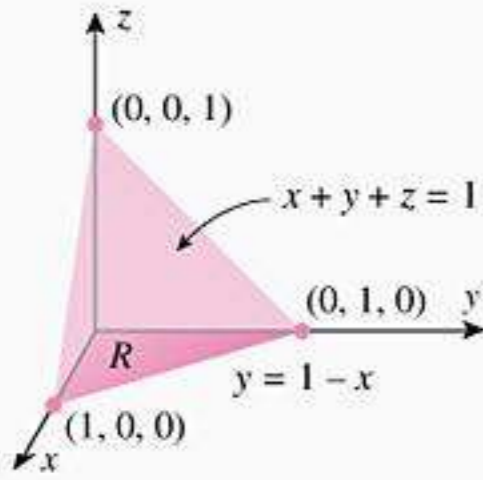


Figura 16.5.3

portanto, (8) é dado por

$$\iint_{\sigma} xz \, dS = \iint_R x(1-x-y)\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1} \, dA \quad (11)$$

onde R é a projeção de σ no plano xy (Figura 16.5.3). Reescrevendo a integral dupla em (11) como uma integral iterada, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xz \, dS &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy) \, dy \, dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \sqrt{3} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{24} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 3** Calcule a integral de linha

$$\iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS$$

onde σ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compreendida pelos planos $z = 1$ e $z = 2$ (Figura 16.5.4).

Solução Vamos aplicar a Fórmula (8) com

$$z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = y^2 z^2$$

Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

de modo que

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

(verifique) e portanto (8) dá

$$\iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS = \iint_R y^2 (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \sqrt{2} \, dA = \sqrt{2} \iint_R y^2 (x^2 + y^2) \, dA$$

onde R é o anel compreendido por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ (Figura 16.5.4). Usando coordenadas polares para calcular essa integral dupla no anel R obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)^2 (r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \operatorname{sen}^2 \theta \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \operatorname{sen}^2 \theta \right]_{r=1}^2 d\theta = \frac{21}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{21}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{21\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{Formula (7) da Seção 8.3 do Volume 1} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Calcule a integral no Exemplo 3 com a ajuda da Fórmula (6) e a parametrização

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, r)$$

$$(1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

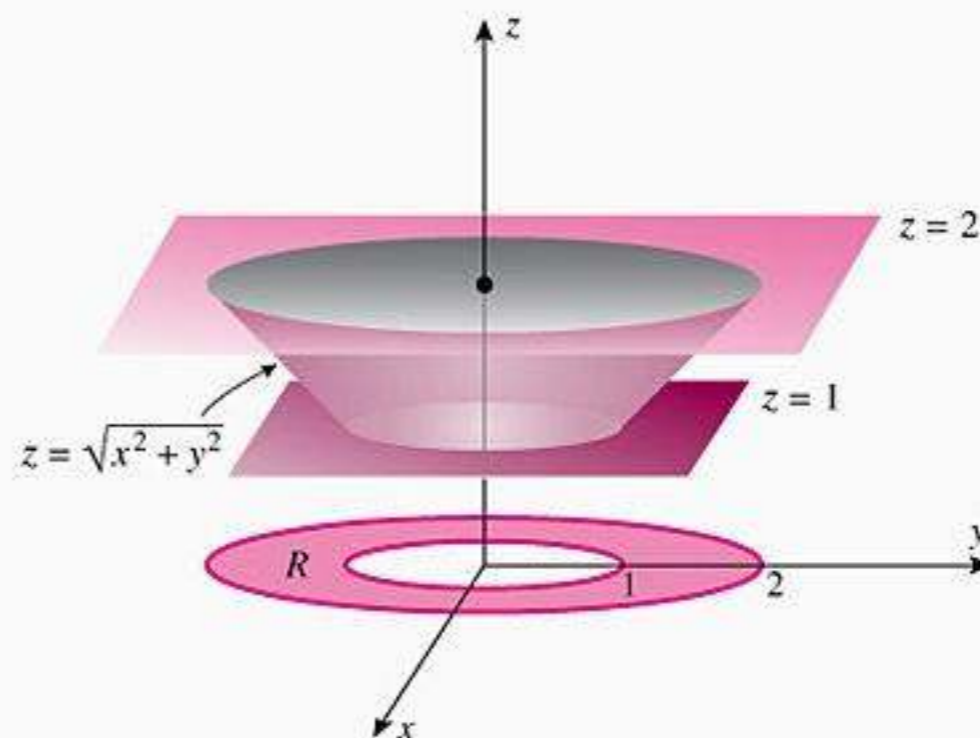


Figura 16.5.4

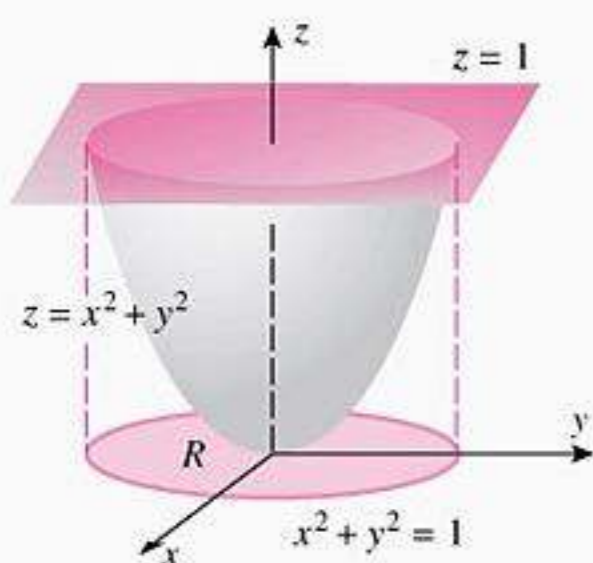


Figura 16.5.5

► **Exemplo 4** Suponha que uma lâmina curva σ com densidade constante $\delta(x, y, z) = \delta_0$ seja a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ (Figura 16.5.5). Determine a massa da lâmina.

Solução Como $z = g(x, y) = x^2 + y^2$, segue que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Portanto

$$M = \iint_{\sigma} \delta_0 \, dS = \iint_R \delta_0 \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} \, dA = \delta_0 \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \quad (12)$$

onde R é a região circular envolvida por $x^2 + y^2 = 1$. Para calcular (12) usamos coordenadas polares:

$$\begin{aligned} M &= \delta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta = \frac{\delta_0}{12} \int_0^{2\pi} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_{r=0}^1 \, d\theta \\ &= \frac{\delta_0}{12} \int_0^{2\pi} (5^{3/2} - 1) \, d\theta = \frac{\pi\delta_0}{6} (5\sqrt{5} - 1) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

✓ **EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.5** (Ver página 1155 para respostas.)

- Considere a integral de superfície $\iint_{\sigma} f(x, y, z) \, dS$.
 - Se σ for uma superfície paramétrica de equação vetorial $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ então calculamos a integral trocando dS por _____.
 - se σ for o gráfico de uma função $z = g(x, y)$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então calculamos a integral trocando dS por _____.
- Se σ for a região triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, então

$$\iint_{\sigma} (x + y + z) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Se σ for a esfera de raio 2 centrada na origem, então

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Se $f(x, y, z)$ for a função densidade de massa de uma lâmina curva σ , então a massa de σ é dada pela integral _____.

EXERCÍCIOS 16.5 C CAS

1-8 Calcule a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS$$

1. $f(x, y, z) = z^2$; σ é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
2. $f(x, y, z) = xy$; σ é a porção do plano $x + y + z = 1$ que fica no primeiro octante.
3. $f(x, y, z) = x^2y$; σ é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre os planos $y = 0$, $y = 1$ e acima do plano xy .
4. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; σ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano $z = 1$.
5. $f(x, y, z) = x - y - z$; σ é a porção do plano $x + y = 1$ no primeiro octante entre $z = 0$ e $z = 1$.
6. $f(x, y, z) = x + y$; σ é a porção do plano $z = 6 - 2x - 3y$ no primeiro octante.
7. $f(x, y, z) = x + y + z$; σ é a superfície do cubo definido pelas desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. [Sugestão: integre em cada face separadamente.]
8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; σ é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

9-10 O cálculo de uma integral de superfície resulta, às vezes, numa integral imprópria. Quando isso ocorre, podemos tentar determinar o valor da integral usando um limite apropriado ou então tentar outro método. Nestes exercícios exploramos ambas abordagens.

9. Considere a integral de $f(x, y, z) = z + 1$ no hemisfério superior $\sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$).
 - (a) Explique por que o cálculo dessa integral de superfície resulta numa integral imprópria se for utilizado (8).
 - (b) Use (8) para calcular a integral de f na superfície $\sigma_r: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2 < 1$). Tome o limite desse resultado quando $r \rightarrow 1^-$ para determinar a integral de f em σ .
 - (c) Parametrize σ usando coordenadas esféricas e calcule a integral de f em σ usando (6). Verifique que sua resposta confere com o resultado de (b).
10. Considere a integral de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no cone $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).
 - (a) Explique por que o cálculo dessa integral de superfície resulta numa integral imprópria se for utilizado (8).
 - (b) Use (8) para calcular a integral de f na superfície $\sigma_r: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 < r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$). Tome o limite desse resultado quando $r \rightarrow 0^+$ para determinar a integral de f em σ .
 - (c) Parametrize σ usando coordenadas esféricas e calcule a integral de f em σ usando (6). Verifique que sua resposta confere com o resultado de (b).

ENFOCANDO CONCEITOS

11-14 Para calcular uma integral de superfície sem utilizar uma parametrização da superfície podemos, em alguns casos, usar a Definição 16.5.1, junto com algumas considerações de simetria. Nestes exercícios, σ denota a esfera unitária centrada na origem.

11. (a) Explique por que é possível subdividir σ em porções e escolher um ponto amostral (x_k^*, y_k^*, z_k^*) tal que (i) a área de cada porção é tão pequena quanto se queira e (ii) para cada ponto amostral (x_k^*, y_k^*, z_k^*) , existe um ponto amostral (x_j^*, y_j^*, z_j^*) tal que

$$x_k = -x_j, \quad y_k = y_j, \quad z_k = z_j$$

e com $\Delta S_k = \Delta S_j$.

- (b) Use a Definição 16.5.1, o resultado em (a) e o fato de que a integral de superfície existe para funções contínuas para provar que $\iint_{\sigma} x^n dS = 0$ vale para qualquer inteiro n positivo ímpar.

12. Use o argumento no Exercício 11 para provar que se $f(x)$ for uma função contínua e ímpar de x e se $g(y, z)$ for uma função contínua, então

$$\iint_{\sigma} f(x)g(y, z) dS = 0$$

13. (a) Explique por que

$$\iint_{\sigma} x^2 dS = \iint_{\sigma} y^2 dS = \iint_{\sigma} z^2 dS$$

- (b) Conclua de (a) que

$$\iint_{\sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \left[\iint_{\sigma} x^2 dS + \iint_{\sigma} y^2 dS + \iint_{\sigma} z^2 dS \right]$$

- (c) Use (b) para calcular

$$\iint_{\sigma} x^2 dS$$

sem efetuar uma integração.

14. Use os resultados dos Exercícios 12 e 13 para calcular

$$\iint_{\sigma} (x - y)^2 dS$$

sem efetuar uma integração.

15-16 Monte, mas não calcule, uma integral iterada igual à integral de superfície dada projetando σ no (a) plano xy , (b) plano yz e (c) plano xz .

15. $\iint_{\sigma} xyz dS$, onde σ é a porção do plano $2x + 3y + 4z = 12$ no primeiro octante.

16. $\iint_{\sigma} xz \, dS$, onde σ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante.

C 17. Use um CAS para confirmar que as três integrais obtidas no Exercício 15 são iguais e calcule o valor exato da integral de superfície.

C 18. Tente confirmar com um CAS que as três integrais obtidas no Exercício 16 são iguais. Se não conseguir, qual é a dificuldade?

19-20 Monte, mas não calcule, duas integrais iteradas diferentes iguais à integral dada.

19. $\iint_{\sigma} xyz \, dS$, onde σ é a porção da superfície $y^2 = x$ entre os planos $z = 0$, $z = 4$, $y = 1$ e $y = 2$.

20. $\iint_{\sigma} x^2 y \, dS$, onde σ é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro octante entre os planos $x = 0$, $x = 9$, $z = y$ e $z = 2y$.

C 21. Use um CAS para confirmar que as duas integrais obtidas no Exercício 19 são iguais e calcule o valor exato da integral de superfície.

C 22. Use um CAS para determinar o valor da integral de superfície

$$\iint_{\sigma} x^2 yz \, dS$$

na porção σ do parabolóide elíptico $z = 5 - 3x^2 - 2y^2$ que fica acima do plano xy .

23-24 Encontre a massa da lâmina com densidade constante δ_0 .

23. A lâmina que é a porção do cilindro circular $x^2 + z^2 = 4$ que fica diretamente acima do retângulo $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$ no plano xy .

24. A lâmina que é a porção do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 8$.

25. Encontre a massa da lâmina que é a porção da superfície $y^2 = 4 - z$ entre os planos $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 3$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = y$.

26. Encontre a massa da lâmina que é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = x^2 z$.

27. Se uma lâmina curva tem densidade constante δ_0 , que relação deve existir entre sua massa e a área de superfície? Explique seu raciocínio.

28. Mostre que se a densidade da lâmina $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, em cada ponto, for igual à distância entre este ponto e o plano xy , então a massa da lâmina é $2\pi a^3$.

29-30 O centróide de uma superfície σ é definido por

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x \, dS}{\text{área de } \sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y \, dS}{\text{área de } \sigma}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_{\sigma} z \, dS}{\text{área de } \sigma}$$

Encontre o centróide da superfície nestes exercícios.

29. A porção do parabolóide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ abaixo do plano $z = 4$.

30. A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano $z = 1$.

31-34 Calcule a integral $\iint_{\sigma} f(x, y, z) \, dS$ na superfície σ representada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$.

31. $f(x, y, z) = xyz$; $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$
($1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi/2$)

32. $f(x, y, z) = \frac{x^2 + z^2}{y}$; $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \mathbf{i} + u \mathbf{j} + 2 \sin v \mathbf{k}$
($1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$)

33. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$;
 $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$ ($0 \leq u \leq \sin v, 0 \leq v \leq \pi$)

34. $f(x, y, z) = e^{-z}$;
 $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \cos v \mathbf{i} + 2 \sin u \sin v \mathbf{j} + 2 \cos u \mathbf{k}$
($0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 2\pi$)

C 35. Use um CAS para aproximar a massa da lâmina curva $z = e^{-x^2 - y^2}$ que fica acima da região no plano xy envolvida por $x^2 + y^2 = 9$, sabendo-se que a densidade é $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

C 36. A superfície σ mostrada na figura abaixo, chamada *faixa de Möbius*, é representada pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= (5 + u \cos(v/2)) \cos v \\ y &= (5 + u \cos(v/2)) \sin v \\ z &= u \sin(v/2) \end{aligned}$$

onde $-1 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2\pi$

(a) Use um CAS para gerar uma cópia razoável dessa superfície.

(b) Use um CAS para aproximar a localização do centróide de σ (ver a definição que precede o Exercício 29).

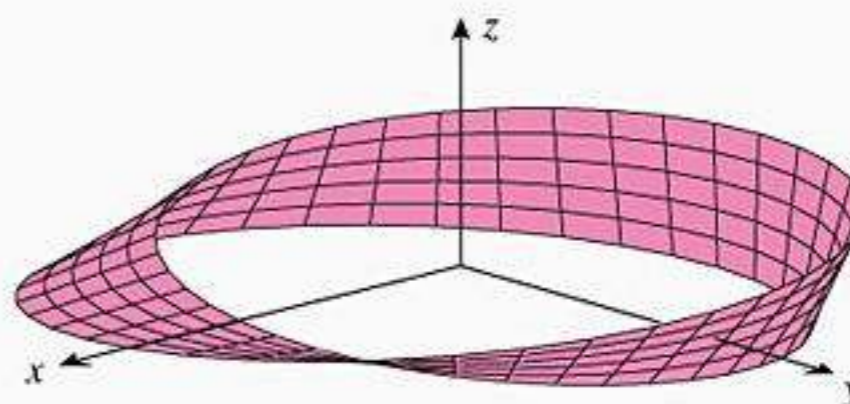


Figura Ex-36

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.5

1. (a) $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$ (b) $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. 64π 4. $\iint f(x, y, z) dS$

16.6 APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

Nesta seção, discutiremos aplicações das integrais de superfície a campos vetoriais associados com fluxos fluidos e forças eletrostáticas. Porém, as idéias que desenvolveremos serão de natureza geral e também aplicáveis a outros tipos de campos vetoriais.

■ CAMPOS DE FLUIDOS

Trataremos, nesta seção, de campos vetoriais no espaço tridimensional que envolvam algum tipo de “fluxo” — o fluxo de um fluido ou o fluxo de partículas carregadas num campo eletrostático, por exemplo. No caso de fluxo fluido, o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a velocidade de uma partícula fluida no ponto (x, y, z) e as partículas do fluido fluem ao longo de “correntes” tangenciais aos vetores velocidade (Figura 16.6.1a). No caso de um campo eletrostático, $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a força que o campo exerce numa pequena unidade de carga positiva no ponto (x, y, z) e tais cargas aceleram ao longo de “linhas elétricas” tangenciais aos vetores da força (Figuras 16.6.1b e 16.6.1c).

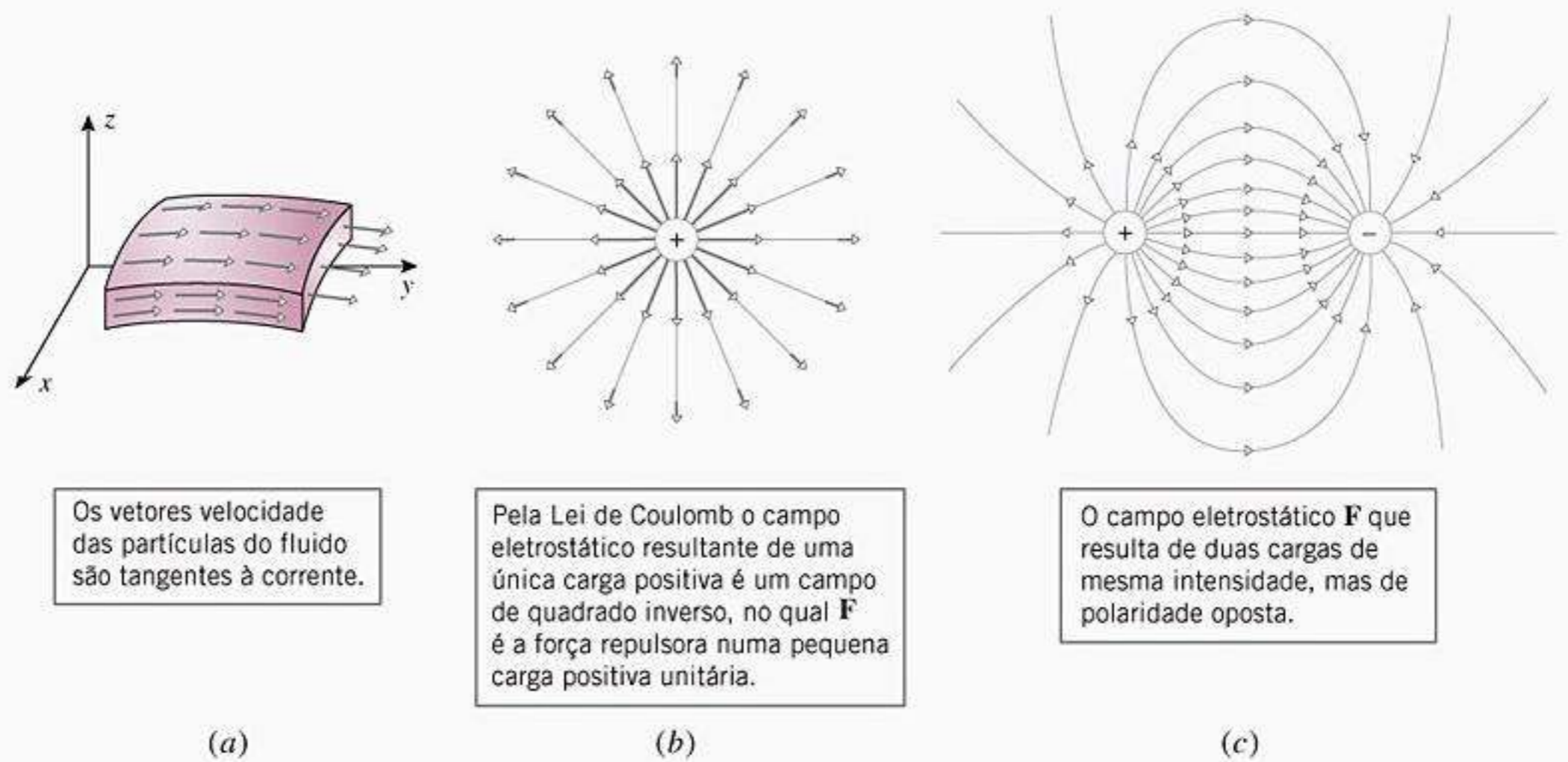
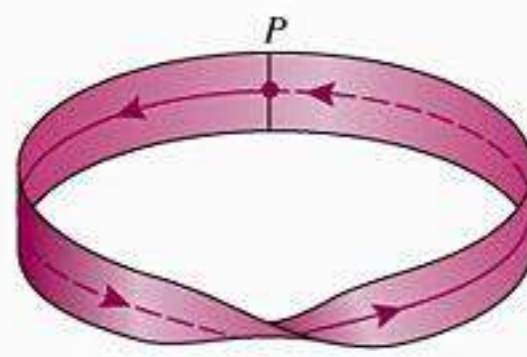
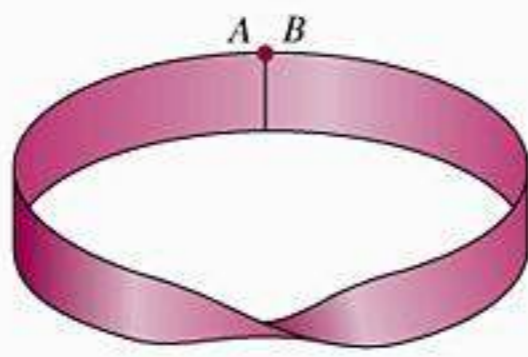
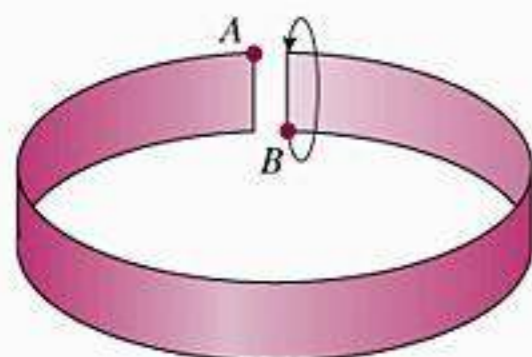


Figura 16.6.1

■ SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Nosso principal objetivo, nesta seção, é estudar os fluxos de campos vetoriais através de superfícies permeáveis colocadas no campo. Para essa finalidade, precisamos considerar algumas idéias básicas acerca de superfícies. A maioria das superfícies que encontramos nas aplicações têm dois lados — uma esfera tem um lado externo e um lado interno e um plano horizontal infinito tem um lado superior e um lado inferior, por exemplo. Existem, no entanto,



Se uma formiga começa em P , com as costas viradas para o leitor, e dá uma volta completa em torno da faixa, então suas costas estarão viradas ao contrário quando ela retornar para P .

(a)

(b)

Figura 16.6.2

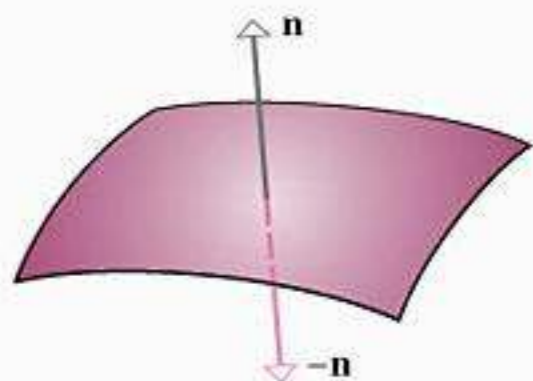


Figura 16.6.3

Em aplicações é importante ter algum meio de distinguir entre os dois lados de uma superfície orientável. Para isso, vamos supor que σ seja uma superfície orientável que tenha um vetor normal unitário \mathbf{n} em cada ponto. Como ilustrado na Figura 16.6.3, os vetores \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$ apontam para lados opostos da superfície e, portanto, servem para distinguir os dois lados. Pode ser provado que se σ for uma superfície orientável lisa, então é sempre possível escolher o sentido de \mathbf{n} em cada ponto de modo que $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$ seja contínuo na superfície. Esses vetores unitários são então denominados uma **orientação** da superfície. Pode-se provar também que uma superfície orientável lisa tem só duas orientações possíveis. Por exemplo, a superfície da Figura 16.6.4 é orientada para cima pelos vetores de cor cinza e para baixo pelos vetores de cor azul claro. Entretanto, não podemos criar uma terceira orientação misturando as duas, porque isso produz pontos na superfície nos quais há mudança abrupta de sentido (ao longo da curva de cor preta na figura, por exemplo).

■ **ORIENTAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE PARAMÉTRICA LISA**

Quando uma superfície é dada parametricamente, as equações paramétricas criam uma orientação natural para a superfície. Para ver isso, lembre da Seção 15.4, onde foi mostrado que se uma superfície paramétrica lisa σ for dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

então o vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \tag{1}$$

é uma função vetorial contínua de u e v . Assim, a Fórmula (1) define uma orientação da superfície; essa é a **orientação positiva** da superfície paramétrica e dizemos que \mathbf{n} aponta no **sentido positivo** a partir da superfície. A orientação determinada por $-\mathbf{n}$ é chamada de **orientação negativa** da superfície e dizemos que $-\mathbf{n}$ aponta no **sentido negativo** a partir da superfície. Por exemplo, considere o cilindro que é representado parametricamente pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} - \sin u\mathbf{k} \quad (0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1)$$

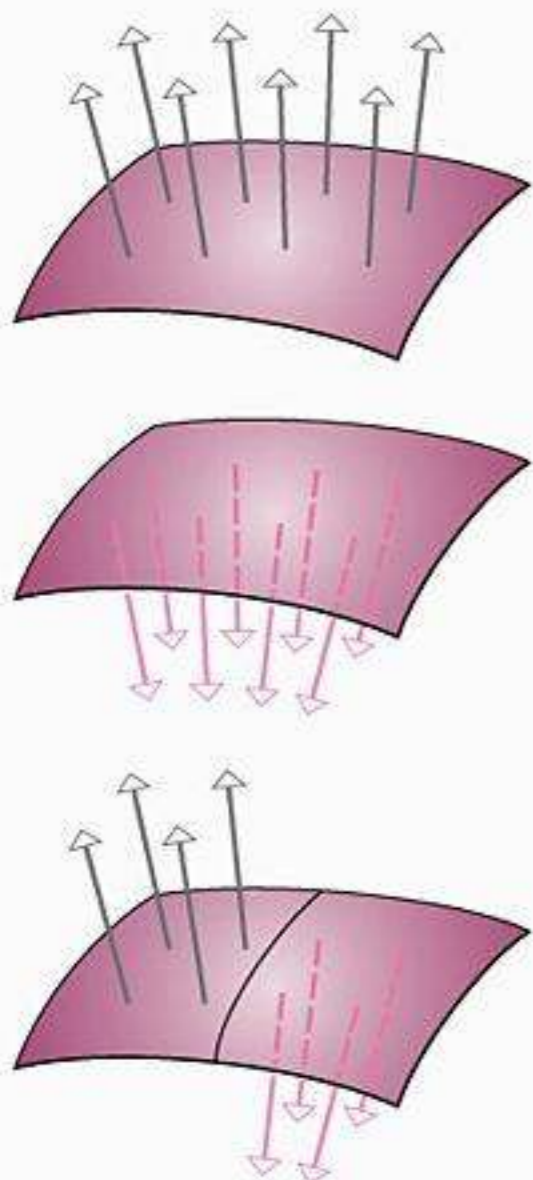


Figura 16.6.4

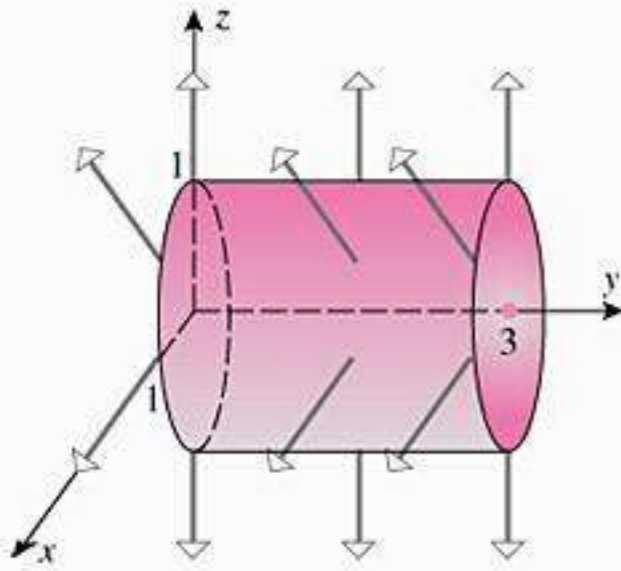


Figura 16.6.5

O leitor pode tentar encontrar uma parametrização do cilindro em que o sentido positivo seja para dentro.

Então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u \mathbf{i} - \sin u \mathbf{k}$$

tem tamanho unitário, de modo que a Fórmula (1) é dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u \mathbf{i} - \sin u \mathbf{k}$$

Como \mathbf{n} tem os mesmos componentes \mathbf{i} e \mathbf{k} que \mathbf{r} , a orientação positiva do cilindro é *para fora* e a orientação negativa é *para dentro* (Figura 16.6.5).

FLUXO

Na Física, o termo *fluido* é usado para descrever tanto líquidos quanto gases. Os líquidos são usualmente considerados como *incompressíveis*, significando que o líquido tem uma densidade uniforme (massa por unidade de volume) que não pode ser alterada por forças de compressão. Os gases são considerados *compressíveis*, significando que a densidade pode variar de um ponto para outro e pode ser alterada por forças de compressão. Neste livro, vamos considerar basicamente os fluidos incompressíveis. Além disso, vamos supor que a velocidade do fluido num ponto fixado não varie com o tempo. Diz-se que fluxos de fluidos com essa propriedade estão em *estado estacionário*.

Nosso próximo objetivo, nesta seção, é definir um conceito fundamental da Física, conhecido como *fluxo* (do latim *fluxu*). Este conceito aplica-se a qualquer campo vetorial, mas vamos considerá-lo no contexto de fluxo em estado estacionário de um fluido incompressível. Consideremos o seguinte problema:

16.6.1 PROBLEMA Suponha que uma superfície orientada σ esteja imersa num fluxo fluido incompressível em estado estacionário e suponha ainda que a superfície seja permeável, de modo que o fluido possa fluir através dela livremente em ambos sentidos. Encontre o volume líquido do fluido Φ que passa através da superfície por unidade de tempo, onde volume líquido é interpretado como o volume que passa através da superfície no sentido positivo menos o volume que passa através da superfície no sentido negativo.

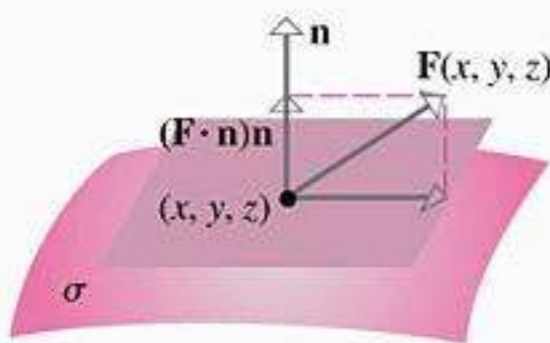


Figura 16.6.6

Para resolver esse problema, suponha que a velocidade do fluido num ponto (x, y, z) da superfície σ seja dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

Seja \mathbf{n} o vetor normal unitário no sentido positivo de σ no ponto (x, y, z) . Como ilustrado na Figura 16.6.6, o vetor velocidade \mathbf{F} pode ser decomposto em dois componentes ortogonais – um componente ao longo da “face” da superfície σ e um componente $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ perpendicular a σ . O componente da velocidade ao longo da face da superfície não contribui para o fluxo através de σ e, portanto, pode ser ignorado nos nossos cálculos. Observe ainda que o sinal de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ determina a direção do fluxo – um valor positivo significa que o fluxo é no sentido de \mathbf{n} e um valor negativo significa que é no sentido oposto de \mathbf{n} .

Para resolver o Problema 16.6.1, subdividimos σ em n porções $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ com áreas

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

Se as porções forem pequenas e o fluxo não for muito errático, é razoável supor que a velocidade não varie muito em cada porção. Assim, se (x_k^*, y_k^*, z_k^*) for qualquer ponto na k -ésima porção, podemos supor que $\mathbf{F}(x, y, z)$ seja constante e igual a $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ em toda a porção e que o componente da velocidade através da superfície σ_k seja

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \tag{2}$$

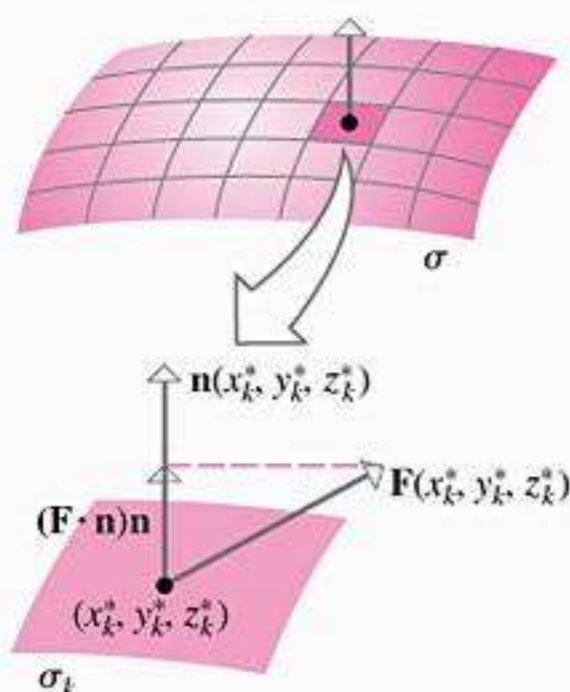


Figura 16.6.7

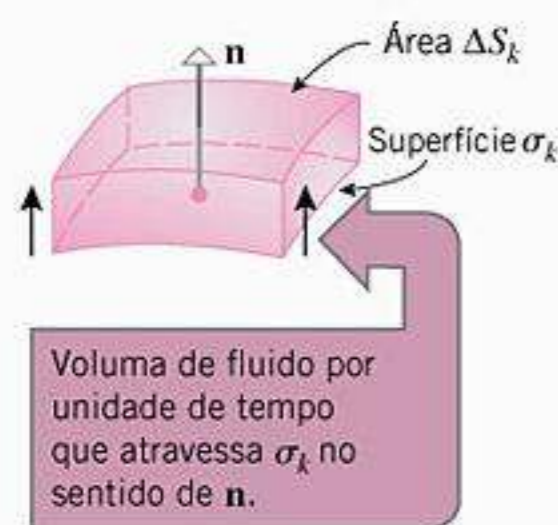


Figura 16.6.8

Se o fluxo tem densidade de massa δ , então $\Phi\delta$ (volume \times densidade) representa a massa líquida de fluido, por unidade de tempo, que atravessa σ .

(Figura 16.6.7). Portanto, podemos interpretar

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

como o valor aproximado do volume de fluido por unidade de tempo que cruza a porção σ_k no sentido de \mathbf{n} (Figura 16.6.8). Por exemplo, se o componente da velocidade no sentido de \mathbf{n} for $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n} = 25 \text{ cm/s}$ e a área da porção for $\Delta S_k = 2 \text{ cm}^2$, então o volume de fluido ΔV_k por unidade de tempo que atravessa a porção no sentido de \mathbf{n} é aproximadamente

$$\Delta V_k \approx \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k = 25 \text{ cm/s} \cdot 2 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$$

No caso em que o componente da velocidade $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ seja negativo, o fluxo é no sentido oposto a \mathbf{n} , de modo que $-\Delta V_k$ é o volume aproximado de fluido por unidade de tempo que atravessa a porção σ_k no sentido oposto a \mathbf{n} . Portanto a soma

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

mede o volume líquido aproximado de fluido que atravessa a superfície σ por unidade de tempo no sentido de sua orientação \mathbf{n} .

Se, agora, aumentarmos n de tal maneira que a dimensão máxima de cada porção tenda para zero, é plausível que os erros de aproximação tendam para zero e que o limite

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k \tag{3}$$

represente o volume líquido exato de fluido por unidade de tempo que atravessa a superfície σ no sentido de sua orientação \mathbf{n} . A quantidade Φ definida pela Equação (3) é chamada **fluxo de F através de σ** . O fluxo também pode ser expresso como a integral de superfície

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dS \tag{4}$$

Um fluxo positivo significa que, em uma unidade de tempo, um volume de fluido maior atravessa σ no sentido positivo do que no sentido negativo, um fluxo negativo significa que, em uma unidade de tempo, um volume de fluido maior atravessa σ no sentido negativo do que no sentido positivo e um fluxo nulo significa que o mesmo volume atravessa a superfície em cada sentido. As integrais da forma (4) também surgem em outros contextos e são chamadas **integrais de fluxo**.

■ CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FLUXO

Uma fórmula útil para calcular integrais de fluxo pode ser obtida aplicando o Teorema 16.5.2 e usando a Fórmula (1) para \mathbf{n} . Assim obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dA \end{aligned}$$

Em resumo, temos o resultado seguinte.

16.6.2 TEOREMA Seja σ uma superfície paramétrica lisa representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ em que (u, v) varia numa região R do plano uv . Se as funções componentes do campo vetorial \mathbf{F} forem contínuas em σ e se \mathbf{n} determinar a orientação positiva de σ , então

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, dA \quad (5)$$

onde entende-se que o integrando do lado direito da equação deve ser dado em termos de u e v .

Embora o Teorema 16.6.2 tenha sido deduzido para superfícies paramétricas lisas, a Fórmula (5) vale mais geralmente. Por exemplo, sempre que σ possua um campo vetorial normal \mathbf{n} contínuo e as funções componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas, a Fórmula (5) pode ser aplicada desde que $\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v$ seja um múltiplo positivo de \mathbf{n} no interior de R . (Ou seja, $\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v$ pode ser nulo na fronteira de R .)

► **Exemplo 1** Encontre o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientada para fora.

Solução A esfera com orientação positiva para fora pode ser representada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k} \quad (0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Dessa fórmula, obtemos (ver os cálculos no Exemplo 9 da Seção 15.4)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Além disso, para os pontos da esfera temos $\mathbf{F} = z\mathbf{k} = a \cos \phi \mathbf{k}$; portanto

$$\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) = a^3 \sin \phi \cos^2 \phi$$

Assim, segue de (5), com os parâmetros u e v substituídos por ϕ e θ , que

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi} \, d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Resolva o Exemplo 1 usando simetria: primeiro convença-se de que os campos vetoriais $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ têm o mesmo fluxo através da esfera. Então defina

$$\mathbf{H} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

e explique por que

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = a$$

Use isso para calcular Φ .

Invertendo a orientação da superfície σ em (5), troca o sinal de \mathbf{n} , e portanto o de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ e conseqüentemente troca o sinal de Φ . Isso também pode ser visto fisicamente pela interpretação da integral de fluxo como o volume de fluido por unidade de tempo, que atravessa σ no sentido positivo menos o volume de fluido por unidade de tempo que atravessa no sentido negativo – invertendo a orientação de σ muda o sinal da diferença. Assim, no Exemplo 1, uma orientação para dentro da esfera produz um fluxo de $-4\pi a^3/3$.

ORIENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES NÃO-PARAMÉTRICAS

Superfícies não-paramétricas da forma $z = g(x, y)$, $y = g(x, z)$ e $x = g(y, z)$ podem ser expressas parametricamente usando as variáveis independentes como parâmetros. Mais precisamente, essas superfícies podem ser representadas pelas equações vetoriais

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = v\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = g(u, v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k} \quad (6-8)$$


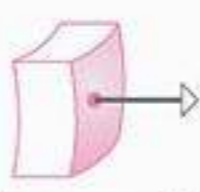


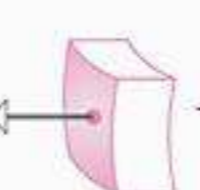

$z = g(x, y)$

$y = g(z, x)$

$x = g(y, z)$

Essas representações impõem orientações positivas e negativas nas superfícies, de acordo com a Fórmula (1). Deixamos como exercício o cálculo de \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$ em cada caso e mostrar que as orientações positiva e negativa são as que aparecem na Tabela 16.6.1. (Para ajudar a perspectiva, cada gráfico aparece com uma porção da superfície de uma pequena região sólida.)

Tabela 16.6.1

$z = g(x, y)$	$y = g(z, x)$	$x = g(y, z)$
 <p style="font-size: small;">Componente k positivo</p> $\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação positiva</p>	 <p style="font-size: small;">Componente j positivo</p> $\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação positiva</p>	 <p style="font-size: small;">Componente i positivo</p> $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação positiva</p>
 <p style="font-size: small;">Componente k negativo</p> $-\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação negativa</p>	 <p style="font-size: small;">Componente j negativo</p> $-\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação negativa</p>	 <p style="font-size: small;">Componente i negativo</p> $-\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{i} + \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <p style="font-size: small;">Orientação negativa</p>

Os resultados da Tabela 16.6.1 também podem ser obtidos usando gradientes. Para ver como isso pode ser feito, reescreva as equações das superfícies como

$$z - g(x, y) = 0, \quad y - g(z, x) = 0, \quad x - g(y, z) = 0$$

Cada uma dessas equações é da forma $G(x, y, z) = 0$ e, portanto, pode ser considerada como uma superfície de nível de uma função $G(x, y, z)$. Como o gradiente de G é normal à superfície de nível, segue que o vetor normal unitário \mathbf{n} é ou $\nabla G / \|\nabla G\|$ ou $-\nabla G / \|\nabla G\|$. Entretanto, se $G(x, y, z) = z - g(x, y)$, então ∇G tem um componente \mathbf{k} igual a 1; se $G(x, y, z) = y - g(z, x)$, então ∇G tem um componente \mathbf{j} igual a 1; e se $G(x, y, z) = x - g(y, z)$,

A variável dependente aumenta quando nos afastamos de uma superfície

$z = g(x, y), \quad y = g(x, z)$

ou

$x = g(y, z)$

no sentido da orientação positiva.

então ∇G tem um componente \mathbf{i} igual a 1. Portanto, é evidente, pela Tabela 16.6.1, que nos três casos temos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \tag{9}$$

Além disso, deixamos como exercício mostrar que se as superfícies $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$ e $x = g(y, z)$ forem expressas nas formas vetoriais (6), (7) e (8), então

$$\nabla G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{10}$$

[compare (1) e (9)]. Assim, somos levados à seguinte versão do Teorema 16.6.2 para superfícies não-paramétricas.

16.6.3 TEOREMA *Seja σ uma superfície lisa da forma $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$ ou $x = g(y, z)$ e suponha que as funções componentes do campo vetorial \mathbf{F} sejam contínuas em σ . Suponha, também, que a equação de σ seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$ passando g para o membro esquerdo da equação e que R seja a projeção de σ no plano coordenado determinado pelas variáveis independentes de g . Se σ tiver orientação positiva, então*

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot \nabla G \, dA \tag{11}$$

A Fórmula (11) pode ser usada tanto para cálculos diretos como para deduzir algumas fórmulas mais específicas para cada um dos três tipos de superfície. Por exemplo, se $z = g(x, y)$, então temos $G(x, y, z) = z - g(x, y)$, de modo que

$$\nabla G = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Substituindo essa expressão de ∇G em (11) e considerando R como a projeção da superfície $z = g(x, y)$ no plano xy , obtemos

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \tag{12}$$

σ da forma $z = g(x, y)$
e orientada para cima

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \tag{13}$$

σ da forma $z = g(x, y)$
e orientada para baixo

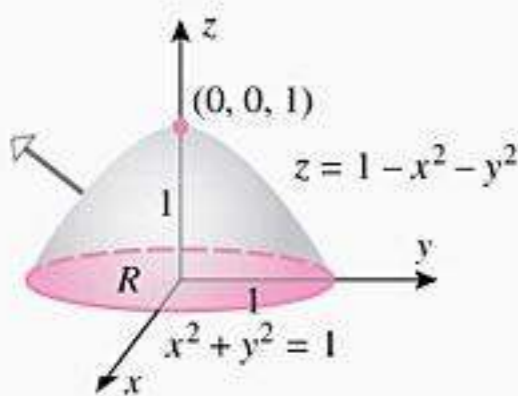


Figura 16.6.9

A dedução das fórmulas correspondentes quando $y = g(z, x)$ e $x = g(y, z)$ é deixada como exercício.

► **Exemplo 2** Seja σ a porção da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy , e suponha que σ seja orientada para cima, como mostrado na Figura 16.6.9. Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de σ .

Solução Por (12), o fluxo Φ é dado por

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \, dA \\ &= \iint_R (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \iint_R (x^2 + y^2 + 1) \, dA && \text{Pois } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ na superfície} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1)r \, dr \, d\theta && \text{Usando coordenadas polares para calcular a integral} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} \right) \, d\theta = \frac{3\pi}{2} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.6 (Ver página 1164 para respostas.)

Nestes exercícios, seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial definido numa superfície σ orientada por um campo vetorial normal unitário $\mathbf{n}(x, y, z)$ e seja Φ o fluxo de \mathbf{F} através de σ .

1. (a) Φ é o valor da integral de superfície _____.
- (b) Se σ for a esfera unitária e \mathbf{n} o normal unitário para fora, então o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de σ é $\Phi =$ _____.

2. (a) Suponha que σ seja parametrizada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ cujo domínio é uma região R no plano uv e que \mathbf{n} seja um múltiplo positivo de

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Então _____ é a integral dupla em R cujo valor é Φ .

- (b) Suponha que σ seja a superfície paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k} \quad (0 \leq u^2 + v^2 \leq 1)$$

e que \mathbf{n} seja um múltiplo positivo de

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Então o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de σ é $\Phi =$ _____.

3. (a) Suponha que σ seja o gráfico de uma função $z = g(x, y)$ sobre uma região R do plano xy e que \mathbf{n} tenha um componente \mathbf{k} positivo em cada ponto de σ . Então _____ é uma integral dupla em R cujo valor é Φ .
- (b) Suponha que σ seja a região triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ com orientação para cima. Então o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de σ é $\Phi =$ _____.

4. No caso de fluxo fluido incompressível em estado estacionário, com velocidade do fluido dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$ em cada ponto (x, y, z) de σ , podemos interpretar Φ como _____.

EXERCÍCIOS 16.6

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Suponha que a superfície σ do cubo unitário da figura ao lado tenha orientação para fora. Em cada parte, determine se o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$ através da face especificada é positivo, negativo ou nulo.

(a) A face $x = 1$	(b) A face $x = 0$
(c) A face $y = 1$	(d) A face $y = 0$
(e) A face $z = 1$	(f) A face $z = 0$

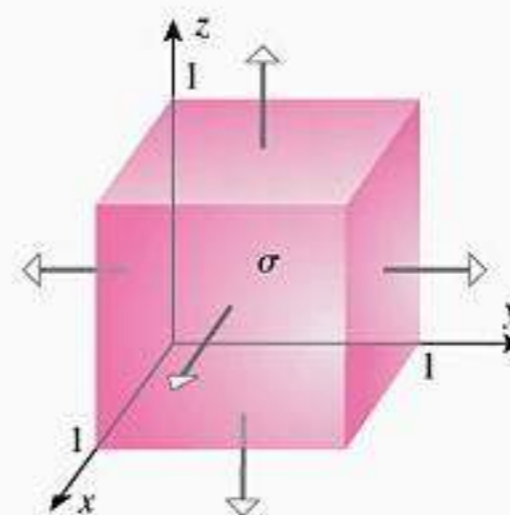


Figura Ex-1

2. Responda as perguntas propostas no Exercício 1 para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$.
3. Responda as perguntas propostas no Exercício 1 para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
4. Qual é o fluxo do campo vetorial constante $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}$ através de toda a superfície σ da Figura Ex-1? Explique seu raciocínio.
5. Seja σ a superfície cilíndrica representada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.
 - (a) Encontre o vetor normal unitário $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ que define a orientação positiva de σ .
 - (b) A orientação positiva é para dentro ou para fora? Justifique sua resposta.
6. Seja σ a superfície cônica representada pelas equações paramétricas $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = r$, com $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 - (a) Encontre o vetor normal unitário $\mathbf{n} = \mathbf{n}(r, \theta)$ que define a orientação positiva de σ .
 - (b) A orientação positiva é para dentro ou para fora? Justifique sua resposta.

7-12 Encontre o fluxo do campo vetorial \mathbf{F} através de σ .

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; σ é a porção da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy , orientada por normais para cima.
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$; σ é a porção do plano $x + y + z = 1$ do primeiro octante, orientada por vetores normais unitários com componentes positivos.
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; σ é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada por vetores normais unitários para cima.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{j} + \mathbf{k}$; σ é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$, orientada por vetores normais unitários para baixo.
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$; σ é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = y$, orientada por vetores normais unitários para baixo.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; σ é a porção do plano $6x + 3y + 2z = 6$, no primeiro octante, orientada por vetores normais unitários com componentes positivos.

13-16 Encontre o fluxo do campo vetorial \mathbf{F} através de σ na direção da orientação positiva.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$; σ é a porção do parabolóide

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + (1 - u^2)\mathbf{k}$$
 com $1 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x \sin z\mathbf{k}$; σ é a porção do cilindro elíptico

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

com $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$; σ é a porção do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$
 com $0 \leq u \leq \sin v$, $0 \leq v \leq \pi$.
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; σ é a porção da esfera

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \cos v\mathbf{i} + 2 \sin u \sin v\mathbf{j} + 2 \cos u\mathbf{k}$$
 com $0 \leq u \leq \pi/3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
17. Seja σ a superfície do cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, orientada por vetores normais unitários para fora. Em cada parte, determine o fluxo de \mathbf{F} através de σ .
 - (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}$
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 - (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
18. Seja σ a superfície fechada consistindo da porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ para a qual $0 \leq z \leq 1$ e tampada pelo disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 1$. Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ na direção para fora através de σ .

19-20 Encontre o fluxo de \mathbf{F} através de σ expressando σ parametricamente.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; a superfície σ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientado por vetores normais unitários para baixo.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; σ é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre os planos $y = 1$ e $y = -2$, orientada por vetores normais unitários para fora.
21. Sejam x , y e z medidos em metros e suponha que $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ seja o vetor velocidade (em m/s) de uma partícula de fluido no ponto (x, y, z) num fluxo fluido em estado estacionário.
 - (a) Calcule o volume líquido de fluido que passa em 1s na direção para cima através da porção do plano $x + y + z = 1$ do primeiro octante.
 - (b) Supondo que o fluido tenha densidade de massa de 806 kg/m^3 , encontre a massa líquida do fluido que passa em 1s através da superfície de (a) na direção para cima.
22. Sejam x , y e z medidos em metros e suponha que $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$ seja o vetor velocidade (em m/s) de uma partícula de fluido no ponto (x, y, z) num fluxo fluido incompressível em estado estacionário.
 - (a) Determine o volume líquido de fluido que passa em 1s através do hemisfério $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ na direção para cima.
 - (b) Supondo que o fluido tenha densidade de massa de 1060 kg/m^3 , encontre a massa líquida do fluido que passa em 1s através da superfície da parte (a) na direção para cima.
23. (a) Deduza os análogos das Fórmulas (12) e (13) para superfícies da forma $x = g(y, z)$.

- (b) Seja σ a porção do parabolóide $x = y^2 + z^2$ para $x \leq 1$ e $z \geq 0$, orientada por vetores normais unitários com componentes x negativos. Use o resultado da parte (a) para encontrar o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

através de σ .

24. (a) Deduza os análogos das Fórmulas (12) e (13) para superfícies da forma $y = g(z, x)$.

- (b) Seja σ a porção do parabolóide $y = z^2 + x^2$ para $y \leq 1$ e $z \geq 0$ orientada por vetores normais unitários com componentes y positivos. Use o resultado da parte (a) para determinar o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de σ .

25. Seja $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^k \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e k é uma constante. (Note que se $k = -3$, isso é um campo de quadrado inverso.) Seja σ a esfera de raio a centrada na origem e orientada pelo vetor normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/a$ para fora.

- (a) Calcule o fluxo de \mathbf{F} através de σ sem fazer nenhuma integração. [Sugestão: a área da superfície de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$.]

- (b) Para qual valor de k o fluxo é independente do raio da esfera?

26. Sejam

$$\mathbf{F}(x, y, z) = a^2 x\mathbf{i} + (y/a)\mathbf{j} + az^2\mathbf{k}$$

e σ a esfera de raio 1, centrada na origem e orientada para fora. Aproxime todos os valores de a tais que o fluxo de \mathbf{F} através de σ seja 10.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.6

1. (a) $\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ (b) 4π 2. (a) $\iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dA$ (b) 0 3. (a) $\iint_R \mathbf{F} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA$ (b) $\frac{1}{2}$

4. o volume líquido de fluido cruzando σ no sentido positivo por unidade de tempo.

16.7 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Nesta seção, nos ocuparemos do fluxo através de superfícies que, tais como esferas, “envolvem” uma região do espaço. Mostraremos que o fluxo através de tais superfícies pode ser expresso em termos da divergência do campo vetorial e usaremos esse resultado para fazer a interpretação física do conceito de divergência.

■ ORIENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS LISAS POR PARTES

Na seção anterior, estudamos o fluxo através de superfícies gerais. Aqui, vamos nos preocupar exclusivamente com superfícies que sejam fronteiras de sólidos finitos – a superfície de uma esfera sólida, a superfície de uma caixa sólida ou a superfície de um cilindro sólido, por exemplo. Tais superfícies são ditas *fechadas*. Uma superfície fechada pode ou não ser lisa, mas a maioria das superfícies que aparecem nas aplicações geralmente é *lisa por partes*; isto é, consistem de um número finito de superfícies lisas unidas pelas bordas (uma caixa, por exemplo). Limitaremos nossa discussão a superfícies lisas por partes às quais possamos associar uma *orientação para dentro* (para o interior do sólido) e uma *orientação para fora* (saindo do interior). É muito difícil tornar esse conceito matematicamente preciso, mas a idéia básica é que cada parte da superfície é orientável e partes orientadas encaixam-se de tal modo que pode ser determinada uma orientação para a superfície inteira (Figura 16.7.1).



Figura 16.7.1

■ TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Na Seção 16.1, definimos a divergência de um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

como

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

mas, naquela ocasião, não tentamos dar uma explicação física de seu significado. O resultado seguinte, conhecido como *Teorema da Divergência* ou *Teorema de Gauss*, vai nos fornecer uma interpretação física da divergência no contexto de fluxos fluidos.

16.7.1 TEOREMA (Teorema da Divergência) Seja G um sólido cuja superfície σ é orientada para fora. Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

onde f , g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo G , e se \mathbf{n} for o vetor normal unitário para fora de σ , então

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \quad (1)$$



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Matemático e cientista alemão. Chamado algumas vezes de “príncipe dos matemáticos”, Gauss é classificado, juntamente com Newton e Arquímedes, como um dos três maiores matemáticos da história. Seu pai, um trabalhador, era um homem rude mas honesto que teria preferido que Gauss abraçasse uma profissão como jardineiro ou pedreiro; mas o gênio do rapaz na Matemática não poderia ser negado. Em toda a história da Matemática, nunca houve uma criança tão precoce como Gauss — por sua própria iniciativa, trabalhou os rudimentos da Aritmética antes de poder falar. Um dia, antes que tivesse completado três anos, seu gênio tornou-se aparente para seus pais de um modo muito contundente. Seu pai estava preparando a folha de pagamento semanal dos trabalhadores sob sua responsabilidade, enquanto o garoto observava calmamente de um canto. No fim dos cálculos longos e cansativos, Gauss disse a seu pai que havia um erro no resultado e deu a resposta que ele obteve de cabeça. Para grande surpresa de seus pais, a verificação dos cálculos mostrou que Gauss estava certo!

Para sua educação elementar, Gauss foi matriculado numa escola fraca dirigida por um homem chamado Büttner, cuja principal técnica de ensino era o espancamento. Büttner tinha por hábito passar longos problemas de adição que, desconhecidos de seus alunos, eram progressões aritméticas que ele resolvia usando fórmulas. No primeiro dia que Gauss entrou na aula de Aritmética, foi pedido aos alunos que somassem os números de 1 a 100. Mas nem bem Büttner havia terminado de enunciar o problema, Gauss mostrou sua lousa e exclamou em seu dialeto camponês “Ligget se” (Aqui está). Por quase uma hora Büttner fitou Gauss, que ficou sentado com os dedos entrelaçados enquanto seus colegas se esfalfavam. Quando Büttner examinou as lousas no fim da aula, a lousa de Gauss continha um único número, 5050 - a única solução correta na classe. Para seu crédito, Büttner reconheceu o gênio de Gauss e com a ajuda de seu assistente, John Bartels, levou-o ao conhecimento de Karl Wilhelm Ferdinand, Duque de Brunswick. O rapaz tímido e desajeitado que tinha, então, quatorze anos, cativou de tal maneira o Duque que ele subsidiou seus estudos preparatórios, universitários e o início de sua carreira.

De 1795 a 1798, Gauss estudou Matemática na Universidade de Göttingen, recebendo seu diploma “in absentia” da Universidade de Helmstadt. Em sua dissertação, fez a primeira demonstração completa do teorema fundamental da Álgebra, que diz que cada polinômio tem tantas soluções quanto seu grau. Com a idade de 19 anos, resolveu o problema que aturdiu Euclides, inscrevendo um polígono regular de 17 lados num círculo usando régua e

compasso; e em 1801, com a idade de 24 anos, publicou sua primeira obra-prima, *Disquisitiones Arithmeticae*, considerado por muitos como uma das mais brilhantes realizações na Matemática. Neste livro, Gauss sistematizou o estudo da teoria dos números (propriedades dos inteiros) e formulou os conceitos básicos que constituem o fundamento desse assunto.

No mesmo ano em que *Disquisitiones* foi publicado, Gauss aplicou de novo sua fenomenal habilidade de cálculo de maneira contundente. O astrônomo Giuseppi Piazzi tinha observado o asteroide Ceres ao longo de 1/40 de sua órbita, mas perdeu-o no Sol. Usando somente três observações e o “método dos mínimos quadrados”, que tinha desenvolvido em 1795, Gauss calculou a órbita com tal precisão que os astrônomos não tiveram qualquer dificuldade em reencontrá-lo no ano seguinte. Essa realização trouxe-lhe reconhecimento imediato como o principal matemático da Europa e, em 1807, foi nomeado Professor de Astronomia e chefe do observatório astronômico de Göttingen.

Nos anos que se seguiram, Gauss revolucionou a Matemática introduzindo padrões de precisão e rigor nunca imaginados por seus predecessores. Ele tinha paixão pela perfeição, que o levou a polir e retrabalhar seus escritos, em vez de publicar trabalhos menos elaborados em maior quantidade - seu lema favorito era “Pauca, sed matura” (Pouco, mas maduro). Como resultado, muitas das suas descobertas importantes ficaram escondidas em diários que permaneceram sem publicação durante anos após sua morte.

Entre a miríade de suas realizações, Gauss descobriu a curva de Gauss ou curva em forma de sino, fundamental na Probabilidade, fez a primeira interpretação geométrica dos números complexos e estabeleceu seu papel fundamental na Matemática, desenvolveu métodos de caracterização de superfícies intrinsecamente por meio das curvas que elas contêm, desenvolveu a teoria das aplicações conformes (que preservam ângulo) e descobriu a Geometria não-euclidiana 30 anos antes que as idéias fossem publicadas por outros. Na Física, fez contribuições relevantes na teoria das lentes e ação capilar e, com Wilhelm Weber, realizou trabalho fundamental em eletromagnetismo. Gauss inventou o heliótípo, o magnetômetro bifilar e um eletrotelégrafo.

Gauss era profundamente religioso e aristocrático na conduta. Dominava línguas estrangeiras com facilidade, lia extensivamente e gostava de Mineralogia e Botânica como hobby. Detestava lecionar e usualmente era frio e desencorajador com outros matemáticos, possivelmente porque já havia antecipado o trabalho deles. Já foi dito que se Gauss tivesse publicado todas as suas descobertas, o estado atual da Matemática estaria avançado em 50 anos. Ele foi, sem dúvida, o maior matemático da era moderna.

A demonstração desse teorema para um sólido geral G é muito difícil para ser apresentada aqui. No entanto, podemos fazer a prova para um caso especial em que G seja simultaneamente um sólido xy simples, um sólido yz simples e um sólido zx simples (ver terminologia na Figura 15.5.3 e na discussão associada).

DEMONSTRAÇÃO A Fórmula (1) pode ser expressa como

$$\iint_{\sigma} [f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dV$$

portanto, é suficiente demonstrar as três igualdades

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \frac{\partial f}{\partial x} dV \tag{2a}$$

$$\iint_{\sigma} g(x, y, z)\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \frac{\partial g}{\partial y} dV \tag{2b}$$

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \frac{\partial h}{\partial z} dV \tag{2c}$$

Como as provas para as três igualdades são análogas, demonstraremos somente a terceira.

Suponha que G tenha superfície superior $z = g_2(x, y)$, superfície inferior $z = g_1(x, y)$ e projeção R no plano xy . Denote a superfície inferior por σ_1 , a superfície superior por σ_2 e a superfície lateral por σ_3 (Figura 16.7.2a). Se as superfícies superior e inferior se intersectam como na Figura 16.7.2b, então não existe superfície lateral σ_3 . Nossa demonstração considera ambos os casos mostrados nessas figuras.

Temos, pelo Teorema 15.5.2, que

$$\iiint_G \frac{\partial h}{\partial z} dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial h}{\partial z} dz \right] dA = \iint_R \left[h(x, y, z) \right]_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} dA$$

portanto,

$$\iiint_G \frac{\partial h}{\partial z} dV = \iint_R [h(x, y, g_2(x, y)) - h(x, y, g_1(x, y))] dA \tag{3}$$

Em seguida, vamos calcular a integral de superfície de (2c) integrando separadamente em cada superfície de G . Se houver uma superfície lateral σ_3 , então em cada ponto dessa superfície $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, visto que \mathbf{n} é horizontal e \mathbf{k} é vertical. Assim,

$$\iint_{\sigma_3} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Portanto, independentemente de G ter ou não uma superfície lateral, podemos escrever

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\sigma_1} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\sigma_2} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \tag{4}$$

Na superfície superior σ_2 , o vetor normal externo aponta para cima e na superfície inferior σ_1 , o vetor normal externo aponta para baixo. Assim, as Fórmulas (12) e (13) da Seção 16.6 implicam que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_2} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_R h(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \\ &= \iint_R h(x, y, g_2(x, y)) dA \end{aligned} \tag{5}$$

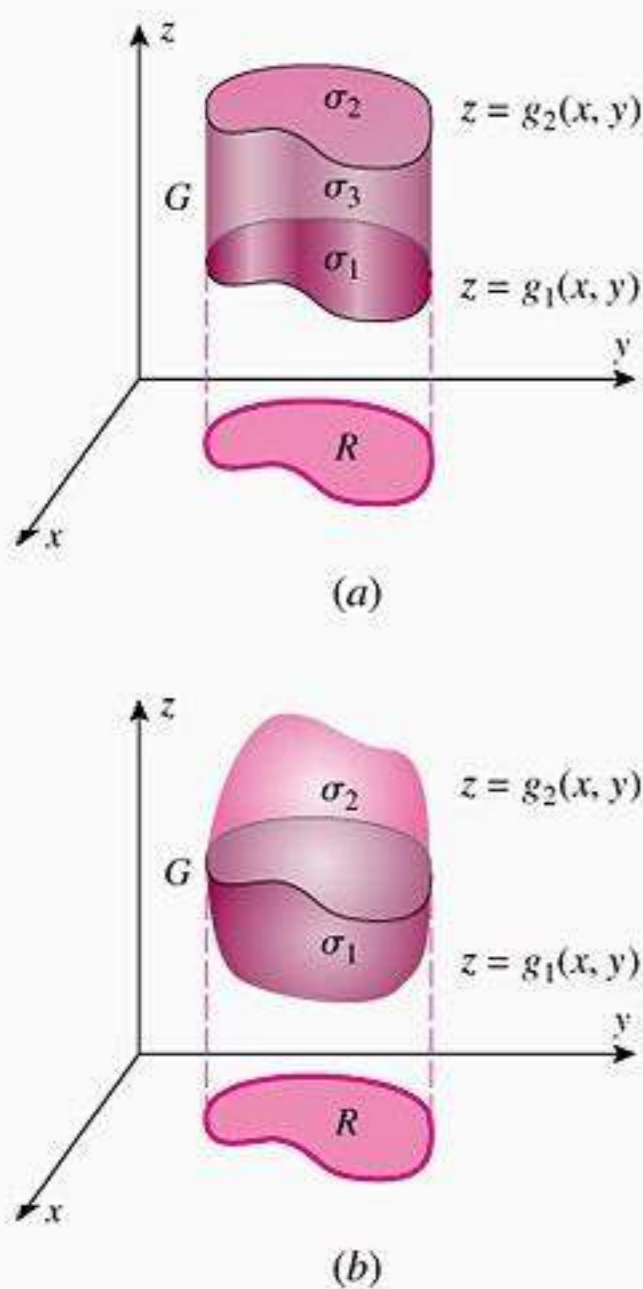


Figura 16.7.2

e

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} h(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_R h(x, y, g_1(x, y)) \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= - \iint_R h(x, y, g_1(x, y)) dA \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4) e combinando os termos num único sinal de integral, obtemos

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R [h(x, y, g_2(x, y)) - h(x, y, g_1(x, y))] dA \quad (7)$$

A equação em (2c) segue agora de (3) e (7). ■

Explique como a dedução de (2c) deve ser modificada para fornecer uma demonstração de (2a) ou (2b).

Em palavras, o Teorema da Divergência afirma:

O fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada com orientação para fora é igual à integral tripla da divergência na região envolvida pela superfície.

Esse fluxo é, algumas vezes, chamado **fluxo de saída** através da superfície.

■ **USANDO O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA PARA CALCULAR O FLUXO**

Às vezes, é mais fácil calcular o fluxo através de uma superfície fechada usando o Teorema da Divergência do que calculando a integral de fluxo diretamente. Isso é ilustrado no seguinte exemplo.

► **Exemplo 1** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução Seja σ a superfície esférica orientada para fora e G a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

portanto, por (1), o fluxo através de σ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G dV = \text{volume of } G = \frac{4\pi a^3}{3}$$

Note como este cálculo é muito mais simples do que o do Exemplo 1 da Seção 16.6. ◀

O Teorema da Divergência é, geralmente, o método escolhido para determinar o fluxo através de superfícies fechadas lisas por partes com múltiplas seções, visto que elimina a necessidade de calcular integrais separadas para cada seção. Isso é ilustrado nos três próximos exemplos.

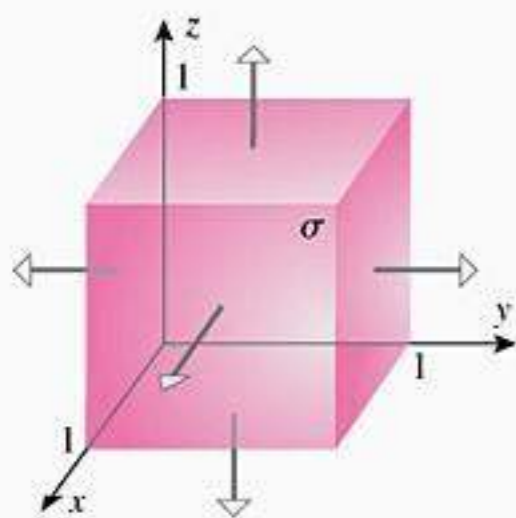


Figura 16.7.3

Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ o campo vetorial do Exemplo 2. Mostre que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é constante em cada uma das seis faces do cubo na Figura 16.7.3. Use essas contas para confirmar o resultado no Exemplo 2.

► **Exemplo 2** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

através do cubo unitário da Figura 16.7.3.

Solução Seja σ a superfície do cubo orientada para fora e G a região envolvida por ele. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 5 + 2z$$

portanto, por (1), o fluxo através de σ é

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_G (5 + 2z) \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (5 + 2z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [5z + z^2]_{z=0}^1 \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^1 6 \, dy \, dx = 6 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **Exemplo 3** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

através da superfície da região compreendida pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 2$ (Figura 16.7.4).

Solução Seja σ a superfície orientada para fora e G a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 3x^2 + 3y^2 + 2z$$

portanto, por (1), o fluxo através de σ é

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^2 (3r^2 + 2z)r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [3r^3z + z^2r]_{z=0}^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (6r^3 + 4r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^4}{2} + 2r^2 \right]_0^3 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{279}{2} \, d\theta = 279\pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Usando coordenadas cilíndricas

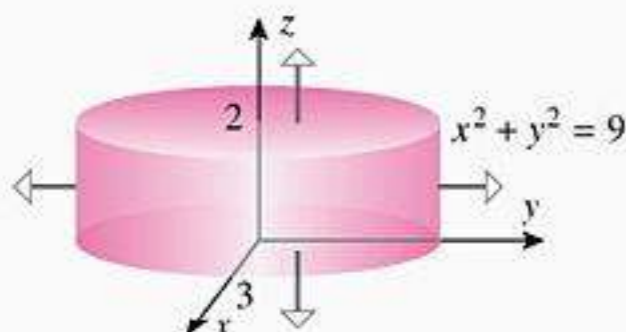


Figura 16.7.4

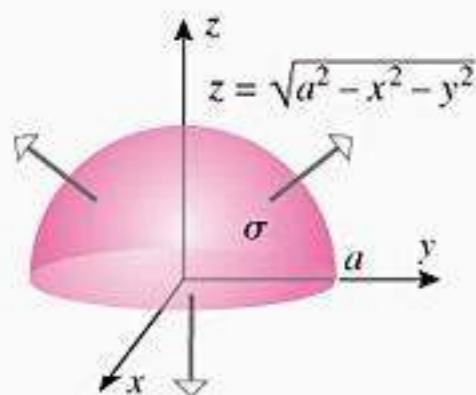


Figura 16.7.5

► **Exemplo 4** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

através da superfície da região compreendida pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e o plano $z = 0$ (Figura 16.7.5).

Solução Seja σ a superfície orientada para fora e G a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

portanto, por (1), o fluxo através de σ é

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (3\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^4 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen} \phi \right]_{\rho=0}^a \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} \, d\theta \\ &= \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6\pi a^5}{5} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Usando coordenadas esféricas

■ A DIVERGÊNCIA CONSIDERADA COMO DENSIDADE DE FLUXO

O Teorema da Divergência oferece um meio de interpretar a divergência de um campo vetorial \mathbf{F} . Suponha que G seja uma região esférica *pequena* centrada no ponto P_0 e que sua superfície, denotada por $\sigma(G)$, seja orientada para fora. Denote o volume da região por $\operatorname{vol}(G)$ e o fluxo de \mathbf{F} através de $\sigma(G)$ por $\Phi(G)$. Se $\operatorname{div} \mathbf{F}$ for contínua em G , então, através da região pequena G , o valor de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ não varia muito de seu valor $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ no centro e é razoável aproximar $\operatorname{div} \mathbf{F}$ pela constante $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ em G . Assim, o Teorema da Divergência implica que o fluxo $\Phi(G)$ de \mathbf{F} através de $\sigma(G)$ pode ser aproximado como

$$\Phi(G) = \iint_{\sigma(G)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \iiint_G dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \operatorname{vol}(G)$$

do que decorre a aproximação

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \approx \frac{\Phi(G)}{\operatorname{vol}(G)} \tag{8}$$

A expressão do lado direito de (8) é chamada *densidade de fluxo para fora de \mathbf{F} através de G* . Se agora permitirmos que o raio da esfera se aproxime de zero [de modo que $\operatorname{vol}(G)$ tenda para zero], então é plausível que o erro de aproximação tenda para zero e a divergência de \mathbf{F} no ponto P_0 seja dada exatamente por

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\operatorname{vol}(G) \rightarrow 0} \frac{\Phi(G)}{\operatorname{vol}(G)}$$

que pode ser expressa como

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\operatorname{vol}(G) \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(G)} \iint_{\sigma(G)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{9}$$

A Fórmula (9), algumas vezes, é tomada como a definição da divergência. Essa é uma alternativa útil para a Definição 16.1.4, porque não requer um sistema de coordenadas.

Esse limite, que é chamado *densidade de fluxo para fora de \mathbf{F} em P_0* , nos diz que num *fluxo fluido em estado estacionário*, $\text{div } \mathbf{F}$ pode ser interpretada como o *fluxo limite por unidade de volume num ponto*. Além disso, temos por (8) que para uma região esférica pequena G centrada no ponto P_0 no fluxo, o fluxo de saída através da superfície de G pode ser aproximado por

$$\Phi(G) \approx (\text{div } \mathbf{F}(P_0)) (\text{vol}(G)) \tag{10}$$

■ **FONTES E POÇOS**

Se P_0 for um ponto num fluido incompressível no qual $\text{div } \mathbf{F}(P_0) > 0$, segue de (8) que $\Phi(G) > 0$ para uma esfera G suficientemente pequena centrada em P_0 . Portanto, há um volume de fluido maior saindo através da superfície do que entrando. Mas isso só pode ocorrer se houver algum ponto *no interior* da esfera no qual entra fluido no fluxo a partir de uma fonte externa (digamos, por condensação, fusão de um sólido, ou uma reação química); caso contrário, o fluxo líquido para fora através da superfície resultaria num decréscimo de densidade no interior da esfera, contradizendo a hipótese de incompressibilidade. De maneira análoga, se $\text{div } \mathbf{F}(P_0) < 0$, haveria um ponto no interior da esfera no qual estaria saindo fluido do fluxo (digamos por evaporação); caso contrário o fluxo líquido para dentro através da superfície resultaria num aumento de densidade no interior da esfera. Num fluido incompressível, os pontos em que $\text{div } \mathbf{F}(P_0) > 0$ são chamados *fontes* e os pontos em que $\text{div } \mathbf{F}(P_0) < 0$ são chamados *poços* ou sumidouros. O fluido entra no fluxo numa fonte e é drenado num poço. Num fluido incompressível sem fontes nem poços, devemos ter

$$\text{div } \mathbf{F}(P) = 0$$

em cada ponto P . Em Hidrodinâmica, essa equação é chamada *equação de continuidade para fluidos incompressíveis* e, algumas vezes, é usada como a característica que define um fluido incompressível.

■ **LEI DE GAUSS PARA CAMPOS DE QUADRADO INVERSO**

O Teorema da Divergência aplicado a campos de quadrado inverso (ver Definição 16.1.2) produz um resultado chamado *Lei de Gauss para Campos de Quadrado Inverso*. Esse resultado é a base de muitos princípios importantes da Física.

16.7.2 LEI DE GAUSS PARA CAMPOS DE QUADRADO INVERSO Se

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

for um campo de quadrado inverso no espaço tridimensional e se σ for uma superfície orientável fechada que circunda a origem, então o fluxo de saída de \mathbf{F} através de σ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi c \tag{11}$$

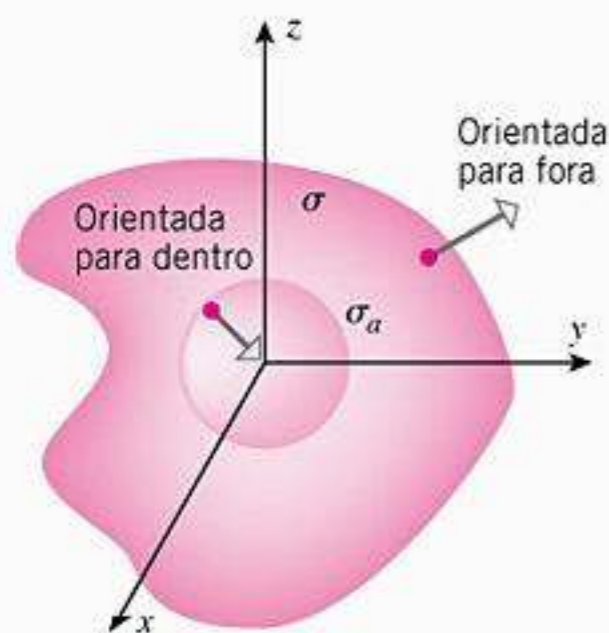


Figura 16.7.6

Para deduzir esse resultado, lembremos que, pela Fórmula (5) da Seção 16.1, \mathbf{F} pode ser expresso em forma de componentes como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{12}$$

Como os componentes de \mathbf{F} não são contínuos na origem, não podemos aplicar o Teorema da Divergência através do sólido envolvido por σ . Entretanto, podemos contornar essa dificuldade construindo uma esfera de raio a centrada na origem, na qual o raio é suficientemente pequeno para que a esfera fique inteiramente dentro da região envolvida por σ (Figura 16.7.6). Denotaremos a superfície dessa esfera por σ_a . O sólido G compreen-

dido entre σ_a e σ é um exemplo de sólido tridimensional com uma “cavidade” interna. Da mesma maneira que podemos ampliar o Teorema de Green para regiões multiplamente conexas no plano (regiões com buracos), também é possível ampliar o Teorema da Divergência para sólidos do espaço tridimensional com cavidades internas, desde que a integral de superfície do teorema abranja *toda a fronteira*, sendo a fronteira externa do sólido orientada para fora e as fronteiras das cavidades orientadas para dentro. Assim, se \mathbf{F} for o campo de quadrado inverso em (12) e se σ_a for orientada para dentro, então o Teorema da Divergência dá

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{\sigma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (13)$$

Mas mostramos no Exemplo 5 da Seção 16.1 que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, de modo que (13) dá

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_{\sigma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (14)$$

Podemos calcular a integral de superfície em σ_a expressando o integrando em termos de componentes; entretanto, é mais fácil deixar em forma vetorial. Em cada ponto da esfera o vetor normal unitário \mathbf{n} aponta para dentro ao longo de um raio da origem e, então, $\mathbf{n} = -\mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|$. Assim, (14) fornece

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) \, dS \\ &= \iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \, dS \\ &= \iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2} \, dS \\ &= \frac{c}{a^2} \iint_{\sigma_a} \, dS \quad \boxed{\|\mathbf{r}\| = a \text{ em } \sigma_a} \\ &= \frac{c}{a^2} (4\pi a^2) \quad \boxed{\text{A integral é a área de superfície da esfera.}} \\ &= 4\pi c \end{aligned}$$

que estabelece (11).

■ LEI DE GAUSS NA ELETROSTÁTICA

Segue do Exemplo 1 da Seção 16.1 com $q = 1$ que uma partícula isolada carregada com uma carga Q localizada na origem cria um campo de quadrado inverso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

no qual $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é a força elétrica exercida por Q numa carga positiva unitária ($q = 1$) localizada no ponto com vetor posição \mathbf{r} . Nesse caso, a lei de Gauss (16.7.2) diz que o fluxo para fora Φ através de qualquer superfície orientável fechada σ que circunde Q é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Esse resultado, que é chamado *Lei de Gauss para Campos Elétricos*, pode ser estendido para mais de uma carga. É uma das leis fundamentais em Eletricidade e Magnetismo.

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.7 (Ver página 1173 para respostas.)

- Se a G um domínio cuja superfície σ é orientada para fora e \mathbf{n} é a normal unitária e $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial cuja união com o eixo z tem a primeira componente contínua em a região aberta que contém G e remaneja a Divergência afirma que a integral da superfície _____ e a integral tripla _____ têm o mesmo valor.
- Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ para a região σ da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com orientação para fora, então a integral da superfície é _____.
- Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é um campo vetorial e \mathbf{r} é um vetor radial em σ , então a integral da superfície de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ é chamada de _____ e um número _____.

Se \mathbf{F} é negativo, é chamada de _____ e usualmente continua a ser um fluxo líquido se afirma que _____.

4. Se

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

para um campo vetorial e σ a superfície de uma esfera unitária orientada para fora, então a integral da superfície de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é _____ e afirma que o fluxo para fora de \mathbf{F} através de σ é _____.

EXERCÍCIOS 16.7 CAS

1-4 Verifique a Fórmula 1 e remaneja a Divergência para a integral da superfície e a integral tripla.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre a superfície cúbica limitada por $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ sobre a superfície σ do cilindro $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 1$ e $x^2 + y^2 \leq 1$ na base $z=1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ sobre a superfície cúbica limitada por $x=0, x=2, y=0, y=2, z=0, z=2$.

5-15 Use a Divergência para encontrar o fluxo de \mathbf{F} através da superfície σ com orientação para fora.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + e^y - z\mathbf{k}$ sobre a superfície do retângulo limitada por $x=0, x=3, y=0, y=1, z=0, z=2$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x - z\mathbf{i} + y - x\mathbf{j} + z - y\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $x^2 + y^2 = a^2, z=0$ e $z=1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $z = 1 - x^2 - y^2$ e xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4, z=0$ e $z=3$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 + y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - 2xz + y\mathbf{k}$ sobre a superfície tetraédrica $x + y + z = 1$ e xy e $z=0$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 - e^y\mathbf{i} + y^3 + e^x z\mathbf{j} + z^3 - xy\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2$ e xy e $z=0$. [Sugestão: use a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$].

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ sobre a superfície do hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ sobre a superfície do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z=1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + z + 2\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $z = x^2 + y^2$ e $z=2$ e xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ sobre a superfície do cilindro $z = 4 - x^2, y + z = 5, z = 0$ e $y = 0$.
- Para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e σ a superfície de um domínio G orientado para fora com normal unitária \mathbf{n} , então

$$\text{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

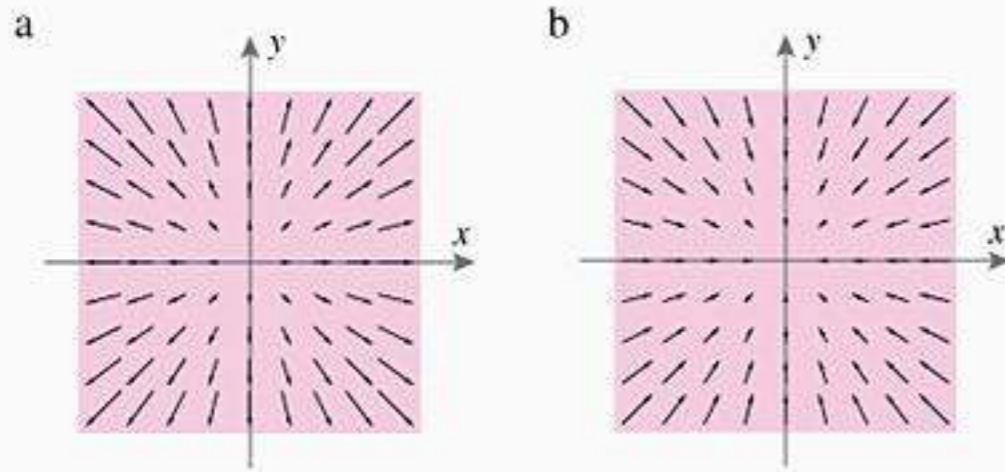
onde G é o volume de σ .

- Use a Fórmula 1 para determinar o fluxo para fora do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através da superfície σ do cilindro $x^2 + 4x + y^2 = 5, z = -1$ e $z = 4$.

ENFOCANDO CONCEITOS

- Se $\mathbf{F}(x, y, z) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ um campo vetorial constante e σ a superfície de um domínio G e remaneja a Divergência para encontrar o fluxo de \mathbf{F} através de σ . Dê uma explicação física informal e reafirme.
- Encontre um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ que tenha:
 - divergência positiva em todo ponto
 - divergência negativa em todo ponto
- Em cada parte, a figura a seguir mostra uma superfície orientada para fora e um fluxo líquido, na qual o fluxo é para fora no eixo xy em cada ponto e é entrante em cada

Para a afluente, ue
 e er it acerca ina a i ergência na rigem E
 i ue eu raci cñi



21. Se a $F(x, y, z)$ um cam et ria nã nu n e aç tri i
 men i na, cu a unção c m mente têm eri a a ar
 ciai e rimeira r em c ntínua, e u nha ue i $F=0$
 em t a arte Se σ r ua ue e era n e aç tri imen
 i na, e i ue r ue e i te uma infini a e e nt em
 σ n uai F é tangente à e era

22. re u ta E ercici 21 ermanecerá er a eir e tr
 carm a e era σ r um cub E i ue

23-27 Pr e a i enti a e, u n ue F, σ e G ati açam a
 hi óte e e rema a Di ergência e ue t re ui it
 nece ári e i erenciabi i a e ara a unção $f(x, y, z)$ e
 $g(x, y, z)$ e te am ati eit

23. $\iint_{\sigma} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} dS = 0$ [Sugestão: er E ercici 33, Seçã
 1 1]

24. $\iint_{\sigma} \nabla f \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \nabla^2 f dV$
 $\left(\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$

25. $\iint_{\sigma} (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$

26. $\iint_{\sigma} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$
 [Sugestão: tr ue f c m g n E ercici 25]

27. $\iint_{\sigma} (f \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS = \iiint_G \nabla f \cdot \mathbf{v} dV$ (\mathbf{v} um vetor fixado)

28. e e rema a Di ergência ara enc ntrar t a re
 iti e k tai ue

$$F(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^k}$$

ati açam a c n içã i $F=0$ uan $\mathbf{r} \neq 0$

[Suge tã : m ifi ue a em n traçã e 11]

29-32 Determine e cam et ria $F(x, y, z)$ é i re e nte e
 ç Se nã r, ca ize

29. $F(x, y, z) = y + z \mathbf{i} - xz^3 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ en $y \mathbf{k}$

30. $F(x, y, z) = xy \mathbf{i} - xy \mathbf{j} + y^3 \mathbf{k}$

31. $F(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$

32. $F(x, y, z) = x^3 - x \mathbf{i} + y^3 - y \mathbf{j} + z^3 - z \mathbf{k}$

33. Se a σ a u er ície ó i G e imita e arab ói e
 $z = 1 - x^2 - y^2$ e an $z = 0$ e um S ara erifi
 car a Fórmu a 1 e rema a Di ergência ara cam
 et ria

$$F(x, y, z) = x^2 y - z^2 \mathbf{i} + y^3 - x \mathbf{j} + 2x + 3z - 1 \mathbf{k},$$

ca cu an a integra e u er ície e a integra tri a

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.7

1. $\iint_{\sigma} F \cdot \mathbf{n} dS; \iiint_G \text{div } F dV$ 2. 3 3. nte ç i $F=0$ 4. $4\pi c; 0$

16.8 TEOREMA DE STOKES

Nesta seção, discutiremos uma generalização do Teorema de Green para três dimensões que tem aplicações importantes no estudo dos campos vetoriais, particularmente na análise do movimento de rotação dos fluidos. Esse teorema também vai fornecer uma interpretação física do rotacional de um campo vetorial.

ORIENTAÇÃO RELATIVA DE CURVAS E SUPERFÍCIES

e ta eçã , n cu arem e u er ície riente a e aç tri imen i na imita a
 r cur a aramétrica echa a im e Figura 1 8 1a Se σ r uma u er ície riente a
 imita a r uma cur a aramétrica echa a im e C , então há ua reaçõe í ei entre

a orientação de σ e C , que em geral critica como segue imagine uma superfície orientada σ limitada pela curva fechada simples C , com uma cabeça neta a orientação de σ . Diz-se que a orientação de C é **sentido positivo** em relação à orientação de σ , e a superfície é dita estar orientada no sentido positivo em relação à orientação de σ , e a superfície é dita estar orientada no sentido negativo em relação à orientação de σ , e a superfície é dita estar orientada no sentido positivo em relação à orientação de σ , e a superfície é dita estar orientada no sentido negativo em relação à orientação de σ .



Figura 16.8.1

TEOREMA DE STOKES

Na Seção 16.1, definimos o rotacional de um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \quad (1)$$

mas não tentamos dar uma explicação física, que significa na física a seguinte interpretação, conhecida como **Teorema de Stokes**, que fornece uma interpretação física para a circulação de um fluido.

16.8.1 TEOREMA (Teorema de Stokes) *Seja σ uma superfície orientada lisa por partes limitada por uma curva C lisa por partes, fechada, simples e com orientação positiva. Se os componentes do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

forem contínuos e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo σ e se \mathbf{T} for o vetor tangente unitário a C , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2)$$

para este teorema é necessária a existência de uma orientação adequada para a superfície.

na sua echem uma orientação *para baixo* para a superfície plana σ em $z = 0$, a fim de tornar a orientação de C anti-horária, como se vê na Figura 16.8.3. Assim, a superfície σ tem a equação $z = 0$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & xy^2 \end{vmatrix} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4y^3\mathbf{k}$$

Segundo a Fórmula 13 da Seção 16.7, o trabalho de \mathbf{F} sobre σ é

$$\begin{aligned} W &= \iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) \, dA \\ &= \iint_R (2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4y^3\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^3 (-y^2 - 4y^3) \, dy \, dx \\ &= - \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} + y^4 \right]_{y=0}^3 \, dx \\ &= - \int_0^1 90 \, dx = -90 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Explique como o resultado no Exemplo 1 mostra que o campo de forças dado não é conservativo.

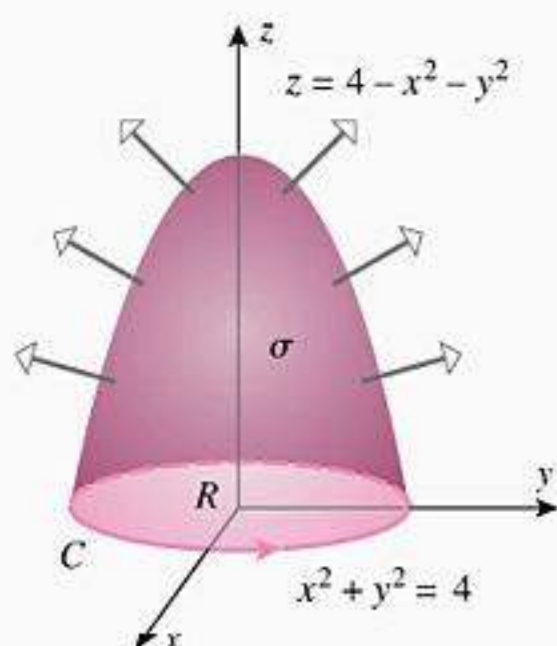


Figura 16.8.3

Exemplo 2 Verifique se o campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$ é conservativo para a curva C que é a interseção da superfície $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ e a orientação anti-horária em relação ao eixo z . (Ver a Figura 16.8.3.)

Solução Para verificar se o campo de forças \mathbf{F} é conservativo, vamos verificar se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Como \mathbf{F} é um campo de forças em um domínio simplesmente conexo, se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, então \mathbf{F} é conservativo. No entanto, a curva C não é simplesmente conexa, portanto, não podemos concluir diretamente que \mathbf{F} é conservativo. Em vez disso, vamos calcular o trabalho de \mathbf{F} sobre a curva C .

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 0 \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C 2z \, dx + 3x \, dy + 5y \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} [0 + (6 \cos t)(2 \cos t) + 0] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 12 \cos^2 t \, dt = 12 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 12\pi \end{aligned}$$

Para calcular o trabalho de \mathbf{F} sobre a curva C , vamos determinar $\text{rot } \mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 5y \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Como σ é orientada para cima e é expressa na forma $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, temos, pela Fórmula (12) da Seção 16.6, com $\text{rot } \mathbf{F}$ substituindo \mathbf{F} , que

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \, dA \\ &= \iint_R (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \iint_R (10x + 4y + 3) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (10r \cos \theta + 4r \sin \theta + 3)r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{10r^3}{3} \cos \theta + \frac{4r^3}{3} \sin \theta + \frac{3r^2}{2} \right]_{r=0}^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{80}{3} \cos \theta + \frac{32}{3} \sin \theta + 6 \right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{80}{3} \sin \theta - \frac{32}{3} \cos \theta + 6\theta \right]_0^{2\pi} = 12\pi \end{aligned}$$

Como é assegurado pelo Teorema de Stokes, o valor dessa integral de superfície é o mesmo que o valor da integral de linha obtido anteriormente. Observe, porém, que o cálculo da integral de linha foi mais simples e, portanto, seria o método escolhido nesse caso. ◀

Observe que na Fórmula (3) a única relação necessária entre σ e C é que C seja a fronteira de σ e que C seja orientada positivamente em relação à orientação de σ . Portanto, se σ_1 e σ_2 forem superfícies com orientações diferentes, mas que tenham a mesma curva de fronteira C com orientação positiva, então por (3) temos que

$$\iint_{\sigma_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\sigma_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Por exemplo, a superfície parabólica do Exemplo 2 tem a mesma fronteira C com orientação positiva que o disco R da Figura 16.8.3 com orientação para cima. Dessa forma, o valor da integral de superfície daquele exemplo não mudaria se σ fosse substituída por R (ou por qualquer outra superfície orientada que tenha o círculo C orientado positivamente como sua fronteira). Isso pode ser conveniente nos cálculos porque, algumas vezes, é possível evitar uma integração difícil mudando a superfície de integração.

■ RELAÇÃO ENTRE OS TEOREMAS DE GREEN E DE STOKES

Às vezes, é conveniente considerar um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

do espaço bidimensional como um campo vetorial do espaço tridimensional expressando-o como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \tag{5}$$

Se R for uma região do plano xy envolvida por uma curva C , lisa por partes, fechada e simples, então podemos considerar R como uma superfície plana e tratar a integral de superfície em R

como uma integral dupla ordinária em R . Portanto, se orientarmos R para cima e C no sentido anti-horário olhando para baixo do eixo z positivo, então a Fórmula (3) aplicada a (5) resulta em

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA \tag{6}$$

Mas

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

visto que $\partial g/\partial z = \partial f/\partial z = 0$. Substituindo essa expressão em (6) e expressando as integrais em função dos componentes, obtemos

$$\oint_C f \, dx + g \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \, dA$$

que é o Teorema de Green [Fórmula (1) da Seção 16.4]. Mostramos, pois, que o Teorema de Green pode ser considerado como um caso especial do Teorema de Stokes.

■ O ROTACIONAL CONSIDERADO COMO CIRCULAÇÃO

O Teorema de Stokes fornece um meio de interpretar o rotacional de um campo vetorial \mathbf{F} no contexto de fluxo fluido. Para ver isso, considere que σ_a seja um pequeno disco orientado de raio a com centro num ponto P_0 de um fluxo fluido em estado estacionário e seja \mathbf{n} um vetor normal unitário no centro do disco que aponta no sentido da orientação. Vamos supor que o fluxo do líquido que passa pelo disco faz com que ele gire em torno do eixo dado por \mathbf{n} e vamos tentar determinar a direção de \mathbf{n} que produza a taxa máxima de rotação no sentido positivo da curva de fronteira C_a (Figura 16.8.4). Por conveniência, vamos denotar a área do disco σ_a por $A(\sigma_a)$; ou seja, $A(\sigma_a) = \pi a^2$.

Se a direção de \mathbf{n} for fixada, então em cada ponto de C_a o único componente de \mathbf{F} que contribui para a rotação do disco em torno de \mathbf{n} é o componente $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ tangente a C_a (Figura 16.8.5). Desse modo, para um \mathbf{n} fixado, a integral

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \tag{7}$$

pode ser considerada como uma medida da tendência do fluido fluir no sentido positivo ao longo de C_a . Como consequência, a integral (7) é denominada *circulação de \mathbf{F} ao longo de C_a* . Por exemplo, no caso extremo em que o fluxo é normal ao círculo em cada ponto, a circulação em torno de C_a é nula, visto que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ em cada ponto. Quanto mais \mathbf{F} alinhar-se com \mathbf{T} ao longo do círculo, tanto maior será o valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ e maior o valor da circulação.

Para ver a relação entre circulação e rotacional, suponha que $\text{rot } \mathbf{F}$ seja contínuo em σ_a , de modo que quando σ_a for pequeno o valor de $\text{rot } \mathbf{F}$ em cada ponto de σ_a não difere muito do valor de $\text{rot } \mathbf{F}(P_0)$ no centro. Portanto, para um disco pequeno σ_a é razoável supor que $\text{rot } \mathbf{F}$ tenha o valor constante de $\text{rot } \mathbf{F}(P_0)$ em σ_a . Além disso, como a superfície σ_a é plana, os vetores normais unitários que orientam σ_a são todos iguais. Assim, a quantidade vetorial \mathbf{n} da Fórmula (3) pode ser tratada como uma constante e podemos escrever

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_{\sigma_a} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} \iint_{\sigma_a} dS$$

onde a integral de linha é tomada no sentido positivo de C_a . Mas a última integral dupla nessa equação representa a área de superfície de σ_a , portanto

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \approx [\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n}] A(\sigma_a)$$

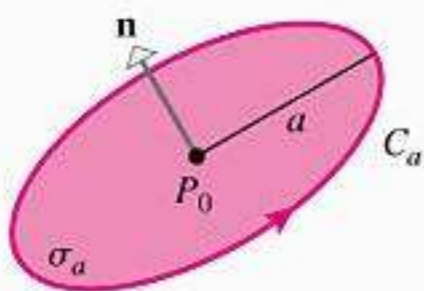


Figura 16.8.4

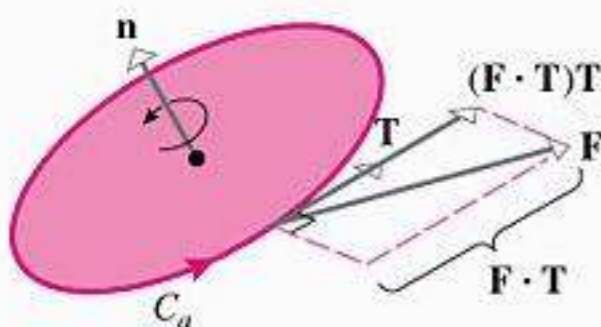


Figura 16.8.5

a u a btem

$$\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} \approx \frac{1}{A(\sigma_a)} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad 8$$

A Fórmula (9) é tomada, às vezes, como a definição do rotacional. Essa é uma alternativa útil para a Definição 16.1.5, porque não requer um sistema de coordenadas.

uantia en a ireit e 8 é en mina a *densidade de circulação de F ao longo de C_a*. Se ermitirm , ag ra, ue rai i c ten a arazer c m n fi , então é au í e ue err e a r imaçã ten a arazer e a re at er t F P₀ · n e a a r

$$\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{A(\sigma_a)} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad 9$$

hamam r t F P₀ · n e *densidade de circulação de F em P₀ no sentido de n*. E a uan tí a e tem eu a r má im uan n e tá name ma ireçã e enti er t F P₀ i n iz ue em cada ponto de um fluxo fluido em estado estacionário a densidade de circulação máxima ocorre na direção do rotacional. Fi icamente i ignifica ue e uma e uena r a 'água r imer a num flui e m ue i ô e a nt P₀, então a á giram mai ra i amente uan ei e ti er a inha c m r t F P₀. Figura 1 8 Se r t F = 0 em ca a nt a regiã , então iz e ue F é *irrotacional* na ue a regiã , uma ez ue nã c rre circu açã em t rn e ua uer nt a regiã

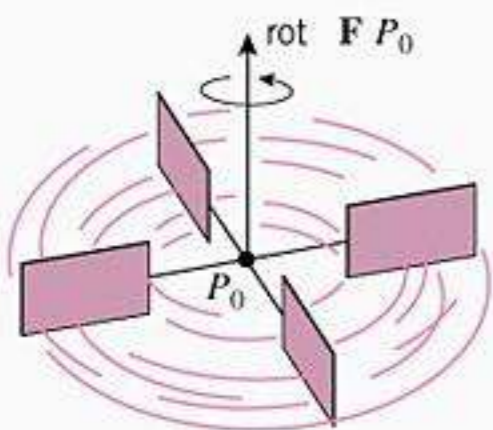


Figura 16.8.6

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.8 (Ver página 1181 para respostas.)

1. Se a σ uma u er ície i a r arte , rienta a, cu a r nteira é uma cur a i a r arte C, echa a e im e , c m rien taçã iti a. Se a unçõe c m nente cam et ria F x, y, z têm eri a a arciai e rimeira r em c ntínua em a gum c nunt abert c nten σ e e T r et r tangen te unitári a C, então e rema e St ke afirma ue a integra e inha _____ e a integra e u er ície _____ ã iguai

2. tram n E em 2 ue cam et ria

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$$

ati az a e uaçã r t F = 5i + 2j + 3k. Segue e rema e St ke ue e C r ua uer círcu e rai a n an xy rienta n enti anti h rári uan i t ei z iti , então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \underline{\hspace{2cm}}$$

n e T en ta et r tangente unitári a C

3. a Se σ_1 e σ_2 rem ua u er ície rienta a ue têm a me ma cur a e r nteira C rienta a iti amente e e cam et ria F x, y, z tem eri a a arciai e rimeira r em c ntínua em a gum c nunt abert c nten σ_1 e σ_2 , então egue e rema e St ke ue a integra i e u er ície _____ e _____ ã iguai

b Se am F x, y, z = 2zi + 3xj + 5yk, a um número iti e σ a arte arab ói e $z = a^2 - x^2 - y^2$ c m $z \geq 0$ c m rientaçã ara cima an a e Eercíci 2, e gue ue

$$\iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. Para um flu em e ta e taci nári , a en i a e e circu açã má ima c rre na ireçã e enti _____ cam e e cí a e flu

EXERCÍCIOS 16.8 C CAS

1-4 erifi ue a Fórmu a 2 e rema e St ke ca cu an a integra e inha e a integra u a Su nha ue a u er ície tenha rientaçã ara cima

1. F x, y, z = x - yi + y - zj + z - xk σ é a rçã an $x + y + z = 1$ n rimeir ctante

2. F x, y, z = x²i + y²j + z²k σ é a rçã c ne $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abai an $z = 1$

3. F x, y, z = xi + yj + zk σ é hemi éri u eri r $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

4. F x, y, z = z - yi + z + xj - x + yk σ é a rçã ara b ói e $z = 9 - x^2 - y^2$ acima an xy

5-12 Use o Teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y^3\mathbf{k}$; C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy com orientação anti-horária olhando no eixo z positivo de cima para baixo.
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$; C é o retângulo no plano $z = y$ mostrado na Figura 16.8.2.
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$; C é a fronteira do parabolóide mostrado na Figura 16.8.3.
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y^2\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$; C é o triângulo no plano $z = \frac{1}{2}y$ de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, 0, 0)$, com orientação anti-horária olhando no eixo z positivo de cima para baixo.
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; C é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = y$ com orientação anti-horária olhando no eixo z positivo de cima para baixo.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; C é o triângulo no plano $x + y + z = 1$ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, com orientação anti-horária olhando do primeiro octante para a origem.
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$; C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ no plano xy com orientação anti-horária olhando no eixo z positivo de cima para baixo.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \sin x)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + (y + e^z)\mathbf{k}$; C é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com orientação anti-horária olhando no eixo z positivo de cima para baixo.
13. Considere o campo vetorial dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$$

- (a) Use o Teorema de Stokes para encontrar a circulação em torno do triângulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário olhando da origem para o primeiro octante.
- (b) Encontre a densidade de circulação de \mathbf{F} na origem na direção de \mathbf{k} .
- (c) Encontre o vetor unitário \mathbf{n} tal que a densidade de circulação de \mathbf{F} na origem seja máxima na direção de \mathbf{n} .

ENFOCANDO CONCEITOS

14. (a) Seja σ a superfície de um sólido G com vetor normal unitário \mathbf{n} para fora de σ . Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em σ . Prove que

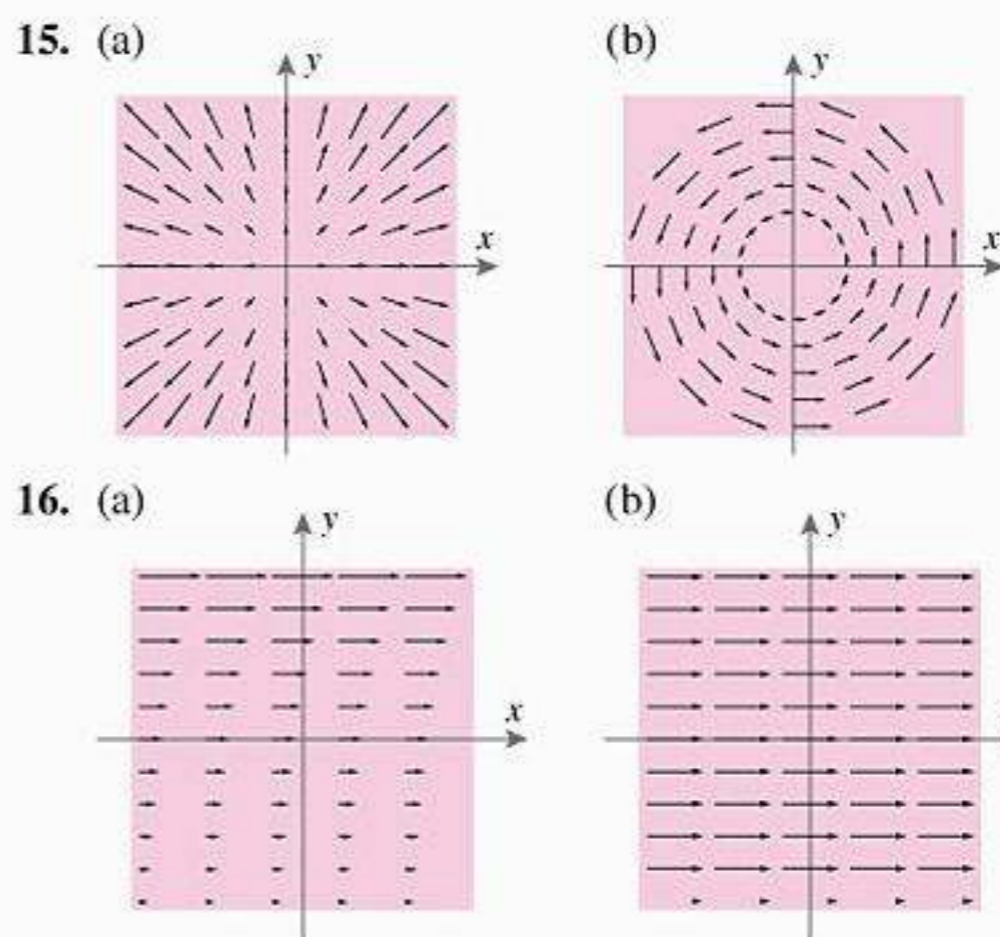
$$\iint (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

[Sugestão: seja C uma curva fechada simples em σ que separa a superfície em duas subsuperfícies σ_1 e σ_2 com

fronteira comum C . Aplique o Teorema de Stokes a σ_1 e a σ_2 e some os resultados.]

- (b) O campo vetorial $\text{rot}(\mathbf{F})$ é denominado **campo rotacional de \mathbf{F}** . Em palavras, interprete a fórmula de (a) como uma afirmação sobre o fluxo do campo rotacional.

15-16 As figuras nestes exercícios mostram uma camada horizontal do campo vetorial de um fluxo fluido, no qual o fluxo é paralelo ao plano xy em cada ponto e é idêntico em cada camada (ou seja, é independente de z). Para cada fluxo, decida se rotacional é diferente de zero na origem e explique seu raciocínio. Se o rotacional for diferente de zero, diga se aponta na direção positiva ou negativa de z .



17. Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial conservativo no espaço tridimensional cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Explique como usar a Fórmula (9) para provar que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

18. Em 1831, o físico Michael Faraday descobriu que uma corrente elétrica pode ser produzida variando o fluxo magnético através de um arco condutor. Suas experiências mostraram que a força eletromotriz \mathbf{E} está relacionada com a indução magnética \mathbf{B} pela equação

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{\sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Use esse resultado para fazer uma conjectura acerca da relação entre $\text{rot } \mathbf{E}$ e \mathbf{B} e explique seu raciocínio.

19. Sejam σ a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ para a qual $z \geq 0$ e C o círculo $x^2 + y^2 = 1$ que forma a fronteira de σ no plano xy . Supondo que σ seja orientada para cima, use um CAS para verificar a Fórmula (2) do Teorema de Stokes para o campo vetorial

$$\mathbf{F} = (x^2y - z^2)\mathbf{i} + (y^3 - x)\mathbf{j} + (2x + 3z - 1)\mathbf{k}$$

calculando a integral de linha e a integral de superfície.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 16.8

1. $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds; \iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ 2. $3\pi a^2$ 3. (a) $\iint_{\sigma_1} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS; \iint_{\sigma_2} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ (b) $3\pi a^2$ 4. rotacional

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

- Responda com palavras: o que é um campo vetorial? Dê alguns exemplos físicos de campos vetoriais.
- (a) Dê um exemplo físico de um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ no espaço tridimensional.
(b) Escreva uma fórmula para um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ geral em função do raio vetor \mathbf{r} .
(c) Escreva uma fórmula para um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(x, y, z)$ no espaço tridimensional, usando coordenadas retangulares.
- Encontre uma expressão explícita em coordenadas para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ que, em cada ponto $(x, y) \neq (1, 2)$ é o vetor unitário que aponta de (x, y) para $(1, 2)$.
- Encontre $\nabla \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$.
- Encontre $\text{rot}(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$.

6. Seja
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

Esboce a superfície de nível $\text{div } \mathbf{F} = 1$.

- Suponha que C seja a curva paramétrica $x = x(t), y = y(t)$, onde t varia de a até b . Em cada parte, expresse a integral de linha como uma integral definida com variável de integração t .
(a) $\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$ (b) $\int_C f(x, y) ds$
- (a) Expresse a massa M de um arame fino no espaço tridimensional como uma integral de linha.
(b) Expresse o comprimento de uma curva como uma integral de linha.
- Dê uma interpretação física de $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.
- Escreva algumas notações alternativas para $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.

11-13 Calcule a integral de linha.

- $\int_C (x - y) ds; C: x^2 + y^2 = 1$
- $\int_C x dx + z dy - 2y^2 dz;$
 $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = (x/y)\mathbf{i} - (y/x)\mathbf{j};$
 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$
- Encontre o trabalho efetuado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

para mover uma partícula de $(0, 0)$ até $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

- Enuncie o Teorema Fundamental das Integrais de Trabalho, incluindo todas as hipóteses requeridas.
- Calcule $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde $f(x, y, z) = xy^2z^3$ e $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + t)\mathbf{j} + \sin(3\pi t/2)\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1)$
- Seja $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$.
(a) Obtenha uma função não-nula $h(x)$ tal que $h(x)\mathbf{F}(x, y)$ seja um campo vetorial conservativo.
(b) Obtenha uma função não-nula $g(y)$ tal que $g(y)\mathbf{F}(x, y)$ seja um campo vetorial conservativo.
- Seja $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} - 1)\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$.
(a) Mostre que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.
(b) Calcule uma função potencial de \mathbf{F} .
(c) Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial numa partícula que se move ao longo da curva em ziguezague, representada pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= t + \arcsin(\sin t) \\ y &= (2/\pi) \arcsin(\sin t) \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 8\pi)$$

(ver figura abaixo).

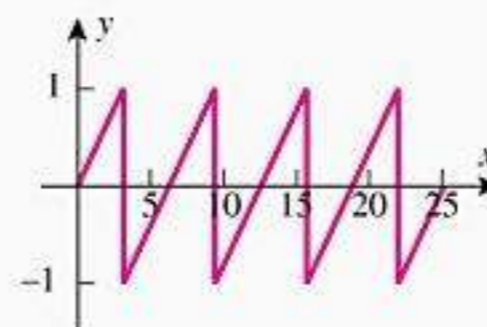


Figura Ex-18

- Enuncie o Teorema de Green, incluindo todas as hipóteses requeridas.
- Expresse a área de uma região plana como uma integral de linha.
- Sejam α e β dois ângulos que satisfazem $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ e suponha que $r = f(\theta)$ seja uma curva polar lisa com $f(\theta) > 0$ no intervalo $[\alpha, \beta]$. Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

para encontrar a área da região R englobada pela curva $r = f(\theta)$ e os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.

- (a) Use o Teorema de Green para provar que

$$\int_C f(x) dx + g(y) dy = 0$$

se f e g forem funções diferenciáveis e C for uma curva simples, fechada, lisa por partes.

(b) O que isso nos diz sobre o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j}?$$

23. Suponha que σ seja a superfície paramétrica

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

onde (u, v) varia numa região R . Expresse a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS$$

como uma integral dupla com variáveis de integração u e v .

24. Calcule $\iint_{\sigma} z dS$; $\sigma : x^2 + y^2 = 1 (0 \leq z \leq 1)$.

25. A superfície da figura abaixo é orientável? Explique seu raciocínio.

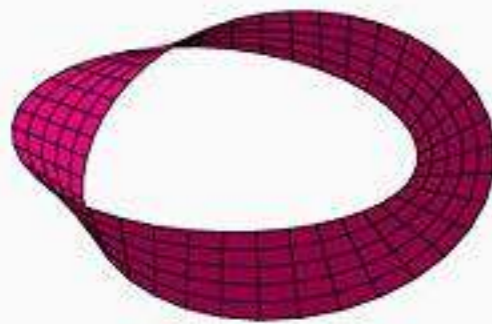


Figura Ex-25

26. Dê uma interpretação física de $\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

27. Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ através da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está no plano ou acima do plano xy , com orientação para cima.

28. Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ através da esfera unitária centrada na origem, com orientação para fora.

29. Enuncie o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes, incluindo todas as hipóteses requeridas.

30. Seja G um sólido com a superfície σ orientada por vetores normais unitários para fora, suponha que ϕ tenha derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas em algum conjunto aberto contendo G e seja $D_{\mathbf{n}}\phi$ a derivada direcional de ϕ , onde \mathbf{n} é um vetor normal unitário para fora de σ . Mostre que

$$\iint_{\sigma} D_{\mathbf{n}}\phi dS = \iiint_G \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] dV$$

31. Sejam σ a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, \mathbf{n} um vetor normal unitário para dentro e $D_{\mathbf{n}}f$ a derivada direcional da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Use o resultado do Exercício 30 para calcular a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} D_{\mathbf{n}}f dS$$

32. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$ e σ é a parte do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ que está no plano ou acima do plano $z = 1$, com orientação para cima.

33. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ e suponha que f, g e h sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região. No Exercício 27 da Seção 16.3, foi mostrado que, se \mathbf{F} for conservativo na região, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

nessa região. Use esse resultado para mostrar que se \mathbf{F} é conservativo numa região esférica aberta então $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ nessa região.

34-35 Use o resultado do Exercício 33 para determinar se \mathbf{F} é conservativo.

34. (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \text{sen } z\mathbf{k}$

35. (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen } x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

36. Como discutido no Exemplo 1 da Seção 16.1, a *Lei de Coulomb* afirma que a força eletrostática $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que uma partícula com carga Q exerce sobre uma partícula com carga q é dada pela fórmula

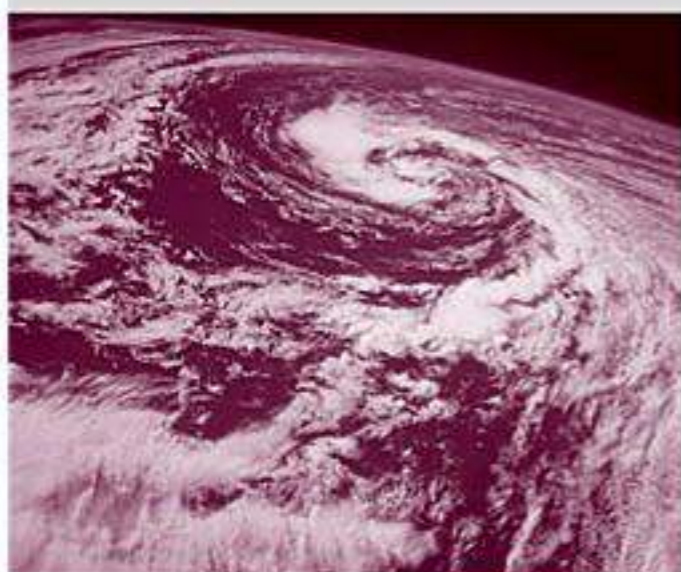
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

onde \mathbf{r} o vetor posição de Q para q e ϵ_0 é a constante de permissividade.

(a) Expresse o campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ em forma de coordenadas $\mathbf{F}(x, y, z)$ com Q na origem.

(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial \mathbf{F} numa carga q que se move ao longo de uma reta de $(3, 0, 0)$ para $(3, 1, 5)$.

EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO



Modelando Furacões

Todos os anos, centros populacionais no mundo inteiro são assolados por furacões, e a missão do Centro Nacional de Furacões dos EUA é minimizar os danos e perdas de vidas emitindo alertas e previsões sobre furacões que se desenvolvem em regiões do Caribe, do Atlântico, do Golfo do México e do leste do Pacífico. Sua tarefa como estagiário do Centro é construir um modelo matemático simples de um furacão, usando princípios básicos de fluxo fluido e propriedades dos campos vetoriais.

Hipóteses do Modelo

Você foi notificado sobre um furacão em desenvolvimento nas Bahamas (denominado furacão *Isaac*) e foi-lhe pedido construir um modelo de seu campo de velocidades. Como os furacões são fluxos fluidos tridimensionais complicados, você precisa fazer muitas hipóteses simplificadoras da estrutura de um furacão e propriedades do fluxo fluido. Conseqüentemente, você decide considerar a umidade do Isaac como a de um *fluido ideal*, significando que ele é *incompressível* e sua *viscosidade* pode ser ignorada. Um fluido incompressível é aquele no qual a densidade é a mesma em todos os pontos e não pode ser alterada por forças de compressão. A experiência mostrou que a água pode ser considerada como incompressível, mas o vapor de água não. No entanto, a incompressibilidade é uma hipótese razoável para um modelo básico de furacão, porque um furacão não está contido num recipiente fechado que poderia gerar forças de compressão.

Todos os fluidos têm uma certa quantidade de viscosidade, que é uma resistência a fluir — óleo e melão têm alta viscosidade, enquanto a água não tem quase nenhuma em velocidades subsônicas. Assim, é razoável ignorar a viscosidade num modelo básico. A seguir, você decide admitir que o fluxo está em *estado estacionário*, significando que a velocidade do fluido, em qualquer ponto, não varia com o tempo. Isso é razoável para períodos de tempo curtos e furacões que se movem e mudam vagarosamente. Finalmente, apesar dos furacões serem fluxos tridimensionais, você decide modelar uma seção transversal horizontal de duas dimensões, de modo que você faz a hipótese simplificadora de que o fluido na seção transversal flui horizontalmente.

A fotografia do Isaac mostrada no início deste módulo revela um padrão típico de furacão do Caribe — um redemoinho de fluido no sentido anti-horário em torno do *olho*, através do qual o fluido sai do fluxo sob forma de chuva. A baixa pressão no olho provoca a entrada de uma massa de ar e ventos circulares em torno dele e contribui para o efeito de redemoinho.

Seu primeiro objetivo é determinar uma fórmula explícita para o campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y)$ do Isaac, assim você começa introduzindo um sistema de coordenadas retangulares com origem no olho e o eixo y apontando para o norte. Além disso, com base na fotografia e seus conhecimentos de teoria da meteorologia, você decide construir o campo de velocidades do Isaac a partir dos campos de velocidades de fluxos mais simples — um “fluxo vórtice” anti-horário $\mathbf{F}_1(x, y)$, no qual o fluido flui no sentido anti-horário em círculos concêntricos em torno do olho e um “fluxo poço” $\mathbf{F}_2(x, y)$, no qual o fluido flui em linhas retas na direção de um poço no olho. Uma vez determinadas as fórmulas para $\mathbf{F}_1(x, y)$ e $\mathbf{F}_2(x, y)$, seu plano é usar o *princípio da superposição* da dinâmica dos fluidos para expressar o campo de velocidades do Isaac como $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{F}_1(x, y) + \mathbf{F}_2(x, y)$.

Modelo de um Fluxo Vórtice

Um *fluxo vórtice anti-horário* de um fluido ideal em torno da origem tem quatro características definidoras (Figura 1a na próxima página):

- O vetor velocidade num ponto (x, y) é tangente ao círculo centrado na origem e que passa pelo ponto (x, y) .

- A direção do vetor velocidade no ponto (x, y) indica um movimento no sentido anti-horário.
- A velocidade do fluido é constante nos círculos centrados na origem.
- A velocidade do fluido ao longo de um círculo é inversamente proporcional ao raio do círculo (e, portanto, a velocidade tende para $+\infty$ quando o raio do círculo tende para zero).

Em dinâmica dos fluidos, a **potência** k de um fluxo vórtice é definida como sendo 2π vezes a velocidade do fluido ao longo do círculo unitário. Se a potência de um fluxo vórtice for conhecida, então a velocidade do fluido ao longo de qualquer outro círculo pode ser calculada, visto que a velocidade é inversamente proporcional ao raio do círculo. Portanto, seu primeiro objetivo é determinar uma fórmula para um fluxo vórtice $\mathbf{F}_1(x, y)$ com potência k especificada.

.....
Exercício 1 Mostre que

$$\mathbf{F}_1(x, y) = -\frac{k}{2\pi(x^2 + y^2)}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$$

é um modelo para o campo de velocidades de um fluxo vórtice anti-horário em torno da origem de potência k , confirmando que

- $\mathbf{F}_1(x, y)$ possui as quatro propriedades necessárias de um fluxo vórtice anti-horário em torno da origem;
- k é 2π vezes a velocidade do fluido ao longo do círculo unitário.

.....
Exercício 2 Use um recurso gráfico que possa gerar campos vetoriais para gerar um fluxo vórtice com potência 2π .

Modelo de um Fluxo Poço

Um **fluxo poço uniforme** de um fluido ideal na direção da origem tem quatro características definidoras (Figura 1b):

- O vetor velocidade em cada ponto (x, y) é direcionado para a origem.
- A velocidade do fluido é a mesma em todos os pontos de um círculo centrado na origem.
- A velocidade do fluido num ponto é inversamente proporcional à distância até a origem (de onde se deduz que a velocidade tende para $+\infty$, quando a distância à origem tende para zero).
- Há um poço na origem pelo qual o fluido sai do fluxo.

Como no caso do fluxo vórtice, a **potência** q de um fluxo poço uniforme é definida como sendo 2π vezes a velocidade do fluido nos pontos do círculo unitário. Se a potência de um fluxo poço for conhecida, então a velocidade do fluido em qualquer ponto pode ser determinada usando-se o fato de que a velocidade é inversamente proporcional à distância até a origem. Logo, seu próximo objetivo é determinar uma fórmula para um fluxo $\mathbf{F}_2(x, y)$ poço uniforme com potência q especificada.

.....
Exercício 3 Mostre que

$$\mathbf{F}_2(x, y) = -\frac{q}{2\pi(x^2 + y^2)}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

é um modelo para o campo de velocidades de um fluxo poço uniforme direcionado para a origem de potência q , confirmando os seguintes fatos:

- $\mathbf{F}_2(x, y)$ possui as quatro propriedades requeridas de um fluxo poço uniforme direcionado para a origem. [É suficiente uma justificativa física razoável para confirmar a existência do poço.]
- q é 2π vezes a velocidade do fluido nos pontos do círculo unitário.

.....
Exercício 4 Use um recurso gráfico que possa gerar campos vetoriais para gerar um fluxo poço uniforme com potência 2π .

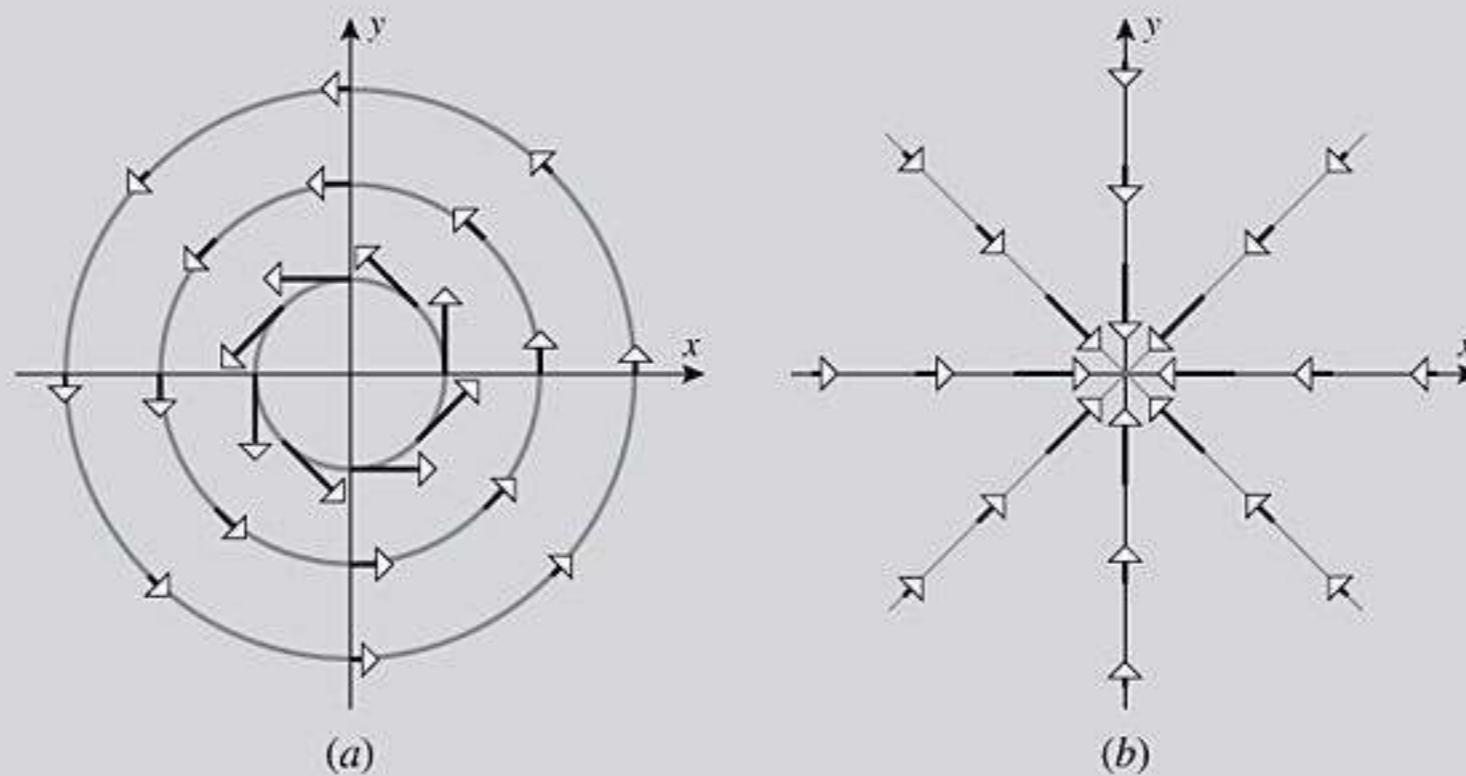


Figura 1

Um Modelo Básico de Furacão

Pelos Exercícios 1 e 3, o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ para um modelo de furacão que combine um fluxo vórtice anti-horário em torno da origem com potência k e um fluxo poço uniforme direcionado para a origem com potência q é

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2\pi(x^2 + y^2)}[(qx + ky)\mathbf{i} + (qy - kx)\mathbf{j}] \quad (1)$$

Exercício 5

- (a) A Figura 2 mostra um campo vetorial para um furacão com potência de vórtice $k = 2\pi$ e potência de poço $q = 2\pi$. Use um recurso gráfico que possa gerar campos vetoriais para produzir uma cópia razoável dessa figura.
- (b) Faça uma conjectura sobre o efeito de aumentar k mantendo q fixado, e verifique sua conjectura usando um recurso gráfico.
- (c) Faça uma conjectura sobre o efeito de aumentar q mantendo k fixado, e verifique sua conjectura usando um recurso gráfico.

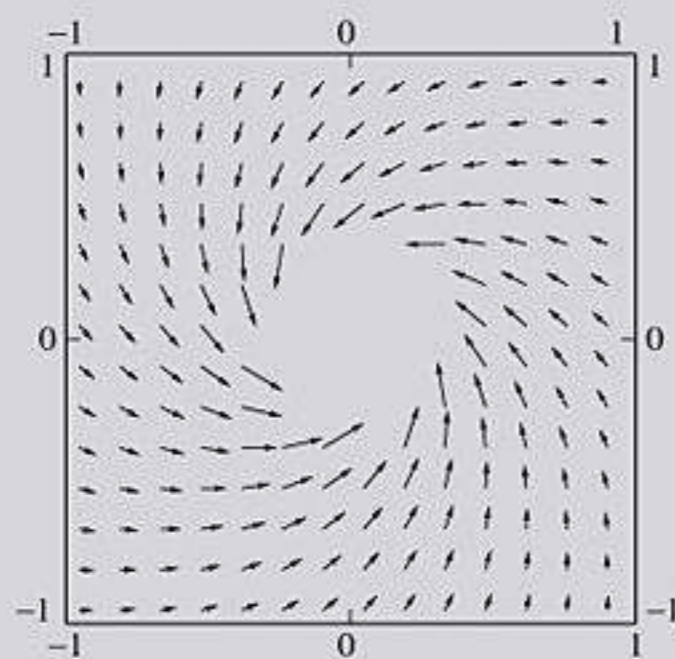


Figura 2

Modelando o Furacão Isaac

Você está pronto para aplicar a Fórmula (1) para obter um modelo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ do furacão Isaac. Você precisa dos dados de algumas observações para determinar as constantes k e q , então você telefona para a Filial de Suporte Técnico do Centro para obter as últimas informações sobre o furacão Isaac. Eles

informam que, a 20 km do olho, a velocidade do vento tem um componente de 15 km/h na direção do olho e um componente tangencial de 45 km/h no sentido anti-horário.

Exercício 6

- (a) Determine as potências k e q do vórtice e do poço para o furacão Isaac.
- (b) Determine o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ para o furacão Isaac.
- (c) Estime o tamanho do furacão Isaac determinando um raio além do qual a velocidade do vento é inferior a 5 km/h.

Linhas de Fluxo para o Modelo Básico do Furacão

As trajetórias seguidas pelas partículas do fluido num fluxo fluido são chamadas *linhas de corrente*. Portanto, os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ no campo de velocidades são tangentes às linhas de corrente. Se essas linhas puderem ser representadas como curvas de nível de alguma função $\psi(x, y)$, então a função ψ é chamada uma *função corrente* para o fluxo. Como $\nabla\psi$ é normal às curvas de nível $\psi(x, y) = c$, então $\nabla\psi$ é normal às linhas de corrente; e isso, por sua vez, implica que

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{2}$$

Seu plano é usar essa equação para determinar a função corrente e, depois, as linhas de corrente do modelo básico do furacão.

Como os fluxos vórtice e poço que produzem o modelo básico do furacão têm simetria central, a intuição sugere que coordenadas polares podem levar a equações mais simples para as linhas de corrente do que coordenadas retangulares. Então, você decide expressar o vetor velocidade \mathbf{F} num ponto (r, θ) em função dos vetores unitários ortogonais

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

O vetor \mathbf{u}_r , chamado *vetor radial unitário*, aponta para longe da origem e o vetor \mathbf{u}_θ , chamado *vetor transversal unitário*, é obtido girando \mathbf{u}_r 90° no sentido anti-horário (Figura 3).

Exercício 7 Mostre que o campo vetorial para o modelo básico do furacão dado por (1) pode ser dado em termos de \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ como

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2\pi r}(q\mathbf{u}_r - k\mathbf{u}_\theta)$$

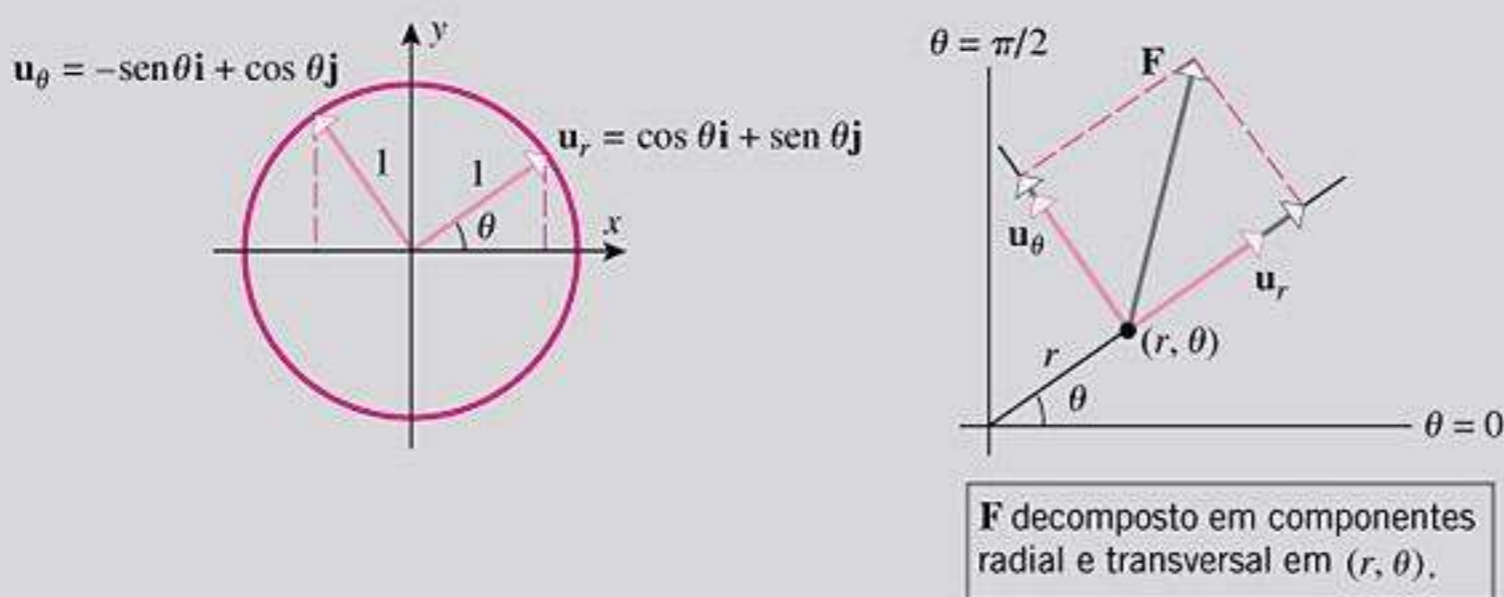


Figura 3

Pelo Exercício 75 da Seção 14.6, o gradiente da função corrente pode ser expresso em termos de \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ como

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta$$

.....
Exercício 8 Confirme que para o modelo básico do furacão a condição de ortogonalidade em (2) é satisfeita se

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{k}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = q$$

.....
Exercício 9 Integrando as equações do Exercício 8, mostre que

$$\psi = k \ln r + q\theta$$

é uma função corrente para o modelo básico do furacão.

.....
Exercício 10 Mostre que as linhas de corrente para o modelo básico do furacão são espirais logarítmicas da forma

$$r = Ke^{-q\theta/k} \quad (K > 0)$$

.....
Exercício 11 Use um recurso gráfico para gerar algumas linhas de corrente típicas para o modelo básico do furacão, com potência de vórtice 2π e potência de poço 2π .

Linhas de Fluxo para o Furacão Isaac

.....
Exercício 12 No Exercício 6, você calculou as potências k e q do vórtice e do poço do furacão Isaac. Use essa informação para determinar uma fórmula para a família de linhas de corrente do Isaac; e depois use um recurso gráfico para traçar as linhas de corrente que passam pelo ponto que está a 20 km do olho, na direção que está a 45° N.E. do olho.

.....
Módulo por: Josef S. Torok, Rochester Institute of Technology
Howard Anton, Drexel University

PROVAS SELECIONADAS

■ DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS BÁSICOS DE LIMITE

Uma excursão extensiva nas demonstrações dos teoremas sobre limites consumiria muito tempo; assim, selecionamos algumas demonstrações de resultados da Seção 2.2 do Volume 1 que ilustram algumas das idéias básicas.

C.1 TEOREMA *Sejam a um número real qualquer e k uma constante e vamos supor que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$. Então*

(a) $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$

(c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 L_2$

DEMONSTRAÇÃO (a) Vamos aplicar a Definição 2.4.1 do Volume 1 com $f(x) = k$ e $L = k$. Assim, dado $\epsilon > 0$, precisamos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|k - k| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

ou equivalentemente,

$$0 < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Mas a condição do lado esquerdo desta afirmativa é *sempre* verdadeira, não importando como δ for escolhido. Assim, qualquer valor positivo de δ irá servir.

DEMONSTRAÇÃO (b) Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad (1)$$

Porém, dos limites de f e g na hipótese do teorema, podemos encontrar números δ_1 e δ_2 tais que

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2 \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

$$|g(x) - L_2| < \epsilon/2 \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Além disso, as desigualdades do lado esquerdo destas afirmativas são *ambas* válidas se substituirmos δ_1 e δ_2 por qualquer número positivo δ que seja menor do que δ_1 e δ_2 . Assim, para qualquer destes δ temos

$$|f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad (2)$$

Porém, da desigualdade triangular [Teorema E5 do Apêndice E na Internet] decorre

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| &= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \end{aligned}$$

Assim, (1) segue de (2).

DEMONSTRAÇÃO (c) Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ positivo tal que

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad (3)$$

Para encontrar δ é conveniente expressar (3) de uma forma diferente. Reescrevendo $f(x)$ e $g(x)$ como

$$f(x) = L_1 + (f(x) - L_1) \quad \text{e} \quad g(x) = L_2 + (g(x) - L_2)$$

então a desigualdade no lado esquerdo de (3) pode ser escrita como (verifique)

$$|L_1(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1) + (f(x) - L_1)(g(x) - L_2)| < \epsilon \quad (4)$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

podemos encontrar números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 tais que

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1| &< \sqrt{\epsilon/3} && \text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \\ |f(x) - L_1| &< \frac{\epsilon}{3(1 + |L_2|)} && \text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \\ |g(x) - L_2| &< \sqrt{\epsilon/3} && \text{se } 0 < |x - a| < \delta_3 \\ |g(x) - L_2| &< \frac{\epsilon}{3(1 + |L_1|)} && \text{se } 0 < |x - a| < \delta_4 \end{aligned} \quad (5)$$

Além disso, as desigualdades à esquerda das quatro afirmativas serão todas válidas se substituirmos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 por qualquer número δ menor do que eles. Assim, para qualquer um destes δ , pela desigualdade triangular segue

$$\begin{aligned} &|L_1(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1) + (f(x) - L_1)(g(x) - L_2)| \\ &\leq |L_1(g(x) - L_2)| + |L_2(f(x) - L_1)| + |(f(x) - L_1)(g(x) - L_2)| \\ &= |L_1||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| + |f(x) - L_1||g(x) - L_2| \\ &< |L_1|\frac{\epsilon}{3(1 + |L_1|)} + |L_2|\frac{\epsilon}{3(1 + |L_2|)} + \sqrt{\epsilon/3}\sqrt{\epsilon/3} \quad \boxed{\text{De (5)}} \\ &= \frac{\epsilon}{3} \frac{|L_1|}{1 + |L_1|} + \frac{\epsilon}{3} \frac{|L_2|}{1 + |L_2|} + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \boxed{\text{Pois } \frac{|L_1|}{1 + |L_1|} < 1 \text{ e } \frac{|L_2|}{1 + |L_2|} < 1} \end{aligned}$$

mostrando que (4) é válida para o δ selecionado. ■

Não fique alarmado se a demonstração da parte (c) parecer difícil; é necessária alguma experiência com demonstrações desse tipo para desenvolver uma intuição na escolha do δ correto. Seu objetivo inicial deve ser entender as idéias e os cálculos.

■ **PROVA DE UMA PROPRIEDADE BÁSICA DE CONTINUIDADE**

A seguir, vamos demonstrar o Teorema 2.5.5 do Volume 1 para limites bilaterais.

C.2 TEOREMA (Teorema 2.5.5) Se $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ e se a função f for contínua em L , então $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L)$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$$

DEMONSTRAÇÃO Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se } 0 < |x - c| < \delta \quad (6)$$

Uma vez que f é contínua em L , temos

$$\lim_{u \rightarrow L} f(u) = f(L)$$

e, portanto, podemos encontrar um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |u - L| < \delta_1$$

Em particular, se $u = g(x)$, então

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |g(x) - L| < \delta_1 \tag{7}$$

Mas, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ e, portanto, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - c| < \delta \tag{8}$$

Assim, se x satisfizer a condição à direita de (8), segue que $g(x)$ irá satisfazer a condição à direita de (7), e isso implica que a condição à esquerda de (6) está satisfeita, completando a demonstração. ■

■ **DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA**

A seguir, vamos demonstrar a regra da cadeia (Teorema 3.6.1 do Volume 1), mas primeiro precisamos de um resultado preliminar.

C.3 TEOREMA *Se f for diferenciável em x e se $y = f(x)$, então*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

onde $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\epsilon = 0$ se $\Delta x = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Vamos definir

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) & \text{se } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \Delta x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Se $\Delta x \neq 0$, segue de (9) que

$$\epsilon \Delta x = [f(x + \Delta x) - f(x)] - f'(x)\Delta x \tag{10}$$

Mas

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{11}$$

logo (10) pode ser escrito como

$$\epsilon \Delta x = \Delta y - f'(x)\Delta x$$

ou

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x \tag{12}$$

Se $\Delta x = 0$, então (12) ainda é válida (por quê?), logo (12) é válida para todos os valores de Δx . Resta mostrar que $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Mas isso segue a partir da hipótese de que f é diferenciável em x , já que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right] = f'(x) - f'(x) = 0 \quad \blacksquare$$

Estamos prontos para demonstrar a regra da cadeia.

C.4 TEOREMA (Teorema 3.6.1) *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ é diferenciável no ponto x . Além disso, se $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$, então*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que g é diferenciável em x e $u = g(x)$, segue do Teorema C.3 que

$$\Delta(u) = g'(x)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x \quad (13)$$

onde $\epsilon_1 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. E como $y = f(u)$ é diferenciável em $u = g(x)$, segue do Teorema C.3 que

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u \quad (14)$$

onde $\epsilon_2 \rightarrow 0$ se $\Delta u \rightarrow 0$.

Fatorando Δu em (14) e, então, substituindo (13) resulta

$$\Delta y = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x]$$

ou

$$\Delta y = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x) + \epsilon_1]\Delta x$$

ou se $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x) + \epsilon_1] \quad (15)$$

Mas (13) implica que $\Delta u \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ e, portanto, $\epsilon_1 \rightarrow 0$ e $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Assim, de (15)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \blacksquare$$

■ PROVA DE QUE EXTREMOS RELATIVOS OCORREM EM PONTOS CRÍTICOS

Nesta subseção, demonstraremos o Teorema 5.2.2 do Volume 1, que estabelece que os extremos relativos de uma função ocorrem em pontos críticos.

C.5 TEOREMA (Teorema 5.2.2) *Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 . Se f tem um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ é um ponto crítico de f ; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0 .*

DEMONSTRAÇÃO Suponha que f tenha um máximo relativo em x_0 . Há duas possibilidades – ou f é diferenciável no ponto x_0 ou não é. Se não for, então x_0 é um ponto crítico de f e não há nada a demonstrar. Se f for diferenciável em x_0 , então precisamos mostrar que $f'(x_0) = 0$. Vamos fazer isso mostrando que $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, do que segue $f'(x_0) = 0$. A partir da definição de derivada, temos

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e, portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (16)$$

e

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (17)$$

Como f tem um máximo relativo em x_0 , existe um intervalo aberto (a, b) contendo x_0 no qual $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x em (a, b) .

Suponha que h seja suficientemente pequeno de tal forma que $x_0 + h$ esteja no intervalo (a, b) . Segue que

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \text{ou equivalente} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Assim, se h for negativo,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (18)$$

e se h for positivo,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{19}$$

Mas uma expressão que nunca assume valores negativos não pode ter um limite negativo e uma expressão que nunca assume valores positivos não pode ter um limite positivo, de modo que

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{De (17) e (18)}$$

e

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{De (16) e (19)}$$

Como $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, segue que $f'(x_0) = 0$.

Um argumento análogo é aplicável quando f tem um mínimo relativo em x_0 . ■

■ **DEMONSTRAÇÕES DE DUAS FÓRMULAS DE SOMATÓRIOS**

Demonstraremos as partes (a) e (b) do Teorema 6.4.2. A demonstração da parte (c) é análoga à da parte (b) e será, por isso, omitida.

C.6 TEOREMA (Teorema 6.4.2)

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ (b) \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ (c) \quad \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO (a) Escrevendo

$$\sum_{k=1}^n k$$

de duas maneiras, primeiro com as parcelas em ordem crescente e depois com as parcelas em ordem decrescente e, em seguida, somando, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ \sum_{k=1}^n k &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \sum_{k=1}^n k &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

DEMONSTRAÇÃO (b) Observe que

$$(k + 1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^n [(k + 1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) \quad (20)$$

Escrevendo o lado esquerdo de (20) com os índices em ordem *decrecente* de $k = n$ até $k = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [(k + 1)^3 - k^3] &= [(n + 1)^3 - n^3] + \cdots + [4^3 - 3^3] + [3^3 - 2^3] + [2^3 - 1^3] \\ &= (n + 1)^3 - 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Combinando (21) com (20) e expandindo o lado direito de (2) usando o Teorema 6.4.1 e a parte (a) que acabamos de demonstrar, resulta

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 - 1 &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n + 1)}{2} + n \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= [(n + 1)^3 - 1] - 3 \frac{n(n + 1)}{2} - n \\ &= (n + 1)^3 - 3(n + 1) \left(\frac{n}{2}\right) - (n + 1) \\ &= \frac{n + 1}{2} [2(n + 1)^2 - 3n - 2] \\ &= \frac{n + 1}{2} [2n^2 + n] = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \quad \blacksquare$$

■ DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

C.7 TEOREMA (Teorema 10.5.4) Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e suponha que

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Se ρ for finito e $\rho > 0$, então as séries ambas convergem ou ambas divergem.

DEMONSTRAÇÃO Precisamos apenas mostrar que $\sum b_k$ converge quando $\sum a_k$ converge e que $\sum b_k$ diverge quando $\sum a_k$ diverge, uma vez que os casos restantes são implicações lógicas destes (por quê?). A idéia da demonstração é aplicar o teste da comparação para $\sum a_k$ e múltiplos adequados de $\sum b_k$. Para isso, seja ϵ um número positivo qualquer. Como

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

A soma em (21) é um exemplo de uma *soma telescópica*, pois os cancelamentos de cada uma das duas partes de uma parcela interna com partes das parcelas vizinhas permite que a soma toda colapse como um telescópio retrátil.

segue que os termos na sequência $\{a_k / b_k\}$ devem estar, a partir de um certo termo, a menos de ϵ unidades de ρ ; ou seja, há um número positivo K tal que para $k \geq K$ temos

$$\rho - \epsilon < \frac{a_k}{b_k} < \rho + \epsilon$$

Em particular, se tomarmos qualquer $\epsilon = \rho/2$, então para $k \geq K$ temos

$$\frac{1}{2}\rho < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}\rho \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\rho b_k < a_k < \frac{3}{2}\rho b_k$$

Assim, pelo teste da comparação, podemos concluir que

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{2}\rho b_k \quad \text{converge se} \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad (22)$$

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{3}{2}\rho b_k \quad \text{diverge se} \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k \quad \text{diverge} \quad (23)$$

Mas a convergência e a divergência de uma série não é afetada retirando-se finitos termos ou multiplicando o termo geral por uma constante não-nula, de modo que (22) e (23) implicam que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{converge se} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{diverge se} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

■ DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA RAZÃO

C.8 TEOREMA (Teorema 10.5.5) *Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

- (a) *Se $\rho < 1$, a série converge.*
- (b) *Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série diverge.*
- (c) *Se $\rho = 1$, a série pode convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.*

DEMONSTRAÇÃO (a) O número ρ deve ser não-negativo, uma vez que é o limite de u_{k+1}/u_k , que é positivo para todo k . Nessa parte da demonstração, vamos supor que $\rho < 1$, de modo que $0 \leq \rho < 1$.

Demonstraremos a convergência mostrando que os termos da série dada são, a partir de um certo termo, menores do que os termos de uma série geométrica convergente. Para isso, vamos escolher qualquer número real r tal que $0 < \rho < r < 1$. Como o limite de u_{k+1}/u_k é ρ , e $\rho < r$, os termos da sequência $\{u_{k+1}/u_k\}$ devem ser, a partir de um certo termo, menores do que r . Assim, existe um inteiro positivo K tal que para $k \geq K$ temos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < r \quad \text{ou} \quad u_{k+1} < r u_k$$

Disso resultam as desigualdades

$$\begin{aligned} u_{K+1} &< r u_K \\ u_{K+2} &< r u_{K+1} < r^2 u_K \\ u_{K+3} &< r u_{K+2} < r^3 u_K \\ u_{K+4} &< r u_{K+3} < r^4 u_K \\ &\vdots \end{aligned} \quad (24)$$

Mas $0 < r < 1$, portanto

$$ru_K + r^2u_K + r^3u_K + \dots$$

é uma série geométrica convergente. A partir das desigualdades em (24) e do teste da comparação segue que

$$u_{K+1} + u_{K+2} + u_{K+3} + \dots$$

deve também ser uma série convergente. Assim, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_K + \dots$ converge pelo Teorema 10.4.3(c).

DEMONSTRAÇÃO (b) Nesta parte demonstraremos a divergência mostrando que o limite do termo geral não é zero. Uma vez que o limite de u_{k+1}/u_k é ρ e $\rho > 1$, os termos na seqüência $\{u_{k+1}/u_k\}$ devem ser, a partir de um certo termo, maiores do que 1. Assim, existe um inteiro positivo K tal que para $k \geq K$ temos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \quad \text{ou} \quad u_{k+1} > u_k$$

Disso resultam as desigualdades

$$\begin{aligned} u_{K+1} &> u_K \\ u_{K+2} &> u_{K+1} > u_K \\ u_{K+3} &> u_{K+2} > u_K \\ u_{K+4} &> u_{K+3} > u_K \\ &\vdots \end{aligned} \tag{25}$$

Como $u_K > 0$, segue das desigualdades em (25) que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$ e, assim, a série $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$ diverge pela parte (a) do Teorema 10.4.1. A demonstração no caso em que $\rho = +\infty$ é omitida.

DEMONSTRAÇÃO (c) A série harmônica divergente e a série p convergente com $p = 2$ ambas têm $\rho = 1$ (verifique); assim, o teste da razão, quando $\rho = 1$, não distingue entre convergência e divergência. ■

■ DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA ESTIMATIVA DO RESTO

C.9 TEOREMA (Teorema 10.7.4) Se a função f puder ser diferenciada $n + 1$ vezes em um intervalo I contendo o ponto x_0 e se M for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ em I , isto é, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo x em I , então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

para todo x em I .

DEMONSTRAÇÃO Estamos supondo que f possa ser diferenciada $n + 1$ vezes em um intervalo I contendo o ponto x_0 e que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \tag{26}$$

para todo x em I . Queremos mostrar que

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \tag{27}$$

para todo x em I , onde

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{28}$$

Em nossa demonstração, iremos precisar das duas seguintes propriedades de $R_n(x)$:

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0 \quad (29)$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } I \quad (30)$$

Essas propriedades podem ser obtidas analisando o que acontece se a expressão para $R_n(x)$ na Fórmula (28) for diferenciada j vezes e, então, x_0 for substituído na derivada. Se j for menor do que n , a j -ésima derivada da soma na Fórmula (28) consiste em um termo constante $f^{(j)}(x_0)$ mais termos envolvendo potências de $x - x_0$ (verifique). Assim, $R_n^{(j)}(x_0) = 0$ para $j < n$, o que demonstra tudo menos a última equação em (29). Para a última equação, observe que a n -ésima derivada da soma em (28) é a constante $f^{(n)}(x_0)$, portanto $R_n^{(n)}(x_0) = 0$. A Fórmula (30) segue da observação de que a $(n + 1)$ -ésima derivada da soma em (28) é zero (por quê?).

Vamos agora para a parte principal da demonstração. Para simplificar, daremos a demonstração no caso $x \geq x_0$ e deixamos para o leitor o caso $x < x_0$. Tem-se a partir de (26) e (30) que $|R_n^{(n+1)}(x)| \leq M$ e, portanto,

$$-M \leq R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

Assim,

$$\int_{x_0}^x -M dt \leq \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) dt \leq \int_{x_0}^x M dt \quad (31)$$

Porém, de (29) segue que $R_n^{(n)}(x_0) = 0$, portanto

$$\int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) dt = R_n^{(n)}(t) \Big|_{x_0}^x = R_n^{(n)}(x)$$

Assim, efetuando as integrações em (31), obtemos as desigualdades

$$-M(x - x_0) \leq R_n^{(n)}(x) \leq M(x - x_0)$$

Agora vamos integrar novamente. Substituindo x por t nessas desigualdades, integrando de x_0 até x e usando $R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, obtemos

$$-\frac{M}{2}(x - x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2$$

Se continuarmos repetindo este processo, então depois de $n + 1$ integrações iremos obter

$$-\frac{M}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

o que pode ser reescrito como

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Isso completa a prova de (27), uma vez que os sinais de valor absoluto podem ser omitidos naquela fórmula quando $x \geq x_0$ (que é o caso sob consideração). ■

■ DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA PARA DUAS VARIÁVEIS

C.10 TEOREMA (Teorema 14.5.1) *Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

DEMONSTRAÇÃO Sejam Δx , Δy e Δz as variações em x , y e z , respectivamente, que correspondem a variações de Δt em t . Então

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Como $f(x, y)$ é diferenciável em $(x(t), y(t))$, segue de (5) da Seção 14.4 que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (32)$$

onde as derivadas parciais estão calculadas em $(x(t), y(t))$ e onde $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ satisfaz $\epsilon(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ e $\epsilon(0, 0) = 0$. Dividindo ambos lados de (32) por Δt , obtemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \quad (33)$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\epsilon(\Delta x, \Delta y)| \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\epsilon(\Delta x, \Delta y)| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} \\ &= 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

Assim,

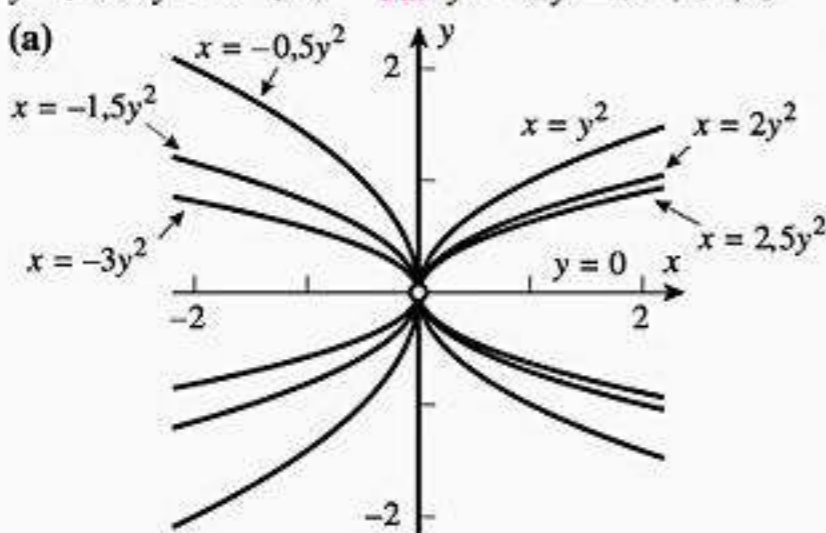
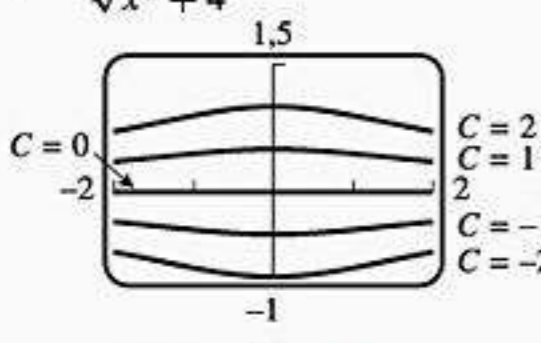
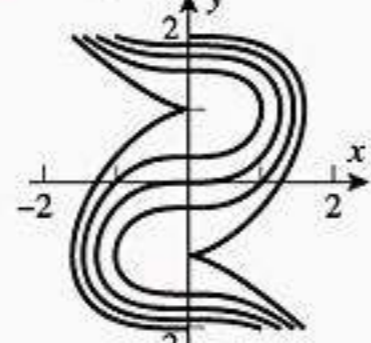
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = 0$$

Tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ de ambos lados de (33), obtemos a equação

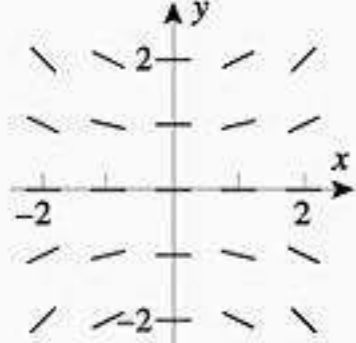
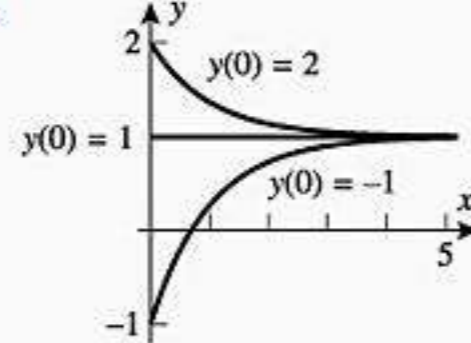
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \blacksquare$$

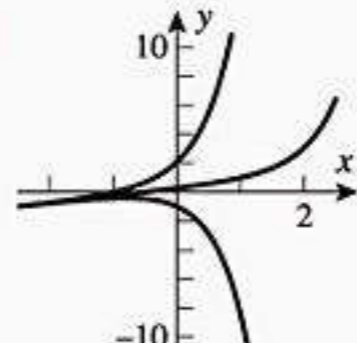
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

► Exercícios 9.1 (página 592)

3. (a) primeira ordem (b) segunda ordem
 7. (a) $y = Ce^{-3x}$ (b) $y = Ce^{2x}$
 9. $y = e^{-3x} + Ce^{-4x}$ 11. $y = e^{-x} \sin(e^x) + Ce^{-x}$
 13. $y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ 15. $y = Cx$ 17. $y = Ce^{-\sqrt{1+x^2}} - 1, C \neq 0$
 19. $2 \ln |y| + y^2 = e^x + C$ 21. $y = \ln(\sec x + C)$
 23. $y = \frac{1}{1-C(\operatorname{cosec} x - \cotg x)}, C \neq 0$ e $y = 0$
 25. (a) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$ (b) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2x}$ 27. $y = 4e^{x^2} - 1$
 29. $y^2 + \sin y = x^3 + \pi^2$ 31. $y^2 - 2y = t^2 + t + 3$
 33. (a)  (b) $y^2 = x/4$
 35. $y = \frac{C}{\sqrt{x^2+4}}$  37. $x^3 + y^3 - 3y = C$ 
 41. $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$ 43. (a) $200 - 175e^{-t/25}$ g (b) 136 g
 45. 25 lb 49. (a) $I(t) = 2 - 2e^{-2t}$ (b) $I(t) \rightarrow 2$
 51. (a) $v = c \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt$ (b) 3044 m/s
 53. (a) $h \approx (2 - 0,003979t)^2$ (b) 8,4 min
 55. (a) $v = 128/(4t + 1), x = 32 \ln(4t + 1)$
 57. $\frac{dy}{dx} = -\sin x + e^{-x^2}, y(0) = 1$

► Exercícios 9.2 (página 600)

1.  3. 

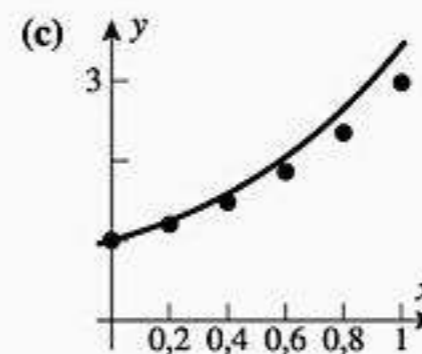
5.  9. (a) IV
 (b) VI
 (c) V
 (d) II
 (e) I
 (f) III

11. (a)

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_n	1	1,20	1,48	1,86	2,35	2,98

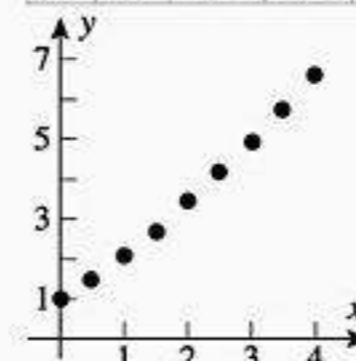
(b) $y = -(x+1) + 2e^x$

x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y(x_n)$	1	1,24	1,58	2,04	2,65	3,44
erro absoluto	0	0,04	0,10	0,19	0,30	0,46
erro percentual	0	3	6	9	11	13



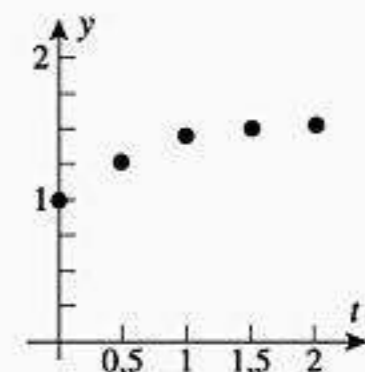
13.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_n	1,00	1,50	2,07	2,71	3,41	4,16	4,96	5,82	6,72



15.

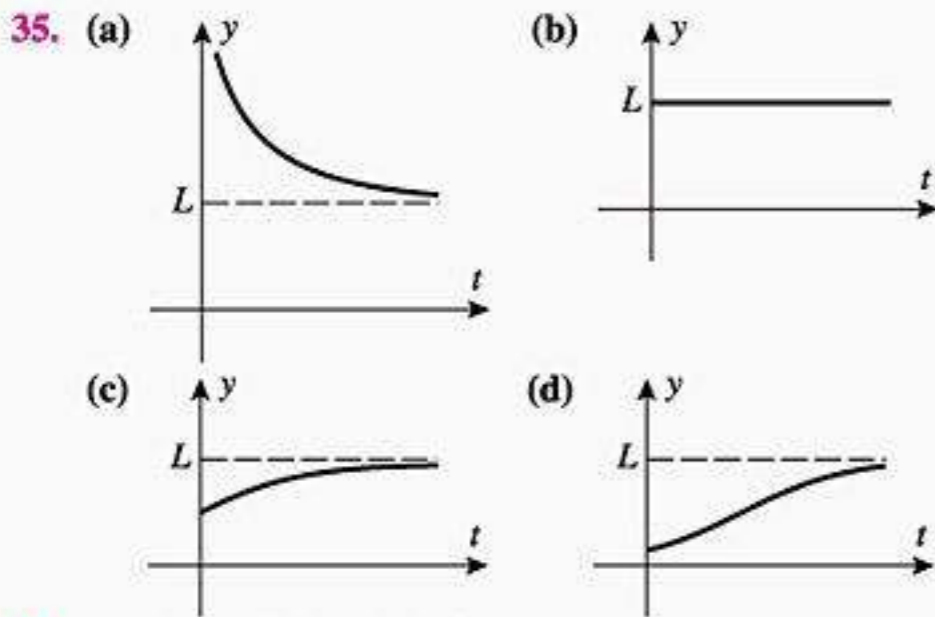
n	0	1	2	3	4
t_n	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00
y_n	1,00	1,27	1,42	1,49	1,53



17. 0,615537 19. (b) $y(1/2) = \sqrt{3}/2$
 23. (a) $y' = \frac{2xy - y^3}{3xy^2 - x^2}$ (c) $xy^3 - x^2y = 2$

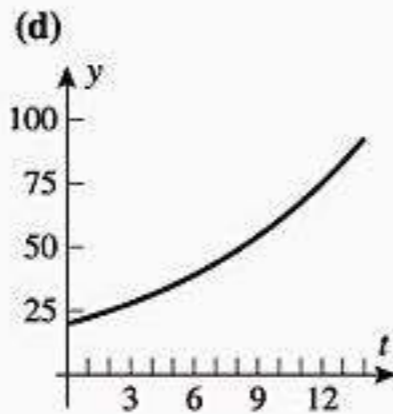
► **Exercícios 9.3 (página 608)**

1. (a) $\frac{dy}{dt} = ky^2, y(0) = y_0 (k > 0)$ (b) $\frac{dy}{dt} = -ky^2, y(0) = y_0 (k > 0)$
 3. (a) $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}s$ (b) $\frac{d^2s}{dt^2} = 2\frac{ds}{dt}$
 5. (a) $y'(t) = y(t)/50, y(0) = 10000$ (b) $y(t) = 10000e^{t/50}$
 (c) $50 \ln 2 \approx 34,66$ h (d) $50 \ln(4,5) \approx 75,20$ h
 7. (a) $\frac{dy}{dt} = -ky, k \approx 0,1810$ (b) $y = 5,0 \times 10^7 e^{-0,181t}$
 (c) ≈ 219.000 átomos (d) 12,72 dias
 9. $50 \ln(100) \approx 230,26$ dias 11. 3,30 dias
 13. (a) $y = 3e^{((\ln 2)/6)t}$ (b) $y = 4e^{t/50}$ (c) $y = 200^{-1/9} e^{((\ln 200)/9)t}$
 (d) $y = 2^{5/6} e^{((\ln 2)/6)t}$
 17. (b) 70 anos (c) 20 anos (d) 7% 21. (a) não (b) mesmo, $r\%$
 23. (c) $y = 4e^{t \ln 2}$ (d) $y = 4e^{-t \ln 2}$ 25. $\ln(2)/\ln(5/4) \approx 3,106$ h
 27. (a) \$ 1491,82 (b) \$ 4493,29 (c) 8,7 anos
 29. (a) $\frac{dT}{dt} = -k(T - 21), T(0) = 95; T = 21 + 74e^{-kt}$ (b) 6,22 min
 33. (d) $L/2$



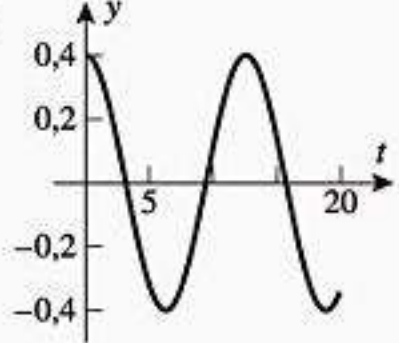
37. $y_0 \approx 2, L \approx 8, k \approx 0,5493$
 39. (a) $y_0 = 5$ (b) $L = 12$ (c) $k = 1$ (d) $t = 0,3365$
 (e) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(12 - y), y(0) = 5$
 41. Suponha que $y(t)$ estudantes pegaram gripe t dias depois do fim das férias. Então $y(0) = 20, y(5) = 35$. (a) $\frac{dy}{dt} = ky(1000 - y), y_0 = 20$
 (b) $y = \frac{1000}{1 + 49e^{-0,115t}}; k = 0,115$
 (c)

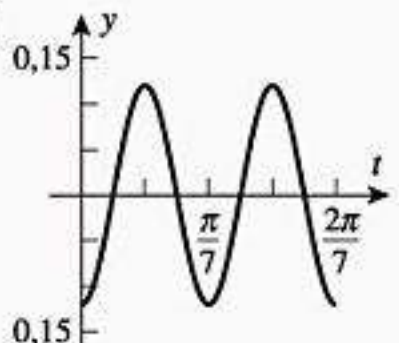
t	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(t)$	20	22	25	28	31	35	39	44
t	8	9	10	11	12	13	14	
$y(t)$	49	54	61	67	75	83	93	



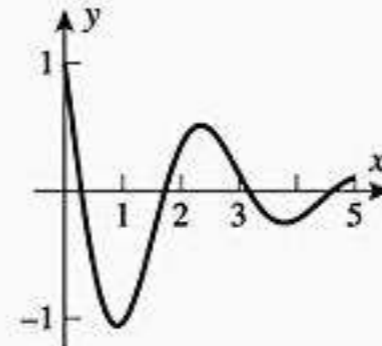
► **Exercícios 9.4 (página 619)**

3. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$ 5. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$
 7. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 9. $y = c_1 + c_2 e^x$
 11. $y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ 13. $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
 15. $y = c_1 e^{-x/4} + c_2 e^{x/2}$ 17. $y = 3e^x - 2e^{-3x}$
 19. $y = 2e^{-3x} + x e^{-3x}$ 21. $y = -e^{-2x}(3 \cos x + 6 \sin x)$
 23. (a) $y'' - 3y' - 10y = 0$
 (b) $y'' - 8y' + 16y = 0$ (c) $y'' + 2y' + 17y = 0$
 25. (a) $k < 0$ ou $k > 4$ (b) 0,4 (c) $0 < k < 4$

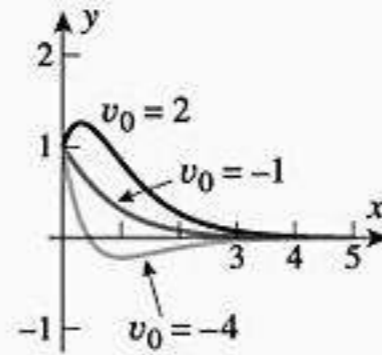
27. (a) $y = (1/x)[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)]$
 (b) $y = c_1 x^{1+\sqrt{3}} + c_2 x^{1-\sqrt{3}}$
 33. (a) $y(t) = 0,4 \cos(t/2)$ m (b) período = 4π s, frequência = $\frac{1}{4\pi}$ Hz
 (c)  (d) $t = \pi$ s
 (e) $t = 2\pi$ s

35. (a) $y = -0,12 \cos 14t$ (b) $T = \pi/7$ s, $f = 7/\pi$ Hz
 (c)  (d) $t = \pi/28$ s (e) $t = \pi/14$ s

37. (a) Velocidade máxima ocorre quando $y = 0$.
 (b) Velocidade mínima ocorre quando $y = \pm y_0$.
 39. $Mx''(t) + kx(t) = 0, x(0) = x_0, x'(0) = 0$
 43. (a) $y = e^{-1,2t} + 3,2te^{-1,2t}$ (b) 1,427364 cm
 45. (a) $y = e^{-t/2} \cos(\sqrt{19}t/2) - \frac{6}{19} \sqrt{19} e^{-t/2} \sin(\sqrt{19}t/2)$

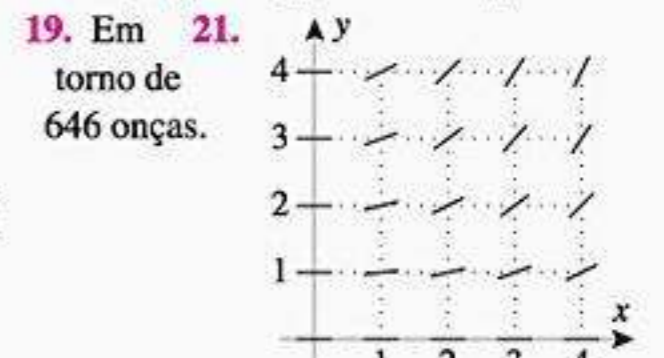
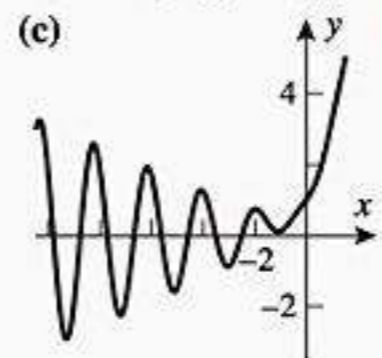


- (b) 1,0545 cm
 (c) $-3,210357$ cm/s (d) $3,210357$ cm/s²
 47. (a) $y = (4 + 2v_0)e^{-3t/2} - (3 + 2v_0)e^{-2t}$
 (b) $8e^{-3t/2} - 7e^{-2t}, 2e^{-3t/2} - e^{-2t}, -4e^{-3t/2} + 5e^{-2t}$



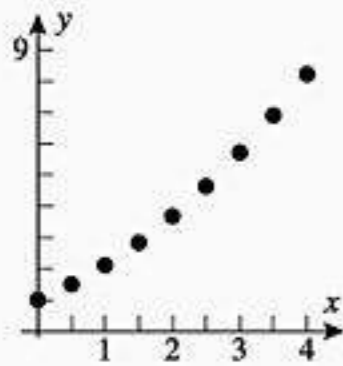
► **Capítulo 9 Exercícios de Revisão (página 622)**

3. (a) linear (b) ambos (c) separável (d) nenhum
 5. não 7. $y = \text{tg}(x^3/3 + C)$ 9. $\ln|y| + y^2/2 = e^x + C$ e $y = 0$
 11. $y = -1 + 4e^{x^2/2}$ 13. $y = 2 \text{sech } x + \frac{1}{2}(x \text{sech } x + \sinh x)$
 15. $y^{-4} + 4 \ln(x/y) = 1$
 17. (a) $y = (-\frac{3}{10}x - \frac{3}{50}) \cos 3x + (-\frac{1}{10}x + \frac{2}{25}) \sin 3x + \frac{53}{50} e^x$



23.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x _n	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y _n	1	1,50	2,11	2,84	3,68	4,64	5,72	6,91	8,23



25. $y(1) \approx 1,00$

n	0	1	2	3	4	5
f _n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y _n	1,00	1,20	1,26	1,10	0,94	1,00

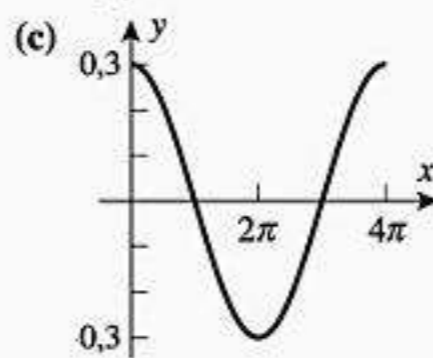
27. (a) $y \approx 2e^{0,1386t}$ (b) $y = 5e^{0,015t}$ (c) $y \approx 0,5995e^{0,5117t}$

(d) $y \approx 0,8706e^{0,1386t}$ 29. Em torno de 2000,6 anos

31. (a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (b) $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2}$

(c) $y = e^{-x/2} \left[c_1 \cos \frac{\sqrt{7}x}{2} + C \sin \frac{\sqrt{7}x}{2} \right]$

33. (a) $y = 0,3 \cos(t/2)$
 (b) $T = 4\pi$ s, $f = 1/(4\pi)$ Hz
 (d) $t = \pi$ s
 (e) $t = 2\pi$ s



► Exercícios 10.1 (página 633)

1. (a) $\frac{1}{3^{n-1}}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ (c) $\frac{2n-1}{2n}$ (d) $\frac{n^2}{\pi^{1/(n+1)}}$
 3. (a) 2, 0, 2, 0 (b) 1, -1, 1, -1 (c) $2(1 + (-1)^n)$; $2 + 2 \cos n\pi$
 5. $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = 1$
 7. 2, 2, 2, 2, 2; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$
 9. $\frac{\ln 1}{1}, \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \frac{\ln 5}{5}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
 11. 0, 2, 0, 2, 0; diverge 13. $-1, \frac{16}{9}, -\frac{54}{28}, \frac{128}{65}, -\frac{250}{126}$; diverge
 15. $\frac{6}{2}, \frac{12}{8}, \frac{20}{18}, \frac{30}{32}, \frac{42}{50}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}$
 17. $\cos 3, \cos \frac{3}{2}, \cos 1, \cos \frac{3}{4}, \cos \frac{3}{5}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(3/n) = 1$
 19. $e^{-1}, 4e^{-2}, 9e^{-3}, 16e^{-4}, 25e^{-5}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2e^{-n} = 0$
 21. $2, \left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(\frac{6}{4}\right)^3, \left(\frac{7}{5}\right)^4, \left(\frac{8}{6}\right)^5$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+3}{n+1}\right]^n = e^2$
 23. $\left\{\frac{2n-1}{2n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$
 25. $\left\{(-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} = 0$
 27. $\left\{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0$
 29. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = 0$
 31. Por exemplo, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{\sin(\pi n/2) + 1/n\}_{n=1}^{+\infty}$
 33. (a) 1, 2, 1, 4, 1, 6, (b) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ ímpar} \\ 1/2^n, & n \text{ par} \end{cases}$
 (c) $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ ímpar} \\ 1/(n+1), & n \text{ par} \end{cases}$

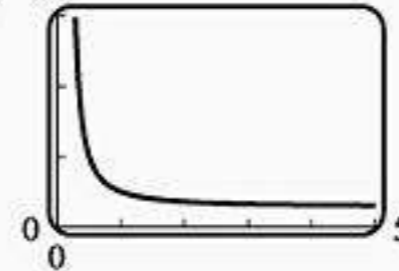
(d) (a) diverge; (b) diverge; (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

35. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$

39. (a) $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$

43. (a) $(0,5)^{2n}$ (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (d) $-1 \leq a_0 \leq 1$

45. (a) 30 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} = 3$



47. converge para 0 49. (a) $N = 3$ (b) $N = 11$ (c) $N = 1001$

► Exercícios 10.2 (página 641)

1. estritamente decrescente 3. estritamente crescente 5. estritamente decrescente 7. estritamente crescente 9. estritamente decrescente
 11. estritamente crescente 13. estritamente crescente 15. estritamente decrescente 17. estritamente decrescente
 19. estritamente crescente a partir de um certo termo
 21. estritamente decrescente a partir de um certo termo
 23. estritamente crescente a partir de um certo termo
 25. (a) Sim; o limite situa-se no intervalo $[1, 2]$
 (b) Não, mas em caso afirmativo, o limite é ≤ 2 .

► Exercícios 10.3 (página 649)

1. (a) $2, \frac{12}{5}, \frac{62}{25}, \frac{312}{125}; \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right); \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{5}{2}$ (converge)
 (b) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}; -\frac{1}{4}(1 - 2^n); \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ (diverge)
 (c) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}; \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{2}$ (converge)
 3. $\frac{4}{7}$ 5. 6 7. $\frac{1}{3}$ 9. $\frac{1}{6}$ 11. diverge 13. $\frac{448}{3}$
 15. (a) Exercício 5 (b) Exercício 3 (c) Exercício 7 (d) Exercício 9
 17. $\frac{4}{9}$ 19. $\frac{532}{99}$ 23. 70 m
 25. (a) $s_n = -\ln(n+1); \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$ (diverge)
 (b) $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \left[\ln \frac{k-1}{k} - \ln \frac{k}{k+1} \right]; \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\ln 2$
 27. (a) converge se $|x| < 1$; $S = \frac{x}{1+x^2}$
 (b) converge se $|x| > 2$; $S = \frac{1}{x^2 - 2x}$
 (c) converge se $x > 0$; $S = \frac{1}{e^x - 1}$
 29. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} a_1 + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2}; \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$
 37. (b) $A = 1, B = -2$
 (c) $s_n = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{(2/3)^{n+1}}{1 - (2/3)^{n+1}} \right] = 2$

► Exercícios 10.4 (página 657)

1. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{3}{4}$
 3. (a) $p = 3$, converge (b) $p = \frac{1}{2}$, diverge
 (c) $p = 1$, diverge (d) $p = \frac{2}{3}$, diverge
 5. (a) diverge (b) diverge (b) diverge (b) nenhuma informação
 7. (a) diverge (b) converge

R4 Cálculo

9. diverge 11. diverge 13. diverge 15. diverge 17. diverge
 19. converge 21. diverge 23. converge 25. converge se $p > 1$
 29. (a) diverge (b) diverge
 31. (a) $(\pi^2/2) - (\pi^4/90)$ (b) $(\pi^2/6) - (5/4)$ (c) $\pi^4/90$
 33. (c) $\frac{1}{11} < \frac{1}{6}\pi^2 - s_{10} < \frac{1}{10}$
 35. (b) $n = 5$ (c) 1,20
 37. (d) $n > e^{100} - 1$ 39. converge

► **Exercícios 10.5 (página 664)**

1. (a) converge (b) diverge 5. converge 7. converge
 9. diverge 11. converge 13. inconclusivo 15. diverge
 17. diverge 19. converge 21. converge 23. converge
 25. converge 27. converge 29. diverge 31. converge
 33. diverge 35. converge 37. converge
 39. diverge 41. converge 43. converge
 45. $u_k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$; $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}$; converge
 47. converge 49. diverge 51. (a) converge (b) diverge

► **Exercícios 10.6 (página 673)**

3. diverge 5. converge 7. converge absolutamente 9. diverge
 11. converge absolutamente 13. converge condicionalmente
 15. divergente 17. converge condicionalmente
 19. converge condicionalmente 21. divergente
 23. converge condicionalmente 25. converge absolutamente
 27. converge condicionalmente 29. converge absolutamente
 31. |erro| < 0,125 33. |erro| < 0,1 35. $n = 9999$
 37. $n = 39.999$ 39. |erro| < 0,00074; $s_{10} \approx 0,4995$; $S = 0,5$
 41. 0,84 43. 0,41 45. (c) $n = 50$
 47. (a) Se $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, então $\sum a_k$ converge e $\sum a_k^2$ diverge.
 Se $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, então $\sum a_k$ converge e $\sum a_k^2$ também converge.
 (b) Se $a_k = \frac{1}{k}$, então $\sum a_k^2$ converge e $\sum a_k$ diverge.
 Se $a_k = \frac{1}{k^2}$, então $\sum a_k^2$ converge e $\sum a_k$ também converge.
 55. (a) $124,58 < d < 124,77$ (b) $1243 < s < 1424$

► **Exercícios 10.7 (página 684)**

1. (a) $1 - x + \frac{1}{2}x^2, 1 - x$ (b) $1 - \frac{1}{2}x^2, 1$ (c) $1 - \frac{1}{2}(x - \pi/2)^2, 1$
 (d) $1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2, 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$
 3. (a) $1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2$ (b) 1,04875 5. 1,80397443
 7. $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2,$
 $p_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3,$
 $p_4(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4; \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$
 9. $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1, p_2(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2!}x^2, p_3(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2!}x^2,$
 $p_4(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2!}x^2 + \frac{\pi^4}{4!}x^4; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 1.3, à p. 39 do Volume 1.)
 11. $p_0(x) = 0, p_1(x) = x, p_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2, p_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$
 $p_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4; \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

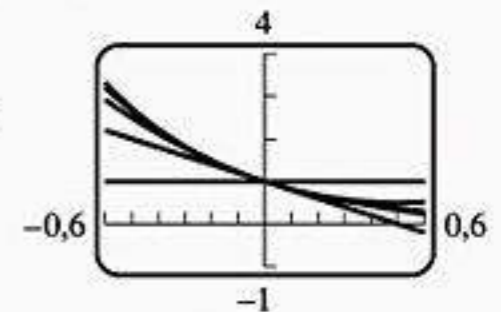
13. $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1, p_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2},$
 $p_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2}, p_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 1.3, à p.39 do Volume 1.)
 15. $p_0(x) = 0, p_1(x) = 0, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^2,$
 $p_4(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+2}$ (Ver Exercício 74 da Seção 1.3, à p. 39 do Volume 1.)

17. $p_0(x) = e, p_1(x) = e + e(x - 1),$
 $p_2(x) = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2,$
 $p_3(x) = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{3!}(x - 1)^3,$
 $p_4(x) = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{3!}(x - 1)^3 + \frac{e}{4!}(x - 1)^4;$
 $\sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x - 1)^k$
 19. $p_0(x) = -1, p_1(x) = -1 - (x + 1),$
 $p_2(x) = -1 - (x + 1) - (x + 1)^2,$
 $p_3(x) = -1 - (x + 1) - (x + 1)^2 - (x + 1)^3,$
 $p_4(x) = -1 - (x + 1) - (x + 1)^2 - (x + 1)^3 - (x + 1)^4;$
 $\sum_{k=0}^n (-1)(x + 1)^k$

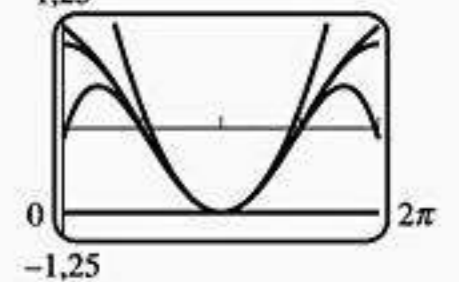
21. $p_0(x) = p_1(x) = 1, p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$
 $p_4(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^4}{4!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^4;$
 $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 1.3.)

23. $p_0(x) = 0, p_1(x) = (x - 1), p_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2,$
 $p_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3,$
 $p_4(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4;$
 $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x - 1)^k$

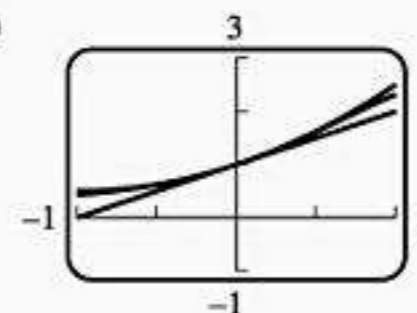
25. (a) $p_3(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$
 (b) $p_3(x) = 1 + 2(x - 1) - (x - 1)^2 + (x - 1)^3$
 27. $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 - 2x,$
 $p_2(x) = 1 - 2x + 2x^2,$
 $p_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$



29. $p_0(x) = -1, p_2(x) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2,$
 $p_4(x) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - \frac{1}{24}(x - \pi)^4,$
 $p_6(x) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - \frac{1}{24}(x - \pi)^4 + \frac{1}{720}(x - \pi)^6$



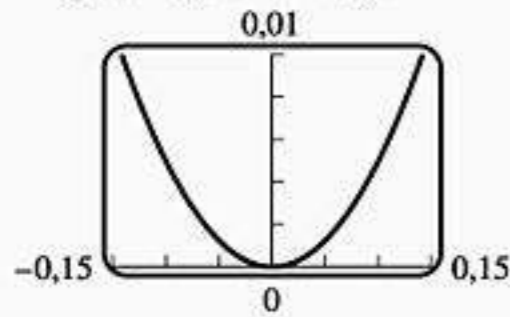
31. 1,64872 35. IV
 37. (a)



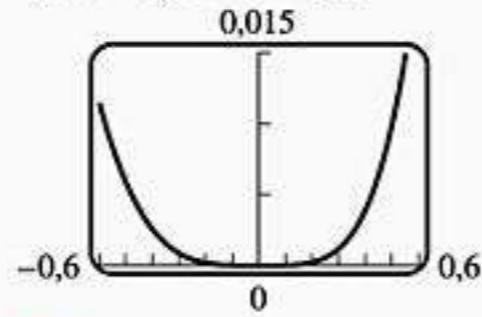
(b)

x	-1,000	-0,750	-0,500	-0,250	0,000	0,250	0,500	0,750	1,000
$f(x)$	0,431	0,506	0,619	0,781	1,000	1,281	1,615	1,977	2,320
$p_1(x)$	0,000	0,250	0,500	0,750	1,000	1,250	1,500	1,750	2,000
$p_2(x)$	0,500	0,531	0,625	0,781	1,000	1,281	1,625	2,031	2,500

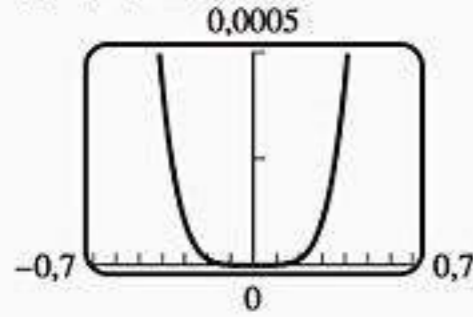
(c) $|e^{\sec x} - (1+x)| < 0,01$
para $-0,14 < x < 0,14$



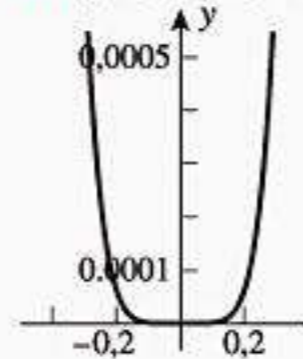
(d) $|e^{\sec x} - (1+x+\frac{x^2}{2})| < 0,01$
para $-0,50 < x < 0,50$



39. (a) $(-0,569; 0,569)$



41. $(-0,311; 0,311)$



► **Exercícios 10.8 (página 693)**

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ 3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ 5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$
 7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$ 9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+2}$ 11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$
 13. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+1)^k$ 15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k}$
 17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ 19. $-1 < x < 1; \frac{1}{1+x}$
 21. $1 < x < 3; \frac{1}{3-x}$ 23. (a) $-2 < x < 2$ (b) $f(0) = 1; f(1) = \frac{2}{3}$
 25. $R = 1, [-1, 1)$ 27. $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$ 29. $R = \frac{1}{3}; [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
 31. $R = 1, [-1, 1]$ 33. $R = 1, (-1, 1]$ 35. $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$
 37. $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$ 39. $R = 1, [-1, 1]$ 41. $R = 1, (-2, 0]$
 43. $R = \frac{4}{3}; (-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3})$ 45. $R = 1, [-2, 0]$
 47. $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$ 49. $(-\infty, +\infty)$
 55. raio = R

► **Exercícios 10.9 (página 702)**

1. 0,069756 3. 0,99500 5. 0,99619 7. 0,5208
 11. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(1/9)^{2k-1}}{2k-1}$ (b) 0,223
 13. (a) 0,4635; 0,3218 (b) 3,1412 (c) não
 17. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ (b) $1 + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{3^k k!} x^k$
 (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+2)(k+1)}{2} x^k$ 23. 23,406%
 25. (a) 0,7853981633974483096156608
 (b)
- | | |
|-----|--|
| n | s_n |
| 0 | 0,3183098 78 ... |
| 1 | 0,3183098 861837906 067 ... |
| 2 | 0,3183098 861837906 7153776 695 ... |
| 3 | 0,3183098 861837906 7153776 752674502 34 ... |

► **Exercícios 10.10 (página 712)**

1. (a) $1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \cdots; R = 1$
 (b) $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \cdots; R = 1$
 (c) $1 + 2x + 4x^2 + \cdots + 2^k x^k + \cdots; R = \frac{1}{2}$
 (d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} x + \frac{1}{2^3} x^2 + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} x^k + \cdots; R = 2$
 3. (a) $(2+x)^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} x + \frac{1 \cdot 3}{2^{9/2} \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^{13/2} \cdot 3!} x^3 + \cdots$
 (b) $(1-x^2)^{-2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \cdots$
 5. (a) $2x - \frac{2^3}{3!} x^3 + \frac{2^5}{5!} x^5 - \frac{2^7}{7!} x^7 + \cdots; R = +\infty$
 (b) $1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3} x^3 + \cdots; R = +\infty$
 (c) $1 + x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \cdots; R = +\infty$
 (d) $x^2 - \frac{\pi^2}{2} x^4 + \frac{\pi^4}{4!} x^6 - \frac{\pi^6}{6!} x^8 + \cdots; R = +\infty$
 7. (a) $x^2 - 3x^3 + 9x^4 - 27x^5 + \cdots; R = \frac{1}{3}$
 (b) $2x^2 + \frac{2^3}{3!} x^4 + \frac{2^5}{5!} x^6 + \frac{2^7}{7!} x^8 + \cdots; R = +\infty$
 (c) $x - \frac{3}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^5 + \frac{1}{16} x^7 + \cdots; R = 1$
 9. (a) $x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \cdots$
 (b) $12x^3 - 6x^6 + 4x^9 - 3x^{12} + \cdots$
 11. (a) $1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)^k (x-1)^k + \cdots$ (b) (0, 2)
 13. (a) $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$ (b) $x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{24} - \frac{71}{1920} x^5 + \cdots$
 15. (a) $1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \cdots$ (b) $x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \cdots$
 19. $2 - 4x + 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 + \cdots$
 25. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$ (b) $f^{(5)}(0) = 5!, f^{(6)}(0) = 0$
 (c) $f^{(n)}(0) = n! c_n = \begin{cases} n! & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$
 27. (a) 1 (b) $-\frac{1}{3}$ 29. 0,3103 31. 0,200
 33. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{k!}; R = +\infty$ 35. (a) 3/4 (b) $\ln(4/3)$
 37. (a) $x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 - \frac{5}{112} x^7 + \cdots$
 (b) $x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1}$ (c) $R = 1$
 39. (a) $y(t) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (0,000121)^k t^k}{k!}$ (c) 0,9998790073 y_0
 41. (a) $T \approx 2,00709$ (b) $T \approx 2,008044621$ (c) 2,008045644
 43. (a) $F = mg \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} - \frac{4h^3}{R^3} + \cdots\right)$ (b) em torno de 0,27% para menos

► **Capítulo 10 Exercícios de Revisão (página 714)**

9. (a) verdadeira (b) às vezes falsa (c) às vezes falsa
 (d) verdadeira (e) às vezes falsa (f) às vezes falsa
 (g) falsa (h) às vezes falsa (i) verdadeira
 (j) verdadeira (k) às vezes falsa (l) às vezes falsa
 11. (a) $\left\{ \frac{n+2}{(n+1)^2 - n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{2}$
 (b) $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$; diverge
 15. (a) converge (b) converge 17. (a) converge (b) diverge
 19. (a) diverge (b) converge 21. $\frac{1}{4 \cdot 5^{99}}$
 23. (a) 2 (b) diverge (c) 3/4 (d) $\pi/4$ 25. $p > 1$

29. (a) $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 - 7x, p_2(x) = 1 - 7x + 5x^2,$
 $p_3(x) = 1 - 7x + 5x^2 + 4x^3, p_4(x) = 1 - 7x + 5x^2 + 4x^3$
 33. (a) $e^2 - 1$ (b) 0 (c) $\cos e$ (d) $\frac{1}{3}$
 37. (a) $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7$ (b) $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7$

► Exercícios 11.1 (página 728)

1. 3. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$
 (b) $(-7/2, 7\sqrt{3}/2)$
 (c) $(3\sqrt{3}, 3)$
 (d) $(0, 0)$
 (e) $(-7\sqrt{3}/2, 7/2)$
 (f) $(-5, 0)$
 5. (a) $(5, \pi), (5, -\pi)$ (b) $(4, 11\pi/6), (4, -\pi/6)$
 (c) $(2, 3\pi/2), (2, -\pi/2)$ (d) $(8\sqrt{2}, 5\pi/4), (8\sqrt{2}, -3\pi/4)$
 (e) $(6, 2\pi/3), (6, -4\pi/3)$ (f) $(\sqrt{2}, \pi/4), (\sqrt{2}, -7\pi/4)$
 7. (a) $(5; 0,92730)$ (b) $(10; -0,92730)$ (c) $(1,27155; 2,47582)$
 9. (a) círculo (b) reta (c) círculo (d) reta
 11. (a) $r = 3 \sec \theta$ (b) $r = \sqrt{7}$ (c) $r = -6 \sin \theta$
 (d) $r^2 \cos \theta \sin \theta = 4/9$

13. 15. 17. (a) $r = 5$ (b) $r = 6 \cos \theta$ (c) $r = 1 - \cos \theta$
 19. (a) $r = 3 \sin 2\theta$ (b) $r = 3 + 2 \sin \theta$ (c) $r^2 = 9 \cos 2\theta$
 21. 23.

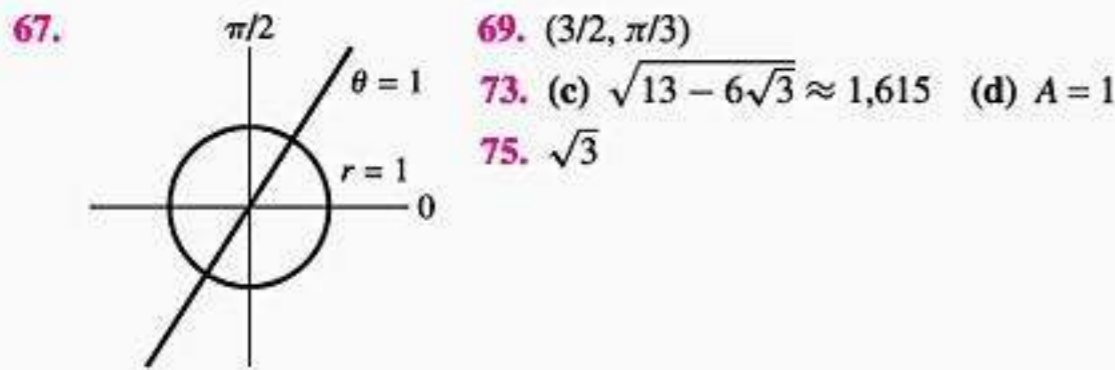
25. 27.

29. 31. 33. 35.

37. 39. 41. 43.

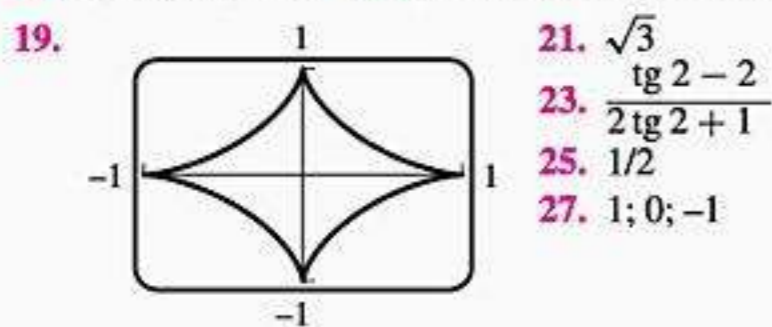
45. 47. 49. 51.

53. 55. 57. $-4\pi < \theta < 4\pi$
 61. (a) (b) (c) (d) (e)
65. (a) $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + \sin \theta)$
 (b) $r = 1 + \sin \theta$
 (c) $r = 1 - \cos \theta$
 (d) $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + \sin \theta)$

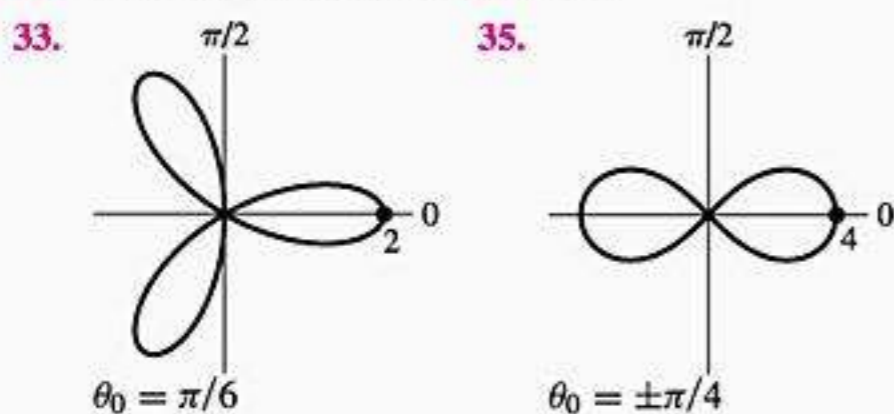


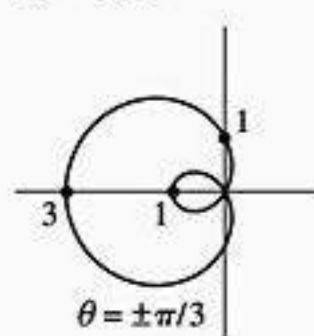
► **Exercícios 11.2 (página 737)**

1. $-4, 4$ 3. ambos sinais positivos 5. $4, 4$ 7. $2/\sqrt{3}, -1/(3\sqrt{3})$
 9. $\sqrt{3}, 4$ 11. (a) $y = -e^{-2}x + 2e^{-1}$ 13. (a) $0, \pi, 2\pi$
 (b) $\pi/2, 3\pi/2$
 15. $y = -2x, y = 2x$ 17. $y = 2x - 8, y = -2x + 8$



29. horizontal: $(3a/2, \pi/3), (0, \pi), (3a/2, 5\pi/3)$
 vertical: $(2a, 0), (a/2, 2\pi/3), (a/2, 4\pi/3)$
 31. $(0, 0), (\sqrt{2}/4, \pi/4), (\sqrt{2}/4, 3\pi/4)$



37. 
39. $L = 2\pi a$
 41. $L = 8a$
 43. $L = \sqrt{10}(e^6 - 1)/3$

45. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \text{sen } t}{1 - 3 \text{cos } t}$ (b) $\theta = -0,4345$
 47. (b) $\approx 2,42$

(c)

n	2	3	4	5	6	7
L	2,42211	2,22748	2,14461	2,10100	2,07501	2,05816

n	8	9	10	11	12	13	14
L	2,04656	2,03821	2,03199	2,02721	2,02346	2,02046	2,01802

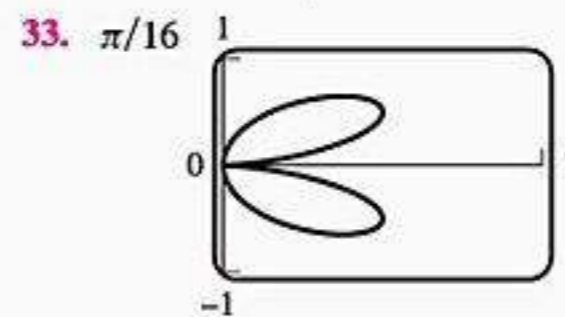
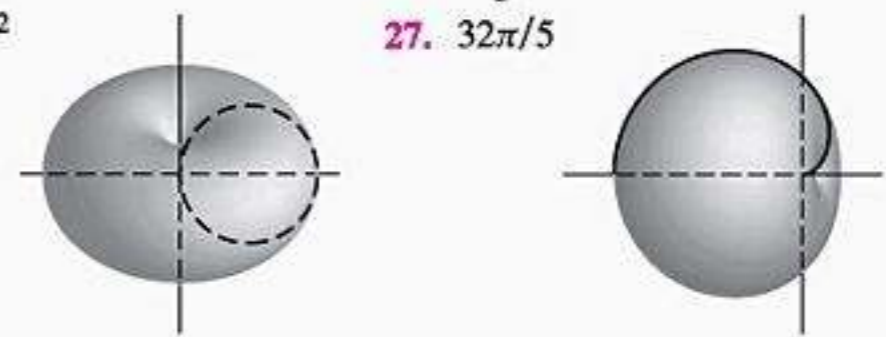
n	15	16	17	18	19	20
L	2,01600	2,01431	2,01288	2,01167	2,01062	2,00971

49. $S = 49\pi$ 51. $S = \sqrt{2}\pi$ 55. (a) $r = 2\theta + 10$ (b) $75,7 \text{ mm}$
 57. (b) $x = \text{cos } t + \text{cos } 2t, y = \text{sen } t + \text{sen } 2t$ (c) sim
 59. (a) Norte: $\theta = \pi/2$; Sul: $\theta = 3\pi/2$; Leste: $\theta = 0, 2\pi$; Oeste: $\theta = \pi$

► **Exercícios 11.3 (página 744)**

1. (a) πa^2 (b) πa^2 3. 6π 5. 4π 7. $\pi - 3\sqrt{3}/2$ 9. $\pi/2 - \frac{1}{4}$
 11. $10\pi/3 - 4\sqrt{3}$ 13. π 15. $9\sqrt{3}/2 - \pi$ 17. $(\pi + 3\sqrt{3})/4$

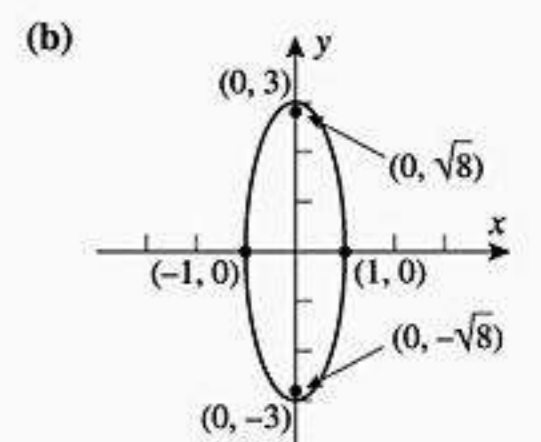
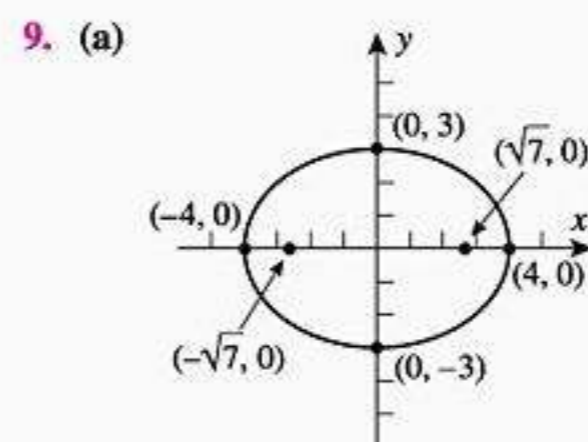
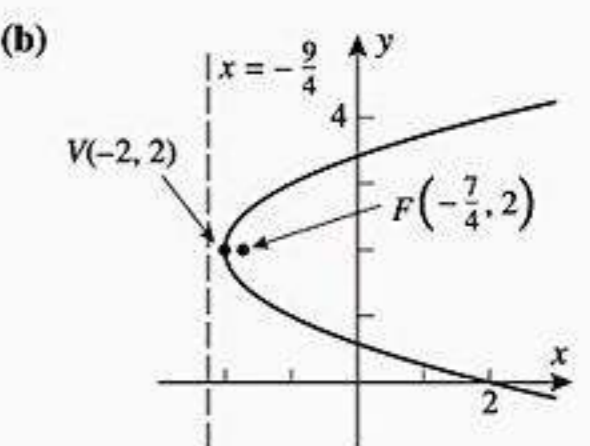
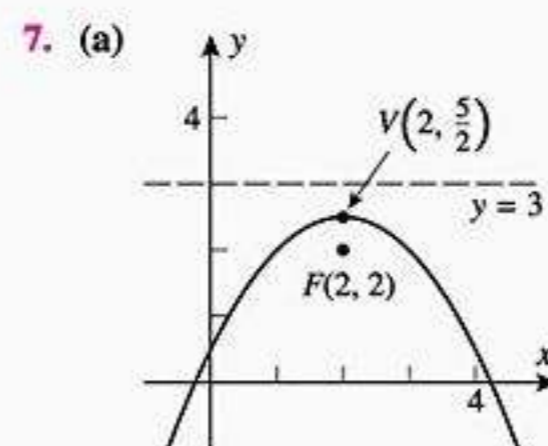
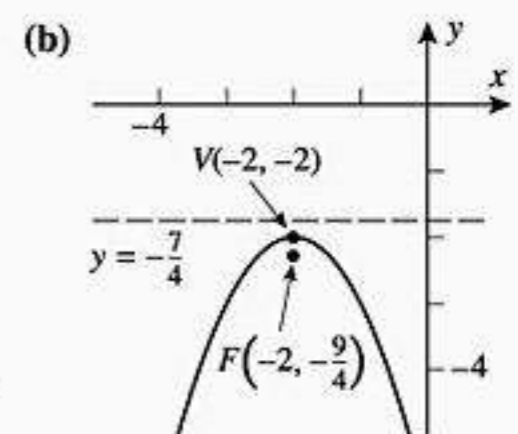
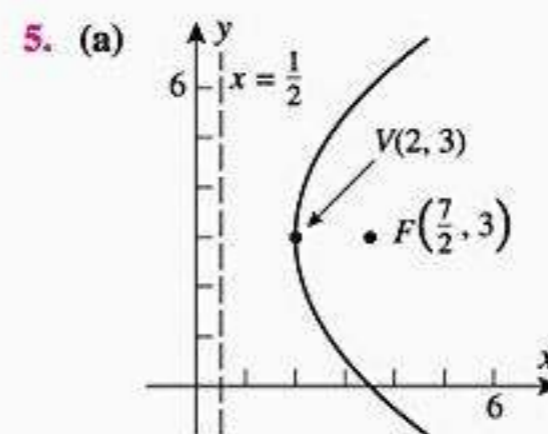
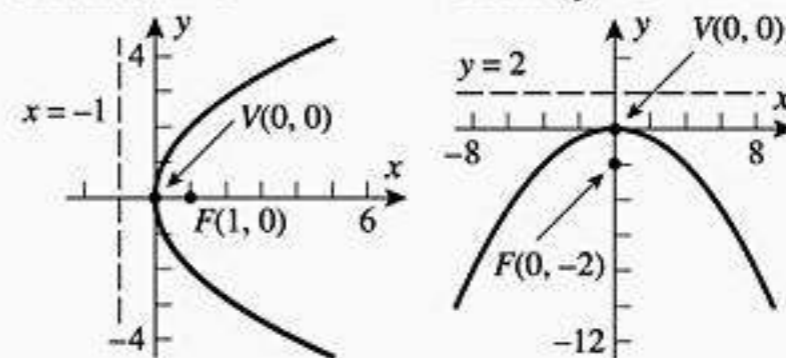
19. $\pi - 2$ 21. (b) a^2 (c) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ 23. $8\pi^3 a^2$
 25. π^2 27. $32\pi/5$



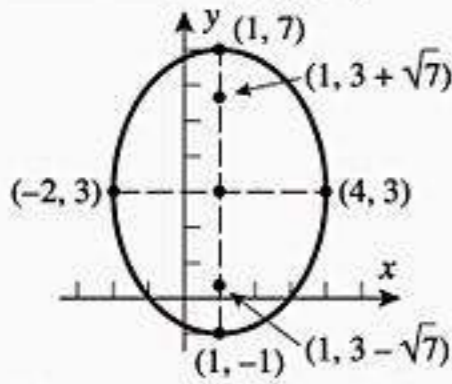
► **Exercícios 11.4 (página 760)**

1. (a) $x = y^2$ (b) $-3y = x^2$ (c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
 (e) $y^2 - x^2 = 1$ (f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

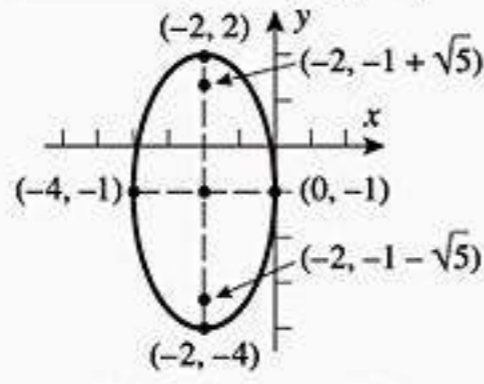
3. (a) foco: $(1, 0)$; vértice: $(0, 0)$; diretriz: $x = -1$
 (b) foco: $(0, -2)$; vértice: $(0, 0)$; diretriz: $y = 2$



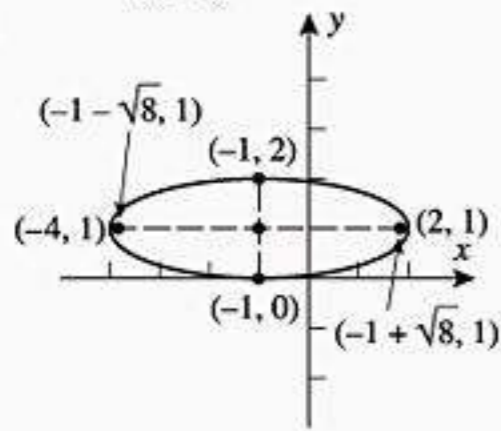
11. (a) focos: $(1, 3 \pm \sqrt{7})$; vértices: $(1, -1), (1, 7)$; extremos: $(-2, 3), (4, 3)$



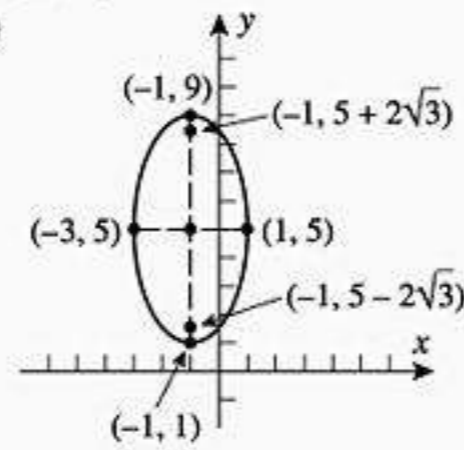
- (b) focos: $(-2, -1 \pm \sqrt{5})$; vértices: $(-2, 2), (-2, -4)$; extremos: $(-4, -1), (0, -1)$



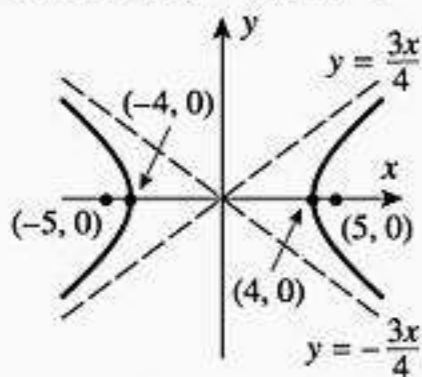
13. (a)



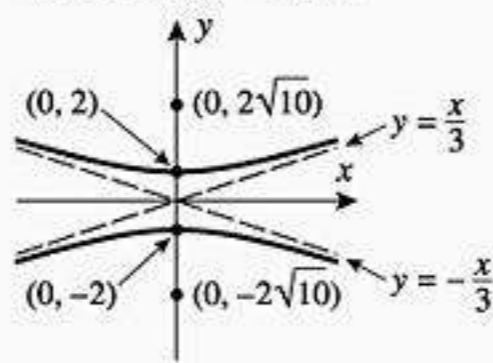
- (b)



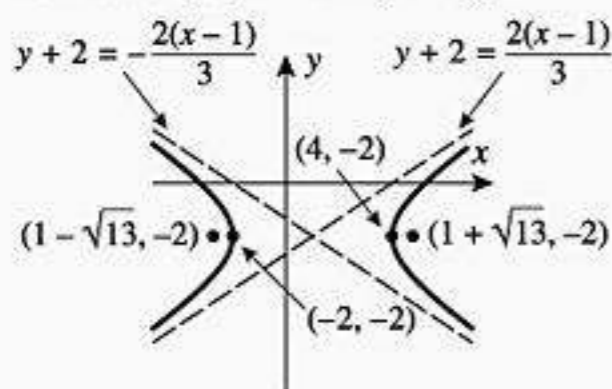
15. (a) vértices: $(\pm 4, 0)$; focos: $(\pm 5, 0)$; assíntotas: $y = \pm 3x + 4$



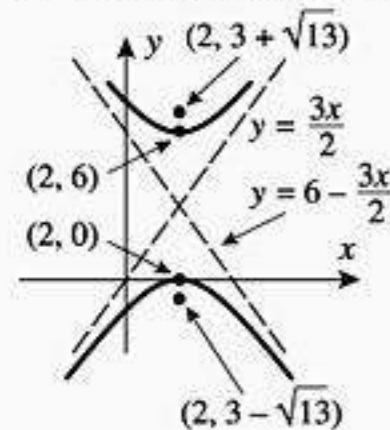
- (b) vértices: $(0, \pm 2)$; focos: $(0, \pm 2\sqrt{10})$; assíntotas: $y = \pm x/3$



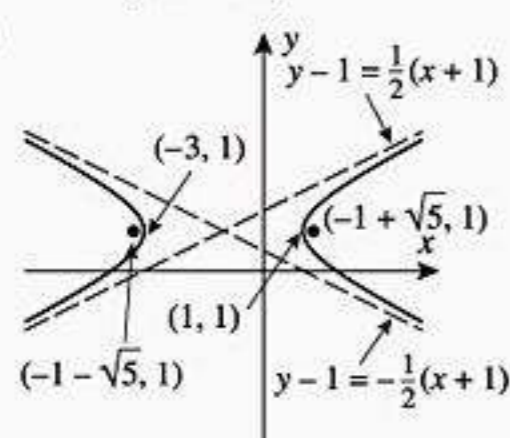
17. (a) vértices: $(-2, -2), (4, -2)$; focos: $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$; assíntotas: $y + 2 = \pm 2(x - 1)/3$



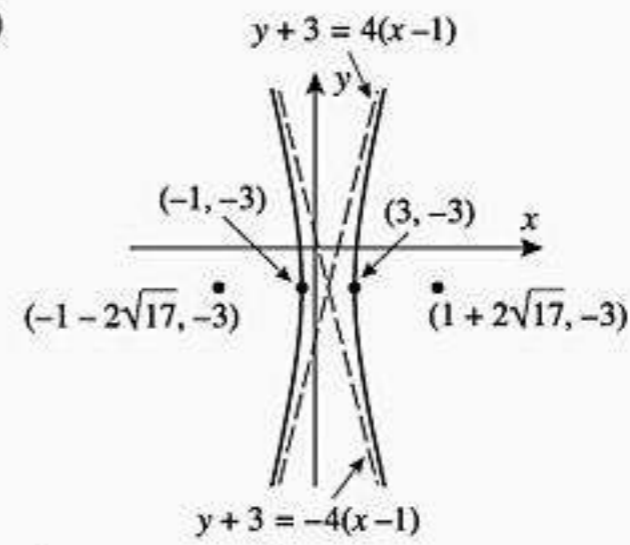
- (b) vértices: $(2, 0), (2, 6)$; focos: $(2, 3 \pm \sqrt{13})$; assíntotas: $y = 3x/2, y = 6 - 3x/2$



19. (a)



- (b)



21. (a) $y^2 = 12x$ (b) $y^2 = -28x$

23. (a) $x^2 = -12y$ (b) $(x - 1)^2 = 12(y - 1)$ 25. $y^2 = 2(x - 1)$

27. (a) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ (b) $\frac{1}{169}x^2 + \frac{1}{144}y^2 = 1$

29. (a) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ (b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$

31. (a) $\frac{x^2}{81/8} + \frac{y^2}{36} = 1$ (b) $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{5} = 1$

33. (a) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2 = 1$ (b) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1$

35. (a) $\frac{9}{64}x^2 - \frac{1}{16}y^2 = 1, \frac{1}{36}y^2 - \frac{1}{16}x^2 = 1$ (b) $\frac{1}{20}y^2 - \frac{1}{5}x^2 = 1$

37. (a) $\frac{(x - 3)^2}{9} - \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$ (b) $(x - 3)^2 - (y - 1)^2 = 1$

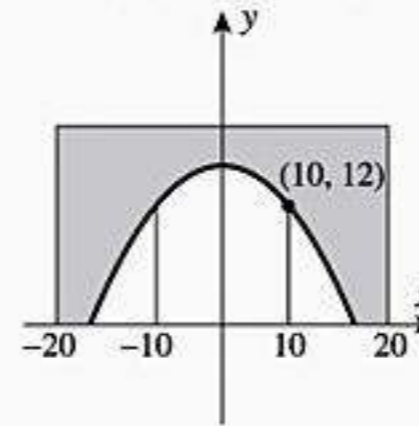
39. (a) 16 pés (b) $8\sqrt{3}$ pés

43. $\frac{1}{16}$ pés

45. (a) $P: (b \cos t, b \sin t)$
 $Q: (a \cos t, a \sin t)$
 $R: (a \cos t, b \sin t)$

49. $\frac{1}{32}(x - 4)^2 + \frac{1}{36}(y - 3)^2 = 1$

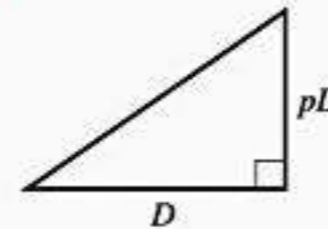
51. 96



61. $L = D\sqrt{1 + p^2}, T = \frac{1}{2}pD$

67. $(\pm \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}), (\pm \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$

71. (b) 14,30465; 24; 33,69535 pol



73. (a) $(x - 1)^2 - 5(y + 1)^2 = 5$, hipérbole

- (b) $x^2 - 3(y + 1)^2 = 0, x = \pm\sqrt{3}(y + 1)$, duas retas

- (c) $4(x + 2)^2 + 8(y + 1)^2 = 4$, elipse

- (d) $3(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$, o ponto $(-2, -1)$ (caso degenerado)

- (e) $(x + 4)^2 + 2y = 2$, parábola

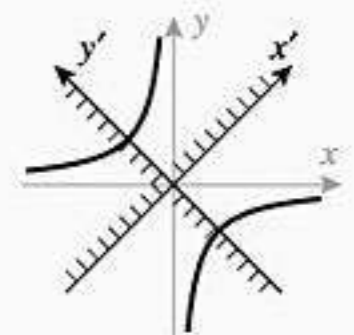
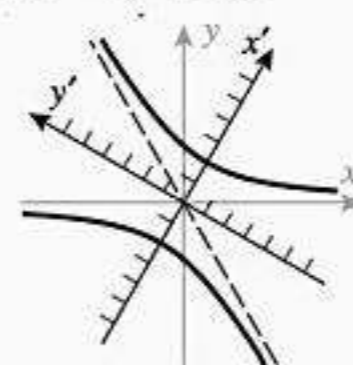
- (f) $5(x + 4)^2 + 2y = -14$, parábola

Exercícios 11.5 (página 770)

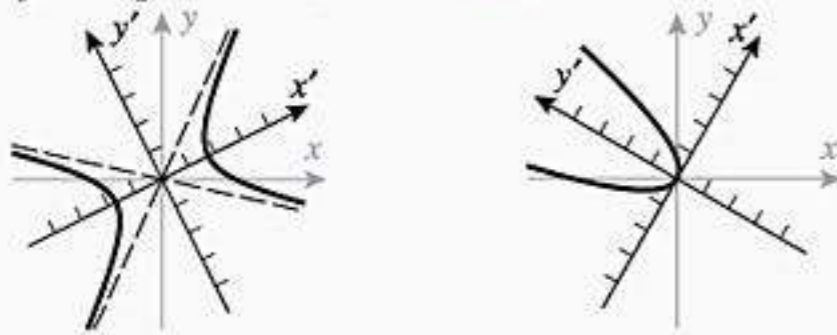
1. (a) $x' = -1 + 3\sqrt{3}, y' = 3 + \sqrt{3}$ 3. $y^2 - x^2 = 18$, hipérbole

- (b) $3x'^2 - y'^2 = 12$

- (c)



5. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$, hipérbole 7. $y' = x^2$, parábola



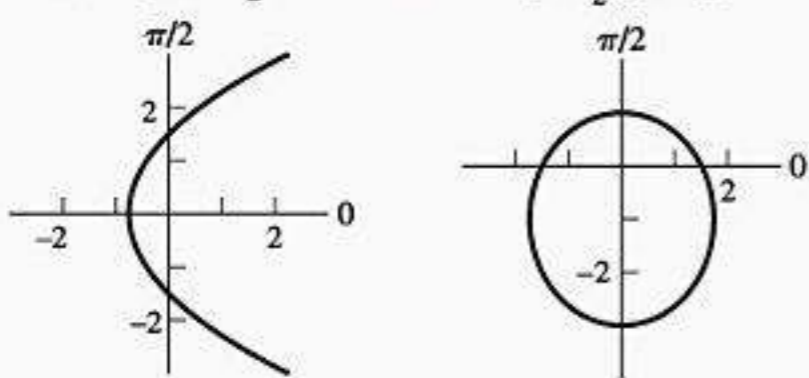
9. $y^2 = 4(x' - 1)$, parábola 11. $\frac{1}{4}(x' + 1)^2 + y^2 = 1$, elipse



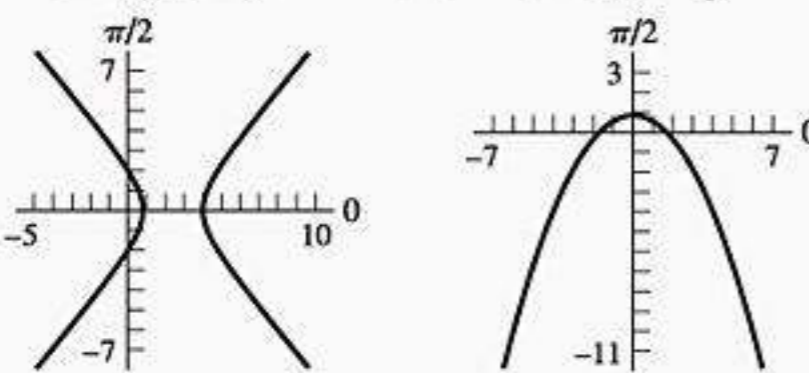
13. $x^2 + xy + y^2 = 3$
 19. vértice: (0, 0); foco: $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; diretriz: $y = x - \sqrt{2}$
 21. vértice: $(4/5, 3/5)$; foco: $(8/5, 6/5)$; diretriz: $4x + 3y = 0$
 23. focos: $\pm(4\sqrt{7}/5, 3\sqrt{7}/5)$; vértices: $\pm(16/5, 12/5)$; extremidades: $\pm(-9/5, 12/5)$
 25. focos: $(1 - \sqrt{5}/2, -\sqrt{3} + \sqrt{15}/2)$, $(1 + \sqrt{5}/2, -\sqrt{3} - \sqrt{15}/2)$; vértices: $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $(5/2, -5\sqrt{3}/2)$; extremidades: $(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$, $(1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$
 27. focos: $\pm(\sqrt{15}, \sqrt{5})$; vértices: $\pm(2\sqrt{3}, 2)$; assíntotas: $y = \frac{5\sqrt{3} \pm 8}{11}x$
 29. focos: $(-\frac{4}{\sqrt{5}} \pm 2\sqrt{\frac{13}{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{\frac{13}{5}})$; vértices: $(2/\sqrt{5}, 11/\sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$; assíntotas: $y = 7x/4 + 3\sqrt{5}$, $y = -x/8 + 3\sqrt{5}/2$

► **Exercícios 11.6 (página 778)**

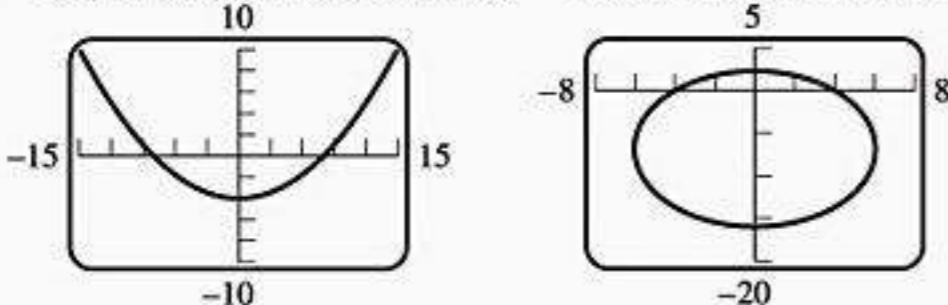
1. (a) $e = 1, d = \frac{3}{2}$ (b) $e = \frac{1}{2}, d = 3$



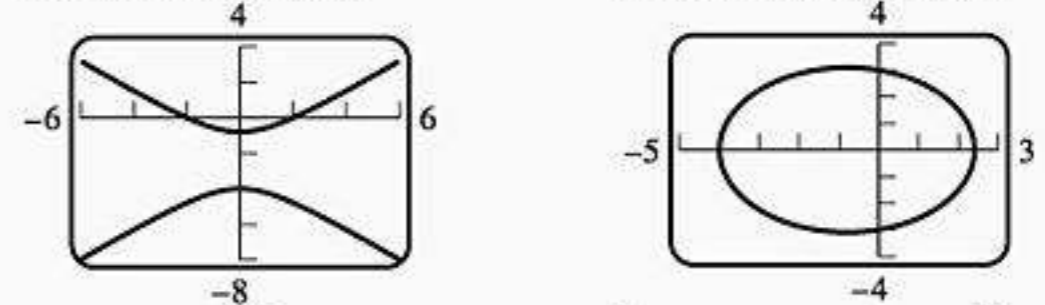
- (c) $e = \frac{3}{2}, d = \frac{4}{3}$ (d) $e = 1, d = \frac{5}{3}$



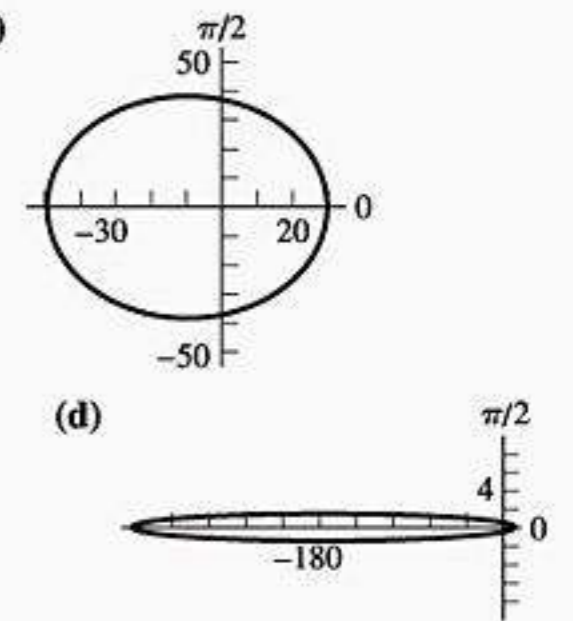
3. (a) parábola, aberta para cima (b) elipse, diretriz acima do pólo



- (c) hipérbole diretriz abaixo do pólo (d) elipse diretriz à direita do pólo



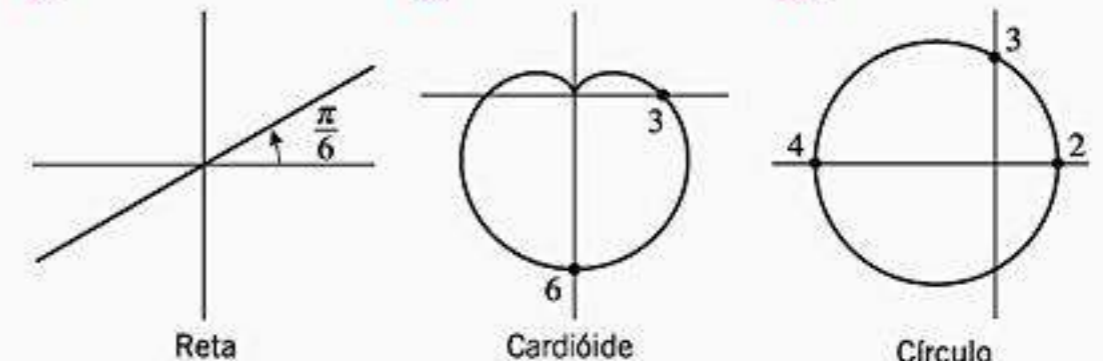
5. (a) $r = \frac{6}{(4 + 3 \cos \theta)}$ (b) $r = \frac{1}{(1 + \cos \theta)}$ (c) $r = \frac{12}{(3 + 4 \sin \theta)}$
 7. (a) $r = \frac{24}{5 - \cos \theta}$ (b) $r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$ (c) $r = \frac{21}{2 + 5 \sin \theta}$
 9. (a) $d = 6; \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{16}(y + 2)^2 = 1$ (b) $d = 1; \frac{9}{4}(x - \frac{1}{3})^2 + 3y^2 = 1$
 11. (a) $d = 1, 3; (y - 2)^2 - x^2/3 = 1$ (b) $d = 1, 5; (x + 3)^2/4 - y^2/5 = 1$
 13. (a) $r = \frac{12}{2 + \cos \theta}$ (b) $r = \frac{64}{25 - 15 \sin \theta}$ (c) $r = \frac{16}{5 - 3 \cos \theta}$ (d) $r = \frac{120}{5 + \sin \theta}$
 17. a distância tende a $+\infty$
 21. $r = \frac{(5\sqrt{2} + 5)}{(1 + \sqrt{2} \cos \theta)}$ ou $r = \frac{(5\sqrt{2} - 5)}{(1 + \sqrt{2} \cos \theta)}$
 23. (a) $T \approx 248$ anos (b) $r_0 \approx 4.449.675.000$ km $r_1 \approx 7.400.325.000$ km (c) $r \approx \frac{37,05}{1 + 0,249 \cos \theta}$ AU (d)



25. (a) $a \approx 178,26$ UA (b) $r_0 \approx 0,8735$ UA, $r_1 \approx 355,64$ UA (c) $r \approx \frac{1,74}{1 + 0,9951 \cos \theta}$ UA
 27. 563 km, 4286 km

► **Capítulo 11 Exercícios de Revisão (página 780)**

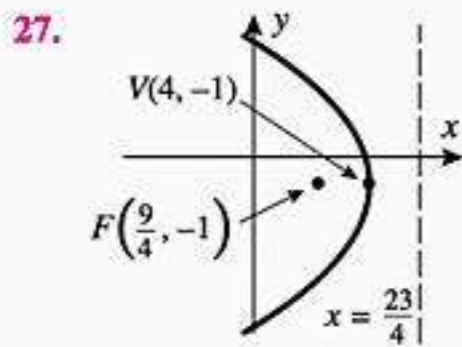
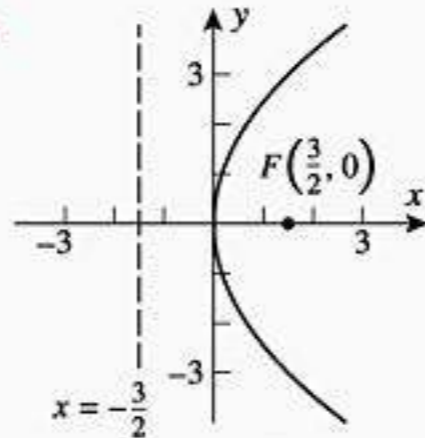
1. (a) $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ (b) $(7/\sqrt{2}, -7/\sqrt{2})$ (c) $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (d) (5, 0) (e) (0, -2) (f) (0, 0)
 3. (a) (5; 0,6435) (b) $(\sqrt{29}; 5,0929)$
 5. (a) parábola (b) hipérbole (c) reta (d) círculo
 7. 9. 11.



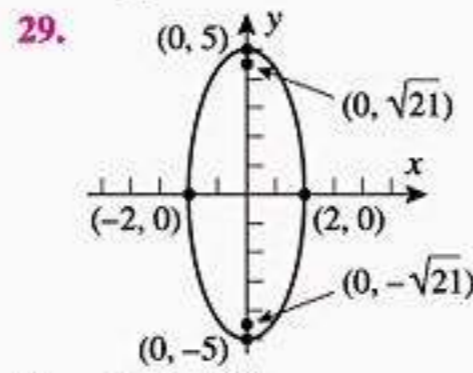
13. (a) -2, 1/4 (b) $-3\sqrt{3}/4, 3\sqrt{3}/4$ 15. (a) -1/4, 1/4
 17. (a) $t = \pi/2 + n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \dots$ (b) $t = n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \dots$
 19. (a) A parte de cima é traçada da direita para a esquerda quando t vai de 0 a π . A parte de baixo é traçada da direita para a esquerda quando t

vai de π para 2π , exceto pelo laço, que é traçado no sentido anti-horário quando t vai de $\pi + \arcsen(1/4)$ para $2\pi - \arcsen(1/4)$. (b) $y = 1$
 (c) horizontal: $t = \pi/2, 3\pi/2$; vertical: $t = \pi + \arcsen(1/\sqrt[3]{4}), 2\pi - \arcsen(1/\sqrt[3]{4})$
 (d) $r = 4 + \operatorname{cosec}\theta, \theta = \pi + \arcsen(1/4), \theta = 2\pi - \arcsen(1/4)$

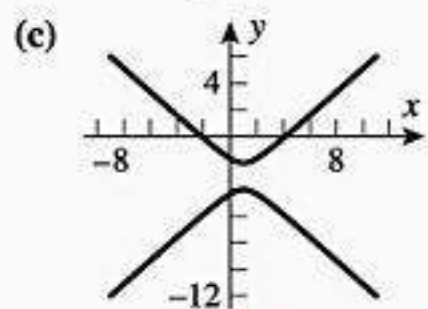
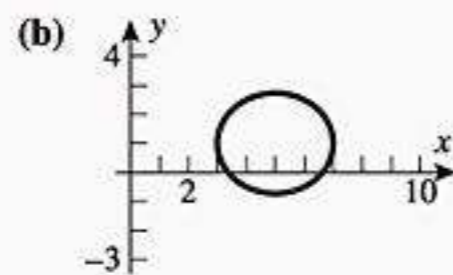
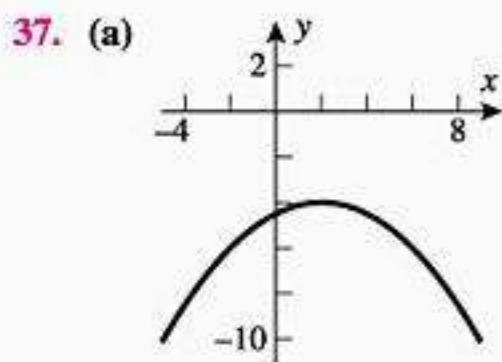
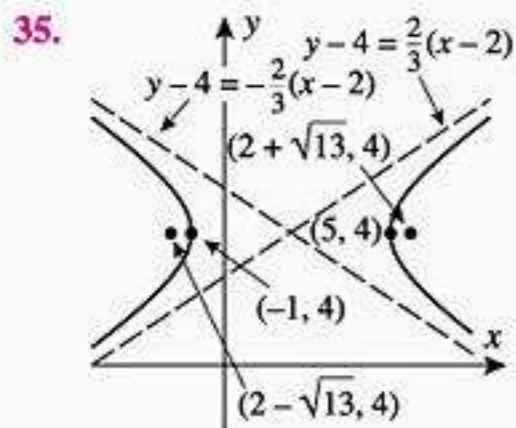
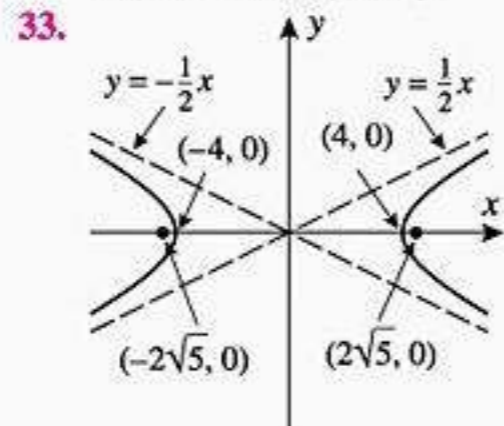
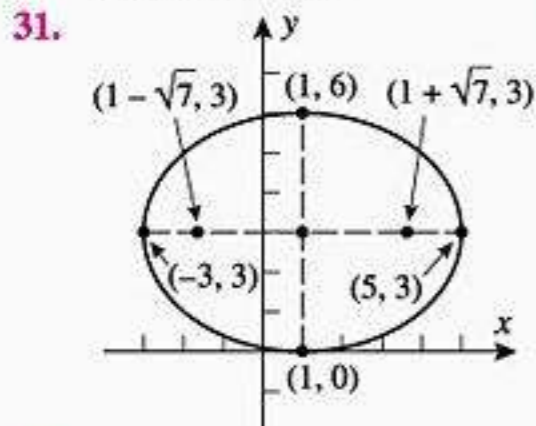
21. $A = 6\pi$ 23. $A = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 25.



foco: $(9/4, -1)$;
 vértice: $(4, -1)$;
 diretriz: $x = 23/4$



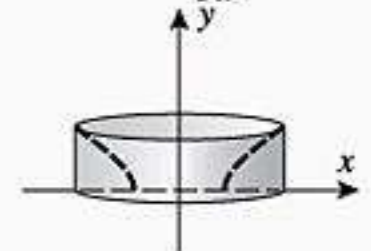
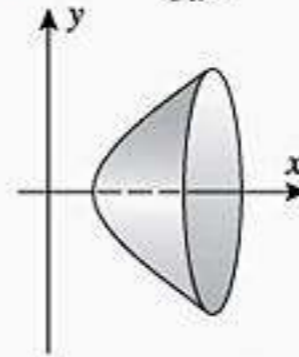
foco: $(0, \pm\sqrt{21})$;
 vértices: $(0, \pm 5)$;
 extremidades: $(\pm 2, 0)$



39. $x^2 = -16y$ 41. $y^2 - x^2 = 9$

43. (b) $x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha; y = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$

45. (a) $V = \frac{\pi b^2}{3a^2} (b^2 - 2a^2) \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2}{3} ab^2 \pi$ (b) $V = \frac{2b^4}{3a} \pi$



47. $\theta = \pi/4; 5(y')^2 - (x')^2 = 6$; hipérbole

49. $\theta = \arctg(1/2); y' = (x')^2$ parábola

51. (a) (i) elipse; (ii) à direita; (iii) 1 (b) (i) hipérbole; (ii) à esquerda; (iii) 1/3 (c) (i) parábola; (ii) acima; (iii) 1/3 (d) (i) parábola; (ii) abaixo; (iii) 3

53. (a) $(x+3)^2/25 + (y-2)^2/9 = 1$ (b) $(x+2)^2 = -8y$

(c) $(y-5)^2/4 - 16(x+1)^2 = 1$

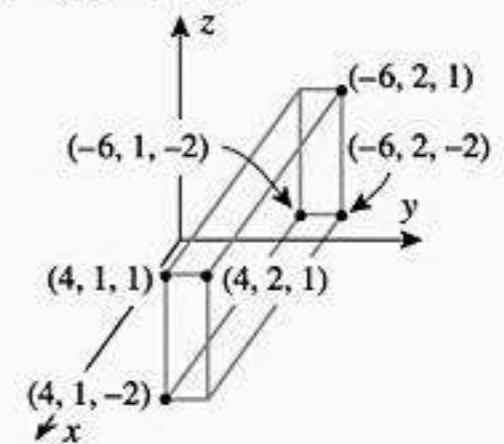
55. 15,86543959

Exercícios 12.1 (página 790)

1. (a) $(0, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 4), (3, 0, 4), (3, 5, 4), (0, 5, 4)$

(b) $(0, 1, 0), (4, 1, 0), (4, 6, 0), (0, 6, 0), (0, 1, -2), (4, 1, -2), (4, 6, -2), (0, 6, -2)$

3. $(4, 2, -2), (4, 2, 1), (4, 1, 1), (4, 1, -2), (-6, 1, 1), (-6, 2, 1), (-6, 2, -2), (-6, 1, -2)$



5. (a) ponto (b) reta paralela ao eixo y (c) plano paralelo ao plano yz

7. raio $\sqrt{74}$, centro $(2, 1, -4)$ 9. (b) $(2, 1, 6)$ (c) área 49

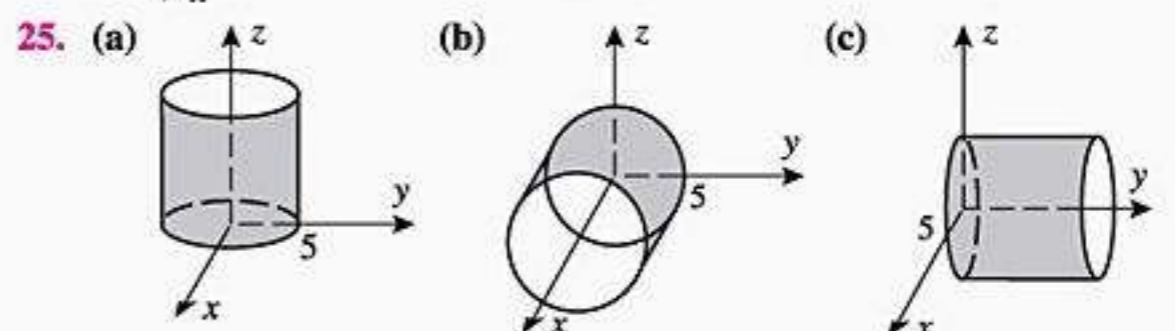
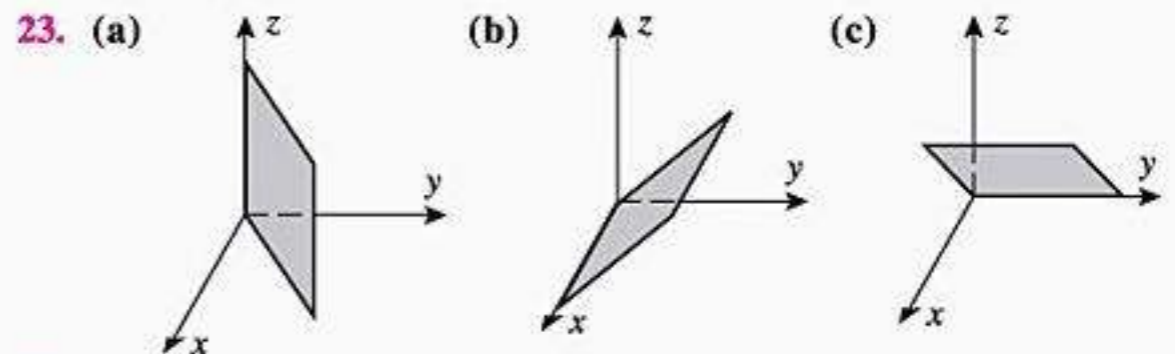
11. (a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$ (b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$ (c) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

13. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = r^2$ (a) $r^2 = 9$ (b) $r^2 = 1$ (c) $r^2 = 4$

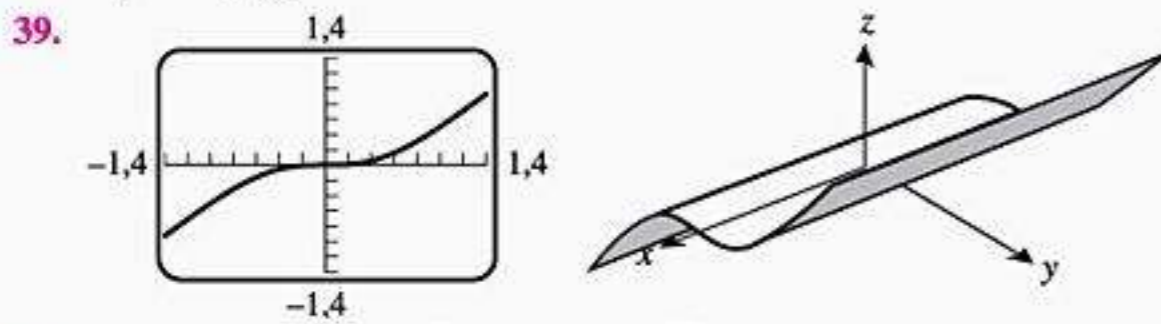
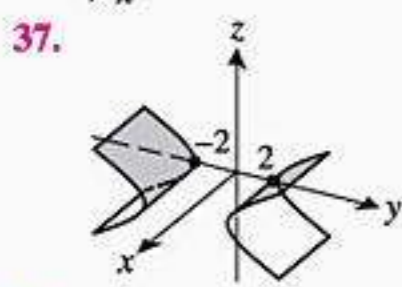
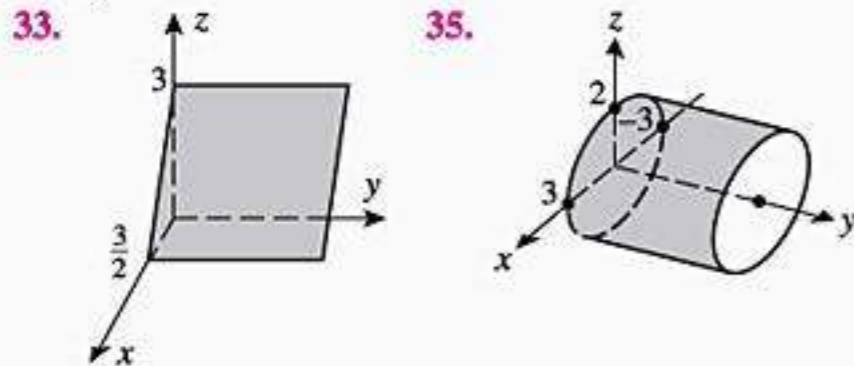
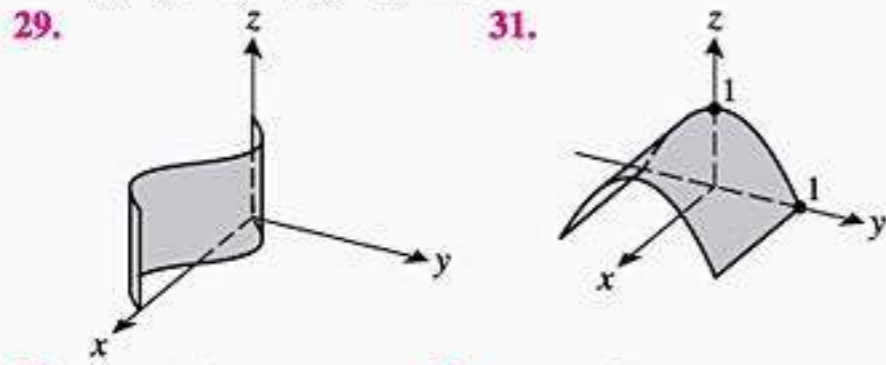
17. esfera, centro $(-5, -2, -1)$, raio 7

19. esfera, centro $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ raio $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

21. nenhum gráfico

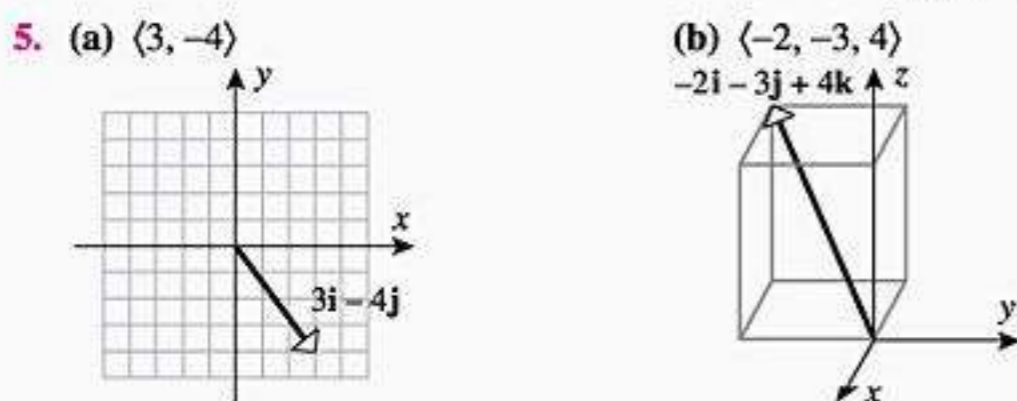
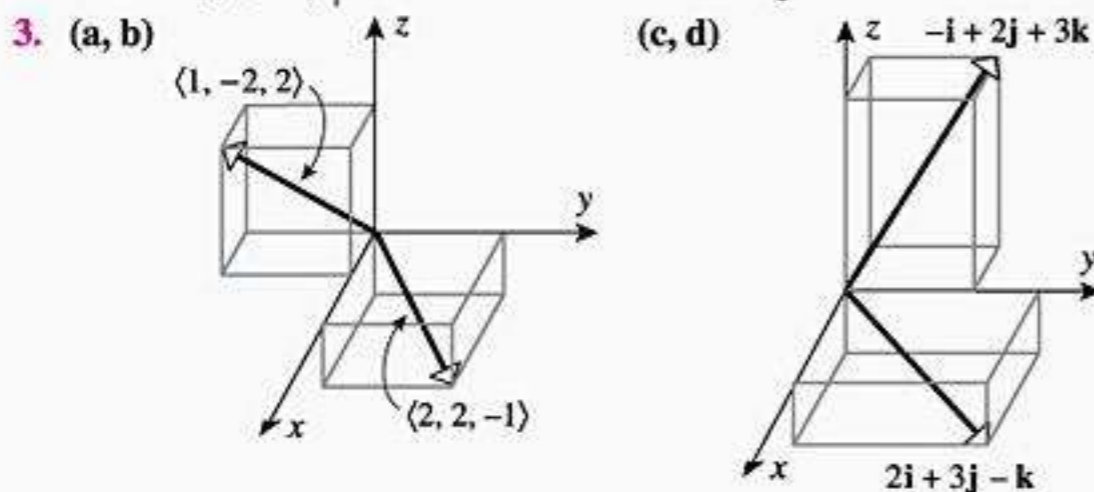
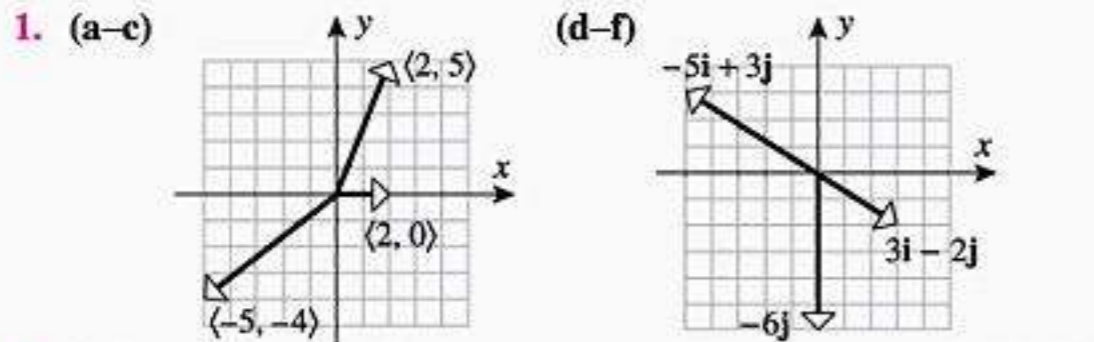


27. (a) $-2y+z=0$ (b) $-2x+z=0$ (c) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
 (d) $(x-1)^2+(z-1)^2=1$



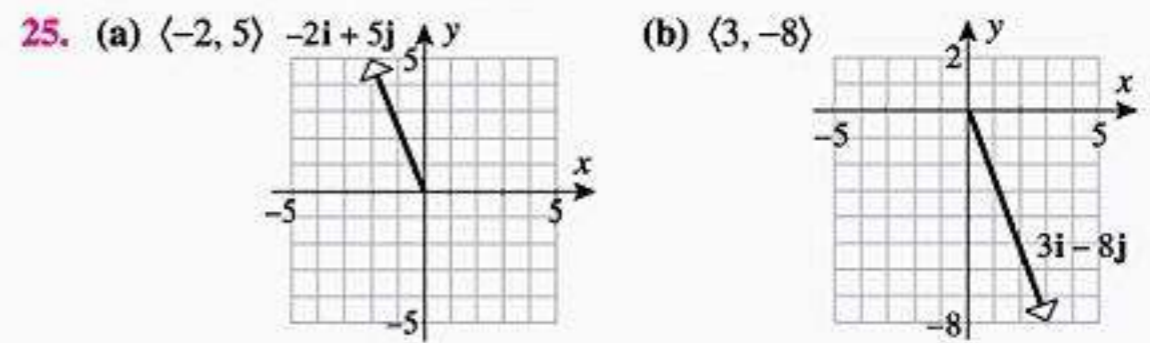
41. maior distância $3 + \sqrt{6}$, menor $3 - \sqrt{6}$
 43. todos os pontos fora do cilindro circular $(y+3)^2+(z-2)^2=16$
 45. $r = (2 - \sqrt{3})R$ 47. (b) $y^2+z^2=e^{2x}$

► **Exercícios 12.2 (página 801)**



7. (a) $\langle -1, 3 \rangle$ (b) $\langle -7, 2 \rangle$ (c) $\langle -3, 6, 1 \rangle$
 9. (a) $\langle 4, -4 \rangle$ (b) $\langle 8, -1, -3 \rangle$

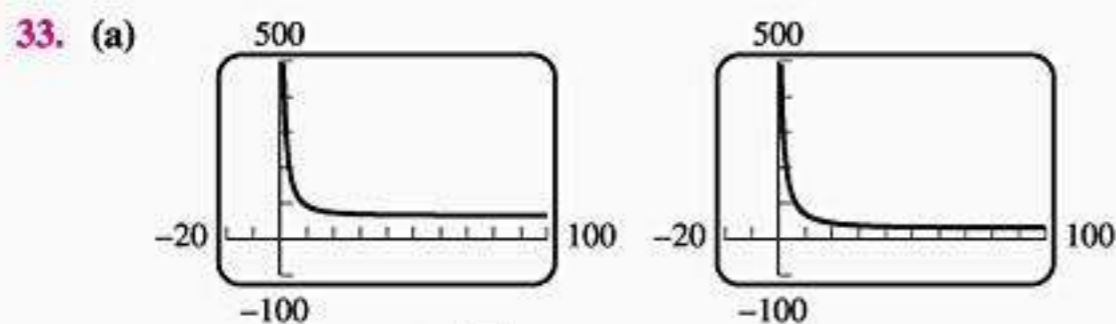
11. (a) $-i+4j-2k$ (b) $18i+12j-6k$ (c) $-i-5j-2k$
 (d) $40i-4j-4k$ (e) $-2i-16j-18k$ (f) $-i+13j-2k$
 13. (a) $\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{21}$ (d) $\sqrt{14}$
 15. (a) $2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{14}+\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{14}+2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{37}$
 (e) $(1/\sqrt{6})i+(1/\sqrt{6})j-(2/\sqrt{6})k$ (f) 1
 17. (a) $(-1/\sqrt{17})i+(4/\sqrt{17})j$ (b) $(-3i+2j-k)/\sqrt{14}$
 (c) $(4i+j-k)/(3\sqrt{2})$
 19. (a) $(-\frac{3}{2}, 2)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(7, 0, -6)$
 21. (a) $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ (b) $\langle 0, 2 \rangle$ (c) $(-5/2, 5\sqrt{3}/2)$ (d) $\langle -1, 0 \rangle$
 23. $((\sqrt{3}-\sqrt{2})/2, (1+\sqrt{2})/2)$



27. $(-\frac{2}{3}, 1)$ 29. $u = \frac{5}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{1}{7}k, v = \frac{8}{7}i - \frac{1}{7}j - \frac{4}{7}k$
 31. $\sqrt{5}, 3$ 33. (a) $\pm \frac{5}{3}$ (b) 3
 35. (a) $(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}), (-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$
 (b) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (c) $\pm \frac{1}{\sqrt{26}}(5, 1)$
 37. (a) o círculo de raio 1 em torno da origem
 (b) disco fechado de raio 1 em torno da origem
 (c) todos os pontos fora do disco fechado de raio 1 em torno da origem
 39. (a) a esfera (oca) de raio 1 em torno da origem
 (b) a bola fechada de raio 1 em torno da origem.
 (c) todos os pontos fora da bola fechada de raio 1 em torno da origem.
 41. magnitude = $30\sqrt{5}$ lb, $\theta \approx 26,57^\circ$
 43. magnitude $\approx 207,06$ N, $\theta = 45^\circ$
 45. magnitude $\approx 94,995$ N, $\theta \approx 28,28^\circ$
 47. magnitude $\approx 9,165$ lb, ângulo $\approx -70,890^\circ$
 49. $\approx 183,02$ lb; $224,13$ lb
 51. (a) $c_1 = -2, c_2 = 1$

► **Exercícios 12.3 (página 810)**

1. (a) $-10; \cos \theta = -1/\sqrt{5}$ (b) $-3; \cos \theta = -3/\sqrt{58}$
 (c) 0; $\cos \theta = 0$ (d) $-20; \cos \theta = -20/(3\sqrt{70})$
 3. (a) obtuso (b) agudo (c) obtuso (d) ortogonal
 5. $\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, -1, -\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2$
 7. (a) vértice B (b) $82^\circ, 60^\circ, 38^\circ$ 13. $r = 7/5$
 15. (a) $\alpha = \beta \approx 55^\circ, \gamma \approx 125^\circ$ (b) $\alpha \approx 48^\circ, \beta \approx 132^\circ, \gamma \approx 71^\circ$
 19. (a) $\approx 35^\circ$ (b) 90°
 21. $64^\circ, 41^\circ, 60^\circ$ 23. $71^\circ, 61^\circ, 36^\circ$
 25. (a) $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\rangle, \left\langle \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right\rangle$
 (b) $\left\langle -\frac{74}{49}, -\frac{111}{49}, \frac{222}{49} \right\rangle, \left\langle \frac{270}{49}, \frac{62}{49}, \frac{121}{49} \right\rangle$
 27. (a) $\langle 1, 1 \rangle + \langle -4, 4 \rangle$
 (b) $\left\langle 0, -\frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle + \left\langle -2, \frac{13}{5}, \frac{26}{5} \right\rangle$
 (c) $v = \langle 1, 4, 1 \rangle$ é ortogonal a b
 29. $\sqrt{564/29}$ 31. 98 N



(b) decresce (c) $40/\sqrt{65}$ pés

35. $-5\sqrt{3}$ J 37. $W = 375$ pés·lb

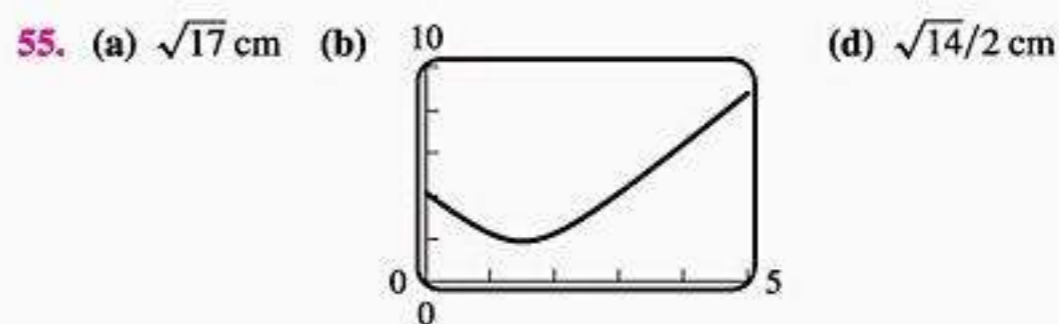
45. (a) 40° (b) $x \approx -0,682328$

► **Exercícios 12.4 (página 821)**

1. (a) $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 3. $\langle 7, 10, 9 \rangle$ 5. $\langle -4, -6, -3 \rangle$
7. (a) $\langle -20, -67, -9 \rangle$ (b) $\langle -78, 52, -26 \rangle$
(c) $\langle 0, -56, -392 \rangle$ (d) $\langle 0, 56, 392 \rangle$
9. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ 11. $\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \langle 2, 1, 1 \rangle$ 13. $\sqrt{59}$ 15. $\sqrt{374}/2$
17. 80 19. -3 21. 16 23. (a) sim (b) sim (c) não
25. (a) 9 (b) $\sqrt{122}$ (c) $\arcsin\left(\frac{9}{14}\right)$
27. (a) $2\sqrt{141/29}$ (b) $6/\sqrt{5}$ 29. $\frac{2}{3}$ 33. $\theta = \pi/4$
35. (a) $10\sqrt{2}$ lb·pés, sentido de rotação em torno de P é anti-horário olhando ao longo de $\vec{PQ} \times \mathbf{F} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$ em direção a seu ponto inicial.
(b) 10 lb·pés, sentido de rotação em torno de P é anti-horário olhando ao longo de $-10\mathbf{i}$ em direção a seu ponto inicial.
(c) 0 lb·pés, nenhuma rotação em torno de P .
37. $\approx 36,19$ N·m 41. $-8\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, -8\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ 45. 1,887850

► **Exercícios 12.5 (página 828)**

1. (a) $L_1: x = 1, y = t, L_2: x = t, y = 1, L_3: x = t, y = t$
(b) $L_1: x = 1, y = 1, z = t, L_2: x = t, y = 1, z = 1,$
 $L_3: x = 1, y = t, z = 1, L_4: x = t, y = t, z = t$
3. (a) $x = 3 + 2t, y = -2 + 3t$; segmento de reta: $0 \leq t \leq 1$
(b) $x = 5 - 3t, y = -2 + 6t, z = 1 + t$; segmento de reta: $0 \leq t \leq 1$
5. (a) $x = 2 + t, y = -3 - 4t$ (b) $x = t, y = -t, z = 1 + t$
7. (a) $P(2, -1), \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (b) $P(-1, 2, 4), \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
9. (a) $\langle -3, 4 \rangle + t\langle 1, 5 \rangle; -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t(\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$
(b) $\langle 2, -3, 0 \rangle + t\langle -1, 5, 1 \rangle; 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$
11. $x = -5 + 2t, y = 2 - 3t$ 13. $x = 3 + 4t, y = -4 + 3t$
15. $x = -1 + 3t, y = 2 - 4t, z = 4 + t$
17. $x = -2 + 2t, y = -t, z = 5 + 2t$
19. (a) $x = 7$ (b) $y = \frac{7}{3}$ (c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{85}}{6}, y = \frac{43 \mp \sqrt{85}}{18}$
21. $(-2, 10, 0); (-2, 0, -5)$; a reta não intersecta o plano yz
23. $(0, 4, -2); (4, 0, 6)$ 25. $(1, -1, 2)$ 29. As retas são paralelas.
31. Os pontos não estão situados na mesma reta.
35. $(x, y) = \langle -1, 2 \rangle + t\langle 1, 1 \rangle$
37. O ponto a $1/n$ do caminho de $(-2, 0)$ a $(1, 3)$.
39. O segmento de reta unindo os pontos $(1, 0)$ e $(-3, 6)$.
41. $(5, 2)$ 43. $2\sqrt{5}$ 45. distância = $\sqrt{35}/6$
47. (a) $x = x_0 + (x_1 - x_0)t, y = y_0 + (y_1 - y_0)t, z = z_0 + (z_1 - z_0)t$
(b) $x = x_1 + at, y = y_1 + bt, z = z_1 + ct$
49. (b) $\langle x, y, z \rangle = \langle 1 + 2t, -3 + 4t, 5 + t \rangle$
51. (b) 84° (c) $x = 7 + t, y = -1, z = -2 + t$
53. $x = t, y = 2 + t, z = 1 - t$

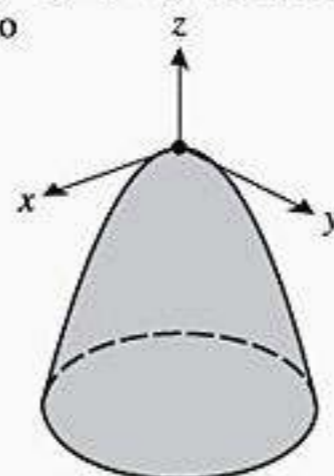


► **Exercícios 12.6 (página 836)**

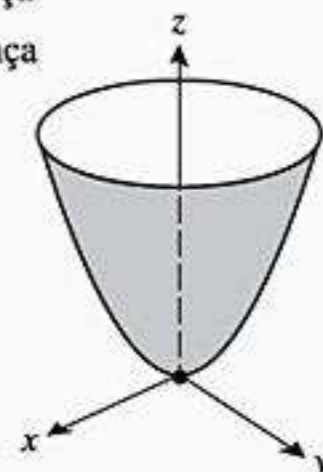
1. $x = 3, y = 4, z = 5$ 3. $x + 4y + 2z = 28$ 5. $z = 0$
7. $x - y = 0$ 9. $y + z = 1$ 11. $2y - z = 1$
13. (a) paralelo (b) perpendicular (c) nenhum
15. (a) paralelo (b) nenhum (c) perpendicular
17. (a) ponto de interseção é $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ (b) nenhuma interseção
19. 35° 21. $4x - 2y + 7z = 0$ 23. $4x - 13y + 21z = -14$
25. $x + y - 3z = 6$ 27. $x + 5y + 3z = -6$
29. $x + 2y + 4z = \frac{29}{2}$ 31. $x = 5 - 2t, y = 5t, z = -2 + 11t$
33. $7x + y + 9z = 25$ 35. sim 37. sim
39. $x = -\frac{11}{7} - 23t, y = -\frac{12}{7} + t, z = -7t$
41. $\frac{5}{3}$ 43. $5/\sqrt{54}$ 45. $25/\sqrt{126}$
47. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$ 49. $5/\sqrt{12}$

► **Exercícios 12.7 (página 848)**

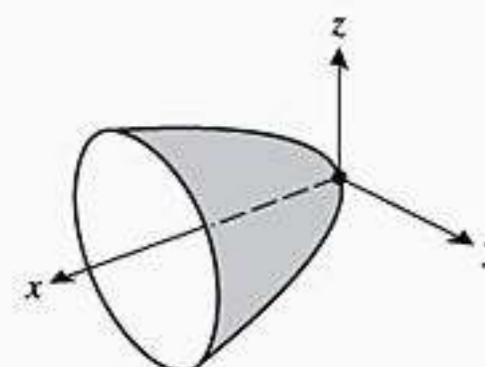
1. (a) parabolóide elíptico, $a = 2, b = 3$
(b) parabolóide hiperbólico, $a = 1, b = 5$
(c) hiperbolóide de uma folha, $a = b = c = 4$
(d) cone circular, $a = b = 1$ (e) parabolóide elíptico, $a = 2, b = 1$
(f) hiperbolóide de duas folhas, $a = b = c = 1$
3. (a) $-z = x^2 + y^2$, parabolóide circular aberto para baixo no eixo z negativo



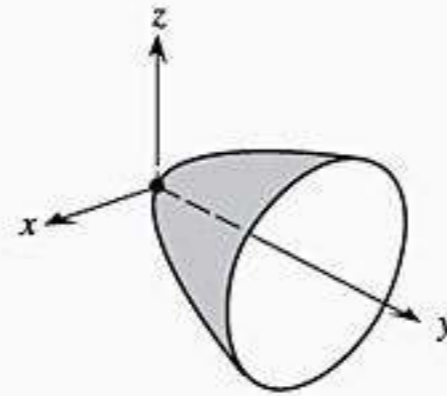
- (b) $z = x^2 + y^2$, parabolóide circular, sem mudança
- (c) $z = x^2 + y^2$, parabolóide circular, sem mudança
- (d) $z = x^2 + y^2$, parabolóide circular, sem mudança



- (e) $x = y^2 + z^2$, parabolóide circular aberto ao longo do eixo x positivo



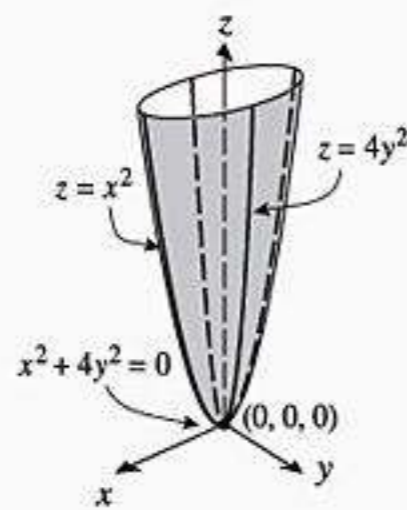
(f) $y = x^2 + z^2$,
parabolóide circular aberto
ao longo do eixo y positivo



5. (a) hiperbolóide de uma folha, eixo é o eixo y.
 (b) hiperbolóide de duas folhas separadas pelo plano yz
 (c) parabolóide elíptico aberto ao longo do eixo x positivo.
 (d) cone elíptico com o eixo x como eixo
 (e) parabolóide hiperbólico montado no eixo x
 (f) parabolóide aberto ao longo do eixo y negativo.

7. (a) $x = 0 : \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$; $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$
 $y = 0 : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$;
 $z = 0 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

(b) $x = 0 : z = 4y^2$;
 $y = 0 : z = x^2$;
 $z = 0 : x = y = 0$



(c) $x = 0 : \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$;
 $y = 0 : \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$;
 $z = 0 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

9. (a) $4x^2 + z^2 = 3$; elipse (b) $y^2 + z^2 = 3$; círculo
 (c) $y^2 + z^2 = 20$; círculo (d) $9x^2 - y^2 = 20$; hipérbole
 (e) $z = 9x^2 + 16$; parábola (f) $9x^2 + 4y^2 = 4$; elipse

11.
Elipsóide

13.
Hiperbolóide de uma folha

15.
Cone elíptico

17.
Hiperbolóide de duas folhas

19.
Parabolóide hiperbólico

21.
Parabolóide elíptico

23.
Cone circular

25.
Hiperbolóide de uma folha

27.
Parabolóide hiperbólico

29.
Cone elíptico

31.
Hiperbolóide de uma folha

33.
Parabolóide circular

35.
Elipsóide

37. (a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (b) 6, 4 (c) $(\pm\sqrt{5}, 0, \sqrt{2})$
 (d) O eixo focal é paralelo ao eixo x.

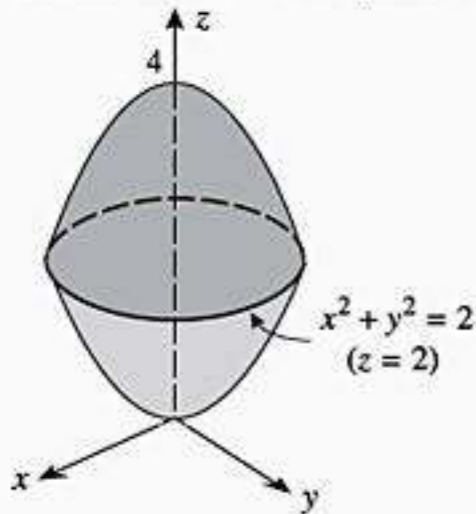
39. (a) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ (b) $(0, \pm 2, 4)$ (c) $(0, \pm 2\sqrt{2}, 4)$

(d) O eixo focal é paralelo ao eixo y .

41. (a) $z + 4 = y^2$ (b) $(2, 0, -4)$ (c) $(2, 0, -\frac{15}{4})$

(d) O eixo focal é paralela ao eixo z .

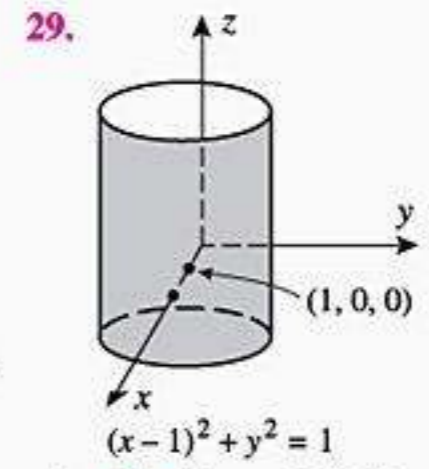
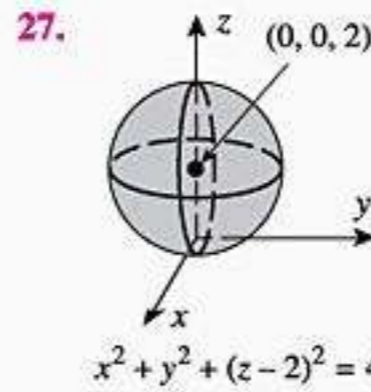
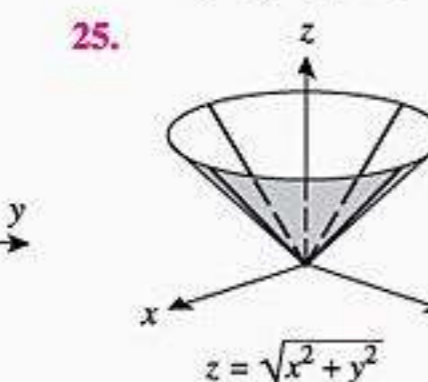
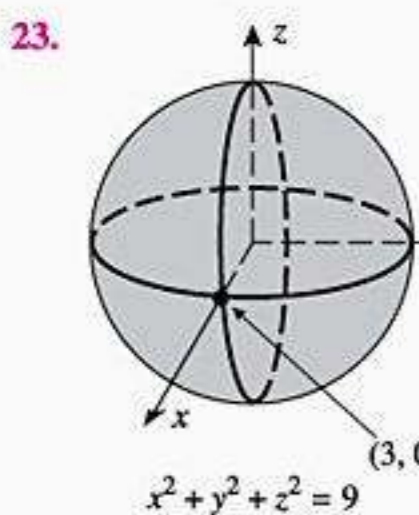
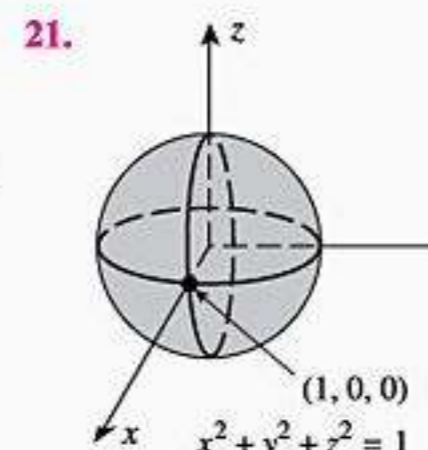
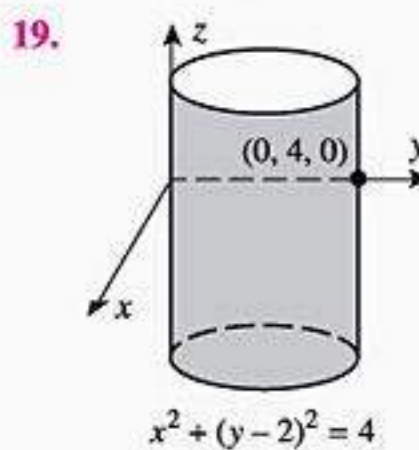
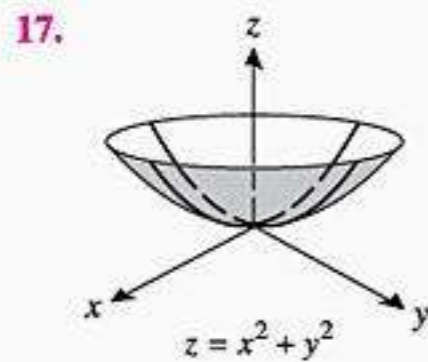
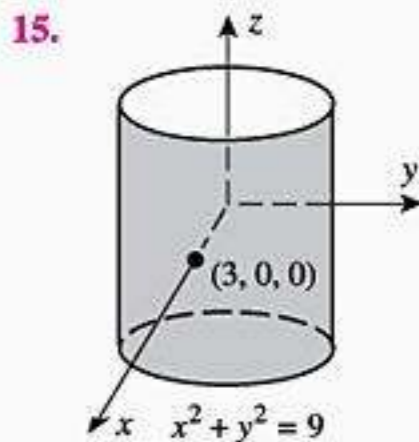
43. Círculo de raio $\sqrt{2}$ no plano $z = 2$, centrado em $(0, 0, 2)$.



45. $y = 4(x^2 + z^2)$ 47. $z = (x^2 + y^2)/4$ (parabolóide circular)

► **Exercícios 12.8 (página 855)**

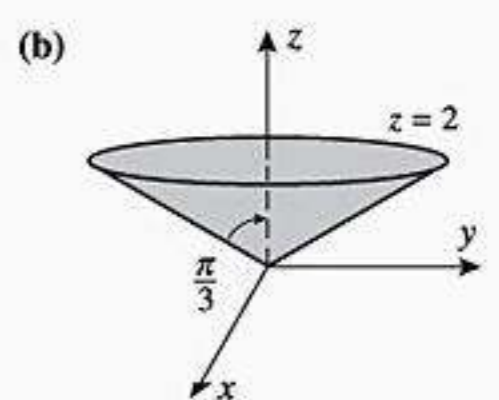
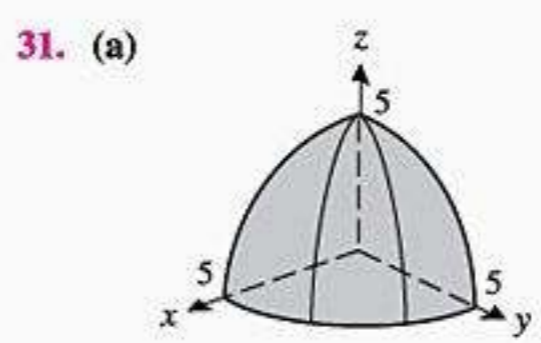
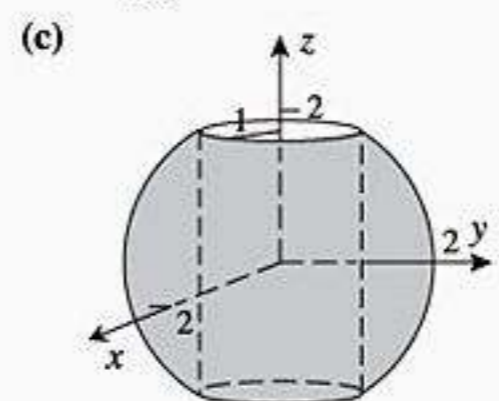
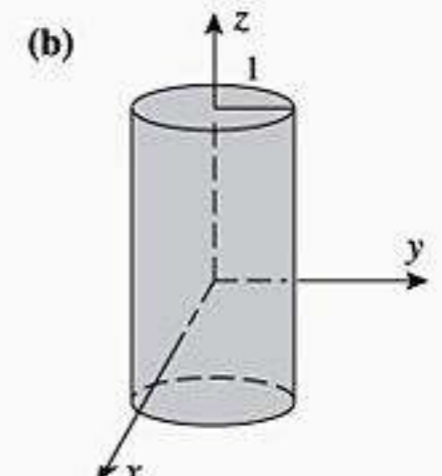
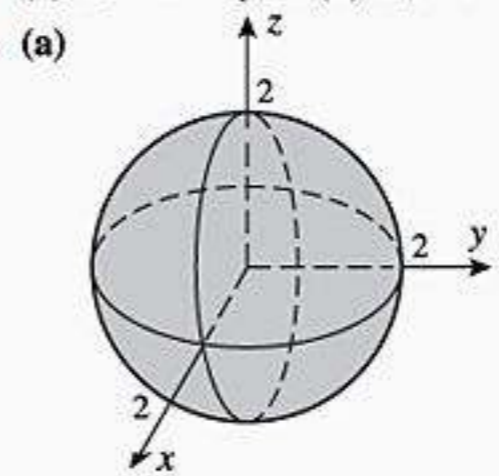
1. (a) $(8, \pi/6, -4)$ (b) $(5\sqrt{2}, 3\pi/4, 6)$
(c) $(2, \pi/2, 0)$ (d) $(8, 5\pi/3, 6)$
3. (a) $(2\sqrt{3}, 2, 3)$ (b) $(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -2)$
(c) $(5, 0, 4)$ (d) $(-7, 0, -9)$
5. (a) $(2\sqrt{2}, \pi/3, 3\pi/4)$ (b) $(2, 7\pi/4, \pi/4)$
(c) $(6, \pi/2, \pi/3)$ (d) $(10, 5\pi/6, \pi/2)$
7. (a) $(5\sqrt{6}/4, 5\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/2)$ (b) $(7, 0, 0)$
(c) $(0, 0, 1)$ (d) $(0, -2, 0)$
9. (a) $(2\sqrt{3}, \pi/6, \pi/6)$ (b) $(\sqrt{2}, \pi/4, 3\pi/4)$
(c) $(2, 3\pi/4, \pi/2)$ (d) $(4\sqrt{3}, 1, 2\pi/3)$
11. (a) $(5\sqrt{3}/2, \pi/4, -5/2)$ (b) $(0, 7\pi/6, -1)$
(c) $(0, 0, 3)$ (d) $(4, \pi/6, 0)$

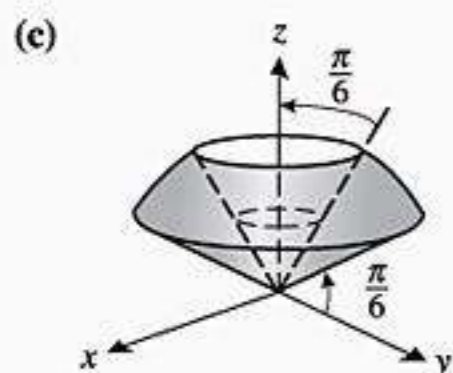


31. (a) $z = 3$ (b) $\rho = 3 \sec \phi$ 33. (a) $z = 3r^2$ (b) $\rho = 1/3(\operatorname{cosec} \phi \cotg \phi)$
35. (a) $r = 2$ (b) $\rho = 2 \operatorname{cosec} \phi$ 37. (a) $r^2 + z^2 = 9$ (b) $\rho = 3$
39. (a) $2r \cos \theta + 3r \operatorname{sen} \theta + 4z = 1$
(b) $2\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 3\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 4\rho \cos \phi = 1$
41. (a) $r^2 \cos^2 \theta = 16 - z^2$ (b) $\rho^2(1 - \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$
43. Todos pontos no ou acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que também estão no ou abaixo do plano $z = 4$.
45. Todos pontos nas ou entre as esferas concêntricas de raios 1 e 3 centradas na origem.
47. esférica $(4000, \pi/6, \pi/6)$, retangular $(1000\sqrt{3}, 1000, 2000\sqrt{3})$
49. (a) $(10, \pi/2, 1)$ (b) $(0, 10, 1)$ (c) $(\sqrt{101}, \pi/2, \operatorname{arc} \operatorname{tg} 10)$
51. ≈ 2927 km

► **Capítulo 12. Exercícios de Revisão (página 856)**

3. (b) $-1/2, \pm\sqrt{3}/2$ (d) verdadeiro
5. (a) $r^2 = 16$ (b) $r^2 = 25$ (c) $r^2 = 9$
7. $(7, 5)$
9. (a) $-\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{7}$ (c) $(48 \pm 25\sqrt{3})/11$ (d) $c = \frac{4}{3}$
13. 13 pés · lb 15. (a) $\sqrt{26}/2$ (b) $\sqrt{26}/3$
17. (a) 29 (b) $\frac{29}{\sqrt{65}}$ 19. $x = 4 + t, y = 1 - t, z = 2$
21. $x + 5y - z - 2 = 0$ 23. $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
25. (a) hiperbolóide de uma folha (b) esfera (c) cone circular
27. (a) $z = x^2 - y^2$ (b) $xz = 1$
29. (a)



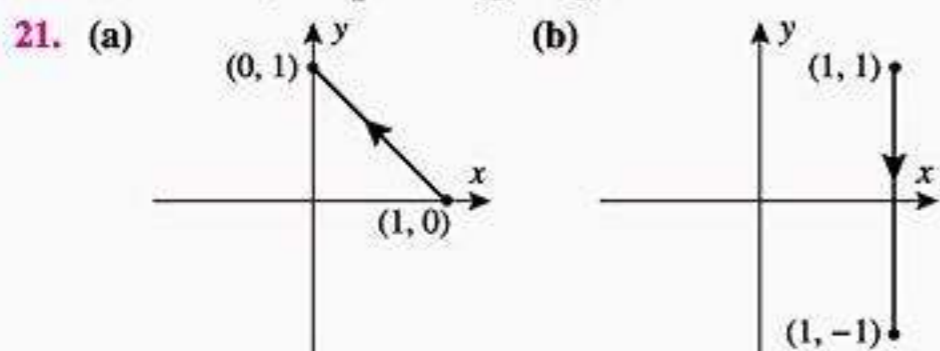


► **Exercícios 13.1 (página 863)**

1. $(-\infty, +\infty)$; $\mathbf{r}(\pi) = -\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j}$ 3. $[2, +\infty)$; $\mathbf{r}(3) = -\mathbf{i} - \ln 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 5. $\mathbf{r} = 3 \cos t \mathbf{i} + (t + \sin t)\mathbf{j}$ 7. $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 2 \sin 3t\mathbf{j} + 5 \cos 3t\mathbf{k}$
 9. $x = 3t^2, y = -2$ 11. $x = 2t - 1, y = -3\sqrt{t}, z = \sin 3t$
 13. A reta no espaço bidimensional por $(3, 0)$ com vetor diretor $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.
 15. A reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto $(0, -3, 1)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

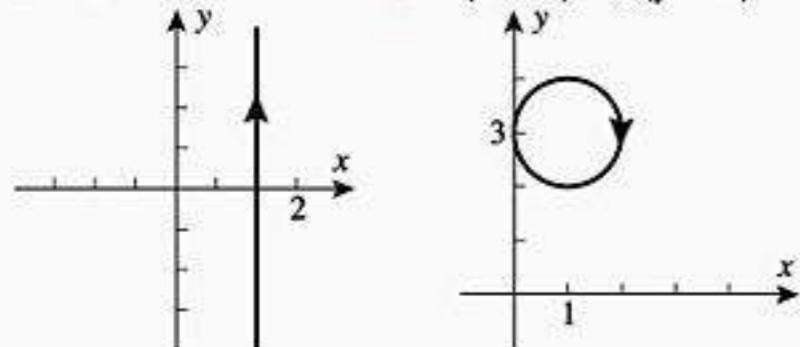
17. Uma elipse centrada em $(0, 0, 1)$ no plano $z = 1$.

19. (a) inclinação $-\frac{3}{2}$ (b) $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$

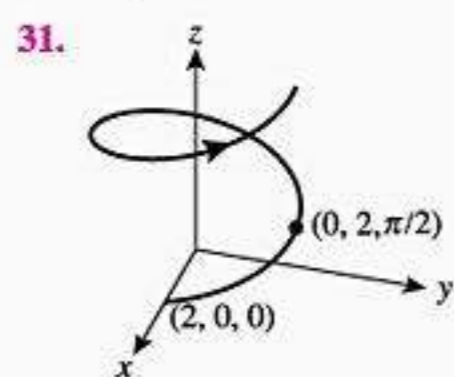


23. $\mathbf{r} = (1-t)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}), 0 \leq t \leq 1$

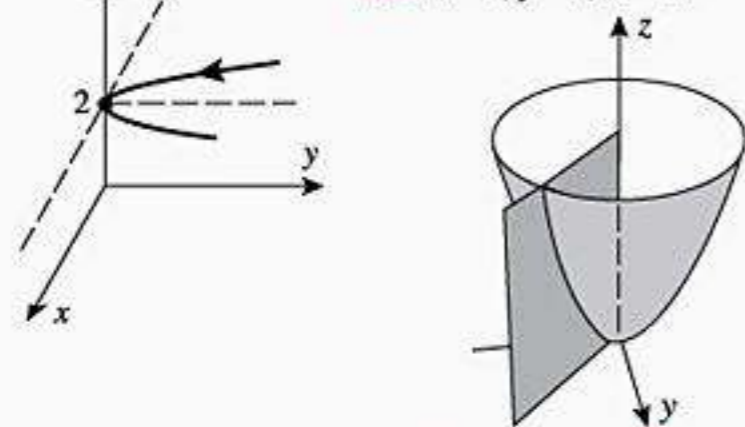
25. $x = 2$ 27. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$



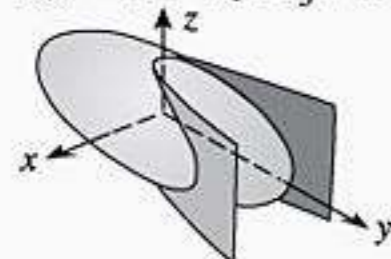
29. $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1$



33. 35. $x = t, y = t, z = 2t^2$



37. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \pm \frac{1}{3}\sqrt{81 - 9t^2 - t^4}\mathbf{k}$ 43. $c = 3/(2\pi)$

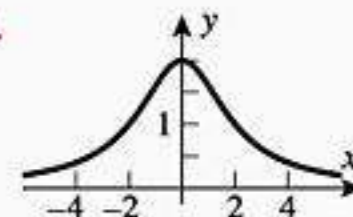
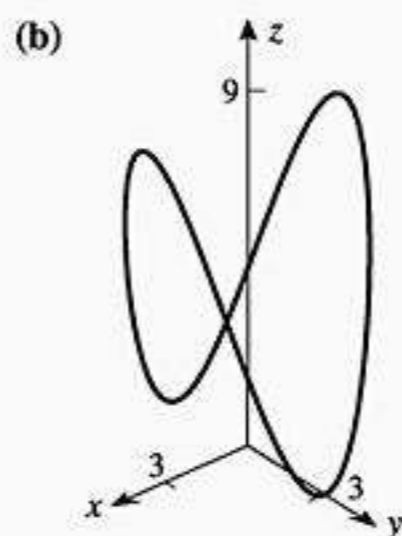


47. (a) III, pois a curva é um subconjunto do plano $y = -x$.
 (b) IV, pois apenas x é periódico em t e y, z crescem sem cota.

(c) II, pois todos os três componentes são periódicos em t .

(d) I, pois a projeção sobre o plano yz é um círculo e a curva cresce sem cota na direção x .

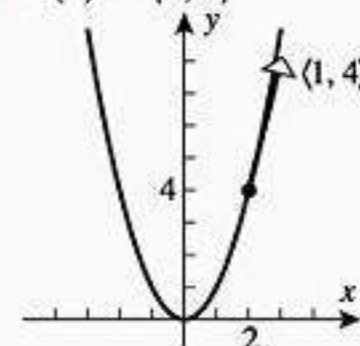
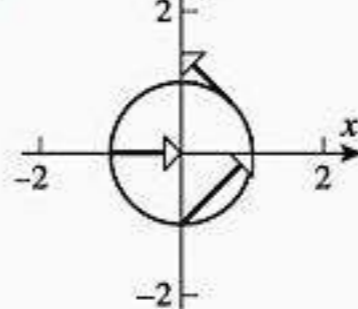
49. (a) $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t$ 51.



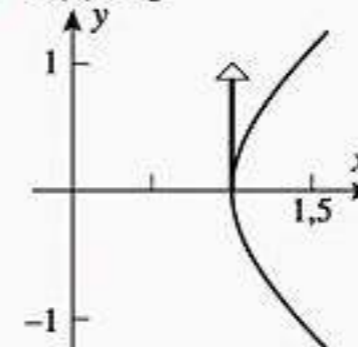
► **Exercícios 13.2 (página 874)**

1. $(\frac{1}{3}, 0)$ 3. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 5. (a) contínua (b) não contínua

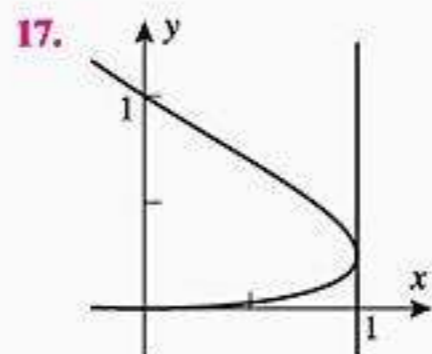
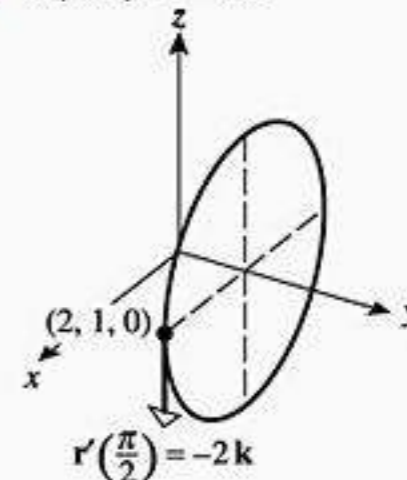
7. 9. $(\sin t)\mathbf{j}$ 11. $\mathbf{r}'(2) = \langle 1, 4 \rangle$



13. $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$



15. $\mathbf{r}'(\pi/2) = -2\mathbf{k}$



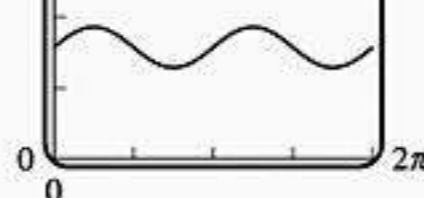
19. $x = 1 + 2t, y = 2 - t,$
 21. $x = 1 - \sqrt{3}\pi t, y = \sqrt{3} + \pi t, z = 1 + 3t$
 23. $\mathbf{r} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + t(2\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j})$
 25. $\mathbf{r} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t(-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$
 27. (a) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $-\mathbf{i} + \mathbf{k}$ (c) 0
 29. $7t^6; 18t^5\mathbf{i} - 10t^4\mathbf{j}$
 31. $3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + \mathbf{C}$

33. $(-t \cos t + \sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{C}$ 35. $(t^3/3)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \ln |t|\mathbf{k} + \mathbf{C}$ 37. \mathbf{j}

39. $(5\sqrt{5} - 1)/3$ 41. $\frac{52}{3}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 43. $(t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^3 - 1)\mathbf{j}$

45. $y(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

47. 3 49. (a) $(-2, 4, 6)$ e $(1, 1, -3)$
 (b) $76^\circ, 71^\circ$



51. 68°

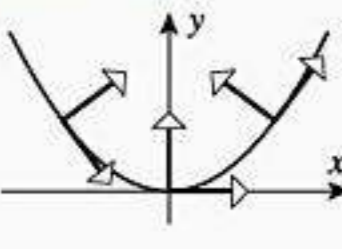
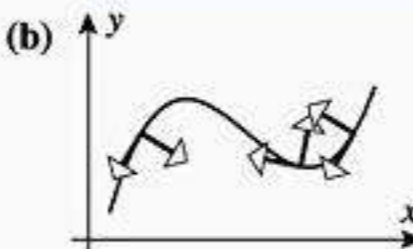
► **Exercícios 13.3 (página 884)**

1. lisa 3. não lisa, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{0}$ 5. $L = \frac{3}{2}$ 7. $L = e - e^{-1}$

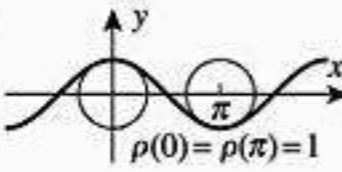
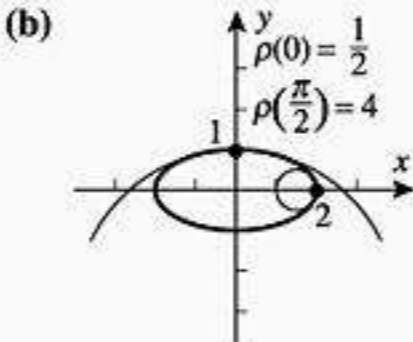
9. $L = 28$ 11. $L = 2\pi\sqrt{10}$ 13. $\mathbf{r}'(\tau) = 4\mathbf{i} + 8(4\tau + 1)\mathbf{j}$

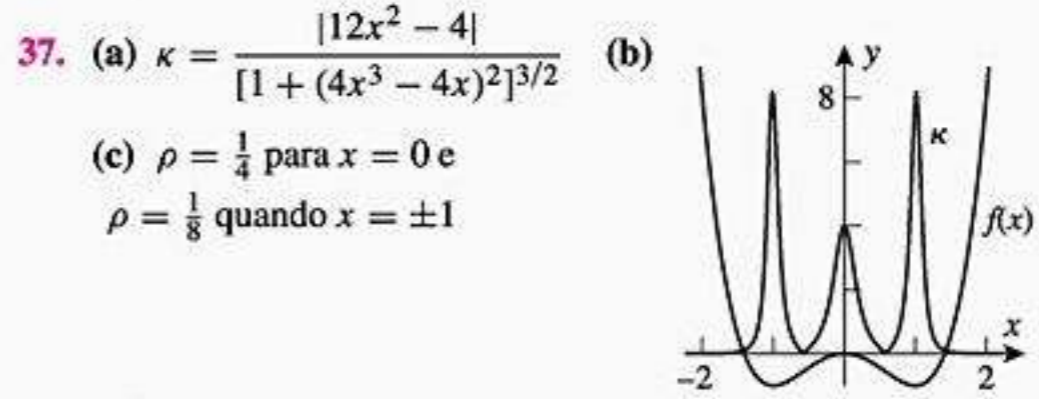
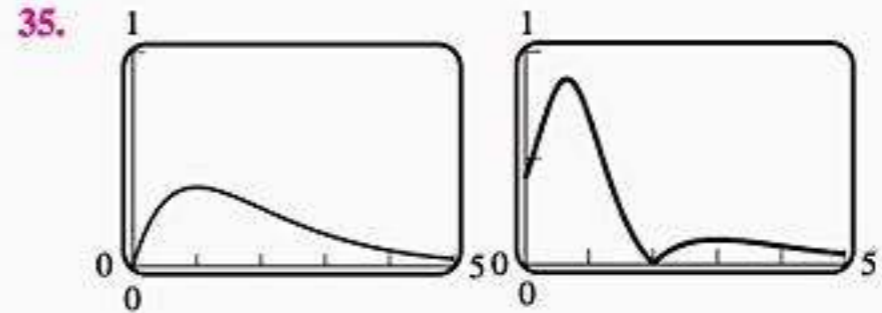
15. $\mathbf{r}'(\tau) = 2\tau e^{\tau^2} \mathbf{i} - 8\tau e^{-\tau^2} \mathbf{j}$
19. (a) $x = \frac{s}{\sqrt{2}}, y = \frac{s}{\sqrt{2}}$ (b) $x = y = z = \frac{s}{\sqrt{3}}$
21. (a) $x = 1 + \frac{s}{3}, y = 3 - \frac{2s}{3}, z = 4 + \frac{2s}{3}$ (b) $(\frac{28}{3}, -\frac{41}{3}, \frac{62}{3})$
23. $x = 3 + \cos s, y = 2 + \sin s, 0 \leq s \leq 2\pi$
25. $x = \frac{1}{3}[(3s+1)^{2/3} - 1]^{3/2}, y = \frac{1}{2}[(3s+1)^{2/3} - 1], s \geq 0$
27. $x = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \cos \left[\ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right],$
 $y = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \sin \left[\ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right], 0 \leq s \leq \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$
31. $x = 2a \arccos [1 - s/(4a)]$
 $-2a(1 - [1 - s/(4a)]^2)^{1/2}(2[1 - s/(4a)]^2 - 1),$
 $y = \frac{s(8a - s)}{8a}$ para $0 \leq s \leq 8a$
33. (a) $9/2$ (b) $9 - 2\sqrt{6}$ 35. (a) $\sqrt{3}(1 - e^{-2})$ (b) $4\sqrt{5}$
37. (a) $g(\tau) = \pi(\tau)$ (b) $g(\tau) = \pi(1 - \tau)$ 39. 44 pol.
41. (a) $2t + (1/t)$ (b) $2t + (1/t)$ (c) $8 + \ln 3$

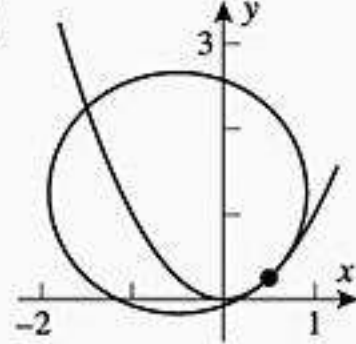
► **Exercícios 13.4 (página 891)**

1. (a)  (b) 
5. $\mathbf{T}(1) = \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{j}, \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$
7. $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}, \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j}$
9. $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{k}, \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{j}$
11. $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}, \mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$
13. $x = s, y = 1$ 15. $\mathbf{B} = \frac{4}{3} \cos t \mathbf{i} - \frac{4}{3} \sin t \mathbf{j} - \frac{3}{5} \mathbf{k}$ 17. $\mathbf{B} = -\mathbf{k}$
19. $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}), \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}),$
 $\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k}$
 retificador: $x + y = \sqrt{2}$; osculador: $z = 1$; normal: $-x + y = 0$
23. $\mathbf{N} = -\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}$

► **Exercícios 13.5 (página 897)**

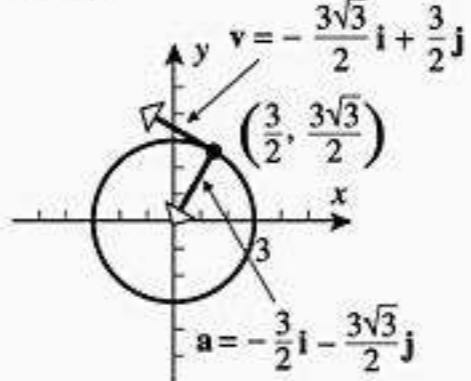
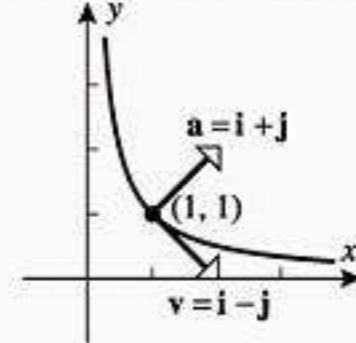
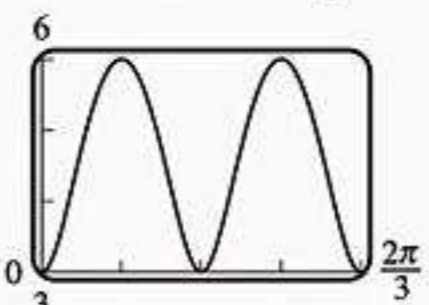
1. $\kappa \approx 2$ 3. (a) I é a curvatura de II (b) I é a curvatura de II
5. $\frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$ 7. $\frac{12e^{2t}}{(9e^{6t} + e^{-2t})^{3/2}}$ 9. $\frac{4}{17}$ 11. $\frac{1}{2 \cosh^2 t}$
13. $\kappa = \frac{2}{5}, \rho = \frac{5}{2}$ 15. $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}, \rho = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 17. $\kappa = \frac{1}{4}$ 21. 1
23. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 25. $\frac{4}{5\sqrt{5}}$ 27. $\frac{96}{125}$ 29. $\frac{6}{5\sqrt{10}}$ 31. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
33. (a)  (b) 



41. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 43. $\frac{2}{3}$ 47. $\rho = 2|p|$ 49. $(3, 0), (-3, 0)$
51. $\rho_{\min} = 1/\sqrt{2}; \rho_{\max} = 2$
55. (b) $\rho = \sqrt{2}$ (c) 

59. $a = \frac{1}{2r}$
69. $\tau = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}$
71. $\tau = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

► **Exercícios 13.6 (página 910)**

1. $\mathbf{v}(t) = -3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}$
 $\mathbf{a}(t) = -3 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}$
 $\|\mathbf{v}(t)\| = 3$
3. $\mathbf{v}(t) = e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}$
 $\mathbf{a}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$
 $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$
- 
- 
5. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}, \mathbf{a} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
7. $\mathbf{v} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}, \mathbf{a} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$
13. velocidade mínima $3\sqrt{2}$ quando $\mathbf{r} = 24\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
15. (a)  (b) velocidade máxima = 6, velocidade mínima = 3
- (d) A velocidade máxima ocorre quando $t = \pi/6$.
17. $\mathbf{v}(t) = (1 - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t - 1)\mathbf{j};$
 $\mathbf{r}(t) = (t + \cos t - 1)\mathbf{i} - (\sin t - t + 1)\mathbf{j}$
19. $\mathbf{v}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k};$
 $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t - 1)\mathbf{i} - (1 - \cos t)\mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$
21. 15° 23. (a) $0,7\mathbf{i} + 2,7\mathbf{j} - 3,4\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{r}_0 = -0,7\mathbf{i} - 2,9\mathbf{j} + 4,8\mathbf{k}$
25. $\Delta \mathbf{r} = 8\mathbf{i} + \frac{26}{3}\mathbf{j}, s = (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})/3$
27. $\Delta \mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \sqrt{2} \ln 3 \mathbf{k}; s = \frac{8}{3}$
31. (a) $a_T = 0, a_N = \sqrt{2}$ (b) $a_T \mathbf{T} = \mathbf{0}, a_N \mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ (c) $1/\sqrt{2}$
33. (a) $a_T = 2\sqrt{5}, a_N = 2\sqrt{5}$ (b) $a_T \mathbf{T} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, a_N \mathbf{N} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 (c) $2/\sqrt{5}$
35. (a) $a_T = 20/\sqrt{14}, a_N = 6\sqrt{3}/\sqrt{7}$
 (b) $a_T \mathbf{T} = \frac{10}{7}\mathbf{i} + \frac{20}{7}\mathbf{j} + \frac{30}{7}\mathbf{k}, a_N \mathbf{N} = \frac{24}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{12}{7}\mathbf{k}$ (c) $(\frac{3}{7})^{3/2}$

37. (a) $a_T = 0, a_N = 3$ (b) $a_T \mathbf{T} = \mathbf{0}, a_N \mathbf{N} = -3\mathbf{i}$ (c) $\frac{3}{\text{seg}^3}$
 39. $a_T = -3, a_N = 2, \mathbf{T} = -\mathbf{j}, \mathbf{N} = \mathbf{i}$
 41. $a_T = \frac{4}{3}, a_N = \sqrt{29}/3, \mathbf{T} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}),$
 $\mathbf{N} = (\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 14\mathbf{k})/(3\sqrt{29})$
 43. $\frac{3}{2}$ 45. $-\pi/\sqrt{2}$ 47. $a_N = 8,41 \times 10^{10} \text{ km/s}^2$
 49. $a_N = 18/(1 + 4x^2)^{3/2}$ 51. $a_N = 0$ 53. $\approx 38,73 \text{ m/s}$
 55. (a) $x = 160t, y = 160\sqrt{3}t - 16t^2$ (b) 1200 pés (c) $1600\sqrt{3}$ pés
 (d) 320 pés/s
 57. $40\sqrt{3}$ pés 59. 800 pés/s 61. 15° ou 75° 63. (c) $\approx 14,942$ pés
 65. (a) $\rho \approx 176,78 \text{ m}$ (b) $\frac{125}{4} \text{ m}$
 67. (b) R é máxima quando $\alpha = 45^\circ$, valor máximo v_0^2/g
 69. (a) 2,62 s (b) 181,5 pés
 71. (a) $v_0 \approx 83 \text{ pés/s}, \alpha \approx 8^\circ$ (b) 268,76 pés

► Exercícios 13.7 (página 920)

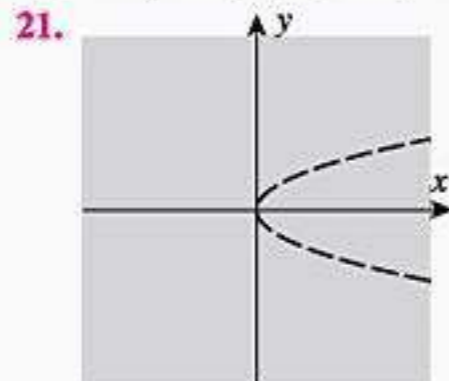
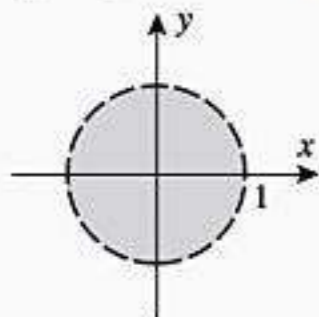
7. 7,75 km/s 9. 10,88 km/s
 11. (a) distância mínima = 220.680 milhas,
 distância máxima = 246.960 milhas (b) 27,5 dias
 13. (a) 17.224 milhas/h (b) $e \approx 0,071$, altitude do apogeu = 819 milhas

► Capítulo 13. Exercícios de Revisão (página 921)

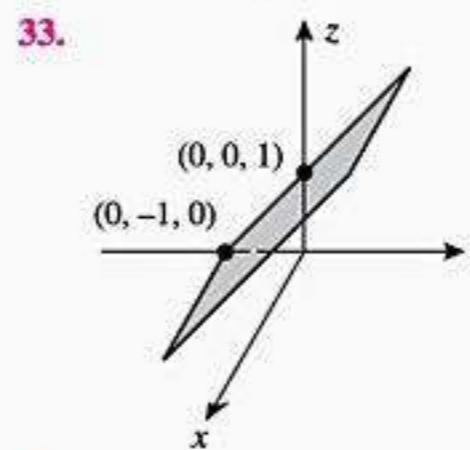
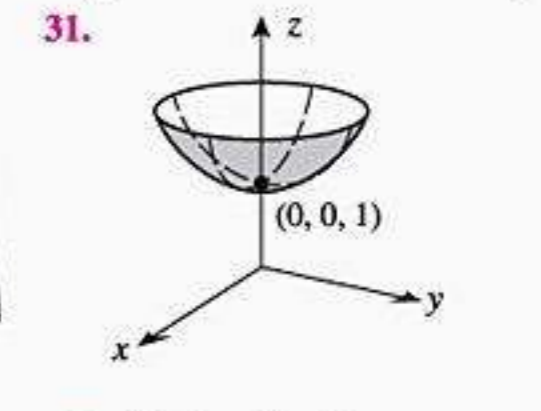
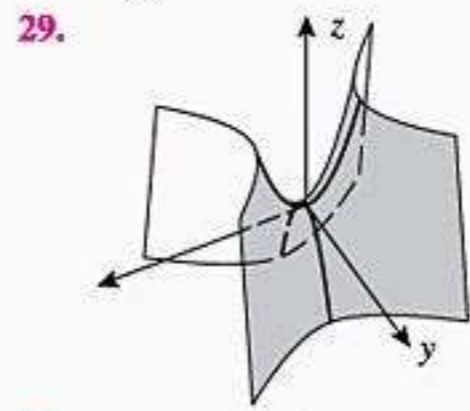
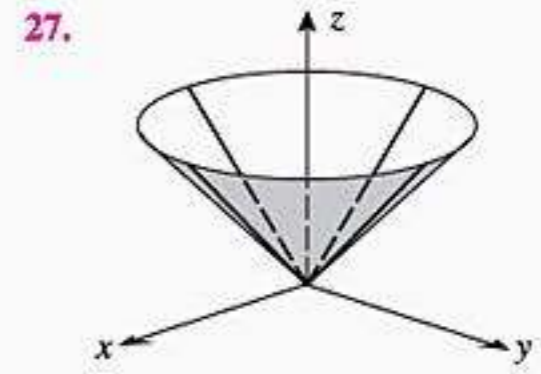
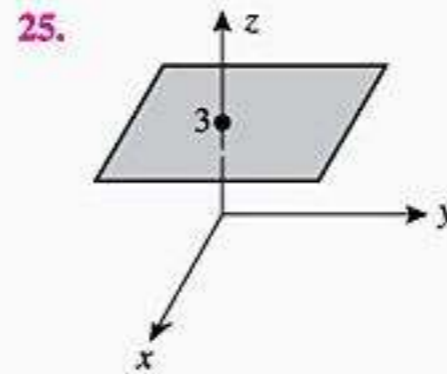
3. O círculo de raio 3 centrado na origem no plano xy .
 5. A parábola de vértice em $(-2, 0, -1)$ abrindo para cima no plano vertical $x = -2$.
 11. $x = 1 + t, y = -t, z = t$ 13. $(\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 15. $y(t) = (\frac{1}{3}t^3 + 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$ 17. 15/4
 19. $\mathbf{r}(s) = \frac{s-3}{3}\mathbf{i} + \frac{12-2s}{3}\mathbf{j} + \frac{9+2s}{3}\mathbf{k}$ 25. 3/5 27. 0
 29. (a) velocidade escalar (b) distância percorrida
 (c) distância da partícula até a origem
 33. (a) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{6}t^4 + t)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}t^2 + 2t)\mathbf{j} - (\frac{1}{4}\cos 2t + t - \frac{1}{4})\mathbf{k}$
 (b) 3,475 35. 24,78 pés 37. 36,50 km/s

► Exercícios 14.1 (página 933)

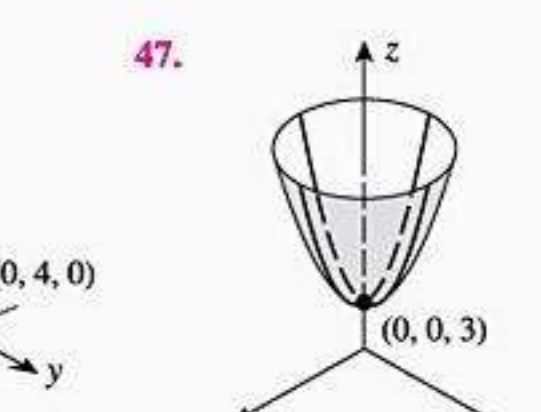
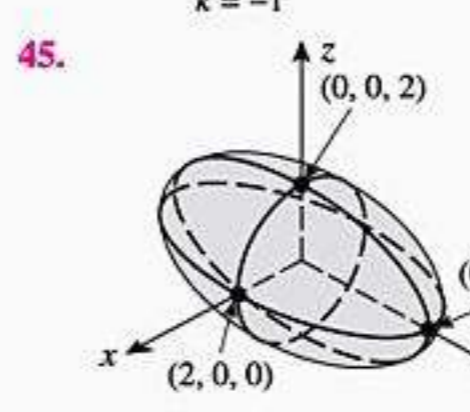
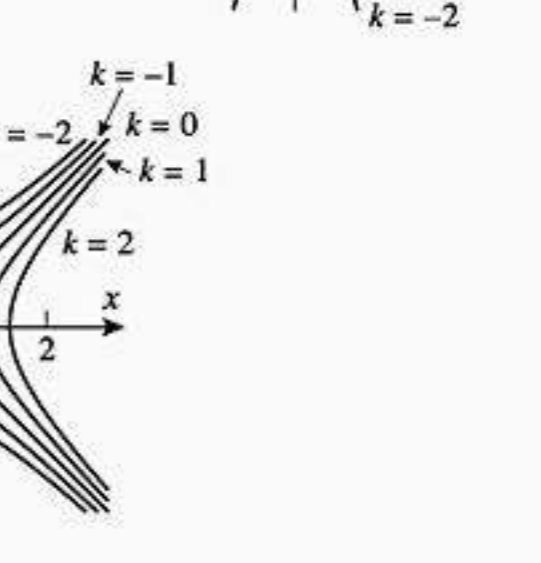
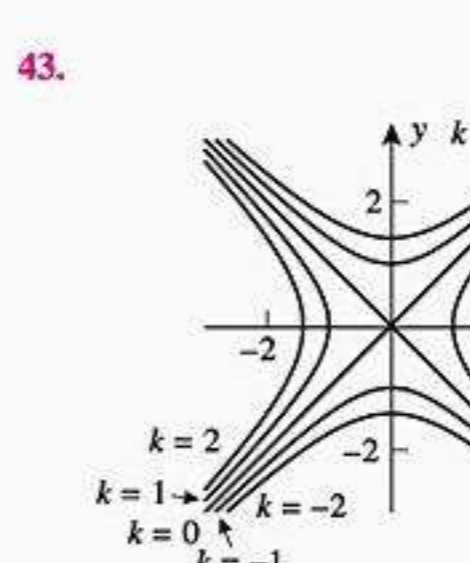
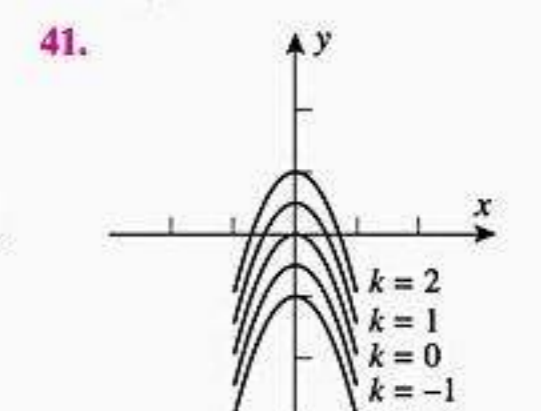
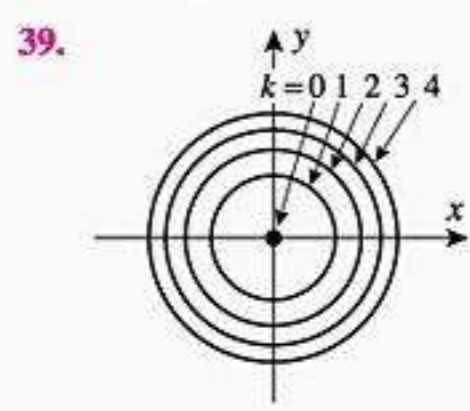
1. (a) 5 (b) 3 (c) 1 (d) -2 (e) $9a^3 + 1$ (f) $a^3b^2 - a^2b^3 + 1$
 3. (a) $x^2 - y^2 + 3$ (b) $3x^3y^4 + 3$ 5. $x^3e^{x^3(3y+1)}$
 7. (a) $t^2 + 3t^{10}$ (b) 0 (c) 3076
 9. (a) $\text{WCI} = 17,8^\circ \text{ F}$ (b) $\text{WCI} = 22,6^\circ \text{ F}$
 11. (a) 66% (b) 73,5% (c) 60,6% 13. (a) 19 (b) -9 (c) 3
 (d) $a^6 + 3$ (e) $-t^8 + 3$ (f) $(a+b)(a-b)^2b^3 + 3$
 15. $(y+1)e^{x^2(y+1)z^2}$ 17. (a) $80\sqrt{\pi}$ (b) $n(n+1)/2$
 19.



23. (a) todos os pontos na ou acima da reta $y = -2$ (b) todos os pontos na ou dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (c) todos os pontos do espaço tridimensional

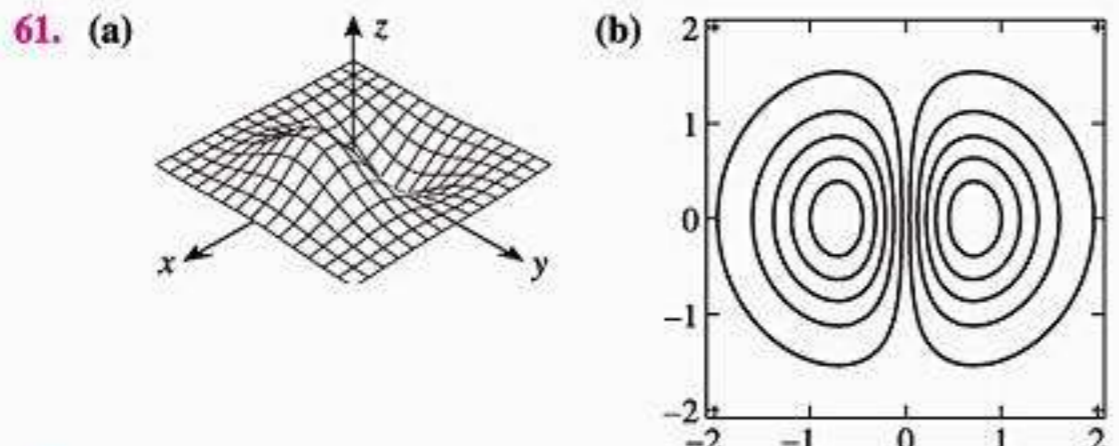
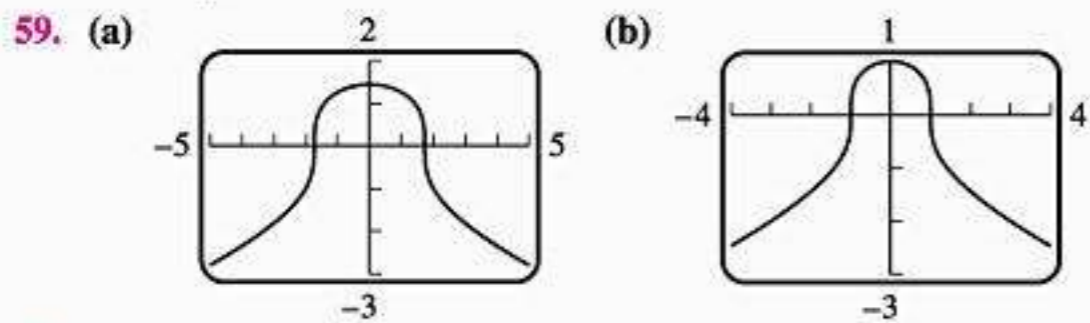


35. (a) $1 - x^2 - y^2$
 (b) $\sqrt{x^2 + y^2}$
 (c) $x^2 + y^2$
 37. (a) A
 (b) B
 (c) crescer
 (d) decrescer
 (e) crescer
 (f) decrescer



49. esferas concêntricas, centro em comum em $(2, 0, 0)$
 51. cilindros concêntricos, eixo comum o eixo y
 53. (a) $x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$ (b) $x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$
 (c) $x^2 - 2x^3 + 3xy = -18$
 55. (a) $x^2 + y^2 - z = 5$ (b) $x^2 + y^2 - z = -2$ (c) $x^2 + y^2 - z = 0$

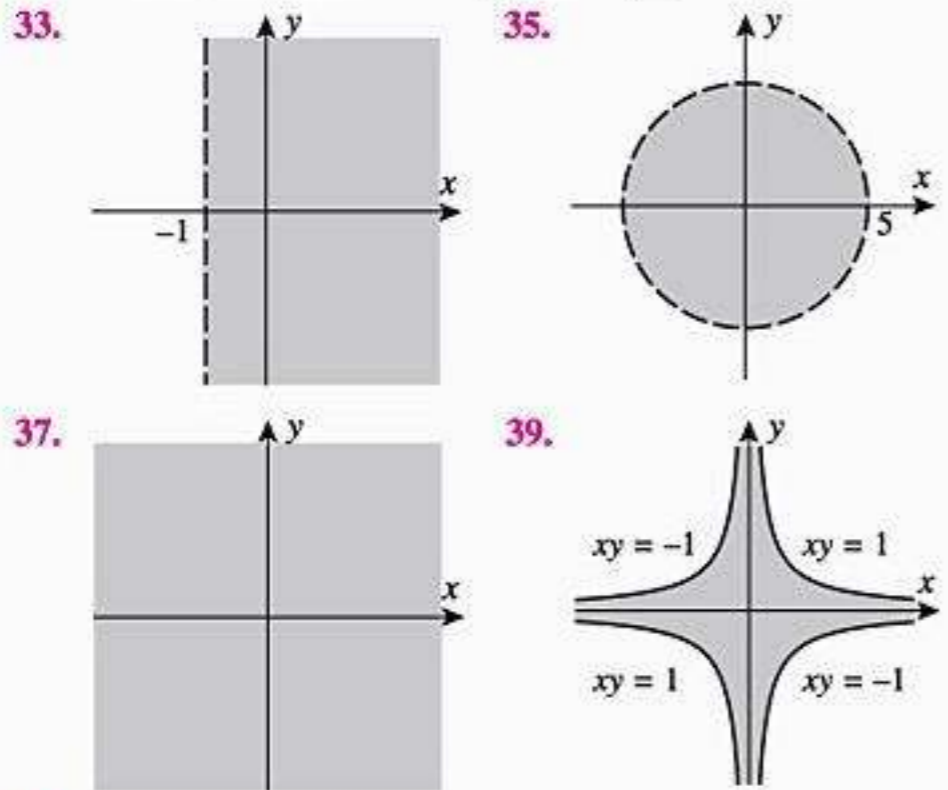
57. (a)  (b) o caminho $xy = 4$



63. (a) O gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade no sentido do eixo x positivo.
 (b) O gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade para cima no sentido do eixo z positivo.
 (c) O gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade no sentido do eixo y negativo e então invertido em relação ao plano $z = 0$

► **Exercícios 14.2 (página 944)**

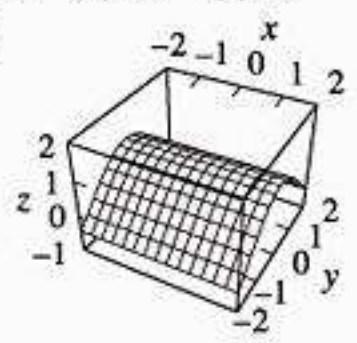
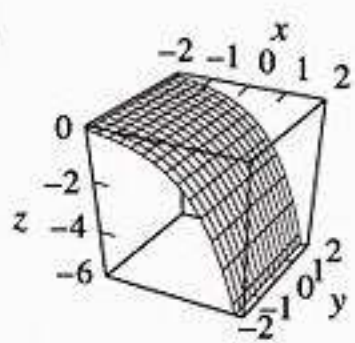
1. 35 3. -8 5. 0
 7. (a) O limite não existe ao longo de $x=0$
 (b) O limite não existe ao longo de $x=0$
 9. 1 11. 0 13. 0 15. o limite não existe 17. $\frac{8}{3}$ 19. 0 21. 0
 23. o limite não existe 25. (a) não (d) não; sim 29. $-\pi/2$ 31. não



41. todo o espaço tridimensional
 43. todos os pontos que não estão no cilindro $x^2 + z^2 = 1$

► **Exercícios 14.3 (página 955)**

1. (a) $9x^2y^2$ (b) $6x^3y$ (c) $9y^2$ (d) $9x^2$ (e) $6y$ (f) $6x^3$ (g) 36 (h) 12

3. (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ 5. (a) $-4 \cos 7$ (b) $2 \cos 7$
 7. $\partial z/\partial x = -4$; $\partial z/\partial y = \frac{1}{2}$ 9. (a) 4,9 (b) 1,2
 11. $z = f(x, y)$ tem II como o seu gráfico, f_x tem I como o seu gráfico, e f_y tem III como o seu gráfico.
 13. $8xy^3e^{x^2y^3}$, $12x^2y^2e^{x^2y^3}$
 15. $x^3/(y^{3/5} + x) + 3x^2 \ln(1 + xy^{-3/5})$, $-\frac{3}{5}x^4/(y^{8/5} + xy)$
 17. $-\frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$
 19. $(3/2)x^2y(5x^2 - 7)(3x^5y - 7x^3y)^{-1/2}$
 $(1/2)x^3(3x^2 - 7)(3x^5y - 7x^3y)^{-1/2}$
 21. $\frac{y^{-1/2}}{y^2 + x^2}$, $-\frac{xy^{-3/2}}{y^2 + x^2} - \frac{3}{2}y^{-5/2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$
 23. $-\frac{4}{3}y^2 \sec^2 x (y^2 \tan x)^{-7/3}$, $-\frac{8}{3}y \tan x (y^2 \tan x)^{-7/3}$
 25. -6, -21 27. $1/\sqrt{17}$, $8/\sqrt{17}$
 29. (a) $2xy^4z^3 + y$ (b) $4x^2y^3z^3 + x$ (c) $3x^2y^4z^2 + 2z$
 (d) $2y^4z^3 + y$ (e) $32z^3 + 1$ (f) 438
 31. $2z/x$, z/y , $\ln(x^2y \cos z) - z \tan z$
 33. $-y^2z^3/(1 + x^2y^4z^6)$, $-2xyz^3/(1 + x^2y^4z^6)$, $-3xy^2z^2/(1 + x^2y^4z^6)$
 35. $yz e^z \cos(xz)$, $e^z \sin(xz)$, $ye^z(\sin(xz) + x \cos(xz))$
 37. $x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 39. (a) e (b) $2e$ (c) e
 41. (a)  (b) 

43. 4
 45. -2
 47. (a) $\partial V/\partial r = 2\pi rh$ (b) $\partial V/\partial h = \pi r^2$ (c) 48π (d) 64π
 49. (a) $\frac{1}{5} \frac{\text{lb}}{\text{pol}^2 \cdot \text{K}}$ (b) $-\frac{25}{8} \frac{\text{pol}^5}{\text{lb}}$
 51. (a) $\frac{\partial V}{\partial \ell} = 6$ (b) $\frac{\partial V}{\partial w} = 15$ (c) $\frac{\partial V}{\partial h} = 10$
 55. (a) $\pm\sqrt{6}/4$ 57. $-x/z$, $-y/z$
 59. $-\frac{2x + yz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$; $-\frac{xz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$
 61. $-x/w$, $-y/w$, $-z/w$
 63. $-\frac{yzw \cos(xyz)}{2w + \sin(xyz)}$, $-\frac{xzw \cos(xyz)}{2w + \sin(xyz)}$, $-\frac{xyw \cos(xyz)}{2w + \cos(xyz)}$
 65. e^{-x^2} , $-e^{y^2}$
 67. (a) $-\frac{\cos y}{4\sqrt{x^3}}$ (b) $-\sqrt{x} \cos y$ (c) $-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin y$ (d) $-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin y$
 69. $-32y^3$ 71. $-e^x \sin y$ 73. $\frac{20}{(4x - 5y)^2}$ 75. $\frac{2(x - y)}{(x + y)^3}$
 77. (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ (c) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ (d) $\frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \partial x}$
 79. (a) $30xy^4 - 4$ (b) $60x^2y^3$ (c) $60x^3y^2$
 81. (a) -30 (b) -125 (c) 150
 83. (a) $15x^2y^4z^7 + 2y$ (b) $35x^3y^4z^6 + 3y^2$ (c) $21x^2y^5z^6$ (d) $42x^3y^5z^5$
 (e) $140x^3y^3z^6 + 6y$ (f) $30xy^4z^7$ (g) $105x^2y^4z^6$ (h) $210xy^4z^6$
 91. $\frac{\partial f}{\partial v} = 8vw^3x^4y^5$, $\frac{\partial f}{\partial w} = 12v^2w^2x^4y^5$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 16v^2w^3x^3y^5$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 20v^2w^3x^4y^4$
 93. $\frac{\partial f}{\partial v_1} = \frac{2v_1}{v_3^2 + v_4^2}$, $\frac{\partial f}{\partial v_2} = \frac{-2v_2}{v_3^2 + v_4^2}$, $\frac{\partial f}{\partial v_3} = \frac{-2v_3(v_1^2 - v_2^2)}{(v_3^2 + v_4^2)^2}$,
 $\frac{\partial f}{\partial v_4} = \frac{-2v_4(v_1^2 - v_2^2)}{(v_3^2 + v_4^2)^2}$

95. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $2(1+yw)e^{yw} \sin z \cos z$
 (f) $2xw(2+yw)e^{yw} \sin z \cos z$
 97. $-i \sin(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$
 99. (a) plano xy , $12x^2 + 6x$ (b) $y \neq 0$, $-3x^2/y^2$
 101. $f_x(2, -1) = 11$, $f_y(2, -1) = -8$
 103. (b) não existe se $y \neq 0$ e $x = -y$

► **Exercícios 14.4 (página 965)**

1. 5,04 3. 4,14 9. $dz = 7dx - 2dy$ 11. $dz = 3x^2y^2 dx + 2x^3y dy$
 13. $dz = \frac{y}{1+x^2y^2} dx + \frac{x}{1+x^2y^2} dy$ 15. $dw = 8 dx - 3dy + 4 dz$
 17. $dw = 3x^2y^2z dx + 2x^3yz dy + x^3y^2 dz$
 19. $dw = \frac{yz}{1+x^2y^2z^2} dx + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2} dy + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} dz$
 21. $df = 0,10$, $\Delta f = 0,1009$ 23. $df = 0,03$, $\Delta f \approx 0,029412$
 25. $df = 0,96$, $\Delta f \approx 0,97929$
 27. O aumento da área do retângulo é dada pela soma das áreas dos três pequenos retângulos e a diferencial total é dada pela soma das áreas dos retângulos superior à esquerda e inferior à direita.
 29. (a) $L = \frac{1}{3} - \frac{4}{125}(x-4) - \frac{3}{125}(y-3)$ (b) 0,000176603
 31. (a) $L = 0$ (b) 0,0024
 33. (a) $L = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3)$ (b) -0,000481
 35. (a) $L = e + e(x-1) - e(y+1) - e(z+1)$ (b) 0,01554
 41. 0,5 43. 1, 1, -1, 2 45. (-1, 1) 47. (1, 0, 1) 49. 8%
 51. $r\%$ 53. 0, 3%
 55. (a) $(r+s)\%$ (b) $(r+s)\%$ (c) $(2r+3s)\%$ (d) $(3r + \frac{s}{2})\%$
 57. $\approx 39 \text{ cm}^2$

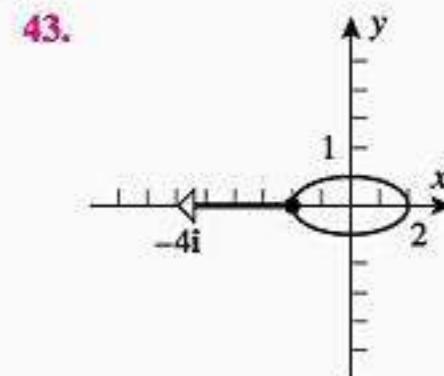
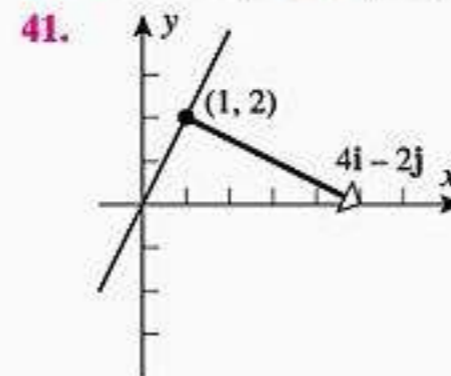
► **Exercícios 14.5 (página 975)**

1. $42t^{13}$ 3. $3t^{-2} \sin(1/t)$ 5. $-\frac{10}{3}t^{7/3} e^{1-t^{10/3}}$ 7. $\frac{dw}{dt} = 165t^{32}$
 9. $-2t \cos t^2$ 11. 3264 13. 0
 17. $24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3$, $16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$
 19. $-\frac{2 \sin u}{3 \sin v} - \frac{2 \cos u \cos v}{3 \sin^2 v}$ 21. e^u , 0
 23. $3r^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 4r^3 \sin^3 \theta \cos \theta$,
 $-2r^3 \sin^2 \theta \cos \theta + r^4 \sin^4 \theta + r^3 \cos^3 \theta - 3r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
 25. $\frac{x^2 + y^2}{4x^2y^3}$, $\frac{y^2 - 3x^2}{4xy^4}$ 27. $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{2r \cos^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + 1}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{-2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + 1}$
 29. $\frac{dw}{d\rho} = 2\rho(4 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$, $\frac{dw}{d\phi} = 6\rho^2 \sin \phi \cos \phi$, $\frac{dw}{d\theta} = 0$
 31. $-\pi$ 33. $\sqrt{3}e^{\sqrt{3}}$, $(2 - 4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$ 35. $-\frac{2xy^3}{3x^2y^2 - \sin y}$
 37. $-\frac{ye^{xy}}{xe^{xy} + ye^y + e^y}$ 41. $\frac{2x + yz}{6yz - xy}$, $\frac{xz - 3z^2}{6yz - xy}$
 43. $\frac{ye^x}{15 \cos 3z + 3}$, $\frac{e^x}{15 \cos 3z + 3}$ 45. -39 km/h 47. $-\frac{7}{36}\sqrt{3} \text{ rad/s}$
 49. $16.200\pi \text{ pol}^3/\text{ano}$ 51. (a) 60 pol^3/s (b) $\frac{26}{7} \text{ pol}^3/\text{s}$
 53. (a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) -4
 67. $\frac{\partial w}{\partial \rho} = (\sin \phi \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial x} + (\sin \phi \sin \theta) \frac{\partial w}{\partial y} + (\cos \phi) \frac{\partial w}{\partial z}$,
 $\frac{\partial w}{\partial \phi} = (\rho \cos \phi \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial x} + (\rho \cos \phi \sin \theta) \frac{\partial w}{\partial y} - (\rho \sin \phi) \frac{\partial w}{\partial z}$,
 $\frac{\partial w}{\partial \theta} = -(\rho \sin \phi \sin \theta) \frac{\partial w}{\partial x} + (\rho \sin \phi \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial y}$
 71. (a) $\frac{dw}{dt} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$ (b) $\frac{\partial w}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v_j}$, para $j = 1, 2, 3$

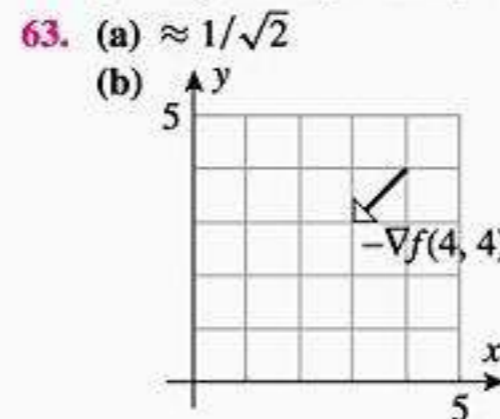
► **Exercícios 14.6 (página 986)**

1. $6\sqrt{2}$ 3. $-3/\sqrt{10}$ 5. -320 7. -314/741 9. 0 11. $-8\sqrt{2}$
 13. $\sqrt{2}/4$ 15. $72/\sqrt{14}$ 17. -8/63 19. $1/2 + \sqrt{3}/8$ 21. $2\sqrt{2}$
 23. $1/\sqrt{5}$ 25. $-\frac{3}{2}e$ 27. $3/\sqrt{11}$ 29. (a) 5 (b) 10 (c) $-5\sqrt{5}$
 31. III 33. $4i - 8j$
 35. $\nabla w = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k}$

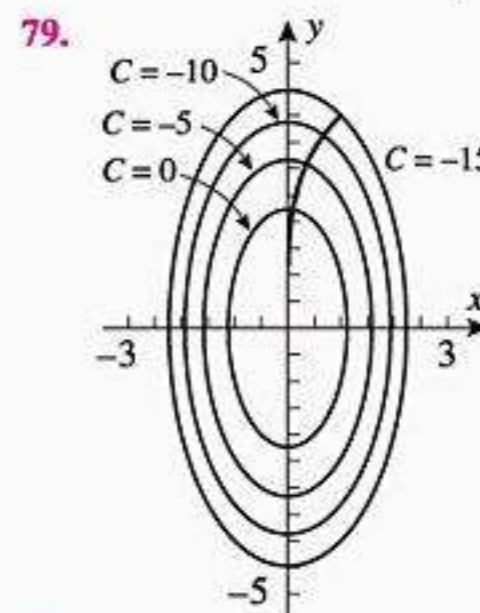
37. $-36i - 12j$ 39. $4(i + j + k)$



45. $\pm(-4i + j)/\sqrt{17}$ 47. $\mathbf{u} = (3i - 2j)/\sqrt{13}$, $\|\nabla f(-1, 1)\| = 4\sqrt{13}$
 49. $\mathbf{u} = (4i - 3j)/5$, $\|\nabla f(4, -3)\| = 1$ 51. $\frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $3\sqrt{2}$
 53. $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 55. $\mathbf{u} = -(i + 3j)/\sqrt{10}$, $-\|\nabla f(-1, -3)\| = -2\sqrt{10}$
 57. $\mathbf{u} = (3i - j)/\sqrt{10}$, $-\|\nabla f(\pi/6, \pi/4)\| = -\sqrt{5}$
 59. $(i - 11j + 12k)/\sqrt{266}$, $-\sqrt{266}$ 61. $8/\sqrt{29}$



65. $9x^2 + y^2 = 9$
 67. $36/\sqrt{17}$
 69. (a) $2e^{-\pi/2} \mathbf{i}$
 71. $-\frac{5}{3}(2i - j - 2k)$
 77. $x(t) = e^{-8t}$, $y(t) = 4e^{-2t}$



81. (a)
- (c) $\nabla f = [2x - 2x(x^2 + 3y^2)]e^{-(x^2 + y^2)} \mathbf{i} + [6y - 2y(x^2 + 3y^2)]e^{-(x^2 + y^2)} \mathbf{j}$
 (d) $x = y = 0$ ou $x = 0$, $y = \pm 1$ ou $x = \pm 1$, $y = 0$

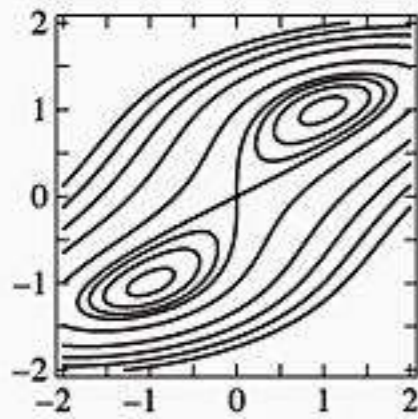
► **Exercícios 14.7 (página 994)**

1. plano tangente: $48x - 14y - z = 64$;
 reta normal: $x = 1 + 48t$, $y = -2 - 14t$, $z = 12 - t$
 3. plano tangente: $x - y - z = 0$;
 reta normal: $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1 - t$
 5. plano tangente: $3y - z = -1$;
 reta normal: $x = \pi/6$, $y = 3t$, $z = 1 - t$

7. plano tangente: $3x - 4z = -25$;
 reta normal: $x = -3 + (3t/4), y = 0, z = 4 - t$
9. (a) todos os pontos no eixo x ou no eixo y (b) $(0, -2, -4)$
11. $(\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{4})$ 13. (a) $(-2, 1, 5), (0, 3, 9)$ (b) $\frac{4}{3\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{222}}$
15. (a) $x + y + 2z = 6$ (b) $x = 2 + t, y = 2 + t, z = 1 + 2t$
 (c) $35,26^\circ$
17. $\pm \frac{1}{\sqrt{365}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 19\mathbf{k})$ 21. $(1, 2/3, 2/3), (-1, -2/3, -2/3)$
23. $x = 1 + 8t, y = -1 + 5t, z = 2 + 6t$
25. $x = 3 + 4t, y = -3 - 4t, z = 4 - 3t$

► Exercícios 14.8 (página 1004)

1. (a) mínimo em $(2, -1)$, nenhum máximo
 (b) máximo em $(0, 0)$, nenhum mínimo
 (c) nenhum máximo nem mínimo
3. mínimo em $(3, -2)$, nenhum máximo 5. mínimo relativo em $(0, 0)$
7. mínimo relativo em $(0, 0)$; pontos de sela em $(\pm 2, 1)$
9. ponto de sela em $(1, -2)$ 11. mínimo relativo em $(2, -1)$
13. mínimos relativos em $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ 15. ponto de sela em $(0, 0)$
17. nenhum ponto crítico 19. máximo relativo em $(-1, 0)$
21. ponto de sela em $(0, 0)$;
 mínimos relativos em $(1, 1)$
 e $(-1, -1)$

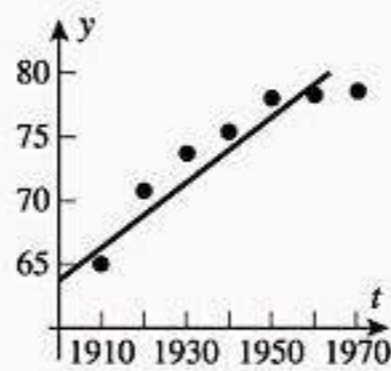


41. (a) $x = 0$; mínimo -3 , máximo 0 ;
 $x = 1$; mínimo 3 , máximo $13/3$;
 $y = 0$; mínimo 0 , máximo 4 ;
 $y = 1$; mínimo -3 , máximo 3
 (b) $y = x$: mínimo 0 , máximo 3 ;
 $y = 1 - x$: máximo 4 , mínimo -3
 (c) mínimo -3 , máximo $13/3$

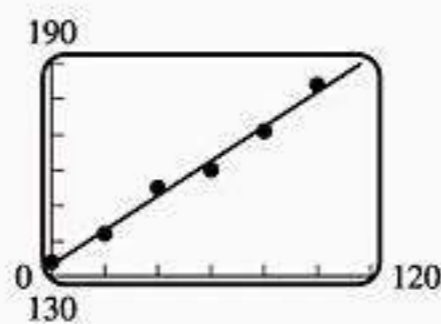
43. comprimento e largura $\sqrt[3]{2V}$ altura $\sqrt[3]{2V}/2$

47. $y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{12}$ 49. $y = 0,5x + 0,8$

51. (a) $y = 63,73 + 0,2565t$ (b)
 (c) em torno de 84 anos

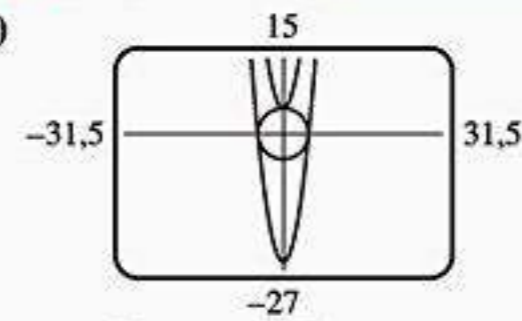


53. (a) $P = \frac{2798}{21} + \frac{171}{350}T$ (b)
 (c) $T \approx -272,7096^\circ\text{C}$

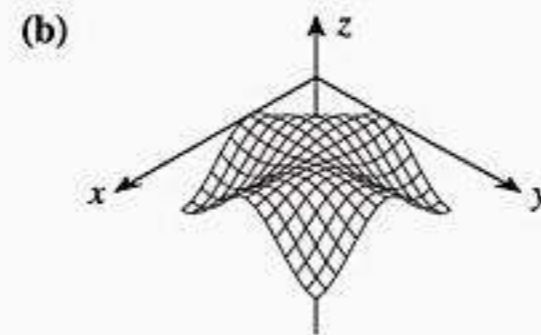


► Exercícios 14.9 (página 1014)

1. (a) 4 3. (a) (c) máximo $\frac{101}{4}$,
 mínimo -5



5. máximo $\sqrt{2}$ em $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(\sqrt{2}, 1)$,
 mínimo $-\sqrt{2}$ em $(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, -1)$
7. máximo $\sqrt{2}$ em $(1/\sqrt{2}, 0)$, mínimo $-\sqrt{2}$ em $(-1/\sqrt{2}, 0)$
9. máximo 6 em $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ mínimo -6 em $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
11. máximo é $1/(3\sqrt{3})$ em $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$,
 $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ e
 $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; mínimo é $-1/(3\sqrt{3})$ em
 $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$,
 $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$
13. $(\frac{3}{10}, -\frac{3}{5})$ 15. $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
17. $(3, 6)$ é o mais perto e $(-3, -6)$ é o mais afastado 19. $5(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$
21. 9, 9, 9 23. $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$ 25. comprimento e largura 2 pés, altura 4 pés
29. (a) $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, máximo $1/8$

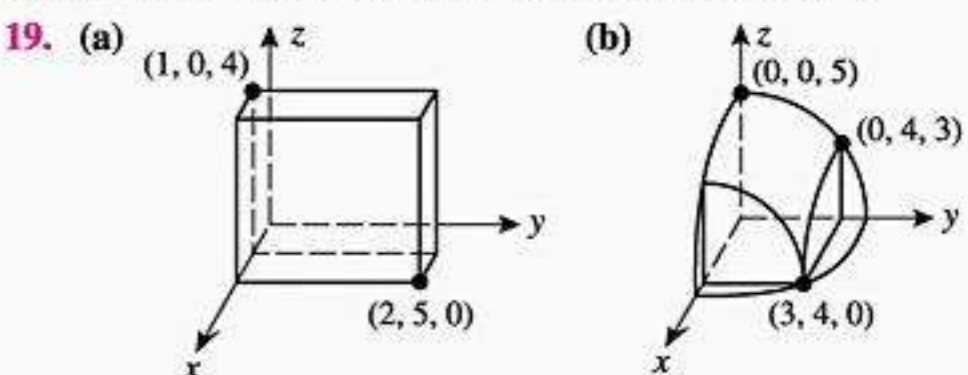


► Capítulo 14. Exercícios de Revisão (página 1015)

1. (a) xy (b) $e^{r+s} \ln(rs)$
5. (a) não definida na reta $y = x$ (b) não contínua
9. (a) 12 Pa/min (b) 240 Pa/min
15. A diferencial df de f é uma aproximação da variação Δf de f .
17. $dV = -0,06667 \text{ m}^3$; $\Delta V = -0,07267 \text{ m}^3$ 19. 2
21. $\frac{-f_y^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} - f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}$ 25. $\frac{7}{2} + \frac{4}{5} \ln 2$ 27. $-7/\sqrt{5}$
29. $(0, 0, 2), (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$ 31. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2)$
33. mínimo relativo em $(15, -8)$
35. ponto de sela em $(0, 0)$, mínimo relativo em $(3, 9)$
37. máximo absoluto de 4 em $(\pm 1, \pm 2)$, mínimo absoluto de 0 em $(\pm\sqrt{2}, 0)$
 e $(0, \pm 2\sqrt{2})$
39. $I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$
41. (a) $\partial P/\partial L = \alpha L^{\alpha-1} K^\beta, \partial P/\partial K = \beta L^\alpha K^{\beta-1}$

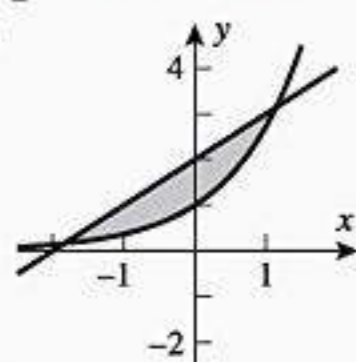
► Exercícios 15.1 (página 1024)

1. 7 3. 2 5. 2 7. 3 9. $1 - \ln 2$ 11. $\frac{1 - \ln 2}{2}$ 13. 0 15. $\frac{1}{3}$
17. (a) $37/4$ (b) valor exato = $28/3$; diferença de $1/12$



21. 19 23. 8 25. $\frac{1}{3\pi}$ 27. $1 - \frac{2}{\pi}$ 29. $\frac{14}{3}^\circ\text{C}$ 31. 1,381737122
 35. primeira integral igual a $\frac{1}{2}$, segunda igual a $-\frac{1}{2}$; não

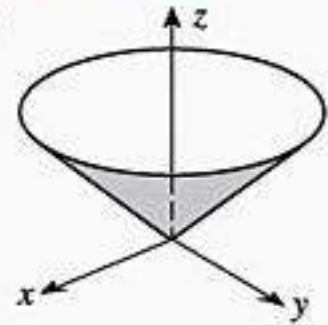
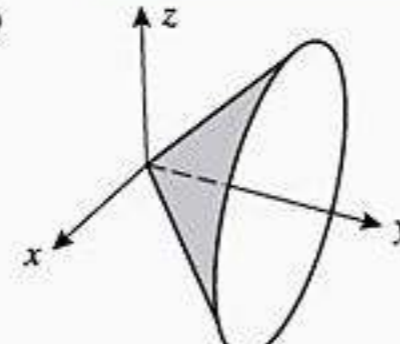
► Exercícios 15.2 (página 1033)

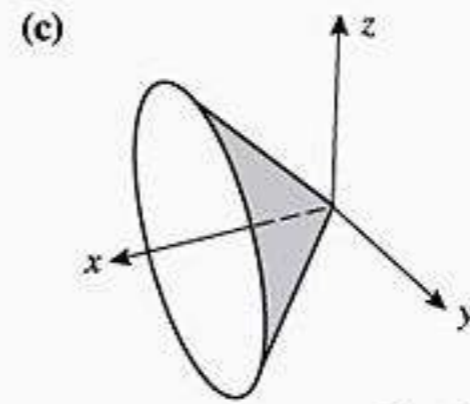
1. $\frac{1}{40}$ 3. 9 5. $\frac{\pi}{2}$ 7. 1 9. $\frac{1}{12}$
 11. (a) $\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx$ (b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy$
 13. (a) $\int_1^2 \int_{-2x+5}^3 f(x, y) dy dx + \int_2^4 \int_1^3 f(x, y) dy dx + \int_4^5 \int_{2x-7}^3 f(x, y) dy dx$ (b) $\int_1^3 \int_{(5-y)/2}^{(y+7)/2} f(x, y) dx dy$
 15. (a) 16/3 (b) 38 17. 576 19. 0
 21. $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 23. $\frac{50}{3}$ 25. $-\frac{7}{60}$
 27. (a)  (b) (-1,8414; 0,1586), (1,1462; 3,1462)
 (c) -0,4044
 (d) -0,4044
 29. $\sqrt{2}-1$ 31. 32 33. 12 35. 27π 37. 170 39. $\frac{27\pi}{2}$ 41. $\frac{2000}{3}$
 43. $\frac{\pi}{2}$ 45. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 f(x, y) dx dy$ 47. $\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^2 f(x, y) dy dx$
 49. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx$ 51. $\frac{1-e^{-16}}{8}$ 53. $\frac{e^8-1}{3}$
 55. $\frac{1-\cos 8}{3}$ 57. (a) 0 (b) $\text{tg } 1$ 59. 0 61. $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ 63. $\frac{2}{3}^\circ\text{C}$
 65. 0,676089

► Exercícios 15.3 (página 1041)

1. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{2}{9}a^3$ 5. 0 7. $\frac{3\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{16}$ 11. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4\sin\theta} f(r, \theta) r dr d\theta$
 13. $8 \int_0^{\pi/2} \int_1^3 r\sqrt{9-r^2} dr d\theta$ 15. $2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} (1-r^2)r dr d\theta$
 17. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ 19. $\frac{5\pi}{32}$ 21. $\frac{27\pi}{16}$ 23. $(1-e^{-1})\pi$ 25. $\frac{\pi}{8} \ln 5$ 27. $\frac{\pi}{8}$
 29. $\frac{16}{9}$ 31. $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ 33. $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5}-1)$ 35. $\pi a^2 h$
 37. $\frac{(3\pi-4)a^2c}{9}$ 39. $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 2$ 41. (b) $\frac{\pi}{4}$
 43. (a) 1,173108605 (b) 1,173108605 45. $\frac{1}{5} + \frac{\pi}{2}$

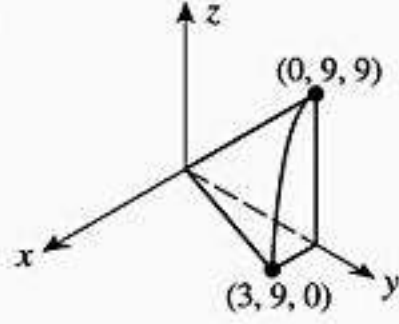
► Exercícios 15.4 (página 1053)

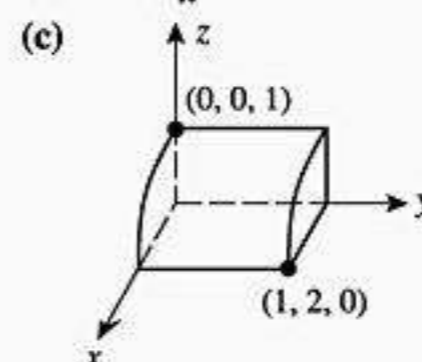
1. (a)  (b) 



3. (a) $x = u, y = v, z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}u - 2v$ (b) $x = u, y = v, z = u^2$
 5. (a) $x = \sqrt{5} \cos u, y = \sqrt{5} \sin u, z = v; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$
 (b) $x = 2 \cos u, y = v, z = 2 \sin u; 0 \leq u \leq 2\pi, 1 \leq v \leq 3$
 7. $x = u, y = \sin u \cos v, z = \sin u \sin v$
 9. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \frac{1}{1+r^2}$
 11. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 2r^2 \cos \theta \sin \theta$
 13. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \sqrt{9-r^2}; r \leq \sqrt{5}$
 15. $x = \frac{1}{2} \rho \cos \theta, y = \frac{1}{2} \rho \sin \theta, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho$ 17. $z = x - 2y$; um plano
 19. $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1; 2 \leq z \leq 4$; parte de um cilindro elíptico
 21. $(x/3)^2 + (y/4)^2 = z^2; 0 \leq z \leq 1$; parte de um cone elíptico
 23. (a) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = r, 0 \leq r \leq 2$
 $x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}; 0 \leq u^2 + v^2 \leq 4$
 25. (a) $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \pi$ (b) $0 \leq u \leq 4, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$
 27. (a) $0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (b) $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$
 29. $2x + 4y - z = 5$ 31. $z = 0$ 33. $x - y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$
 35. 6π 37. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ 39. $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$ 41. $\frac{(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})\pi}{6}$
 43. $\frac{(10\sqrt{10}-1)\pi}{18}$ 45. 8π 47. $4\pi a^2$
 51. $4\pi^2 ab$ 53. 9,099 55. (a) um elipsóide (b) 111,55
 57. $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$; elipsóide
 59. $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = -1$; hiperbolóide de duas folhas

► Exercícios 15.5 (página 1062)

1. 8 3. $\frac{47}{3}$ 5. $\frac{81}{5}$ 7. $\frac{128}{15}$ 9. $\pi(\pi-3)/2$ 11. $\frac{1}{6}$ 13. 9,425
 15. 4 17. $\frac{256}{15}$
 19. (a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} f(x, y, z) dz dy dx$
 (b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} f(x, y, z) dz dy dx$
 21. $4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} dz dy dx$
 23. $2 \int_{-3}^3 \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}} \int_0^{x+3} dz dy dx$
 25. (a)  (b) 



27. $\frac{3}{4}$ 29. 3,291
 31. (a) um exemplo é $\int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-x/a-y/z)} dz dy dx$
 33. (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^5 f(x, y, z) dz dy dx$
 (b) $\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_y^{3-\sqrt{x}} f(x, y, z) dz dy dx$
 (c) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{8-y} f(x, y, z) dz dy dx$
 35. (a) a esfera $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (b) 4,934802202 (c) $\pi^2/2$
 37. (a) 0 (b) $\frac{e^2 - 1}{2}$

► **Exercícios 15.6 (página 1073)**

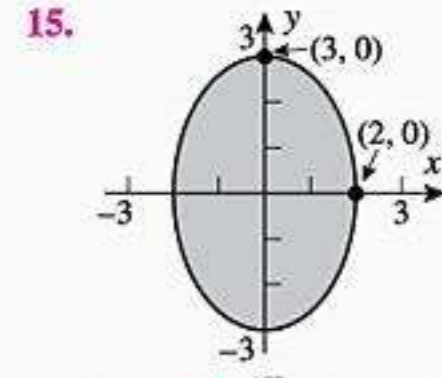
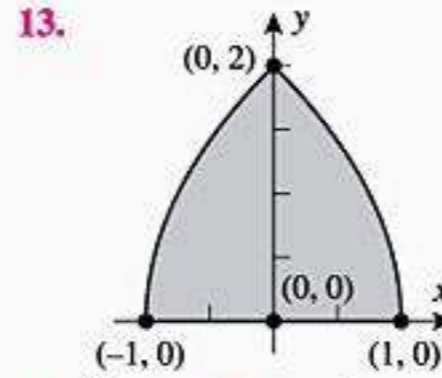
1. (a) positiva: m_2 está no fulcro, portanto pode ser ignorado; as massas m_1 e m_3 estão equidistantes da posição 5, mas $m_1 < m_3$, portanto a viga gira no sentido horário.
 (b) O fulcro deveria ser colocado a $\frac{50}{7}$ unidades à direita de m_1 .
 3. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 5. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 7. $(\frac{5}{14}, \frac{38}{35})$ 9. $(0, \frac{4(b^3 - a^3)}{3\pi(b^2 - a^2)})$ 11. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 13. $M = \frac{13}{20}$, centro de gravidade $(\frac{190}{273}, \frac{6}{13})$
 15. $M = a^4/8$, centro de gravidade $(8a/15, 8a/15)$
 17. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 19. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 21. $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{5})$ 23. $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$
 25. $M = a^4/2$, centro de gravidade $(a/3, a/2, a/2)$
 27. $M = \frac{1}{6}$ centro de gravidade $(0, \frac{16}{35}, \frac{1}{2})$ 29. (a) $(\frac{5}{8}, \frac{5}{8})$ (b) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$
 31. (1,177406; 0,353554; 0,231557) 35. $(\frac{128}{105\pi}, \frac{128}{105\pi})$
 39. $2\pi^2 abk$ 41. $(a/3, b/3)$

► **Exercícios 15.7 (página 1084)**

1. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{16}$
 5. A região é delimitada pelo plano xy e a metade superior da esfera de raio 1 centrada na origem; $f(r, \theta, z) = z$.
 7. A região é a porção do primeiro octante que está dentro de uma esfera de raio 1 centrada na origem; $f(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \phi$.
 9. $\frac{81\pi}{2}$ 11. $\frac{152}{3}\pi + \frac{80}{3}\pi\sqrt{5}$ 13. $\frac{64\pi}{3}$ 15. $\frac{11\pi a^3}{3}$ 17. $\frac{\pi a^6}{48}$
 19. $\frac{32(2\sqrt{2} - 1)\pi}{15}$
 21. (a) $\frac{5}{2}(-8 + 3 \ln 3) \ln(\sqrt{5} - 2)$ (b) $f(x, y, z) = \frac{y^3}{x^3 \sqrt{1 + z^2}}$
 G é a cunha cilíndrica $1 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, -2 \leq z \leq 2$
 23. $\frac{4\pi a^3}{3}$ 25. $\frac{27\pi}{4}$ 27. $\pi k a^4$
 29. $(0, 0, \frac{7}{16\sqrt{2} - 14})$ 31. $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$
 33. $(\frac{4}{3}, 0, \frac{10}{9})$ 35. $\frac{2(\sqrt{3} - 1)\pi}{3}$ 37. $(0, 0, \frac{11}{30})$ 39. $(0, 0, 2a/5)$
 41. $\frac{4}{3}\pi(1 - e^{-1})\delta_0 R^3$ 43. $\frac{1}{2}\delta\pi a^4 h$ 45. $\frac{1}{2}\delta\pi h(a_2^4 - a_1^4)$

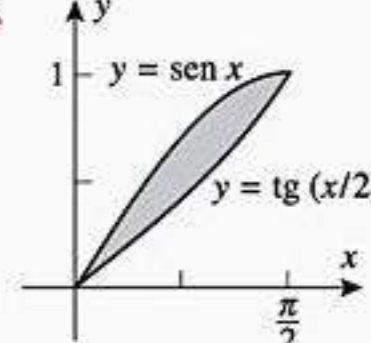
► **Exercícios 15.8 (página 1097)**

1. -17 3. $\cos(u - v)$ 5. $x = \frac{2}{9}u + \frac{5}{9}v, y = -\frac{1}{9}u + \frac{2}{9}v; \frac{1}{9}$
 7. $x = \frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}}; \frac{1}{4\sqrt{v^2 - u^2}}$ 9. 5 11. $\frac{1}{v}$

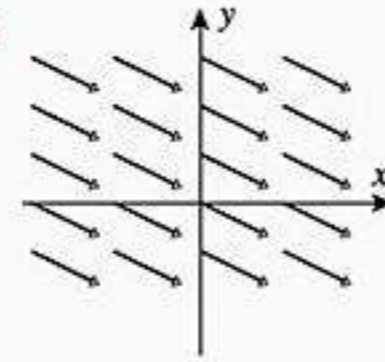
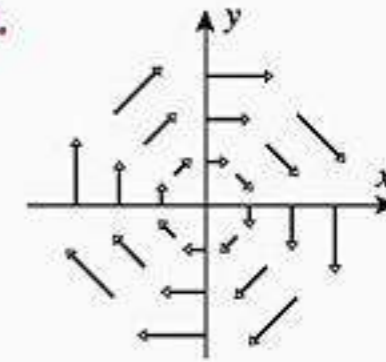
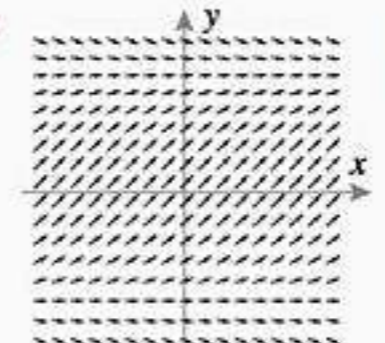


13. $\frac{3}{2} \ln 3$ 19. $1 - \frac{1}{2} \sin 2$ 21. 96π 23. $\frac{\pi}{24}(1 - \cos 1)$ 25. $\frac{192}{5}\pi$
 27. $u = \text{arc cotg}(x/y), v = \sqrt{x^2 + y^2}$
 29. $u = (3/7)x - (2/7)y; v = (-1/7)x + (3/7)y$ 31. $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$
 33. $\frac{1}{2} [\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{\pi}{4}]$ 35. $\frac{35}{256}$ 37. $2 \ln 3$ 39. $\frac{4}{35}\pi a^3$ 43. $21/8$

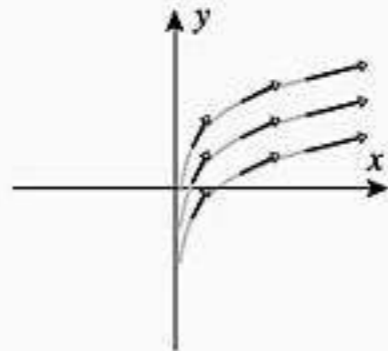
► **Capítulo 15. Exercícios de Revisão (página 1100)**

3. (a) $\iint_R dA$ (b) $\iiint_G dV$ (c) $\iint_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dA$
 7. $\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$
 9. (a) $a=2, b=1, c=1, d=2$ (b) 3
 11. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 15. 
 17. $\frac{1}{3}(1 - \cos 64)$
 19. a^2
 21. $\frac{3}{2}$
 23. 32π
 25. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^a \rho^4 \text{sen}^3 \phi d\rho d\phi d\theta$
 (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}a/2} \int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r^3 dz dr d\theta$
 (c) $\int_{-\sqrt{3}a/2}^{\sqrt{3}a/2} \int_{-\sqrt{(3a^2/4) - x^2}}^{\sqrt{(3a^2/4) - x^2}} \int_{\sqrt{x^2 + y^2}/\sqrt{3}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dz dy dx$
 27. $\frac{\pi a^3}{9}$ 29. $\frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$ 31. $2x + 4y - z = 5$ 33. $(\frac{8}{3}, 0)$
 35. $(0, 0, h/4)$ 37. $\frac{3}{4}a$ 39. (a) $\frac{1}{2(u+w)}$ (b) $\frac{1}{2}(7 \ln 7 - \ln 84, 375)$

► **Exercícios 16.1 (página 1110)**

1. (a) III (b) IV 3. (a) verdadeira (b) verdadeira (c) verdadeira
 5.  7. 
 9.  11. (a) todos x, y (b) todos x, y
 13. $\text{div } \mathbf{F} = 2x + y, \text{rot } \mathbf{F} = z\mathbf{i}$

15. $\text{div } \mathbf{F} = 0$, $\text{rot } \mathbf{F} = (40x^2z^4 - 12xy^3)\mathbf{i} + (14y^3z + 3y^4)\mathbf{j} - (16xz^5 + 21y^2z^2)\mathbf{k}$
 17. $\text{div } \mathbf{F} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ 19. $4x$ 21. 0
 23. $(1+y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
 35. $\nabla \cdot (k\mathbf{F}) = k\nabla \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$,
 $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla\phi \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ 43. (b) $x^2 + y^2 = K$
 45. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $y = \ln x + K$



15. (a) $\frac{\sqrt{29}}{16} \int_0^6 \int_0^{(12-2x)/3} xy(12-2x-3y) dy dx$
 (b) $\frac{\sqrt{29}}{4} \int_0^3 \int_0^{(12-4z)/3} yz(12-3y-4z) dy dz$
 (c) $\frac{\sqrt{29}}{9} \int_0^3 \int_0^{6-2z} xz(12-2x-4z) dx dz$
 17. $\frac{18\sqrt{29}}{5}$
 19. $\int_0^4 \int_1^2 y^3 z \sqrt{4y^2 + 1} dy dz$; $\frac{1}{2} \int_0^4 \int_1^4 xz \sqrt{1+4x} dx dz$
 21. $\frac{391\sqrt{17}}{15} - \frac{5\sqrt{5}}{3}$ 23. $\frac{4}{3}\pi\delta_0$ 25. $\frac{1}{4}(37\sqrt{37} - 1)$ 27. $M = \delta_0 S$
 29. $(0, 0, 149/65)$ 31. $\frac{93}{\sqrt{10}}$ 33. $\frac{\pi}{4}$ 35. $57,895751$

► **Exercícios 16.2 (página 1126)**

1. (a) 1 (b) 0 3. 16
 7. (a) $-\frac{11}{108}\sqrt{10} - \frac{1}{36}\ln(\sqrt{10}-3) - \frac{4}{27}$ (b) 0 (c) $-\frac{1}{2}$
 9. (a) 3 (b) 3 (c) 3 (d) 3 11. 2 13. $\frac{13}{20}$ 15. $1-\pi$ 17. 3
 19. $-1 - (\pi/4)$ 21. $1 - e^3$
 23. (a) $63\sqrt{17}/64 + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17}) - \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (b) $1/2 - \pi/4$
 25. (a) -1 (b) -2 27. $\frac{5}{2}$ 29. 0 31. $1 - e^{-1}$ 33. $6\sqrt{3}$
 35. $5k \arctan 3$ 37. $\frac{3}{5}$ 39. $\frac{27}{28}$ 41. $\frac{3}{4}$ 43. $\frac{17\sqrt{17}-1}{4}$
 45. (b) $S = \int_C z(t)dt$ (c) 4π 47. $\lambda = -12$

► **Exercícios 16.3 (página 1137)**

1. conservativo, $\phi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$ 3. não conservativo
 5. conservativo, $\phi = x \cos y + y \sin x + K$
 7. (b) 13 9. -6 11. $9e^2$ 13. 32 15. $W = -\frac{1}{2}$
 17. $W = 1 - e^{-1}$ 19. $\ln 2 - 1$ 21. $\approx -0,307$ 23. não
 29. $h(x) = Ce^x$
 31. (a) $W = -\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{16}}$ (b) $W = -\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) $W = 0$

► **Exercícios 16.4 (página 1145)**

1. 0 3. 0 5. 0 7. 8π 9. -4 11. -1 13. 0
 15. (a) $\approx -3,550999378$ (b) $\approx -0,269616482$ 17. $\frac{3}{8}a^2\pi$ 19. $\frac{1}{2}abt_0$
 23. Fórmula (1) da Seção 7.1 do Volume 1. 25. $\frac{250}{3}$ 27. $-3\pi a^2$
 29. $(\frac{8}{15}, \frac{8}{21})$ 31. $(0, \frac{4a}{3\pi})$ 33. o círculo $x^2 + y^2 = 1$ 35. 69

► **Exercícios 16.5 (página 1153)**

1. $\frac{15}{2}\pi\sqrt{2}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 5. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 7. 9
 9. (b) $2\pi \left[1 - \sqrt{1-r^2} + \frac{r^2}{2} \right] \rightarrow 3\pi$ quando $r \rightarrow 1^-$
 (c) $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$,
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2$;
 $\iint (1+z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \phi) \text{sen } \phi d\phi d\theta = 3\pi$
 13. (c) $4\pi/3$

► **Exercícios 16.6 (página 1162)**

1. (a) nulo (b) nulo (c) positivo (d) negativo (e) nulo (f) nulo
 3. (a) positivo (b) nulo (c) positivo (d) nulo (e) positivo (f) nulo
 5. (a) $n = -\cos v \mathbf{i} - \text{sen } v \mathbf{j}$ (b) para dentro 7. 2π 9. $\frac{14\pi}{3}$ 11. 0
 13. 18π 15. $\frac{4}{9}$ 17. (a) 8 (b) 24 (c) 0 19. 3π
 21. (a) $0 \text{ m}^3/\text{s}$ (d) $0 \text{ kg}/\text{s}$ 23. (b) $32/3$
 25. (a) $4\pi a^{4/3}$ (b) $k = -3$

► **Exercícios 16.7 (página 1172)**

1. 3 3. $\frac{4\pi}{3}$ 5. 12 7. $3\pi a^2$ 9. 180π 11. $\frac{192\pi}{5}$ 13. $\frac{\pi}{2}$
 15. $\frac{4608}{35}$ 17. 135π 29. nenhuma fonte ou poço
 31. fonte em todos os pontos exceto na origem, nenhum poço 33. $\frac{7\pi}{4}$

► **Exercícios 16.8 (página 1179)**

1. $\frac{3}{2}$ 3. 0 5. 2π 7. 16π 9. 0 11. πa^2
 13. (a) $\frac{3}{2}$ (b) -1 (c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ 19. $-\frac{5\pi}{4}$

► **Capítulo 16 Exercícios de Revisão (página 1181)**

3. $\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2}}\mathbf{i} + \frac{2-y}{\sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2}}\mathbf{j}$ 5. $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 7. (a) $\int_a^b \left[f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt$
 (b) $\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$
 11. 0 13. $-7/2$ 17. (a) $h(x) = Cx^{-3/2}$ (b) $g(y) = Cy^3$
 23. $\iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|r_u \times r_v\| du dv$ 25. sim 27. 2π
 31. -8π 35. (a) conservativo (b) não conservativo

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 9

Página 583: fotografia de Milton Bell, Texas Archeological Research Laboratory, University of Texas em Austin. Página 608: Patrick Mesner/Liaison Agency, Inc./Getty Images.

Capítulo 10

Página 626: Taxi/Getty Images.

Capítulo 11

Página 719: Dwight R. Kuhn. Página 728 (esquerda): Thomas Taylor/Photo Researchers. Página 728 (centro): Rex Ziak/Stone/Getty Images. Página 728 (direita): cortesia da NASA & The Hubble Heritage Team. Página 761: John Mead/Science Photo Library/Photo Researchers. Página 779: Science Photo Library/Photo Researchers.

Capítulo 12

Página 788: Craig Aurness/Corbis Images. Página 822: World Perspectives/Stone/Getty Images.

Capítulo 13

Página 861: cortesia de Cedar Point. Página 862: Ken Edward/Biografix/Photo Researchers.

Capítulo 14

Página 926: Stone/Getty Images. Página 956: Leverett Bradley/Stone/Getty Images.

Capítulo 15

Página 1020: Stone/Getty Images.

Capítulo 16

Página 1104: imagens e animação produzida por Hal Pierce, Laboratory for Atmospheres, NASA Goddard Space and Flight Center.